

Vaardigheden

6

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Vergelijkingen en ongelijkheden
- Groeifactoren en percentages
- Substitueren en herleiden
- Gebroken formules



Vaardigheden 6

Vergelijkingen en ongelijkheden

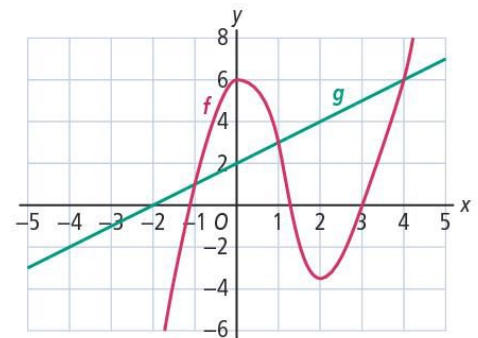
1 Los op.

- | | |
|------------------------------|---------------------------------|
| a $3x + 1 = -3x + 6$ | d $4(b - 10) = 8(b + 4)$ |
| b $7 - 3k = 2(k + 5)$ | e $13 + 8g = 15 - 2g$ |
| c $3(2r - 7) = 33$ | f $45 + h = 3(h + 1)$ |

2 Los op.

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| a $(x + 5)(x - 3) = 0$ | d $\frac{1}{4}(4x - 1)^2 = 1$ |
| b $(x + 5)(2x - 5) = 0$ | f $x^2 + 11x + 10 = 0$ |
| c $(x + 3)^2 = 81$ | g $(x - 4)(x + 4) = 9$ |

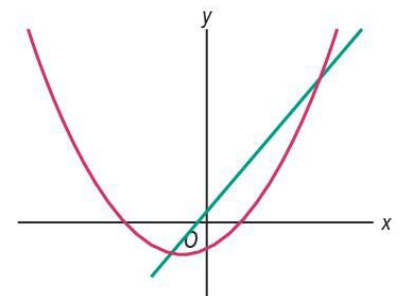
- 3 **a** Lees uit de grafieken af welke van de volgende beweringen waar is: $f(2) > g(2)$ of $f(2) < g(2)$.
b Is $f(0) > g(0)$ of is $f(0) < g(0)$?
c Lees uit de grafieken de oplossing af van de ongelijkheden $f(x) > g(x)$ en $f(x) \leq g(x)$.



Theorie

De oplossing van een ongelijkheid is meestal één of meer intervallen. Als de oplossing tussen 1 en 4 ligt kun je dat noteren als $1 < x < 4$ of in de intervalnotatie $\langle 1, 4 \rangle$. Voor alle waarden x groter of gelijk aan 4 noteer je $x \geq 4$ of in de intervalnotatie $[4, \rightarrow)$.

- 4 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ en $g(x) = 7x + 1$.
a Bereken de x -coördinaten van de snijpunten.
b Voor welke waarden van x ligt de grafiek van f boven de grafiek van g ?
c Welke ongelijkheid hoort bij opdracht b?
 $2x^2 + 3x - 5 < 7x + 1$ of $2x^2 + 3x - 5 > 7x + 1$



5 Los de ongelijkheden op.

- | | |
|--|---|
| a $3x + 10 \leq -6$ | d $-3x^2 + 8x > 11 - 6x$ |
| b $12 - \frac{2}{3}x > 4x - 16$ | e $5 - 2(3 - x) \geq 3(x + 3)$ |
| c $5 \cdot x^3 \cdot \sqrt{x} < 0,5x + 2$ | f $0,0343 \cdot x^{1,083} > 350$ |

Groefactoren en percentages

Theorie

Als g de groefactor per tijdseenheid is, dan is de groefactor per n tijdseenheden g^n .

De groefactor voor een n -de deel van de tijdseenheid is $g^{\frac{1}{n}}$ ofwel $\sqrt[n]{g}$.

Voorbeeld

Als de groefactor per jaar gelijk is aan 3, dan is:

de groefactor per 4 jaar $3^4 = 81$.

de groefactor per half jaar

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \approx 1,732.$$

de groefactor per kwartaal

$$3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3} \approx 1,316.$$

- 6 Bij een groeiproses is de groefactor 1,2 per uur.
- Bereken de groefactor per half uur in drie decimalen.
 - Bereken de groefactor per minuut in vijf decimalen.
 - Bereken de groefactor per dag in één decimaal.

