

Vaardigheden 6

Vergelijkingen en ongelijkheden

- 1 a** $3x + 1 = -3x + 6$
 $6x = 5$
 $x = \frac{5}{6}$
- b** $7 - 3k = 2(k + 5)$
 $7 - 3k = 2k + 10$
 $-5k = 3$
 $k = -\frac{3}{5}$
- c** $3(2r - 7) = 33$
 $6r - 21 = 33$
 $6r = 54$
 $r = 9$
- d** $4(b - 10) = 8(b + 4)$
 $4b - 40 = 8b + 32$
 $-4b = 72$
 $b = -18$
- e** $13 + 8g = 15 - 2g$
 $10g = 2$
 $g = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
- f** $45 + h = 3(h + 1)$
 $45 + h = 3h + 3$
 $-2h = -42$
 $h = 21$
- 2 a** $(x + 5)(x - 3) = 0$
 $x + 5 = 0$ of $x - 3 = 0$
 $x = -5$ of $x = 3$
- b** $(x + 5)(2x - 5) = 0$
 $x + 5 = 0$ en $2x - 5 = 0$
 $x = -5$ of $2x = 5$
 $x = -5$ of $x = 2\frac{1}{2}$
- c** $(x + 3)^2 = 81$
 $x + 3 = 9$ of $x + 3 = -9$
 $x = 6$ of $x = -12$
- d** $\frac{1}{4}(4x - 1)^2 = 1$
 $(4x - 1)^2 = 4$
 $4x - 1 = 2$ of $4x - 1 = -2$
 $4x = 3$ of $4x = -1$
 $x = \frac{3}{4}$ of $x = -\frac{1}{4}$
- e** $x^2 + 11x + 10 = 0$
 $(x + 10)(x + 1) = 0$
 $x + 10 = 0$ of $x + 1 = 0$
 $x = -10$ of $x = -1$
- f** $(x - 4)(x + 4) = 9$
 $x^2 - 16 = 9$
 $x^2 = 25$
 $x = -5$ of $x = 5$
- 3 a** $f(2) < g(2)$ want bij $x = 2$ ligt de grafiek van f onder de grafiek van g .
- b** $f(0) > g(0)$ want bij $x = 0$ ligt de grafiek van f boven de grafiek van g .
- c** $f(x) > g(x)$ als $-1 < x < 1$ of als $x > 4$.
 $f(x) \leq g(x)$ als $x \leq -1$ of als $1 \leq x \leq 4$.
- 4 a** In de snijpunten geldt $f(x) = g(x)$ dus moet gelden $2x^2 + 3x - 5 = 7x + 1$.
 $2x^2 - 4x - 6 = 0$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x - 3)(x + 1) = 0$
 $x = 3$ of $x = -1$
 Of met de rekenmachine:
 Invoer: $y_1 = 2x^2 + 3x - 5$ en $y_2 = 7x + 1$
 Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 25$
 Optie: snijpunten
 De oplossingen zijn $x = -1$ of $x = 3$.
- b** De dalparabool en lijn snijden elkaar bij $x = -1$ en $x = 3$.
 De grafiek van f ligt boven die van g als $x < -1$ of als $x > 3$.
- c** $f(x) > g(x)$ dus $2x^2 + 3x - 5 > 7x + 1$.

5 a $3x + 10 \leq -6$

$$3x \leq -16$$

$$x \leq -5\frac{1}{3}$$

b $12 - \frac{2}{3}x > 4x - 16$

$$-4\frac{2}{3}x > -28$$

$$4\frac{2}{3}x < 28$$

$$x < 6$$

c $5 \cdot x^3 \cdot \sqrt{x} = 0,5x + 2$

Met de rekenmachine:

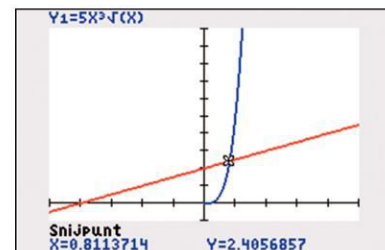
Invoer: $y_1 = 5 \cdot x^3 \cdot \sqrt{x}$ en $y_2 = 0,5x + 2$

Venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-1 \leq y \leq 10$

Optie: snijpunt

De oplossing is $x \approx 0,81$.

Aflezen van de ongelijkheid en bedenken dat $\sqrt{x}$ alleen bestaat als $x \geq 0$ geeft de oplossing: $0 \leq x < 0,81$.



d $-3x^2 + 8x = 11 - 6x$

Met de rekenmachine:

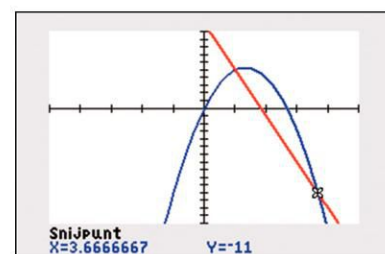
Invoer: $y_1 = -3x^2 + 8x$ en $y_2 = 11 - 6x$

Venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-15 \leq y \leq 10$

Optie: snijpunten

De oplossingen zijn $x = 1$ en $x \approx 3,67$.

Aflezen van de ongelijkheid geeft de oplossing: $1 < x < 3,67$.



e $5 - 2(3 - x) \geq 3(x + 3)$

$$5 - 6 + 2x \geq 3x + 9$$

$$-1 + 2x \geq 3x + 9$$

$$-x \geq 10$$

$$x \leq -10$$

f $0,0343 \cdot x^{1,083} > 350$

Met de rekenmachine:

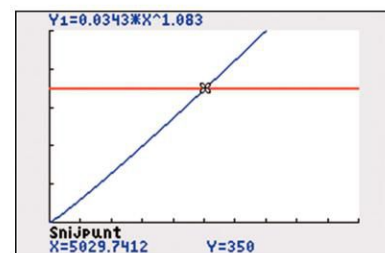
Invoer: $y_1 = 0,0343 \cdot x^{1,083}$ en $y_2 = 350$

Venster: $0 \leq x \leq 10000$, $0 \leq y \leq 500$

Optie: snijpunten

De oplossing is $x \approx 5029,7$.

Aflezen van de ongelijkheid geeft de oplossing $x > 5029,7$.



Groefactoren en percentages

6 a $1,2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1,2} \approx 1,095$

b $1,2^{\frac{1}{60}} = \sqrt[60]{1,2} \approx 1,00304$

c $1,2^{24} \approx 79,5$

7 a Afname van 1,7% per halve dag, dus groefactor 0,983 per halve dag.

De groefactor per dag is dan $0,983^2 = 0,966289$.

Dit komt overeen met een afname van 3,3711% per dag.

b Toename van 3% per uur, dus groefactor 1,03 per uur.

De groefactor per dag is dan $1,03^{24} = 2,0327\dots$

Dit komt overeen met een toename van ongeveer 103,3% per dag.

Vaardigheden 6

- c** Afname van 8,7% per week, dus groeifactor 0,913 per week.
De groeifactor per dag is dan $0,913^{\frac{1}{7}} = 0,98707\dots$.
Dit komt overeen met een afname van 1,29% per dag.
- d** Afname van 0,02% per 10 minuten, dus groeifactor 0,9998 per 10 minuten.
De groeifactor per dag is dan $(0,9998^6)^{24} = 0,97160\dots$.
Dit komt overeen met een afname van 2,84% per dag.
- e** Toename van 0,7% per uur, dus groeifactor 1,007 per uur.
De groeifactor per dag is dan $1,007^{24} = 1,18224\dots$.
Dit komt overeen met een toename 18,22% per dag.
- 8 a** $B = 800 \cdot 1,015^t$
b $B(15) = 800 \cdot 1,015^{15} \approx 1000,19$ euro
- 9** Stel de groeifactor per uur is g .
Dan is $g^{3,5} = 2$ dus is $g = 2^{\frac{1}{3,5}} = 2^{\frac{2}{7}}$.
De formule is $N = 45 \cdot 2^{\frac{2}{7}t}$.

Substitueren en herleiden

- 10 a** $q = 2(p + 2) - 5$
 $q = 2p + 4 - 5$
 $q = 2p - 1$
b $q = (p - 1)^2 - 2(p - 1) + 8$
 $q = p^2 - 2p + 1 - 2p + 2 + 8$
 $q = p^2 - 4p + 11$
c $q = 2(3 - 2p)^2 - (3 - 2p) + 7$
 $q = 2(9 - 12p + 4p^2) - 3 + 2p + 7$
 $q = 18 - 24p + 8p^2 - 3 + 2p + 7$
 $q = 8p^2 - 22p + 22$
- 11 a** $N = (1 - 9)(0,5t + 2)$
 $N = -8(0,5t + 2)$
 $N = -4t - 16$
b $N = -4t - 16$
 $-4t - 16 = N$
 $-4t = N + 16$
 $t = -\frac{1}{4}N - 4$
- 12 a** Uit $t + 2x = 1$ volgt $t = 1 - 2x$.
b $y \cdot (3(1 - 2x) - 7) = -12$
 $y \cdot (3 - 6x - 7) = -12$
 $y \cdot (-4 - 6x) = -12$
 $y = \frac{-12}{-4 - 6x}$
 $y = \frac{12}{4 + 6x}$
 $y = \frac{6}{2 + 3x}$

Gebroken formules

$$13 \text{ a } 3 \cdot \frac{5}{18} = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{18} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$\text{b } \frac{-12a^2}{b^3} \cdot \frac{7b}{6a} = \frac{-84a^2b}{6ab^3} = \frac{-14a}{b^2}$$

$$\text{c } \frac{60p}{3p-9} \cdot \frac{p-3}{5} = \frac{60p(p-3)}{3(p-3) \cdot 5} = \frac{60p}{15} = 4p$$

$$\text{d } 3q^7 \cdot \frac{2}{q^2} \cdot \frac{1}{12q^3} = \frac{3q^7}{1} \cdot \frac{2}{q^2} \cdot \frac{1}{12q^3} = \frac{6q^7}{12q^5} = \frac{q^2}{2} = \frac{1}{2}q^2$$

14 a Bij de breuk $\frac{4}{p}$ zijn teller en noemer met $p+1$ vermenigvuldigd en bij de

breuk $\frac{3}{p+1}$ zijn teller en noemer met p vermenigvuldigd.

b De tellers zijn samen genomen: $4(p+1) + 3p = 4p + 4 + 3p = 7p + 4$ en in de noemer zijn de haakjes weggewerkt: $p(p+1) = p^2 + p$

$$15 \text{ a } k = \frac{6}{p} + \frac{1}{5}$$

$$k = \frac{6 \cdot 5}{p \cdot 5} + \frac{1 \cdot p}{5 \cdot p}$$

$$k = \frac{30}{5p} + \frac{p}{5p}$$

$$k = \frac{30+p}{5p}$$

$$\text{b } q = \frac{1}{a} - \frac{8}{a+5}$$

$$q = \frac{1 \cdot (a+5)}{a(a+5)} - \frac{8 \cdot a}{a(a+5)}$$

$$q = \frac{a+5-8a}{a(a+5)}$$

$$q = \frac{5-7a}{a^2+5a}$$

$$\text{c } T = \frac{b}{1-b} + \frac{3}{1+b}$$

$$T = \frac{b \cdot (1+b)}{(1-b)(1+b)} + \frac{3 \cdot (1-b)}{(1-b)(1+b)}$$

$$T = \frac{b+b^2+3-3b}{(1-b)(1+b)}$$

$$T = \frac{b^2-2b+3}{1-b^2}$$

$$\text{d } H = \frac{5}{m} + \frac{3m+1}{2m}$$

$$H = \frac{2 \cdot 5}{2m} + \frac{3m+1}{2m}$$

$$H = \frac{10+3m+1}{2m}$$

$$H = \frac{11+3m}{2m}$$

$$16 \quad t = \frac{8}{p-1}$$

$$t(p-1) = 8$$

$$p-1 = \frac{8}{t}$$

$$p = \frac{8}{t} + 1$$

Vaardigheden 6

- 17** Uit $L \cdot B = 30$ volgt $B = \frac{30}{L}$. De variabele B hierdoor vervangen geeft:

$$K = \frac{18\,547}{L} + 56,6L + \frac{5279}{\frac{30}{L}} + 90,8 \cdot \frac{30}{L}$$

$$K = \frac{18\,547}{L} + 56,6L + \frac{5279 \cdot L}{30} + \frac{2724}{L}$$

$$K = 56,6L + \frac{5279}{30} \cdot L + \frac{18\,547}{L} + \frac{2724}{L}$$

$$K = \left(56,6 + \frac{5279}{30}\right) \cdot L + \frac{21\,271}{L}$$

$$K = 232\frac{17}{30} \cdot L + \frac{21\,271}{L}$$

18 a $T = 6 + \frac{1}{P}$

$$T - 6 = \frac{1}{P}$$

$$P = \frac{1}{T - 6}$$

b $T = \frac{-8}{0,5P}$

$$T = \frac{-16}{P}$$

$$P = \frac{-16}{T}$$

c $T = \frac{-3}{4P + 8}$

$$4P + 8 = \frac{-3}{T}$$

$$4P = \frac{-3}{T} - 8$$

$$P = \frac{-3}{4T} - 2$$

d $T \cdot (P + 3) = 11$

$$P + 3 = \frac{11}{T}$$

$$P = \frac{11}{T} - 3$$

e $6 = \frac{T}{\sqrt{P}}$

$$\sqrt{P} = \frac{T}{6}$$

$$P = \frac{T^2}{6^2} = \frac{1}{36}T^2$$

f $T = 4 - \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{P}}$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{P}} = 4 - T$$

$$\frac{1}{4 - T} = \frac{1}{2}\sqrt{P}$$

$$\frac{2}{4 - T} = \sqrt{P}$$

$$P = \left(\frac{2}{4 - T}\right)^2$$

$$P = \frac{4}{(4 - T)^2}$$

Vaardigheden 7

Functies met machten

- 1 a $N(t) = t^2 \cdot t^3 = t^{2+3} = t^5$, dus $m = 5$.
 b $N(t) = t^{1,3} \cdot t^{2,5} \cdot t = t^{1,3+2,5+1} = t^{4,8}$, dus $m = 4,8$.
 c $N(t) = \frac{t^{12}}{t^3} = t^{12-3} = t^9$, dus $m = 9$
 d Is niet in deze vorm te schrijven.
 e $N(t) = (t^3)^{2,6} = t^{3 \times 2,6} = t^{7,8}$, dus $m = 7,8$.
 f $N(t) = \frac{(t^{1,5})^4}{t^2 \cdot t} = \frac{t^{1,5 \times 4}}{t^{2+1}} = \frac{t^6}{t^3} = t^{6-3} = t^3$, dus $m = 3$.