Theorie

Een toename van 100% per tijdseenheid komt overeen met de groefactor 2, want $100\% + 100\% = 200\%$ en dat is $2 \times 100\%$.

Bij een afname van 8% per tijdseenheid is de groefactor 0,92 want $100\% - 8\% = 92\%$ dat is $0,92 \times 100\%$.

Een groefactor van 1,05 komt overeen met een toename van 5% want $1,05 \times 100\% = 105\%$ en dat is een toename van 5%.

Voorbeeld

Bereken het groeipcentage per week bij een groeipcentage per dag van 2,3%.

Oplossing

Bij een groeipcentage van 2,3% per dag hoort een groefactor van 1,023 per dag. Dit geeft een groefactor van $1,023^7 \approx 1,1725$ per week, dus een groeipcentage van 17,3% per week.

- 7 Bereken het groeipcentage per dag.
- Een afname van 1,7% per halve dag.
 - Een toename van 3% per uur.
 - Een afname van 8,7% per week.
 - Een afname van 0,02% per 10 minuten.
 - Een toename van 0,7% per uur.
- 8 Iemand zet € 800,- op zijn spaarrekening tegen een rente van 1,5% per jaar.
- Geef een formule waarmee je het bedrag B na t jaar kunt berekenen.
 - Bereken hoe groot het bedrag na 15 jaar is.
- 9 Bij een exponentieel groeiproses is de beginwaarde 45 en de verdubbelingstijd is 3,5 uur. Stel de bijbehorende formule op met de tijd t in uren.

$N = b \cdot g^t$ is de algemene vorm voor exponentiële groei. Hierin is b de beginhoeveelheid op tijdstip $t = 0$ en g de groefactor.

Substitueren en herleiden

Theorie

In een formule als $y = -2t + 8$ zeg je dat de variabele y is uitgedrukt in de variabele t . Je kunt ook zeggen y is geschreven als functie van t .

In een formule kun je een variabele vervangen door een getal of door een andere formule. Je noemt dit substitueren.

Het vereenvoudigen of herschrijven van een formule noem je het herleiden van de formule.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $y = -2t + 8$.
 Substitueer hierin de formule $t = -3x + 5$ en druk y uit in x .

Oplossing

$$y = -2(-3x + 5) + 8$$

$$y = 6x - 10 + 8$$

$$y = 6x - 2$$

- 10** Substitueer formule A in formule B, druk q uit in p en herleid het resultaat zoveel mogelijk.
- a** A: $t = p + 2$ B: $q = 2t - 5$
b A: $x = p - 1$ B: $q = x^2 - 2x + 8$
c A: $k = 3 - 2p$ B: $q = 2k^2 - k + 7$
- 11** Gegeven is de formule $N = (1 - M)(0,5t + 2)$.
- a** Substitueer $M = 9$ en laat zien dat $N = -4t - 16$
b Toon aan dat de formule $N = -4t - 16$ te herleiden is tot $t = -\frac{1}{4}N - 4$.
- 12** Gegeven zijn de formules $y \cdot (t - 7) = -12$ en $t + 2x = 1$.
- a** Herleid de formule $t + 2x = 1$ tot een vorm waarbij t wordt uitgedrukt in x .
b Substitueer het antwoord van opdracht a in de formule $y \cdot (3t - 7) = -12$ en herleid deze tot een vorm waarbij y wordt uitgedrukt in x .

Gebroken formules

Theorie

Breuken vermenigvuldig je met elkaar door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen. Breuken kun je vereenvoudigen door de teller en de noemer door hetzelfde getal te delen of met hetzelfde getal te vermenigvuldigen.

Voorbeeld

$$\frac{3p}{q} \cdot \frac{7q^2}{2p^3} = \frac{\cancel{3} \cdot 7 \cdot \cancel{q} \cdot q}{\cancel{q} \cdot 2 \cdot \cancel{p} \cdot p \cdot p} = \frac{21q}{2p^2}$$

$$5 \cdot \frac{7}{10} = \frac{5}{1} \cdot \frac{7}{10} = \frac{5 \cdot 7}{1 \cdot 10} = \frac{\cancel{5} \cdot 7}{2 \cdot \cancel{5}} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

- 13** Vermenigvuldig en vereenvoudig het antwoord.
- a** $3 \cdot \frac{5}{18}$ **c** $\frac{60p}{3p-9} \cdot \frac{p-3}{5}$
b $\frac{-12a^2}{b^3} \cdot \frac{7b}{6a}$ **d** $3q^7 \cdot \frac{2}{q^2} \cdot \frac{1}{12q^3}$

- 14** Op het blaadje zie je hoe je de formule $A = \frac{4}{p} + \frac{3}{p+1}$ als één breuk kunt schrijven

a Leg uit wat er in stap 1 gebeurd is.
b En wat is er in stap 2 gebeurd?