- 2 a $f(v) = v^3 \cdot v^{6,5} + 4v^{10} \cdot v^{-0,5}$
 $f(v) = v^{9,5} + 4v^{9,5}$
 $f(v) = 5v^{9,5}$
 b $H(p) = 2p \cdot p^2 + 5p^{1,3} - 6p^3$
 $H(p) = 2p^3 + 5p^{1,3} - 6p^3$
 $H(p) = -4p^3 + 5p^{1,3}$
 c $m(t) = 3t \cdot (t^{1,6})^2 - 7,8t^{3,1} \cdot t$
 $m(t) = 3t \cdot t^{3,2} - 7,8t^{4,1}$
 $m(t) = 3t^{4,2} - 7,8t^{4,1}$
 d $h(a) = \frac{a^2 \cdot 9a^3}{a^{6,4}}$
 $h(a) = \frac{9a^5}{a^{6,4}}$
 $h(a) = 9a^{-1,4}$
 e $N(d) = 15d^3 \cdot 2d^{1,5} \cdot 4\sqrt{d}$
 $N(d) = 120d^{4,5} \cdot d^{\frac{1}{2}}$
 $N(d) = 120d^5$
 f $K(q) = \frac{18q^{3,2} + 7q^{4,9} - 6,4q + 78}{q}$
 $K(q) = \frac{18q^{3,2}}{q} + \frac{7q^{4,9}}{q} - \frac{6,4q}{q} + \frac{78}{q}$
 $K(q) = 18q^{2,2} + 7q^{3,9} - 6,4 + 78q^{-1}$
 g $W(p) = \frac{-6p^{3,8} + 9p^{2,3} - 2p + 7,3}{10p}$
 $W(p) = \frac{-6p^{3,8}}{10p} + \frac{9p^{2,3}}{10p} - \frac{2p}{10p} + \frac{7,3}{10p}$
 $W(p) = -0,6p^{2,8} + 0,9p^{1,3} - 0,2 + 0,73p^{-1}$

Redeneren met formules

- 3 a Bij $t = 0$ is $P = 40 + 10 \cdot 0,5^0 = 50$.
 Als t heel groot wordt, nadert $10 \cdot 0,5^t$ naar nul.
 Dus P neemt af en nadert naar 40.
 b Bij $t = 0$ is $P = 560 - 13 \cdot 0,95^0 = 547$.
 Als t heel groot wordt, nadert $13 \cdot 0,95^t$ naar nul.
 Dus P neemt toe en nadert naar 560.

Vaardigheden 7

- c** Bij $t = 0$ is $P = 200 - \frac{10}{5 + 0,3^0} = 200 - \frac{10}{6} = 198\frac{1}{3}$.
 Als t heel groot wordt, nadert $0,3^t$ naar nul.
 $\frac{10}{5 + 0,3^t}$ nadert naar 2.
 Dus P neemt af en nadert naar $200 - 2 = 198$.
- d** Bij $t = 0$ is $P = 250(2 - 65 \cdot 1,5^0) = 250 \cdot -63 = -15750$.
 Als t heel groot wordt, nadert $1,5^{-t} = \frac{1}{1,5^t}$ naar nul en dus $65 \cdot 1,5^{-t}$ ook.
 Dus P neemt toe en nadert naar $250 \times 2 = 500$.
- e** Bij $t = 0$ is $P = 750 + 8(5 \cdot 0,2^t - 7) = 734$.
 Als t heel groot wordt, nadert $0,2^t$ naar nul.
 $5 \cdot 0,2^t - 7$ nadert naar -7 .
 Dus P neemt af en nadert naar $750 + 8 \times -7 = 694$.
- f** Bij $t = 0$ is $P = 1000 - \frac{235}{3,5 + 1,2^0} = 1000 - \frac{235}{4,5} = 947\frac{7}{9}$.
 Als t heel groot wordt, wordt $3,5 + 1,2^t$ ook heel groot.
 $\frac{235}{3,5 + 1,2^t}$ nadert dan naar 0.
 Dus P neemt toe en nadert naar $1000 - 0 = 1000$.
- 4 a** invullen van $t = 0$ geeft $T = 6 - \frac{24}{\sqrt{3 \cdot 0 + 1}} = 6 - \frac{24}{1} = -18$, dus -18°C .
- b** Als t toeneemt, wordt $\sqrt{3t + 1}$ steeds groter.
 $\frac{24}{\sqrt{3t + 1}}$ wordt dan steeds kleiner.
 Er wordt dus een steeds kleinere waarde van 6 afgetrokken.
 Dus T neemt toe.
- c** $\frac{24}{\sqrt{3t + 1}}$ nadert naar nul bij toenemende waarde van t .
 Dus T neemt toe en nadert naar $6 - 0 = 6^\circ\text{C}$, de temperatuur van de koelcel.
- 5 a** Als t onbeperkt toeneemt dan nadert $0,4^t$ naar nul.
 Dus de noemer $4 + 200 \cdot 0,4^t$ wordt steeds kleiner.
 Dus zal de uitkomst van $\frac{10000}{4 + 200 \cdot 0,4^t}$ steeds groter worden.
 Dit betekent dat de grafiek van G stijgend is bij toenemende t .
- b** Dus de noemer $4 + 200 \cdot 0,4^t$ wordt steeds kleiner en nadert naar $4 + 0 = 4$.
 Dus zal de uitkomst van $\frac{10000}{4 + 200 \cdot 0,4^t}$ naderen naar $\frac{10000}{4} = 2500$.
 Het gewicht van de kippen nadert dus de grenswaarde 2500 gram.

Hellingen

- 6 a** $\frac{A(9) - A(1)}{9 - 1} = \frac{6\sqrt{9} - 2 \cdot 9 - 1 - (6\sqrt{1} - 2 \cdot 1 - 1)}{8} =$
 $\frac{6 \cdot 3 - 18 - 1 - (6 - 2 - 1)}{8} = \frac{-1 - 3}{8} = -\frac{1}{2}$
 De gemiddelde toename van A over het interval $[1, 9]$ is $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{b } \frac{A(4) - A(0)}{4 - 0} &= \frac{6\sqrt{4} - 2 \cdot 4 - 1 - (6\sqrt{0} - 2 \cdot 0 - 1)}{4} = \\ \frac{6 \cdot 2 - 8 - 1 - (-1)}{4} &= \frac{3 + 1}{4} = 1 \end{aligned}$$

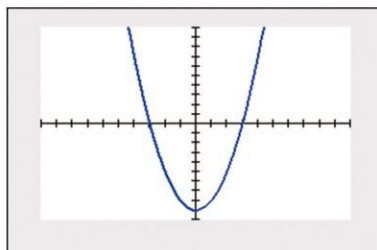
Het differentiequotiënt van A over het interval $[1, 4]$ is 1.

$$\begin{aligned} \text{c } \frac{A(1,001) - A(1)}{1,001 - 1} &= \frac{6\sqrt{1,001} - 2 \cdot 1,001 - 1 - (6\sqrt{1} - 2 \cdot 1 - 1)}{0,001} \approx \\ \frac{6,00299925 - 2,002 - 1 - 3}{0,001} &= \frac{0,00099925}{0,001} = 0,99925 \end{aligned}$$

De helling in het punt $(1, 3)$ zal 1 zijn.

- 7 a** Bij $t = -5$ is de afgeleide negatief, dus daalt de grafiek.
 Bij $t = -4$ is de helling positief, dus stijgt de grafiek.
 Tussen deze waarden gaat de grafiek over van dalen naar stijgen en is er een minimum functiewaarde. Daarbij hoort in de grafiek een top.
- b** Bij $t = -2$ is de helling positief, dus stijgt de grafiek.
 Bij $t = -1$ is de afgeleide negatief, dus daalt de grafiek.
 De grafiek heeft dus ook een top tussen $t = -2$ en $t = -1$.
- 8 a** Uit $f(x) = 5x^3 + 7x - 2$ volgt $f'(x) = 5 \cdot 3x^2 + 7 = 15x^2 + 7$.
b Uit $Q(t) = 12 - 6t + 8t^4$ volgt $Q'(t) = -6 + 32t^3$.
c Uit $p(t) = -t(5t - 1) = -5t^2 + t$ volgt $p'(t) = -10t + 1$.
d Uit $R(m) = 4(6m - 3)^2 = 4 \cdot (36m^2 - 36m + 9) = 144m^2 - 144m + 36$ volgt
 $R'(m) = 144 \cdot 2m - 144 = 288m - 144$.
e Uit $K(p) = 2 - 0,8p$ volgt $K'(p) = -0,8$.
f Uit $Q(w) = (4w - 1)(w^5 + 4w) = 4w^6 + 16w^2 - w^5 - 4w$ volgt
 $Q'(w) = 24w^5 + 32w - 5w^4 - 4$.

- 9 a** Uit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x$ volgt $f'(x) = x^2 - 9$.
 $f'(x) = 0$ als $x^2 - 9 = 0$ dus als $x^2 = 9$.
 $f'(x) = 0$ als $x = -3$ of $x = 3$
- b** De extreme waarden zijn:
 maximum $f(-3) = \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 - 9 \cdot -3 = 18$ en
 minimum $f(3) = \frac{1}{3} \cdot (3)^3 - 9 \cdot 3 = -18$.
- c** Voor $x > 3$ is $f'(x) = x^2 - 9$ positief, dus stijgt de grafiek van f .
- d** Plot de grafiek van $f'(x)$ op je rekenmachine.
 Invoer: $y_1 = x^2 - 9$
 Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$
 $f'(x) < 0$ als $-3 < x < 3$.
- e** Dan is $f'(x)$ minimaal.



Vaardigheden 7

Systematisch tellen

- 10 a** Voor de eerste bal heb je keuze uit drie kleuren. Voor de tweede bal heb je nog keuze uit twee kleuren. En voor de derde bal is er slechts één kleur beschikbaar. Dus $3 \times 2 \times 1 = 6$ mogelijke rijtjes.
- b** Je hebt steeds de keuze uit twee kleuren: zwart of wit.
Dus $2 \times 2 \times 2 = 8$ mogelijke rijtjes.
- 11 a** Je hebt steeds de keuze uit drie kleuren: rood, blauw en geel.
Dus zijn er $3 \times 3 \times 3 = 27$ rijtjes mogelijk.
- b** RRG en RRB, RGR en RBR, GRR en BRR.
Er zijn dus zes rijtjes mogelijk.
- c** De rode bal kan op drie verschillende plaatsen liggen R^{**} , $*R^{*}$ en $**R$.
Op elk van de lege posities zijn er twee mogelijkheden, namelijk B of G.
Dus voor de lege posities zijn er $2 \times 2 = 4$ mogelijkheden.
Totaal zijn er dan $3 \times 4 = 12$ mogelijkheden.
- d** Minstens één rode bal betekent:
één rode bal, twee rode ballen of drie rode ballen.
De bijbehorende mogelijkheden zijn achtereenvolgens: 12, 6 en 1.
Totaal zijn er $12 + 6 + 1 = 19$ verschillende rijtjes.
- 12 a** $2 \times 2 \times 2 = 8$
- b** Bij 11d gaat het om tenminste één rode. Als je van het aantal van 11a (het totaal aantal 27) het aantal van 12a (8 geen rode) aftrekt hou je het aantal met tenminste één rode (19) over.
- 13 a** Voor elk blokje zijn drie kleuren beschikbaar.
Er zijn totaal 25 blokjes.
Het aantal verschillende kunstwerken is dus $3^{25} \approx 8,47 \times 10^{11}$.
- b** Voor de acht rode bordjes zijn $\binom{25}{8}$ mogelijkheden.
Voor de zeven gele bordjes zijn dan nog $\binom{17}{7}$ mogelijkheden.
De plaatsen die over zijn, zijn voor de tien blauwe bordjes.
Het aantal mogelijkheden is dus $\binom{25}{8} \times \binom{17}{7} = 1\,081\,575 \times 19\,448 \approx 2,1 \times 10^{10}$.