$A = \frac{4}{p} + \frac{3}{p+1}$	
$A = \frac{4(p+1)}{p(p+1)} + \frac{3p}{p(p+1)}$	1
$A = \frac{7p+4}{p^2+p}$	2

- 15** Herleid de formules tot één breuk.

a $k = \frac{6}{p} + \frac{1}{5}$

c $T = \frac{b}{1-b} + \frac{3}{1+b}$

b $q = \frac{1}{a} - \frac{8}{a+5}$

d $H = \frac{5}{m} + \frac{3m+1}{2m}$

- 16** In de formule $t = \frac{8}{p-1}$ is t uitgedrukt in p .
 Je kunt ook p uitdrukken in t . Hiernaast staat een begin.
 Neem de berekening over en laat zien dat de formule te herleiden is tot $p = \frac{8}{t} + 1$.

$t = \frac{8}{p-1}$	
$t(p-1) = 8$ links en rechts $\times (p-1)$	
$\dots = \frac{8}{t}$ links en rechts $: t$	
$p = \dots$	

- 17** Gegeven zijn de formules $L \cdot B = 30$ en

$$K = \frac{18547}{L} + 56,6L + \frac{5279}{B} + 90,8B.$$

Druk K uit in L en herleid deze tot de vorm $K = a \cdot L + \frac{b}{L}$

Theorie

Een verband tussen de variabelen A , B en C kun je herleiden door links en rechts van het $=$ -teken te vermenigvuldigen met dezelfde factor of te delen door dezelfde factor.

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt dan $A = B \cdot C$ en ook

$B = \frac{A}{C}$ met $B \neq 0$ en $C \neq 0$.

Voorbeeld

$Q = \frac{-2}{P-3,5}$, druk P uit in Q .

Oplossing

$$(P-3,5) \cdot Q = -2$$

$$P-3,5 = \frac{-2}{Q} \text{ ofwel } P = \frac{-2}{Q} + 3,5$$

- 18** Druk P uit in T .

a $T = 6 + \frac{1}{P}$

d $T \cdot (P+3) = 11$

b $T = \frac{-8}{0,5P}$

e $6 = \frac{T}{\sqrt{P}}$

c $T = \frac{-3}{4P+8}$

f $T = 4 - \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{P}}$

Vaardigheden

7

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Functies met machten
- Redeneren met formules
- Hellingen
- Systematisch tellen



Vaardigheden 7

Functies met machten

- 1 Sommige van de volgende functies kun je schrijven als een machtsfunctie $N(t) = t^m$. Zoek uit welke dat zijn en geef in die gevallen de waarde van de exponent m .

a $N(t) = t^2 \cdot t^3$ **d** $N(t) = t^4 + t^6$
b $N(t) = t^{1,3} \cdot t^{2,5} \cdot t$ **e** $N(t) = (t^3)^{2,6}$
c $N(t) = \frac{t^{12}}{t^3}$ **f** $N(t) = \frac{(t^{1,5})^4}{t^2 \cdot t}$

Theorie

Bij het rekenen met machten gelden de volgende rekenregels.

1 $g^0 = 1$ **5** $g^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{g}$
2 $g^1 = g$ **6** $g^p \cdot g^q = g^{p+q}$
3 $g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g}$ **7** $\frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$
4 $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$ **8** $\left(g^p\right)^q = g^{p \cdot q}$

Voorbeeld 1

Schrijf als een macht van x .

$$x^3 \cdot x^2 \cdot x^9 = x^{14}$$

$$x \cdot x^{3,2} \cdot x^{-2} = x^{2,2}$$

$$x^{6,4} \cdot \sqrt{x} = x^{6,9}$$

Voorbeeld 2

Schrijf als een macht van q .

$$\frac{q^4 \cdot q^5}{q^3} = \frac{q^9}{q^3} = q^6$$

$$q^{-0,2} \cdot (q^{4,2})^{0,5} = q^{-0,2} \cdot q^{2,1} = q^{1,9}$$

Voorbeeld 3

Schrijf als een som van machten van t .

$$\frac{2t^4 - 6t^{3,8} + 8t^{1,5}}{4t^2} =$$

$$\frac{2t^4}{4t^2} - \frac{6t^{3,8}}{4t^2} + \frac{8t^{1,5}}{4t^2} = \frac{1}{2}t^2 - 1\frac{1}{2}t^{1,8} + 2t^{-0,5}$$

- 2 Schrijf op de manier van de voorbeelden de functies als som of verschil van machtsfuncties.

a $f(v) = v^3 \cdot v^{6,5} + 4v^{10} \cdot v^{-0,5}$
b $H(p) = 2p \cdot p^2 + 5p^{1,3} - 6p^3$
c $m(t) = 3t \cdot (t^{1,6})^2 - 7,8t^{3,1} \cdot t$
d $h(a) = \frac{a^2 \cdot 9a^3}{a^{6,4}}$
e $N(d) = 15d^3 \cdot 2d^{1,5} \cdot 4\sqrt{d}$
f $K(q) = \frac{18q^{3,2} + 7q^{4,9} - 6,4q + 78}{q}$
g $W(p) = \frac{-6p^{3,8} + 9p^{2,3} - 2p + 7,3}{10p}$

Redeneren met formules

Theorie

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd, kun je beredeneren hoe de uitkomst van een formule verandert. Je kunt bijvoorbeeld gebruik maken van de volgende eigenschappen.

- g^t is stijgend als $g > 1$
- g^t is dalend als $0 < g < 1$
- bij een vaste positieve waarde van c en positieve waarde van n wordt de breuk $\frac{c}{n}$ kleiner als n groter wordt.

Voorbeeld

Voor $t \geq 0$ is gegeven $P = \frac{2}{4 + 6 \cdot 0,7^t}$.
Beredeneer naar welke grenswaarde P nadert.

Oplossing

Bij $t = 0$ is $P = \frac{2}{4 + 6 \cdot 0,7^0} = \frac{2}{10} = 0,2$.

Als t heel groot wordt, nadert $6 \cdot 0,7^t$ naar nul. Dus $4 + 6 \cdot 0,7^t$ nadert naar 4.
Als t groot wordt, nadert P naar $\frac{2}{4} = 0,5$.
De waarden van P naderen naar 0,5.

- 3 In de formules stelt t de tijd voor en P een hoeveelheid. Beredeneer met de formule naar welke waarde P op den duur nadert.

- a $P = 40 + 10 \cdot 0,5^t$ d $P = 250(2 - 65 \cdot 1,5^{-t})$
b $P = 560 - 13 \cdot 0,95^t$ e $P = 750 + 8(5 \cdot 0,2^t - 7)$
c $P = 200 - \frac{10}{5 + 0,3^t}$ f $P = 1000 - \frac{235}{3,5 + 1,2^t}$

- 4 Een slager haalt een stuk vlees uit de vriescel en legt het in de koelcel. De temperatuur T in graden Celsius van het vlees t uur nadat het vlees in de koelcel is gelegd is te berekenen met de

$$\text{formule } T = 6 - \frac{24}{\sqrt{3t + 1}}$$

- a Welke temperatuur had het vlees op het moment dat het in de koelcel werd gelegd?
b Leg uit dat de temperatuur T bij toenemende waarden van t zal blijven stijgen.
c Leg uit hoe je aan de formule kunt zien dat de temperatuur van de koelcel 6°C is.
- 5 Een kippenboer mest haantjes van een bepaald ras voor de slacht. Voor de gewichtstoename van haantjes van dat ras geldt de formule $G = \frac{10000}{4 + 200 \cdot 0,4^t}$. Hierbij is G het gewicht in grammen en t de tijd in weken.
- a Leg uit hoe je uit de formule kunt afleiden dat de grafiek van G stijgend is bij toenemende t .
b Als de boer doorgaat met mesten, dan zullen de kippen niet onbegrensd in gewicht blijven toenemen.
Welke grenswaarde is er voor het gewicht van de kippen van dit ras? Leg uit hoe je aan je antwoord gekomen bent.

Hellingen

- 6** Gegeven is de functie $A(p) = 6\sqrt{p} - 2p - 1$.
- Bereken de gemiddelde toename van A over het interval $[1, 9]$.
 - Bereken het differentiequotient van A over het interval $[0, 4]$.
 - Benader de helling in het punt $(1, 3)$ door de gemiddelde verandering van A te berekenen over het interval $[1; 1,001]$.