Vaardigheden 8

Rijen

1 a De toename is steeds één groter.

b $22 + 6 = 28$

$$28 + 7 = 35$$

$$35 + 8 = 43$$

c $u_2 = u_1 + 1 = 7 + 1 = 8$

$$u_3 = u_2 + 2 = 8 + 2 = 10$$

$$u_4 = u_3 + 3 = 10 + 3 = 13$$

$$u_5 = u_4 + 4 = 13 + 4 = 17$$

$$u_6 = u_5 + 5 = 17 + 5 = 22, \text{ klopt}$$

d $v(0) = -3$

$$v(1) = 2 \cdot v(0) + 1 = 2 \times -3 + 1 = -5$$

$$v(2) = 2 \cdot v(1) + 1 = 2 \times -5 + 1 = -9$$

$$v(3) = 2 \cdot v(2) + 1 = 2 \times -9 + 1 = -17$$

$$v(4) = 2 \cdot v(3) + 1 = 2 \times -17 + 1 = -33$$

$$v(5) = 2 \cdot v(4) + 1 = 2 \times -33 + 1 = -65$$

2 a $u(0) = 2$

$$u(1) = 3 \cdot u(0) - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$u(2) = 3 \cdot u(1) - 2 = 3 \cdot 4 - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$u(3) = 3 \cdot u(2) - 2 = 3 \cdot 10 - 2 = 30 - 2 = 28$$

b $v_2 = 1,5 \cdot v_1 = 24$, dus $v_1 = \frac{24}{1,5} = 16$

$$v_2 = 24$$

$$v_3 = 1,5 \cdot v_2 = 1,5 \cdot 24 = 36$$

$$v_4 = 1,5 \cdot v_3 = 1,5 \cdot 36 = 54$$

3 A: er komt steeds 6 bij, dus

$$u(n+1) = u(n) + 6 \text{ met } u(0) = 12$$

B: de volgende term wordt steeds 2 keer groter, dus

$$u(n+1) = 2 \cdot u(n) \text{ met } u(0) = 3$$

C: $25 = 2 \times 12 + 1$ en $51 = 2 \times 25 + 1$ dus

$$u(n+1) = 2 \cdot u(n) + 1 \text{ met } u(0) = 12$$

D: de volgende term wordt steeds $-\frac{1}{2}$ keer groter, dus

$$u(n+1) = -\frac{1}{2} \cdot u(n) \text{ met } u(0) = 320$$

E: er gaat steeds 7 af, dus

$$u(n+1) = u(n) - 7 \text{ met } u(0) = 3$$

4 a Rekenkundige rijen zijn de rijen A en E.

Meetkundige rijen zijn de rijen B en D.

b A: $a = 6$ en $b = 12$, de directe formule is dus $u(n) = 12 + 6n$.

B: $r = 2$ en $b = 3$, de directe formule is dus $u(n) = 3 \cdot 2^n$.

D: $r = -\frac{1}{2}$ en $b = 320$, de directe formule is dus $u(n) = 320 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

E: $a = -7$ en $b = 3$, de directe formule is dus $u(n) = 3 - 7n$.

5 a De rij is een rekenkundige rij want het verschil tussen elke maand is 0,35 euro, dus $a = 0,35$.

Ze begint met 12 euro, dus de beginterm is $B_0 = 12$.

De rij heeft dus als formule $B_n = 12 + 0,35n$.

Een recursieve formule is $B_{n+1} = B_n + 0,35$ met $B_0 = 12$.

- b Het zakgeld is dan met 18 euro toegenomen.

Daar zijn $\frac{18}{0,35} = 51,428\dots$ dus 52 verhogingen voor nodig.

Na 52 maanden zal het zakgeld voor het eerst boven de 30 euro uitkomen.

Rekenmachine

6 a $A(p) = (2p - 75)(3p + 81)$

$$(2p - 75)(3p + 81) = 0$$

$$2p - 75 = 0 \text{ of } 3p + 81 = 0$$

$$2p = 75 \text{ of } 3p = -81$$

$$p = \frac{75}{2} = 37,5 \text{ of } p = \frac{-81}{3} = -27$$

De coördinaten van de snijpunten met de p -as zijn $(37,5; 0)$ en $(-27, 0)$.

b Invoer: $y_1 = (2x - 75)(3x + 81)$

Venster: $-60 \leq x \leq 60, -10\,000 \leq y \leq 10\,000$

Optie: minimum

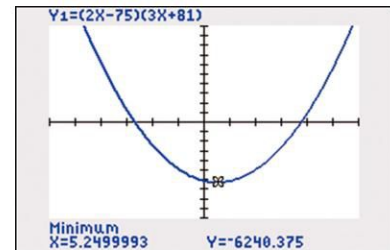
De coördinaten van de top zijn $(5,25; -6240,375)$.

c Invoer: $y_2 = 1000$

Optie: snijpunt (tweemaal)

Dit geeft $x = -29,488\dots$ en $x = 39,988\dots$

De p -coördinaten van de snijpunten zijn $p \approx -29,5$ en $p \approx 40,0$.



7 a $3\sqrt{4x - 1} = 5$

$$\sqrt{4x - 1} = \frac{5}{3}$$

$$4x - 1 = \frac{25}{9}$$

$$4x = \frac{34}{9}$$

$$x = \frac{34}{36} = \frac{17}{18}$$

b $\frac{12}{\sqrt{7 - 2x}} = 4$

$$\sqrt{7 - 2x} = 3$$

$$7 - 2x = 9$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

c Invoer: $y_1 = x - 4$ en $y_2 = x^3 - 3x$

Venster: $-10 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10$

Optie: snijpunt

Dit geeft $x \approx -2,38$, dus $p \approx -2,38$

d $\frac{2x}{x^2 + 5} = \frac{1}{3}$

$$x^2 + 5 = 6x$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x = 1 \text{ en } x = 5$$

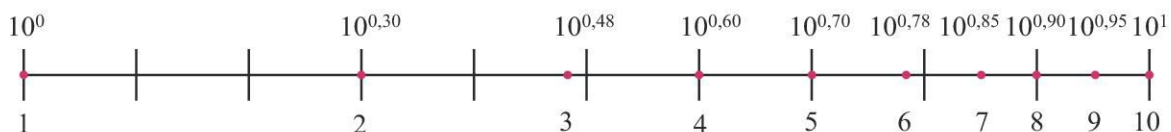
Vaardigheden 8

Logaritmische schalen

- 8 a** $0,1 = 10^{-1}$ en $1 = 10^0$ dus $p = 10^{-0,5} \approx 0,32$
 $10 = 10^1$ en $100 = 10^2$ dus $q = 10^{1,5} \approx 31,62$
- b** De exponent van 10 ligt voor q twee hoger dan voor p , dus q is $10 \times 10 = 100$ keer groter dan p .
- 9** Op de lineaire schaal: $p = -1,2$; op de logschaal $p = 10^{-1,2} \approx 0,06$.
 Op de lineaire schaal: $q = 0,6$; op de logschaal $q = 10^{0,6} \approx 3,98$.
 Op de lineaire schaal: $r = 2,4$; op de logschaal $r = 10^{2,4} \approx 251,19$.

- 10 a** $10^x = 2$ geeft $x = \log(2)$ dus $x = 0,301 \dots$
 Tussen 10^0 en 10^1 zijn 10 stappen.
 Bij elke stap vermenigvuldig je dus met $10^{0,1}$.
 $10^{0,30} = 10^{0,1+0,1+0,1} = 10^{0,1} \cdot 10^{0,1} \cdot 10^{0,1}$
 $10^{0,30}$ ligt drie stappen rechts van 10^0 .
 $10^{0,30}$ en 2 horen dus bij de derde stap, dus bij het derde streepje.

- b** $10^x = 3$ geeft $x = \log(3)$ dus $x = 0,477 \dots$
 Op de puntjes moet dus het getal 0,48 staan.
 Het getal 3 ligt dus op de juiste plek.
- c** $10^x = 4$ dus $x = \log(4) \approx 0,60$, $10^x = 5$ dus $x = \log(5) \approx 0,70$
 $10^x = 6$ dus $x = \log(6) \approx 0,78$, $10^x = 7$ dus $x = \log(7) \approx 0,85$
 $10^x = 8$ dus $x = \log(8) \approx 0,90$, $10^x = 9$ dus $x = \log(9) \approx 0,95$



- 11 a** De grafiek is een rechte lijn, met op de y -as een logaritmische schaalverdeling.
- b** Tussen P en Q liggen $3 - 1 = 2$ stappen.
 De groeifactor per twee stappen is $\frac{6144}{9600} = 0,64$.
 De groeifactor per stap is dus $0,64^{0,5} = 0,8$.
- c** De beginwaarde is $\frac{9600}{0,8} = 12\,000$, dus $y = 12\,000 \cdot 0,8^t$.
- d** Een evenwijdige lijn heeft dezelfde helling als de getekende grafiek.
 De groeifactor van de grafiek door $(1, 50\,000)$ is dan ook 0,8.
- e** Voor de nieuwe formule geldt $50\,000 = B \cdot 0,8^1$, dus $B = \frac{50\,000}{0,8} = 62\,500$.
 De formule bij de grafiek door $(1, 50\,000)$ is $y = 62\,500 \cdot 0,8^t$.

Systematisch tellen

- 12 a** Er zijn 6 verschillende ruiten kaarten en zes verschillende harten kaarten.

Je kunt dus $6 \times 6 = 36$ verschillende tweetallen krijgen.

b +	2	3	4	5	6	7	–	2	3	4	5	6	7
2	4	5	6	7	8	9	2	0	1	2	3	4	5
3	5	6	7	8	9	10	3	1	0	1	2	3	4
4	6	7	8	9	10	11	4	2	1	0	1	2	3
5	7	8	9	10	11	12	5	3	2	1	0	1	2
6	8	9	10	11	12	13	6	4	3	2	1	0	1
7	9	10	11	12	13	14	7	5	4	3	2	1	0

In het schema zie je dat de uitkomst 8 vijf keer voorkomt.

- c** De uitkomst groter dan negen komt 15 keer voor.
d Het verschil 1 komt het meeste voor, namelijk 10 keer.

- 13** De mogelijke volgorden zijn:

114, 141, 411

123, 132, 213, 231, 321, 312

222

Dat zijn 10 manieren om een totaal aantal ogen 6 te krijgen.

- 14 a** Dat kan op $8! = 40\,320$ manieren.

- b** Zo'n drietal kunnen zij op $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ manieren samenstellen.

- 15** Bij de voorste en middelste rij samen zijn $4 + 5 = 9$ posities beschikbaar.

Hiervoor zijn de 9 geplaatste huisjes en het reservehuisje beschikbaar.

De voorste twee rijen kunnen dus op $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 10!$

manieren gevuld worden.

Voor elke positie op de achterste rij zijn alleen de reeds geplaatste 4 huisjes beschikbaar.

De achterste rij kan dus op $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ manieren gevuld worden.

Voor elke manier waarop de voorste twee rijen gevuld kan worden, kan de achterste rij op $4!$ manieren gevuld worden.

In totaal zijn er dus $10! \cdot 4! = 87\,091\,200$ opstellingen mogelijk.

Vaardigheden 9

Machtsformules

- 1 a Substitueer in de formule voor A een 10 keer zo grote waarde, dat is $10A$.

$$B = 12,5 \cdot (10A)^{3,4}$$

$$B = 12,5 \cdot 10^{3,4} \cdot A^{3,4}$$

$$B = 10^{3,4} \cdot 12,5 \cdot A^{3,4}$$

De uitkomst van deze formule is $10^{3,4} \approx 2512$ keer zo groot als de uitkomst van de formule $B = 12,5 \cdot A^{3,4}$. Dus B wordt 2512 keer zo groot.

- b Substitueer in de formule voor A een 10 keer zo grote waarde, dat is $10A$.

$$B = \frac{0,35}{(10A)^{1,34}}$$

$$B = \frac{0,35}{10^{1,34} \cdot A^{1,34}}$$

$$B = 10^{-1,34} \cdot \frac{0,35}{A^{1,34}}$$

De uitkomst van deze formule is $10^{-1,34} \approx 0,046$ keer zo groot als de uitkomst van de formule $B = \frac{0,35}{A^{1,34}}$. Dus B wordt 0,046 keer zo groot.

- c Substitueer in de formule voor A een 10 keer zo grote waarde, dat is $10A$.

$$B = 1,9876 \cdot 10A$$

$$B = 10 \cdot 1,9876A$$

De uitkomst van deze formule is 10 keer zo groot als de uitkomst van de formule $B = 1,9876A$. Dus B wordt 10 keer zo groot.

- d Substitueer in de formule voor A een 10 keer zo grote waarde, dat is $10A$.

$$B = 0,45 \cdot (10A)^{-0,125}$$

$$B = 0,45 \cdot 10^{-0,125} \cdot A^{-0,125}$$

$$B = 10^{-0,125} \cdot 0,45 \cdot A^{-0,125}$$

De uitkomst van deze formule is $10^{-0,125} \approx 0,75$ keer zo groot als de uitkomst van de formule $B = 0,45 \cdot A^{-0,125}$. Dus B wordt 0,75 keer zo groot.

- e Substitueer in de formule voor A een 10 keer zo grote waarde, dat is $10A$.

$$B = \frac{1235}{(10A)^{0,75}}$$

$$B = \frac{1235}{10^{0,75} \cdot A^{0,75}}$$

$$B = 10^{-0,75} \cdot \frac{1235}{A^{0,75}}$$

De uitkomst van deze formule is $10^{-0,75} \approx 0,18$ keer zo groot als de uitkomst van de formule $B = \frac{1235}{A^{0,75}}$. Dus B wordt 0,18 keer zo groot.

- f Substitueer in de formule voor A een 10 keer zo grote waarde, dat is $10A$.

$$B = 12\,500 \cdot (10A)^{\frac{1}{3}}$$

$$B = 12\,500 \cdot 10^{\frac{1}{3}} \cdot A^{\frac{1}{3}}$$

$$B = 10^{\frac{1}{3}} \cdot 12\,500 \cdot 10^{\frac{1}{3}} \cdot A^{\frac{1}{3}}$$

De uitkomst van deze formule is $10^{\frac{1}{3}} \approx 2,15$ keer zo groot als de uitkomst van de formule $B = 12\,500 \cdot A^{\frac{1}{3}}$. Dus B wordt 2,15 keer zo groot.

Vaardigheden 9

$$2 \text{ a } K = 0,32 \cdot \left(\frac{2}{q}\right)^{1,5}$$

$$K = 0,32 \cdot 2^{1,5} \cdot q^{-1,5}$$

$$K \approx 0,91 \cdot q^{-1,5}$$

$$b \quad K = \frac{16}{q} \cdot \left(\frac{1}{2}q\right)^4$$

$$K = \frac{16}{q} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot q^4$$

$$K = 16 \cdot q^{-1} \cdot \frac{1}{16} \cdot q^4$$

$$K = q^3$$

$$c \quad K = -3q^4 \cdot \left(\frac{-2}{q}\right)^3$$

$$K = -3q^4 \cdot \frac{-8}{q^3}$$

$$K = 24 \cdot q^1$$

$$K = 24q$$

$$d \quad K = q^5 \cdot \left(\frac{4}{q^2}\right)^3$$

$$K = q^5 \cdot 4^3 \cdot (q^{-2})^3$$

$$K = q^5 \cdot 4^3 \cdot q^{-6}$$

$$K = 64 \cdot q^{-1}$$

$$e \quad K = \frac{10}{q^5} \cdot \left(\frac{3q}{5}\right)^2$$

$$K = \frac{10}{q^5} \cdot \frac{9q^2}{25}$$

$$K = 10q^{-5} \cdot \frac{9}{25} q^2$$

$$K = 3,6 \cdot q^{-3}$$

$$f \quad K = \frac{10q}{2q^3} \cdot (4q)^2$$

$$K = 5q^{-2} \cdot 16 \cdot q^2$$

$$K = 80 \cdot q^0$$

$$K = 80$$

- 3 a Substitueer voor M een 200 000 keer zo grote waarde, dat is $200\,000M$, in de formule $S = 0,0343 \cdot M^{1,083}$. Dit geeft

$$S = 0,0343 \cdot (200\,000M)^{1,083}$$

$$S = 0,0343 \cdot 200\,000^{1,083} \cdot M^{1,083}$$

$$S = 200\,000^{1,083} \cdot 0,0343 \cdot M^{1,083}$$

De uitkomst van deze formule is $200\,000^{1,083} \approx 550\,827$ keer zo groot als de uitkomst van de formule $S = 0,0343 \cdot M^{1,083}$.

Het skeletgewicht van een olifant is niet 200 000 keer zo zwaar.

- b Het skeletgewicht is 550 827 keer zo groot.

- c Substitueer voor M een 60 keer zo grote waarde, dat is $60M$, in de formule

$$S = 0,0343 \cdot M^{1,083}. \text{ Dit geeft}$$

$$S = 0,0343 \cdot (60M)^{1,083}$$

$$S = 0,0343 \cdot 60^{1,083} \cdot M^{1,083}$$

$$S = 60^{1,083} \cdot 0,0343 \cdot M^{1,083}$$

De uitkomst van deze formule is $60^{1,083} \approx 84$ keer zo groot als de uitkomst van de formule $S = 0,0343 \cdot M^{1,083}$.

De skeletgewichten hebben een verhouding 1 : 84.

Formules herleiden

$$4 \text{ a } y = (p + 4)(p - 5)$$

$$y = p^2 - 5p + 4p - 20$$

$$y = p^2 - p - 20$$

$$b \quad q = (t - 5)(6 - 3t)$$

$$q = 6t - 3t^2 - 30 + 15t$$

$$q = -3t^2 + 21t - 30$$

$$c \quad m = 3n^2 + 6n(2n + 5)$$

$$m = 3n^2 + 12n^2 + 30n$$

$$m = 15n^2 + 30n$$

$$d \quad K = -7x - 4(3x - 2)$$

$$K = -7x - 12x + 8$$

$$K = -19x + 8$$

$$e \quad A = 18k - (17 - 5k)$$

$$A = 18k - 17 + 5k$$

$$A = 23k - 17$$

$$f \quad T = 5r + 3r(2r + 2)$$

$$T = 5r + 6r^2 + 6r$$

$$T = 6r^2 + 11r$$

$$\begin{aligned} 5 \text{ a } 9x + 2y - 10 &= 0 \\ 2y &= -9x + 10 \\ y &= -4\frac{1}{2}x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } 5x &= 4y + 9 \\ 4y &= 5x - 9 \\ y &= 1\frac{1}{4}x - 2\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } 0,4x + 1,2y &= 8 \\ 1,2y &= -0,4x + 8 \\ y &= -\frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \text{ a } P &= 10 \cdot Q^{0,5} \\ Q^{0,5} &= 0,1P \\ Q &= (0,1P)^2 \\ Q &= 0,01 \cdot P^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } P &= 0,04 \cdot Q^{1,25} \\ Q^{1,25} &= \frac{P}{0,04} \\ Q^{1,25} &= 25P \\ Q &= (25P)^{\frac{1}{1,25}} \\ Q &\approx 13,13 \cdot P^{\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } P &= 12 + Q^4 \\ Q^4 &= P - 12 \\ Q &= (P - 12)^{\frac{1}{4}} \\ Q &= \sqrt[4]{P - 12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \text{ a } y \cdot v &= 3 \\ y &= \frac{3}{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } \frac{y}{v} &= 2 \\ y &= 2v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } \frac{9v}{y} &= 15 \\ 15y &= 9v \\ y &= \frac{3}{5}v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 5(x - 2) + 2y &= 15 + 8y \\ 5x - 10 + 2y &= 15 + 8y \\ -6y &= -5x + 25 \\ y &= \frac{5}{6}x - 4\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } 3x + 7y &= 12 - 4x + 5y \\ 2y &= 12 - 7x \\ y &= -3\frac{1}{2}x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } 1\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y &= 2\frac{1}{4} \\ 18x - 4y &= 27 \\ y &= 4\frac{1}{2}x - 6\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } P &= 16 - Q^{0,01} \\ Q^{0,01} &= 16 - P \\ Q &= (16 - P)^{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } P &= 18 + 2 \cdot Q^{0,1} \\ 2 \cdot Q^{0,1} &= P - 18 \\ Q^{0,1} &= \frac{1}{2}P - 9 \\ Q &= \left(\frac{1}{2}P - 9\right)^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } P &= 0,25Q^{25} - 18 \\ 0,25Q^{25} &= P + 18 \\ Q^{25} &= 4P + 72 \\ Q &= (4P + 72)^{\frac{1}{25}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 2y(v + 6) &= -2 \\ 2y &= \frac{-2}{v + 6} \\ y &= \frac{-1}{v + 6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } \frac{3v - 9}{y + 1} &= 3 \\ y + 1 &= \frac{3v - 9}{3} \\ y + 1 &= v - 3 \\ y &= v - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } \frac{y}{y - 1} &= v \\ y &= v(y - 1) \\ y &= vy - v \\ y - vy &= -v \\ y(1 - v) &= -v \\ y &= \frac{-v}{1 - v} \end{aligned}$$

Vaardigheden 9

8 a $Q = 2$ geeft $K = 500 - B \cdot 2^3$

$$K = 500 - 8B$$

$$8B = 500 - K$$

$$B = 62,5 - \frac{1}{8}K$$

b $K = 100$ geeft $100 = 500 - B \cdot Q^3$

$$B \cdot Q^3 = 400$$

$$B = \frac{400}{Q^3}$$

9 $q = -2p + 8$ ofwel $2p = -q + 8$ en $p = -\frac{1}{2}q + 4$.

Dit substitueren geeft $K = \left(-\frac{1}{2}q + 4\right) \cdot q$ dus $K = -\frac{1}{2}q^2 + 4q$.

Differentiëren

10 a $f(x) = 30x + 5x^7 - 30$

$$f'(x) = 30 + 35x^6$$

b $A(t) = 0,1t^{100} - 10 + 0,01t$

$$A'(t) = 10t^{99} + 0,01$$

c $K(q) = -2q + 2 + q$

$$K(q) = -q + 2$$

$$K'(q) = -1$$

d $f(p) = p^2 - 6p + 9$

$$f'(p) = 2p - 6$$

e $W(z) = z^4 - 16$

$$W'(z) = 4z^3$$

f Met de kettingregel:

$$y = u^5 \text{ en } u = t^3 - 4$$

$$\frac{dy}{du} = 5u^4 \text{ en } \frac{du}{dt} = 3t^2$$

$$\frac{dy}{dt} = 5u^4 \cdot 3t^2 = 15t^2 \cdot u^4$$

$$T'(t) = 15t^2 \cdot (t^3 - 4)^4$$

11 a Met de kettingregel:

$$y = \sqrt{u} \text{ en } u = 8t^2 + 6$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \text{ en } \frac{du}{dt} = 16t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 16t = \frac{8t}{\sqrt{u}}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{8t}{\sqrt{8t^2 + 6}}$$

b $A = 3t^{-4}$

$$\frac{dA}{dt} = -12t^{-5}$$

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{12}{t^5}$$

c Met de kettingregel:

$$y = 5u^6 \text{ en } u = 3 - \sqrt{t}$$

$$\frac{dy}{du} = 30u^5 \text{ en } \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\frac{dy}{dt} = 30u^5 \cdot -\frac{1}{2\sqrt{t}} = -\frac{15u^5}{\sqrt{t}}$$

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{15(3 - \sqrt{t})^5}{\sqrt{t}}$$

d Met de kettingregel:

$$y = \frac{7}{2\sqrt{u}} = 3\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } u = t + 2$$

$$\frac{dy}{du} = -1\frac{3}{4}u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -1\frac{3}{4}u^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = -1\frac{3}{4}u^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dA}{dt} = -1\frac{3}{4}(t + 2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{-7}{4(t + 2)\sqrt{t + 2}}$$

- 12 a** $P(t) = t^3 + t^2 - 6t$
 $P'(t) = 3t^2 + 2t - 6$
 De formule van de raaklijn is van de vorm $P = at + b$ waarbij $a = P'(2)$.
 $P'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 6 = 10$
 $P = 10t + b$
 $P(2) = 0$, dus de raaklijn gaat door het punt $(2, 0)$. Dit invullen geeft
 $0 = 10 \times 2 + b$
 $b = -20$
 De formule van de raaklijn is $P = 10t - 20$.
- b** Voor de top geldt $P'(t) = 0$
 Invoer: $y_1 = 3x^2 + 2x - 6$
 Venster: $-5 \leq x \leq 5, -10 \leq y \leq 10$
 Optie: nulpunt
 De coördinaten van de nulpunten van de grafiek zijn $(-1,79; 0)$ en $(1,12; 0)$.
 De grafiek van P heeft een top bij $t \approx -1,79$ en $t \approx 1,12$.
- c** Er geldt $P'(t) = 2$, dus de op te lossen vergelijking is $3t^2 + 2t - 6 = 2$.
 Invoer: $y_1 = 3x^2 + 2x - 6$ en $y_2 = 2$
 Venster: $-5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5$
 Optie: snijpunten
 De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(-2, 2)$ en $(1,33; 2)$.
 De helling is gelijk aan 2 voor $t = -2$ en $t \approx 1,33$.