- 7** Gegeven is de functie $p(t) = (t^3 - 4) \cdot 2^t$. In de tabel zie je de waarden van de afgeleide $p'(t)$.

t	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$p'(t)$	-0,695	-0,451	0,054	0,689	0,921	-0,233	-2,773

- Hoe kun je uit deze tabel afleiden dat de grafiek een top heeft voor een waarde van t tussen -5 en -4 ?
- Waarom volgt uit de tabel dat de grafiek nog minstens één top heeft?

Theorie

Voor het differentiëren van een functie gelden de volgende regels:

- als $f(x) = x^n$ dan is $f'(x) = nx^{n-1}$
- als $g(x) = f(x) + c$ dan is $g'(x) = f'(x)$
- als $g(x) = c \cdot f(x)$ dan is $g'(x) = c \cdot f'(x)$
- als $s(x) = f(x) + g(x)$ dan is $s'(x) = f'(x) + g'(x)$

- 8** Differentieer.

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| a $f(x) = 5x^3 + 7x - 2$ | d $R(m) = 4(6m - 3)^2$ |
| b $Q(t) = 12 - 6t + 8t^4$ | e $K(p) = 2 - 0,8p$ |
| c $p(t) = -t(5t - 1)$ | f $Q(w) = (4w - 1)(w^5 + 4w)$ |

- 9** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x$.

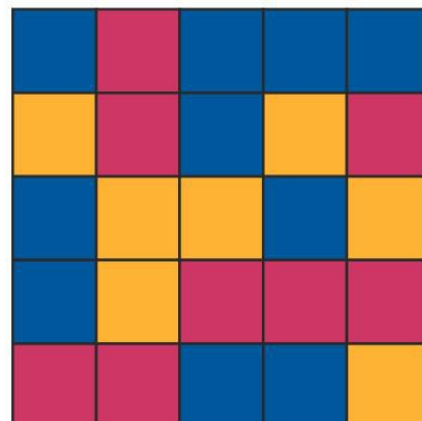
- Geef het functievoorschrift van f' en bereken de waarden van x waarbij $f'(x)$ gelijk is aan 0.
- Bereken de extreme waarden van f .
- Hoe kun je aan het voorschrift van de afgeleide zien dat de grafiek van f stijgt voor $x > 3$?
- Op welk interval daalt de grafiek van f ?
- Gebruik de afgeleide om uit te leggen dat de grafiek van f het sterkst daalt bij $x = 0$.

Systematisch tellen

Theorie

Het oplossen van een telprobleem vereist een systematische aanpak. Dat kan met behulp van een boomdiagram, een wegendiagram, een rooster of door de mogelijkheden op een overzichtelijke manier weer te geven.

- 10** **a** Een rode bal, een blauwe bal en een gele bal worden op een rijtje op tafel gelegd.
Bereken het aantal verschillende rijtjes dat je op deze manier op tafel kunt leggen.
- b** In een bak zitten vijf zwarte en vijf witte ballen. Uit de bak worden drie ballen gehaald die op een rij op tafel worden gelegd.
Bereken het aantal verschillende rijtjes dat je op deze manier op tafel kunt leggen.
- 11** Uit de bak met vijf rode, vijf blauwe en vijf gele ballen worden drie ballen getrokken en naast elkaar op een rijtje gelegd.
- a** Hoeveel verschillende rijtjes zijn er in totaal mogelijk?
- b** Hoeveel rijtjes zijn er mogelijk met twee rode ballen?
- c** Leg uit dat er twaalf verschillende rijtjes mogelijk zijn waarin één rode bal voorkomt.
- d** Gebruik de antwoorden op opdracht 11b en c om het aantal verschillende rijtjes te berekenen waarin minstens één rode bal voorkomt.
- 12** Deze opdracht gaat over de bak met ballen van opdracht 11. Er worden weer drie ballen op een rijtje gelegd.
- a** Hoeveel verschillende rijtjes zijn er mogelijk als er in het rijtje alleen gele of blauwe ballen voor mogen komen?
- b** Verklaar dat je het antwoord op opdracht 11d ook had kunnen vinden door van het antwoord op opdracht 11a het antwoord op opdracht 12a af te trekken.
- 13** De 25 leerlingen van een brugklas gaan een kunstwerk maken. Iedere leerling verft een vierkant bordje in de kleur rood, geel of blauw. Daarna worden de bordjes samengevoegd tot één groot vierkant.
- a** Hoeveel verschillende kunstwerken kunnen de leerlingen maken?
- b** Door de leerlingen zijn acht rode bordjes gemaakt, zeven gele en tien blauwe. Daarvan kun je een kunstwerk maken zoals hiernaast.
Hoeveel verschillende kunstwerken zijn er mogelijk met deze aantallen rode, gele en blauwe bordjes?