Exponentiële en logaritmische formules herleiden

- 13 a** $2 - 4 \cdot {}^5\log(3) =$
 ${}^5\log(25) - {}^5\log(3^4) =$
 ${}^5\log\left(\frac{25}{81}\right)$
- b** $1 - \log(2) + \log(5) =$
 $\log(10) - \log(2) + \log(5) =$
 $\log(5) + \log(5) =$
 $\log(25)$
- c** $2 \cdot {}^5\log(3) + {}^5\log(2) =$
 ${}^5\log(9) + {}^5\log(2) =$
 ${}^5\log(18)$
- d** $\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(16) - {}^3\log(12) =$
 ${}^3\log\left(16^{\frac{1}{2}}\right) - {}^3\log(12) =$
 ${}^3\log(4) - {}^3\log(12) =$
 ${}^3\log\left(\frac{1}{3}\right) = -1$
- e** $2 \cdot {}^4\log(x) - \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(x) =$
 ${}^4\log(x^2) - {}^4\log\left(x^{\frac{1}{2}}\right) =$
 ${}^4\log\left(x^{1\frac{1}{2}}\right) =$
 ${}^4\log(x\sqrt{x})$
- f** $\log(2a - 1) + \log(a + 6) =$
 $\log((2a - 1)(a + 6)) =$
 $\log(2a^2 + 12a - a - 6) =$
 $\log(2a^2 + 11a - 6)$
- g** ${}^7\log(4k - 6) - 3 \cdot {}^7\log(k) =$
 ${}^7\log(4k - 6) - {}^7\log(k^3) =$
 ${}^7\log\left(\frac{4k - 6}{k^3}\right)$
- h** $3 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(P) - {}^{\frac{1}{2}}\log(\sqrt{P}) - 3 =$
 ${}^{\frac{1}{2}}\log(P^3) - {}^{\frac{1}{2}}\log\left(P^{\frac{1}{2}}\right) + {}^{\frac{1}{2}}\log(8) =$
 ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(P^{2\frac{1}{2}}\right) + {}^{\frac{1}{2}}\log(8) =$
 ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(8P^{2\frac{1}{2}}\right) =$
 ${}^{\frac{1}{2}}\log(8P^2\sqrt{P})$

Vaardigheden 9

- 14** $f(x) = -1 + \log(3x - 2)$
 $f(x) = \log(0,1) + \log(3x - 2)$
 $f(x) = \log(0,3x - 0,2)$
- 15 a** $g(x) = -3 + {}^2\log(8x^4)$
 $g(x) = {}^2\log(2^{-3}) + {}^2\log(8x^4)$
 $g(x) = {}^2\log(2^{-3} \cdot 8x^4)$
 $g(x) = {}^2\log(x^4)$
- b** $h(x) = 1 + 2 \cdot \log(x) - \log(x^4 + 5)$
 $h(x) = \log(10) + \log(x^2) - \log(x^4 + 5)$
 $h(x) = \log(10x^2) - \log(x^4 + 5)$
 $h(x) = \log\left(\frac{10x^2}{x^4 + 5}\right)$
- 16 a** $v = 50$ invullen geeft $D = 4 + 36 \cdot \log(50) \approx 65$.
 Het maximale geluidsniveau in de bebouwde kom is 65 dB.
- b** De op te lossen vergelijking is $4 + 36 \cdot \log(v) = 75$.
 $36 \cdot \log(v) = 71$
 $\log(v) = \frac{71}{36}$
 $v = 10^{\frac{71}{36}} \approx 93,8$
 Bij een snelheid van 93,8 km per uur is het geluidsniveau 75 dB.
- c** $D = 4 + 36 \cdot \log(v)$
 $D = \log(10\,000) + \log(v^{36})$
 $D = \log(10\,000 \cdot v^{36})$
- 17** In stap 2 is gebruik gemaakt van de rekenregel $(g^p)^q = g^{p \cdot q}$.
 En in stap 3 is gebruik gemaakt van de rekenregel $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$
- 18 a** $N(t) = 3^{3+2t}$
 $N(t) = 3^3 \cdot (3^2)^t$
 $N(t) = 27 \cdot 9^t$
- b** $N(t) = 2 \cdot 9^{\frac{1}{2}t}$
 $N(t) = 2 \cdot \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^t$
 $N(t) = 2 \cdot 3^t$
- c** $N(t) = 5 \cdot 3^{t-2}$
 $N(t) = 5 \cdot 3^t \cdot 3^{-2}$
 $N(t) = 5 \cdot 3^t \cdot \frac{1}{9}$
 $N(t) = \frac{5}{9} \cdot 3^t$
- d** $N(t) = 4^{-2-t}$
 $N(t) = 4^{-2} \cdot 4^{-t}$
 $N(t) = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^t$
- e** $N(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-3t}$
 $N(t) = (3^{-1})^{1-3t}$
 $N(t) = 3^{-1+3t}$
 $N(t) = 3^{-1} \cdot 3^{3t}$
 $N(t) = \frac{1}{3} \cdot (3^3)^t$
 $N(t) = \frac{1}{3} \cdot 27^t$
- f** $N(t) = 16^{\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}}$
 $N(t) = (2^4)^{\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}}$
 $N(t) = 2^{2t-1}$
 $N(t) = 2^{-1} \cdot 2^{2t}$
 $N(t) = \frac{1}{2} \cdot 4^t$

$$\begin{aligned}
 19 \text{ a } v &= 7,2 \cdot 0,6^{t-1} \\
 v &= 7,2 \cdot 0,6^{-1} \cdot 0,6^t \\
 v &= \frac{7,2}{0,6} \cdot 0,6^t \\
 v &= 12 \cdot 0,6^t \\
 v &= 2 \cdot 6 \cdot 0,6^t \\
 v &= 2 \cdot u
 \end{aligned}$$

b De uitdrukkingen voor S en U invullen in $S = 4U$ geeft

$$\begin{aligned}
 10^{0,4t+2} &= 4 \cdot p \cdot 10^{0,4t} \\
 10^2 \cdot 10^{0,4t} &= 4 \cdot p \cdot 10^{0,4t} \\
 10^2 &= 4 \cdot p \\
 4p &= 100 \\
 p &= 25
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20 \text{ a } y &= 3 \cdot 5^{x+2} \\
 5^{x+2} &= \frac{1}{3}y \\
 x+2 &= {}^5\log\left(\frac{1}{3}y\right) \\
 x &= -2 + {}^5\log\left(\frac{1}{3}y\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } y &= 3 \cdot {}^5\log(x+2) \\
 {}^5\log(x+2) &= \frac{1}{3}y \\
 x+2 &= 5^{\frac{1}{3}y} \\
 x &= 5^{\frac{1}{3}y} - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } y &= -1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \\
 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x &= y+1 \\
 \left(\frac{1}{2}\right)^x &= \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \\
 x &= {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d } y &= 2 + 5 \cdot \log\left(\frac{1}{2}x\right) \\
 5 \cdot \log\left(\frac{1}{2}x\right) &= y-2 \\
 \log\left(\frac{1}{2}x\right) &= \frac{1}{5}y - \frac{2}{5} \\
 \frac{1}{2}x &= 10^{\frac{1}{5}y - \frac{2}{5}} \\
 x &= 2 \cdot 10^{\frac{1}{5}y - \frac{2}{5}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e } y &= -12 + 15 \cdot 7^{2x-1} \\
 15 \cdot 7^{2x-1} &= y+12 \\
 7^{2x-1} &= \frac{1}{15}y + \frac{12}{15} \\
 2x-1 &= {}^7\log\left(\frac{1}{15}y + \frac{12}{15}\right) \\
 2x &= 1 + {}^7\log\left(\frac{1}{15}y + \frac{4}{5}\right) \\
 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^7\log\left(\frac{1}{15}y + \frac{4}{5}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f } y &= -4,5 + 1,6 \cdot {}^7\log(4x-3) \\
 1,6 \cdot {}^7\log(4x-3) &= y+4,5 \\
 {}^7\log(4x-3) &= \frac{y+4,5}{1,6} \\
 4x-3 &= 7^{\frac{y+4,5}{1,6}} \\
 4x &= 3 + 7^{\frac{y+4,5}{1,6}} \\
 x &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot 7^{\frac{y+4,5}{1,6}} \\
 x &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot 7^{\frac{5}{8}y + 2\frac{13}{16}}
 \end{aligned}$$

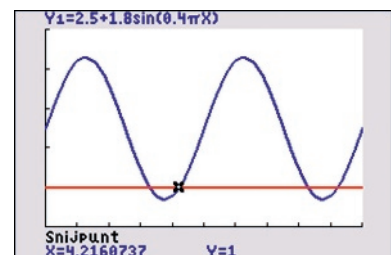
$$\begin{aligned}
 21 \text{ a } {}^2\log(2S) &= 3 - {}^2\log(3T) \\
 {}^2\log(2S) + {}^2\log(3T) &= 3 \\
 {}^2\log(6ST) &= 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } {}^2\log(6ST) &= 3 \\
 6ST &= 2^3 \\
 6ST &= 8 \\
 S \cdot T &= \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3} \\
 a &= 1\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Vaardigheden 9

Periodieke functies

- 22 a** De grafiek van f heeft periode 2, evenwichtsstand 1 en amplitude 4.
De grafiek van g heeft periode 4, evenwichtsstand -3 en amplitude 2.
- b** $f(x) = 1 + 4 \cos\left(\frac{2\pi}{2}x\right)$
 $f(x) = 1 + 4 \cos(\pi x)$ of $f(x) = 1 + 4 \sin\left(\pi\left(x - 1\frac{1}{2}\right)\right)$
 $g(x) = -3 + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{4}x\right)$
 $g(x) = -3 + 2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$ of $g(x) = -3 + 2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 1)\right)$
- 23 a** Periode is $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$, amplitude is 3 en evenwichtsstand is 8.
- b** Periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, amplitude is 450 en evenwichtsstand is 200.
- c** Periode is $\frac{2\pi}{0,1} = 20\pi$, amplitude is 0,3 en evenwichtsstand is $-0,2$.
- 24 a** $a = 5$ en $b = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}\pi} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$
- b** De evenwichtstand is $(-3 + 3) : 2 = 0$ en de amplitude is $3 - 0 = 3$.
 Een halve periode is $\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$, dus de periode is π en $c = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.
 De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{2}\pi$.
 Een functievoorschrift is $f(x) = 3 \sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right)$.
- 25 a** $V(3) = 2,5 + 1,8 \sin(0,4\pi \cdot 3) \approx 1,44$
 Als $t = 3$ bevindt er zich ongeveer 1,44 liter lucht in de longen.
- b** De periode is $\frac{2\pi}{0,4\pi} = 5$ seconden. Er wordt in één minuut $60 : 5 = 12$ keer in- en uitgeademd.
- c** De op te lossen vergelijking is $2,5 + 1,8 \sin(0,4\pi t) = 3$.
 Invoer: $y_1 = 2,5 + 1,8 \sin(0,4\pi t)$ en $y_2 = 3$
 Venster: $0 \leq x \leq 10$, $-2 \leq y \leq 2$
 Optie: snijpunt
 De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(0,22; 3)$, $(2,28; 3)$, $(5,22; 3)$ en $(7,28; 3)$.
 Op de tijdstippen $t \approx 0,22$, $t \approx 2,28$, $t \approx 5,22$ en $t \approx 7,28$ bevindt er zich precies 3 liter lucht in de longen.
- d** De op te lossen ongelijkheid is $2,5 + 1,8 \sin(0,4\pi t) < 1$.
 Invoer: $y_1 = 2,5 + 1,8 \sin(0,4\pi t)$ en $y_2 = 1$
 Venster: $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 5$
 Optie: snijpunt
 Bij $t = 3,283\dots$ en $t = 4,216\dots$ is er precies één liter lucht in de longen aanwezig.
 Gedurende $4,216\dots - 3,283\dots \approx 0,93$ seconden is er minder dan één liter lucht in de longen aanwezig.



Vaardigheden 10

Rijen

- 1 a** Een recursieve formule is $u(n+1) = u(n) + 1,50$ met $u(0) = 50$.
 Of $u(n) = u(n-1) + 1,50$ met $u(0) = 50$.
 Een directe formule is $u(n) = 50 + 1,50 \cdot n$.
- b** De rij is een rekenkundige rij omdat het verschil tussen twee opeenvolgende termen constant is.
- c** $50 + u(1) + u(2) + u(3) + u(4) + u(5) =$
 $50 + 51,50 + 53 + 54,50 + 56 + 57,50 = 322,50$
 In het eerste halfjaar van 2021 ontvangt zij € 322,50.
- d** Een directe formule is $u(n) = 50 \cdot 1,02^n$.
- 2** Petra ontvangt in 2021
 $\sum_{k=0}^{11} u(k) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (u(0) + u(11)) = 6 \cdot (50 + 66,50) = 699$ euro kleedgeld.
 Gerdine ontvangt in 2021
 $\sum_{k=0}^{11} u(k) = \frac{u(12) - u(0)}{r - 1} = \frac{50 \cdot 1,02^{12} - 50 \cdot 1,02^0}{1,02 - 1} = 670,60$ euro kleedgeld.
- 3 a** u_{120} is de 118^e term na u_2 , dus $u_{120} = u_2 + 118a$.
 Het verschil is $\frac{85 - (-269)}{180} = 3$.
 $u_1 = -269 - 3 = -272$
 $u_{100} = -269 + 98 \times 3 = 25$
- b** Een recursieve formule is $u_{n+1} = u_n + 3$ met $u_0 = -272 - 3 = -275$.
 Een directe formule is $u(n) = -275 + 3 \cdot n$.
- c** $\sum_{k=1}^{20} u_k = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (u_1 + u_{20}) = 10 \cdot (-272 + (-275 + 3 \cdot 20)) = -4870$
- 4 a** u_5 is de 3^e term na u_2 .
 $3645 = r^3 \cdot 135$
 $r = \left(\frac{3645}{135}\right)^{\frac{1}{3}} = 3$
 $u_1 = \frac{135}{3} = 45$ en $u_{10} = 135 \cdot 3^8 = 885\,735$
- b** Een recursieve formule is $u_{n+1} = 3 \cdot u_n$ met $u_0 = \frac{45}{3} = 15$.
 Een directe formule is $u_n = 15 \cdot 3^n$.
- c** $\sum_{k=2}^9 u_k = \frac{u_{10} - u_2}{r - 1} = \frac{885\,735 - 135}{3 - 1} = \frac{885\,600}{2} = 442\,800$
- 5 a** $v_1 = 1500 \cdot 0,02 = 30$
 $v_2 = 1500 \cdot 1,02 \cdot 0,02 = 30,60$
 $v_3 = 1500 \cdot 1,02^2 \cdot 0,02 = 31,21$
- b** Elke term is steeds 1,02 keer groter dan de vorige term.
 $v_n = 1500 \cdot 1,02^{n-1} \cdot 0,02$, dus
 $v_n = 30 \cdot 1,02^{n-1}$
- c** $\sum_{k=1}^{20} v_k = \frac{v_{21} - v_1}{r - 1} = \frac{30 \cdot 1,02^{20} - 30 \cdot 1,02^0}{1,02 - 1} = 728,92$
 Na 20 jaar heeft Nico € 728,92 aan rente ontvangen.
- d** Met de berekening $1500 \cdot 1,02^{20}$ bereken je het bedrag op de bankrekening na 20 jaar. Wanneer je hier het beginbedrag van € 1500,- van af trekt, heb je de ontvangen rente na 20 jaar berekend.

Vaardigheden 10

Formules herleiden

6 a $t = \frac{1}{2}(6K - 5)$

$$2t = 6K - 5$$

$$6K = 2t + 5$$

$$K = \frac{1}{3}t + \frac{5}{6}$$

b $3(K - 5) + 2t = 6 - 4(t - 3)$

$$3K - 15 + 2t = 6 - 4t + 12$$

$$3K = 6 - 4t + 12 + 15 - 2t$$

$$3K = 33 - 6t$$

$$K = 11 - 2t$$

c $(t + 5)(2K - 3) = 8$

$$2K - 3 = \frac{8}{t + 5}$$

$$2K = \frac{8}{t + 5} + 3$$

$$K = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{t + 5} + 3 \right)$$

$$K = \frac{4}{t + 5} + 1\frac{1}{2}$$

d $t(2K - 1) = 3t + 6$

$$2K - 1 = \frac{3t + 6}{t}$$

$$2K = 3 + \frac{6}{t} + 1$$

$$K = \frac{3}{t} + 2$$

e $2t - 7 = (K - 3)^3$

$$K - 3 = (2t - 7)^{\frac{1}{3}}$$

$$K = \sqrt[3]{2t - 7} + 3$$

f $t = \sqrt{3K + 1}$

$$3K + 1 = t^2$$

$$3K = t^2 - 1$$

$$K = \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{3}$$

7 a $L = K^{0,5}$ substitueren in $Y = 5K^{0,7} \cdot L^{0,6}$ geeft

$$Y = 5K^{0,7} \cdot (K^{0,5})^{0,6}$$

$$Y = 5K^{0,7} \cdot K^{0,3}$$

$$Y = 5K$$

b $K^{0,5} = L$

$$K = L^2$$

En nu $K = L^2$ substitueren in $Y = 5K^{0,7} \cdot L^{0,6}$ geeft

$$Y = 5(L^2)^{0,7} \cdot L^{0,6}$$

$$Y = 5L^{1,4} \cdot L^{0,6}$$

$$Y = 5L^2$$

8 a $y = 4 - 3(x - 2)^2$

$$y = 4 - 3(x^2 - 4x + 4)$$

$$y = 4 - 3x^2 + 12x - 12$$

$$y = -3x^2 + 12x - 8$$

b $y = (\sqrt{x + 1})^2 - 4$

$$y = x + 1 - 4$$

$$y = x - 3$$

c $y = (3x)^2 - 2 \cdot 3x - 7$

$$y = 9x^2 - 6x - 7$$

d $2y = 4(2t + 6)$

$$y = 4t + 12$$

$$y = 4t + 12$$

$$t = 2 - 3x \text{ invullen}$$

$$y = 4(2 - 3x) + 12$$

$$y = 8 - 12x + 12$$

$$y = -12x + 20$$

9 a Dit wordt gedaan om de noemers van de breuk gelijk te maken. Je moet zowel de teller als de noemer met $x + 2$ vermenigvuldigen omdat de breuk dan gelijk blijft, immers $\frac{x + 2}{x + 2}$ is gelijk aan 1.

- b** Bij de tweede breuk zijn teller en noemer met x vermenigvuldigd en bij de derde breuk zijn teller en noemer met $x \cdot (x + 2)$ vermenigvuldigd.
- c** Stap 2: de breuken zijn bij elkaar opgeteld.
Stap 3: de teller is herleid.

10 a $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

$$f(x) = \frac{3}{3x} + \frac{1}{3x}$$

$$f(x) = \frac{4}{3x}$$

b $g(x) = 3 - \frac{2}{x}$

$$g(x) = \frac{3x}{x} - \frac{2}{x}$$

$$g(x) = \frac{3x - 2}{x}$$

c $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{4} + \frac{2}{x-1}$

$$h(x) = \frac{4 \cdot (x-1)}{4 \cdot x \cdot (x-1)} + \frac{-3 \cdot x \cdot (x-1)}{4 \cdot x \cdot (x-1)} + \frac{2 \cdot 4 \cdot x}{4 \cdot x \cdot (x-1)}$$

$$h(x) = \frac{4x - 4 - 3x^2 + 3x + 8x}{4x(x-1)}$$

$$h(x) = \frac{-3x^2 + 15x - 4}{4x(x-1)}$$

d $j(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$

$$j(x) = \frac{1 \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-2)} + \frac{2(x-1)}{(x-1) \cdot (x-2)}$$

$$j(x) = \frac{x-2+2x-2}{(x-1)(x-2)}$$

$$j(x) = \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)}$$

e $k(x) = 2\sqrt{x-1} + \frac{5}{\sqrt{x-1}}$

$$k(x) = \frac{2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} + \frac{5}{\sqrt{x-1}}$$

$$k(x) = \frac{2(x-1) + 5}{\sqrt{x-1}}$$

$$k(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x-1}}$$

f $m(x) = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}$

$$m(x) = \frac{(x-1) \cdot (x+3)}{(x-1) \cdot (x+3)} + \frac{x+3}{(x-1) \cdot (x+3)} + \frac{-(x-1)}{(x-1) \cdot (x+3)}$$

$$m(x) = \frac{x^2 + 3x - x - 3 + x + 3 - x + 1}{(x-1)(x+3)}$$

$$m(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{(x-1)(x+3)}$$

Vaardigheden 10

Sinusoïden

- 11** a De evenwichtsstand is $(6 + -2) : 2 = 2$.
 b De amplitude is $6 - 2 = 4$.
 c De periode is $3,75 - 0,75 = 3$.
 d Een punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat is $(1\frac{1}{2}, 2)$.
- 12** a Een formule is $y = 2 + 4 \sin(\frac{2\pi}{3}(x - 1\frac{1}{2}))$, ofwel $y = 2 + 4 \sin(\frac{2}{3}\pi(x - 1\frac{1}{2}))$.
 b De grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand in het punt $(0, 2)$.
 De grafiek kan dus ook worden beschreven met $y = 2 - 4 \sin(\frac{2\pi}{3}(x - 0))$,
 ofwel $y = 2 - 4 \sin(\frac{2}{3}\pi x)$.
 c De toppen die bij een maximum horen, hebben als x -coördinaat 2,25; 5,25;
 8,25; 11,25; 14,25; 17,25; etc.
 De toppen die bij een minimum horen, hebben als x -coördinaat 0,75; 3,75;
 6,75; 9,75; 12,75; 15,75; 18,75; etc.
 Op het interval $[10, 16]$ zijn de coördinaten van de toppen $(11,25; 6)$,
 $(12,75; -2)$, $(14,25; 6)$ en $(15,75; -2)$.
- 13** a De evenwichtsstand is $(80 + -30) : 2 = 25$.
 De amplitude is $80 - 25 = 55$.
 De periode is $(25 - 15) \times 2 = 20$.
 De x -coördinaat van het punt waar de grafiek stijgend door de
 evenwichtsstand gaat, is $15 - \frac{1}{4} \times 20 = 10$.
 Een formule is $A = 25 + 55 \sin(\frac{2\pi}{20}(p - 10))$, ofwel
 $A = 25 + 55 \sin(\frac{1}{10}\pi(p - 10))$.
 b De toppen die bij een maximum horen, hebben als x -coördinaat 15, 35, 55,
 75, 95, 115, etc.
 De toppen die bij een minimum horen, hebben als x -coördinaat 25, 45, 65,
 85, 105, etc.
 De coördinaten van de eerste top waarvoor geldt $p > 100$ zijn $(105, -30)$.
- 14** Het tijdstip van de maximale waterstand 's avonds ligt volgens de grafiek
 rond 22,75 uur oftewel 22.45 uur.
 Uit $w = 4 + 128 \sin(0,51(t + 5,4))$ volgt:
 De evenwichtsstand is 4, de periode is $\frac{2\pi}{0,51}$ uur en de grafiek gaat stijgend
 door de evenwichtsstand in het punt $(-5,4; 4)$.
 Een beginpunt in de avond heeft volgens de formule als t -coördinaat
 $-5,4 + 2 \cdot \frac{2\pi}{0,51} = 19,239\dots$
 Het maximum komt een kwart periode na het beginpunt, hiervoor geldt
 $t = 19,239\dots + \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{0,51} = 22,319\dots$ uur, dat is om 22.19 uur.
 Het verschil is ongeveer $45 - 19 = 26$ minuten.

Systematisch tellen

- 15 a** Onder P, I en G staat een w, dus het drietal Petra, Ineke en Gerlinde.
b wwwnn, wwnwn, wnwnw, nwwwn
 wwnnw, wnwnw, nwwnw
 wnnww, nwnww
 nnwww
 Dat zijn 10 verschillende drietallen.
- 16 a** Er kunnen $\binom{15}{3} = 455$ rijtjes ontstaan.
b Er zijn $\binom{10}{5} = 252$ rijtjes met vijf keer kop en vijf keer munt.
c Je kunt een groep van 7 personen op $\binom{7}{3} = \binom{7}{4} = 35$ manieren in een groep van drie en een groep van vier verdelen.
- 17 a** Er zijn $\binom{8}{5} = 56$ verschillende mogelijkheden om vijf lampen aan te doen.
b Er zijn $\binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 56 + 28 + 8 + 1 = 93$ verschillende mogelijkheden om minstens vijf lampen aan te doen.
- 18 a** Er zijn 16 velden met voor elk twee mogelijkheden, dus $2^{16} = 65\,536$ mogelijkheden.
b Er zijn $\binom{16}{8} = 12\,870$ mogelijkheden om 8 velden zwart en 8 velden wit te verven.
c Er zijn $\binom{16}{2} = \binom{16}{14} = 120$ mogelijkheden om twee velden wit te verven.
 Daarna zijn er $\binom{14}{4} = \binom{14}{10} = 1001$ mogelijkheden om van de overige 14 velden er 4 zwart te verven. De resterende 10 velden worden rood.
 In totaal zijn er dus $120 \cdot 1001 = 120\,120$ mogelijkheden.
d Onder de nummers van de kleuren past een rijtje van 20 met 16 keer 'ja' en 4 keer 'nee', dus
 $\binom{20}{16} = \binom{20}{4} = 4845$ mogelijkheden.
 De 16 gekozen kleuren kunnen in $16!$ volgorde in de vakjes worden ingekleurd.
 In totaal zijn er $4845 \times 16! \approx 1,01 \cdot 10^{17}$ mogelijkheden.
- 19 a** Er zijn $\binom{9}{3} = \binom{9}{6} = 84$ mogelijkheden om drie personen te kiezen voor de gele boot. Dan zijn er $\binom{6}{3} = 20$ mogelijkheden om uit de overige 6 personen 3 personen te kiezen voor de rode boot. De laatste 3 personen gaan in de blauw boot.
 In totaal zijn er dus $84 \cdot 20 = 1680$ mogelijkheden.

Vaardigheden 10

- b** Mogelijke verdelingen over de drie boten zijn dan 2-3-4 en 3-3-3.
 Het aantal mogelijkheden bij de verdeling 3-3-3 is 1680 (zie opdracht a).
 Het aantal mogelijkheden bij de verdeling 2-3-4:
 Stel dat er twee toeristen in de gele boot, drie in de rode en vier in de blauwe bot gaan. Dit kan dan op $\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} = 1260$ manieren.
 Maar ook elke andere volgorde van kleuren kan op 1260 manieren.
 In totaal zijn er $3! = 6$ verschillende ‘kleurvolgordes’ van de boten.
 Bij een verdeling van 2-3-4 zijn er dus $6 \times 1260 = 7560$ mogelijkheden.
 Samen met de 3-3-3-verdeling zijn er dus $1680 + 7560 = 9240$ manieren.
- c** De negen toeristen kunnen in principe over 1 boot, 2 boten of 3 boten verspreid worden.
 Elke toerist heeft steeds keuze uit drie boten, dus zijn er $3^9 = 19683$ mogelijke verdelingen over de drie boten.
 Het is niet mogelijk dat alle drie boten leeg blijven.
 Het is op drie manieren mogelijk dat er twee boten leeg blijven. Alle toeristen stappen dan immers in dezelfde boot, dat kan de gele, de rode of de blauwe zijn.
 Nu kijken we naar het aantal mogelijkheden waarop de toeristen over twee boten verspreid kunnen worden. De keuze van de twee boten uit drie kan op drie manieren (G-R, G-B en R-B).
 In totaal zijn hiervoor $\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} + \binom{9}{7} + \binom{9}{8} = 510$ manieren.
 Merk hierbij op dat er in de situaties $\binom{9}{0}$ en $\binom{9}{9}$ één van de boten leeg blijft en dat mag niet.
 Dus er zijn $3 \times 510 = 1530$ manieren waarbij één van de boten leeg blijft en 3 manieren waarop twee boten leeg blijven, dus in totaal 1533 manieren waarop minstens één van de boten leeg blijft.
 Dan blijven er $19683 - 1533 = 18150$ mogelijkheden over waarbij geen enkele boot leeg blijft.

- 20 a** Ze kan kiezen uit één, twee of drie van de registers 3, 7 en 13 aan.
 Er zijn dus $\binom{16}{1} + \binom{16}{2} + \binom{16}{3} = 16 + 120 + 560 = 696$ verschillende registraties waaruit ze kan kiezen.
- b** Toetsenbord I heeft 16 registers, toetsenbord II heeft er $31 - 17 + 1 = 15$ en toetsenbord III heeft er $45 - 32 + 1 = 14$.
 Elk register kan ‘aan’ of ‘uit’ zijn, dus er zijn twee mogelijkheden.
 Ze kan kiezen uit elk toetsenbord. Er klinkt altijd één register als ze speelt.
 Er zijn dus $2^{16} + 2^{15} + 2^{14} - 3 = 114685$ mogelijke registraties.

Vaardigheden 11

Logaritmische en exponentiële formules

1 a $3 + {}^2\log(5) =$
 $3 \cdot 1 + {}^2\log(5) =$
 $3 \cdot {}^2\log(2) + {}^2\log(5) =$
 ${}^2\log(2^3) + {}^2\log(5) =$
 ${}^2\log(8 \cdot 5) =$
 ${}^2\log(40)$

b $2 \cdot {}^3\log(x) + {}^3\log(x - 1) =$
 ${}^3\log(x^2) + {}^3\log(x - 1) =$
 ${}^3\log(x^2 \cdot (x - 1)) =$
 ${}^3\log(x^3 - x^2)$

c $2 \cdot {}^6\log(2x) - {}^6\log(4x) + 1 =$
 ${}^6\log((2x)^2) - {}^6\log(4x) + {}^6\log(6) =$
 ${}^6\log\left(\frac{4x^2}{4x}\right) + {}^6\log(6) =$
 ${}^6\log(x) + {}^6\log(6) =$
 ${}^6\log(6x)$

d $\log(100x + 200) - \log(x + 2) =$
 $\log\left(\frac{100x + 200}{x + 2}\right) =$
 $\log\left(\frac{100 \cdot (x + 2)}{x + 2}\right) =$
 $\log(100) = 2 \text{ mits } x \neq -2$

2 a $u = 0,5 \cdot 3^p$
 $3^p = 2u$
 $p = {}^3\log(2u)$

b $p = {}^{0,65}\log\left(\frac{1 - u}{2}\right)$
 $0,65^p = \frac{1 - u}{2}$
 $2 \cdot 0,65^p = 1 - u$
 $u = 1 - 2 \cdot 0,65^p$

c $p = {}^{1,2}\log(10u - 250)$
 $1,2^p = 10u - 250$
 $10u = 1,2^p + 250$
 $u = \frac{1}{10} \cdot 1,2^p + 25$

3 a $N = \frac{3}{1 + 2^t}$
 $1 + 2^t = \frac{3}{N}$
 $2^t = \frac{3}{N} - 1$
 $t = {}^2\log\left(\frac{3}{N} - 1\right)$

$$\begin{aligned}
 \text{b } N &= \frac{24}{2 + 0,5 \cdot 3^t} \\
 2 + 0,5 \cdot 3^t &= \frac{24}{N} \\
 0,5 \cdot 3^t &= \frac{24}{N} - 2 \\
 3^t &= 2 \cdot \left(\frac{24}{N} - 2 \right) \\
 3^t &= \frac{48}{N} - 4 \\
 t &= {}^3\log\left(\frac{48}{N} - 4\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 \text{ a } P &= 8K + {}^2\log(W) + 40 \\
 P &= 8K + {}^2\log(1024) + 40 \\
 P &= 8K + 10 + 40 \\
 P &= 8K + 50 \\
 8K &= P - 50 \\
 K &= \frac{1}{8}P - 6\frac{1}{4} \\
 \text{b } P &= 8 \cdot 25 + {}^2\log(W) + 40 \\
 P &= 240 + {}^2\log(W) \\
 {}^2\log(W) &= P - 240 \\
 W &= 2^{P-240} \\
 \text{c } 50 &= 8K + {}^2\log(W) + 40 \\
 {}^2\log(W) &= 10 - 8K \\
 W &= 2^{10-8K}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5 \text{ a } 0,65^t &\text{ nadert naar } 0 \text{ als de waarde van } t \text{ steeds groter wordt, want } 0,65 < 1. \\
 \text{b } 1 + 299 \cdot 0,65^t &\text{ nadert op den duur naar } 1 + 299 \times 0 = 1 \text{ als } t \text{ steeds groter wordt.} \\
 \text{c } \text{De grenswaarde van } L &\text{ is } \frac{300}{1} = 300.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6 \text{ a } &\text{Als } p \text{ steeds groter wordt, dan nadert } 0,43^p \text{ naar } 0, \text{ want } 0,43 < 1. \text{ Dan nadert } 3 + 21 \cdot 0,43^p \text{ naar } 3 + 21 \times 0 = 3. \text{ De grenswaarde is } 3. \\
 \text{b } &\text{Als } x \text{ steeds groter wordt, neemt } {}^{0,5}\log(x) \text{ steeds verder af, want } 0,5 < 1. \text{ Dan neemt } 2 + 3 \cdot {}^{0,5}\log(x) \text{ ook steeds verder af. De constante } 14 \text{ wordt dan gedeeld door een steeds kleiner negatief getal en dan nadert } \frac{14}{2 + 3 \cdot {}^{0,5}\log(x)} \text{ naar } 0. \text{ De grenswaarde is } 0. \\
 \text{c } &\text{Als } p \text{ steeds groter wordt, dan nadert } 0,81^{2p} \text{ naar } 0, \text{ want } 0,81 < 1. \text{ Dan nadert } 13,2(3 + 0,81^{2p}) \text{ naar } 13,2(3 + 0) = 39,6. \text{ De grenswaarde is } 39,6. \\
 \text{d } &\text{Als } L \text{ steeds groter wordt, dan nadert } \frac{1}{L} \text{ naar } 0, \text{ want de constante } 1 \text{ wordt door een steeds groter getal gedeeld. Dan nadert } 0,6^{\frac{1}{L}} \text{ naar } 0,6^0 = 1 \text{ en dus nadert } 2 + 0,6^{\frac{1}{L}} \text{ naar } 2 + 1 = 3. \text{ De grenswaarde is } 3.
 \end{aligned}$$

Vaardigheden 11

- 7 a** $L = 76$ en $B = 53,3$ invullen in $B = 20 \cdot \log(N) + \frac{4}{3}L - 157$ geeft

$$53,3 = 20 \cdot \log(N) + \frac{4}{3} \cdot 76 - 157$$

$$20 \cdot \log(N) = 53,3 - \frac{4}{3} \cdot 76 + 157$$

$$\log(N) = \frac{53,3 - \frac{4}{3} \cdot 76 + 157}{20}$$

$$N = 10^{\frac{53,3 - \frac{4}{3} \cdot 76 + 157}{20}} \approx 280\,759$$

Er passeren dus 280 759 vliegtuigen per jaar op deze plek.

- b** $N = 2N$ invullen in $B = 20 \cdot \log(N) + \frac{4}{3}L - 157$ geeft

$$B = 20 \cdot \log(2N) + \frac{4}{3}L - 157$$

$$B = 20 \cdot (\log(2) + \log(N)) + \frac{4}{3}L - 157$$

$$B = 20 \cdot \log(2) + 20 \cdot \log(N) + \frac{4}{3}L - 157$$

De toename is dus $20 \cdot \log(2) \approx 6,0$.

- c** $53,3 = 20 \cdot \log(N) + \frac{4}{3}L - 157$

$$\frac{4}{3}L = 53,3 - 20 \cdot \log(N) + 157$$

$$L = \frac{3}{4}(210,3 - 20 \cdot \log(N))$$

$$L = 157,725 - 15 \cdot \log(N)$$

- d** $B = 45$ invullen in de formule geeft

$$45 = 20 \cdot \log(N) + \frac{4}{3}L - 157$$

$$20 \cdot \log(N) = 45 - \frac{4}{3}L + 157$$

$$\log(N) = \frac{1}{20}(202 - \frac{4}{3}L)$$

$$\log(N) = 10,1 - \frac{1}{15}L$$

$$N = 10^{10,1 - \frac{1}{15}L}$$

$$N = 10^{10,1} \cdot 10^{-\frac{1}{15}L}$$

$$N = 10^{10,1} \cdot \left(10^{-\frac{1}{15}}\right)^L$$

$$N = 1,259 \cdot 10^{10} \cdot 0,858^L$$

- e** Met de formule bij opdracht d:

$$N(70) - N(76) = 1,259 \cdot 10^{10} \cdot 0,858^{70} - 1,259 \cdot 10^{10} \cdot 0,858^{76} = 167\,126.$$

Er mogen 167 126 vliegtuigen meer vliegen bij een gelijkblijvende geluidsbelasting van $B = 45$.

Differentiëren

- 8 a** De gemiddelde toename is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(4\sqrt{4} - \frac{1}{2} \cdot 4) - (4\sqrt{1} - \frac{1}{2} \cdot 1)}{3} = \frac{6 - 3\frac{1}{2}}{3} = \frac{5}{6}$$

- b** $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{(4\sqrt{1} - \frac{1}{2} \cdot 1) - (4\sqrt{0} - \frac{1}{2} \cdot 0)}{1} = \frac{3\frac{1}{2} - 0}{1} = 3\frac{1}{2}$

- c** $f(x) = 4\sqrt{x} - \frac{1}{2}x$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$$

d Voor $x = 16$ is $\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{16}} - \frac{1}{2} = \frac{2}{4} - \frac{1}{2} = 0$.

Voor $x > 16$ is de noemer groter dan 4, dus $\frac{2}{\sqrt{x}} < \frac{1}{2}$.

De waarde van $f'(x)$ is negatief voor $x > 16$, dus daalt de grafiek van f .

9 a $f'(x) = 0,64 \cdot 2,75x^{1,75} - 3,75 \cdot 0,12x^{-0,88}$

$$f'(x) = 1,76x^{1,75} - 0,45x^{-0,88}$$

b De functie g is het quotiënt van $t(x) = 2x^2 - 7x + 5$ en $n(x) = x^2$.

$$t'(x) = 4x - 7 \text{ en } n'(x) = 2x$$

Met de quotiëntregel:

$$g'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$g'(x) = \frac{(4x - 7) \cdot x^2 - (2x^2 - 7x + 5) \cdot 2x}{(x^2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{4x^3 - 7x^2 - 4x^3 + 14x^2 - 10x}{x^4}$$

$$g'(x) = \frac{7x^2 - 10x}{x^4}$$

$$g'(x) = \frac{7x - 10}{x^3}$$

c Met de kettingregel:

$$y = u^4 \text{ en } u = 3x^2 - 4$$

$$\frac{dy}{du} = 4u^3 \text{ en } \frac{du}{dx} = 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot 6x = 24x \cdot u^3$$

$$k'(x) = 24x(3x^2 - 4)^3$$

d Met de kettingregel:

$$y = 3 \cdot e^u \text{ en } u = 4x$$

$$\frac{dy}{du} = 3 \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3 \cdot e^u \cdot 4 = 12 \cdot e^u$$

$$q'(x) = 12 \cdot e^{4x}$$

e De functie h is het product van $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$ en $g(x) = 5 - 3x$.

$$f'(x) = 4x + 7 \text{ en } g'(x) = -3$$

Met de productregel:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$h'(x) = (4x + 7) \cdot (5 - 3x) + (2x^2 + 7x - 4) \cdot (-3)$$

$$h'(x) = 20x - 12x^2 + 35 - 21x - 6x^2 - 21x + 12$$

$$h'(x) = -18x^2 - 22x + 47$$

Vaardigheden 11

- f** De functie l is het quotiënt van $t(x) = x^3 - 3x^2$ en $n(x) = 3x + 7$.

$$t'(x) = 3x^2 - 6x \text{ en } n'(x) = 3$$

Met de quotiëntregel:

$$l'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$l'(x) = \frac{(3x^2 - 6x)(3x + 7) - (x^3 - 3x^2) \cdot 3}{(3x + 7)^2}$$

$$l'(x) = \frac{9x^3 + 21x^2 - 18x^2 - 42x - 3x^3 + 9x^2}{(3x + 7)^2}$$

$$l'(x) = \frac{6x^3 + 12x^2 - 42x}{(3x + 7)^2}$$

- g** $j(x) = (x^2 - 3x) \cdot \sqrt{x}$

$$j(x) = x^2\sqrt{x} - 3x\sqrt{x}$$

$$j(x) = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$j(x) = x^{2\frac{1}{2}} - 3x^{1\frac{1}{2}}$$

$$j'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} - 3 \cdot 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$j'(x) = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - 4\frac{1}{2}\sqrt{x}$$

- h** Met de kettingregel:

$$y = 10^u \text{ en } u = -x$$

$$\frac{dy}{du} = \ln(10) \cdot 10^u \text{ en } \frac{du}{dx} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \ln(10) \cdot 10^u \cdot -1 = -\ln(10) \cdot 10^u$$

Op dezelfde manier vind je dat de afgeleide van 10^{2x} gelijk is aan $2\ln(10) \cdot 10^{2x}$.

$$w'(x) = -\ln(10) \cdot 10^{-x} + 2\ln(10) \cdot 10^{2x}$$

$$w'(x) \approx -2,30 \cdot 10^{-x} + 4,61 \cdot 10^{2x}$$

- 10 a** De functie g is het product van $f(x) = 2x - 1$ en $h(x) = \ln(x)$.

$$f'(x) = 2 \text{ en } h'(x) = \frac{1}{x}$$

Met de productregel:

$$g'(x) = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x)$$

$$g'(x) = 2 \cdot \ln(x) + (2x - 1) \cdot \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 2\ln(x) + 2 - \frac{1}{x}$$

b $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$

c $P = \frac{15,6}{G} - 22,8$

$$P = 15,6 \cdot G^{-1} - 22,8$$

$$\frac{dP}{dG} = 15,6 \cdot -G^{-2}$$

$$\frac{dP}{dG} = \frac{-15,6}{G^2}$$

- 11 a** $q = 25$ invullen in de formule voor GW geeft

$$GW = -0,125 \cdot 25 + 10 - \frac{150}{25} = 0,875$$

In 2015 was de gemiddelde winst per passagier €0,875.

- b** De totale winst in 2015 was $0,875 \times 25\,000\,000 = 21\,875\,000$ euro.

- c** $TW = GW \cdot q$

$$TW = \left(-0,125q + 10 - \frac{150}{q}\right) \cdot q$$

$$TW = -0,125q^2 + 10q - 150$$

- d** $TW' = -0,125 \cdot 2q + 10$

$$TW' = -0,25q + 10$$

Bij maximale winst is $TW' = 0$.

$$-0,25q + 10 = 0$$

$$q = \frac{-10}{-0,25} = 40$$

Bij 40 miljoen passagiers is de maximale winst

$$-0,125 \cdot 40^2 + 10 \cdot 40 - 150 = 50 \text{ miljoen euro.}$$

Rijen

- 12 a** Een directe formule voor het aantal zitplaatsen is

$$u(n) = 456 - 6n \text{ met } n = 0 \text{ voor de bovenste rij.}$$

De onderste rij hoort bij $n = 57$ en heeft $u(57) = 456 - 6 \cdot 57 = 114$ zitplaatsen.

- b** Rij u is een rekenkundige rij, dus er zijn

$$\sum_{k=0}^{57} u(k) = \frac{1}{2} \cdot (57 - (0 - 1)) \cdot (u(0) + u(57)) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 58 \cdot (456 + 114) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 58 \cdot 570 = 16\,530 \text{ zitplaatsen.}$$

Ja, er is genoeg plaats voor 16 000 mensen.

- 13 a** Rij u is een rekenkundige rij, dus

$$T(n) = \sum_{k=1}^n u(k) = \frac{1}{2} (n - (1 - 1)) \cdot (u(1) + u(n)) =$$

$$\frac{1}{2} n \cdot ((152 - 2) + (152 - 2n)) =$$

$$\frac{1}{2} n \cdot (302 - 2n) =$$

$$151n - n^2$$

- b** 30 minuten zijn $30 \cdot 60 = 1800$ seconden.

De op te lossen vergelijking is $151n - n^2 = 1800$.

Invoer: $y_1 = 151x - x^2$ en $y_2 = 1800$

Venster: $0 \leq x \leq 150$, $0 \leq y \leq 2500$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (13,05; 1800) en (137,95; 1800).

Bij $n = 138$ is zijn rondetijd negatief, dus alleen $n = 13$ voldoet.

Hij kan dus 13 volledige ronden afleggen.

Vaardigheden 11

- c Het bedrag wordt steeds met 2 vermenigvuldigd, dus de bedragen vormen een meetkundige rij $b_n = b_0 \cdot r^n$ met reden $r = 2$.

De term voor $n = 1$ is 0,01, dus de beginterm b_0 van de rij is $\frac{0,01}{2} = 0,005$.

De rij heeft dus de vorm $b_n = 0,005 \cdot 2^n$.

$$d \quad \sum_{k=1}^{10} b_k = \frac{b_{11} - b_1}{r - 1} = \frac{0,005 \cdot 2^{11} - 0,005 \cdot 2^1}{2 - 1} = \frac{10,24 - 0,01}{1} = 10,23$$

Als Abe na tien ronden stopt, betalen zijn ouders € 10,23.

- 14 a In maart worden $\frac{1}{2} \cdot (5200 + 4000) = 4600$ tubes ingekocht.

- b Voor juli geldt $n = 6$.

$$V(3) = \frac{1}{2} V(2) + \frac{1}{2} V(1) = \frac{1}{2} \cdot 4600 + \frac{1}{2} \cdot 4000 = 4300$$

$$V(4) = \frac{1}{2} V(3) + \frac{1}{2} V(2) = \frac{1}{2} \cdot 4300 + \frac{1}{2} \cdot 4600 = 4450$$

$$V(5) = \frac{1}{2} V(4) + \frac{1}{2} V(3) = \frac{1}{2} \cdot 4450 + \frac{1}{2} \cdot 4300 = 4375$$

$$V(6) = \frac{1}{2} V(5) + \frac{1}{2} V(4) = \frac{1}{2} \cdot 4375 + \frac{1}{2} \cdot 4450 = 4412,5$$

In juli worden er 4413 tubes verkocht.

c	n	$V(n)$	verschil met $V(n-1)$
	7	4393,75	18,75
	8	4403,125	9,375
	9	4398,4375	4,6875
	10	4400,78125	2,34375
	11	4399,609375	1,171875
	12	4400,1953125	0,5859375

Het verschil neemt af en na 12 maanden is het verschil kleiner dan 1.

Het aantal tubes blijft na 12 maanden 4400.

Systematisch tellen

- 15 a Voor elke positie zijn 10 cijfers beschikbaar.

Er bestaan $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10000$ pincodes.

- b Van elke 10000 pincodes is er dan één gelijk aan jouw bankpas, dus

$$\frac{24\,700\,000}{10000} = 2470.$$

- c Er zijn veel meer dan drie pogingen nodig.

Stel hij probeert 4600, 4601 en 4602.

Er zijn nog heel veel andere pincodes die voldoen aan de gestelde eis.

Tom heeft lang niet genoeg mogelijkheden om uit te proberen.

- d Als X een ander cijfer dan een 2 of een 5 voorstelt:

aantal keer 2	aantal keer 5	aantal keer X	aantal mogelijkheden
1	1	2	$4 \times 3 \times 8 \times 8 = 768$
2	1	1	$\binom{4}{2} \times 2 \times 8 = 96$
3	1	0	4
1	2	1	$4 \times \binom{3}{2} \times 8 = 96$
2	2	0	$\binom{4}{2} \times 1 = 6$
1	3	0	4

Je kunt dus $768 + 96 + 4 + 96 + 6 + 4 = 974$ codes maken.

- 16** Het aantal mogelijke drietallen met twee mannen en één vrouw is

$$\binom{4}{2} \times \binom{4}{1} = 6 \times 4 = 24.$$

- 17 a** 2-6, 3-5, 4-4, dus op 3 manieren.

b

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8
5	6	7	8	9
6	7	8	9	10

Aflezen geeft 18 uitkomsten met 5 of hoger.

c

	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0
5	4	3	2	1
6	5	4	3	2

Het verschil 1 komt met 7 keer het meest voor.

Het verschil 5 komt met 1 keer het minst voor.

- 18** 15 maak je met een worp die bestaat uit de ogen 6-6-3, 6-5-4 of 5-5-5.
 6-6-3 kun je op 3 manieren gooien, want de 3 kun je over elke kleur verdelen,
 6-5-4 op $3 \times 2 \times 1 = 6$ manieren, want de 6 kun je over elke kleur verdelen,
 de 5 dan nog over twee en de 4 ten slotte alleen over de laatste.
 5-5-5 kan maar op 1 manier.
 In totaal zijn er dus $3 + 6 + 1 = 10$ manieren.

- 19** Voor de eerste baan kun je kiezen uit 3 kleuren.
 Voor de tweede baan kun je kiezen uit alle kleuren behalve die van de eerste baan, dus 2 kleuren.
 Voor de derde baan kun je kiezen uit alle kleuren behalve die van de tweede baan, dus 2 kleuren.
 In totaal zijn er $3 \times 2 \times 2 = 12$ mogelijkheden.

- 20 a** Er zijn 2 soorten ogen, 2 soorten vormen en 2 soorten huidskleuren.
 Er zijn $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ typen uiterlijke verschijningsvormen voor zowel mannetjes als vrouwtjes.

- b** Er zijn $\binom{8}{2} = 28$ mogelijkheden om een mannetje te kiezen.

Op dezelfde manier kies je de vrouwtjes.

Er zijn $28 \times 28 = 784$ samenstellingen mogelijk.

Vaardigheden 11

- 21 a** Er zijn $\binom{10}{3} = 120$ mogelijke kaartjes.
- b** A staat op het kaartje, dus A verdwijnt uit de namen van beschikbare straten.
Er zijn $\binom{9}{2} = 36$ kaartjes met een A.
- c** A en B staan op het kaartje.
Er blijven nog 8 namen over van beschikbare straten die op de derde plaats komen.
Er zijn dus 8 kaartjes met A en B.
- d** Er zijn 8 kaartjes met A en B (zie opdracht c).
Er zijn 7 letters beschikbaar na de C, dus er zijn 7 kaartjes die beginnen met AC.
Er zijn 6 letters beschikbaar na de D, dus er zijn 6 kaartjes die beginnen met AD.
In totaal zijn er dus $8 + 7 + 6 = 21$ geschikte kaartjes.
Uit al deze kaartjes kun je er 7 kiezen maar bij de AD-kaartjes mist het ABD-kaartje. Dat moet hij dan aanvullen door bij ABD in de AB-kaartjes voor AD te kiezen.
Het is dus mogelijk.