Vaardigheden 8

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rijen
- Rekenmachine
- Logaritmische schalen
- Systematisch tellen



Vaardigheden 8

Rijen

- 1 In de gegeven rij getallen zit een regelmaat.
- Welke regelmaat zie je?
 - Schrijf de volgende drie getallen op van deze rij.
 - Controleer dat de rij vastgelegd is met de formule $u_{n+1} = u_n + n$ en $u_1 = 7$.
 - Een andere rij is vastgelegd met de formule $v(n+1) = 2v(n) + 1$ en $v(0) = -3$.
Schrijf de volgende vijf getallen van de rij op.

7	8	10	13	17	22	...	...	...
---	---	----	----	----	----	-----	-----	-----

Theorie

Als je bij een rij de volgende term kunt berekenen uit de voorafgaande term(en), dan spreek je van recursie. De bijbehorende formule heet een recursieve formule. Bij sommige rijen kun je een term $u(n)$ direct berekenen met het rangnummer n . Je gebruikt dan een directe formule.

- Een rij waarvan je een term vindt door bij de voorafgaande term een constante a op te tellen heet een rekenkundige rij. De constante a heet het verschil.
- Een rij waarvan je een term vindt door de voorafgaande term met een constante r te vermenigvuldigen heet een meetkundige rij. De constante r heet de reden.

Directe formule bij een rekenkundige rij: $u(n) = b + a \cdot n$.
Directe formule bij een meetkundige rij: $u(n) = b \cdot r^n$.
In beide gevallen geldt: $b = u(0)$.

Voorbeeld 1

Geef een directe formule bij de rij:

$$u(1) = 299, u(2) = 286, u(3) = 273, \dots$$

Oplossing

u is een rekenkundige rij met verschil -13 .

$$u(0) = 299 + 13 = 312$$

$$u(n) = 312 - 13n$$

Voorbeeld 2

Geef een directe formule bij de rij:

$$K_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot K_n \text{ en } K_4 = 10$$

Oplossing

K is een meetkundige rij met reden $\frac{1}{2}$.

$$K_0 = \frac{10}{(\frac{1}{2})^4} = 160. \quad K_n = 160 \cdot (\frac{1}{2})^n$$

- 2 Schrijf van elke rij de eerste vier termen op.
- $u(n+1) = 3 \cdot u(n) - 2$ met beginterm $u(0) = 2$.
 - $v_{n+1} = 1,5 \cdot v_n$ met beginterm v_1 en met $v_2 = 24$.
- 3 Geef van elk van de rijen A, B, C, D en E een recursieve formule.
- 4
- Welke van de rijen van opdracht 3 zijn rekenkundig en welke zijn meetkundig?
 - Bepaal bij elk van deze rijen een directe formule.

A:	12, 18, 24, 30,
B:	3, 6, 12, 24,
C:	12, 25, 51, 103,
D:	320, -160, 80, -40,
E:	3, -4, -11, -18,

- 5 In januari 2017 krijgt Janneke 12 euro zakgeld per maand en elke volgende maand krijgt zij er 35 cent bij.
- Leg uit dat Janneke n maanden na januari 2017 als zakgeld $B_n = 12 + 0,35n$ euro per maand krijgt en geef ook een recursieve formule voor B_n .
 - Na hoeveel maanden zal het zakgeld voor het eerst boven de 30 euro uitkomen?

Rekenmachine

Theorie

Je kunt met je rekenmachine de coördinaten van toppen en snijpunten berekenen. Als je de rekenmachine gebruikt, geef je aan hoe je de rekenmachine hebt gebruikt. Daarbij neem je de volgende onderdelen op: de invoer, de vensterinstelling en de gebruikte opties.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 2 + 7\sqrt{x+2}$.
Bereken de coördinaten van de top van de grafiek en bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de lijn $y = 4$.
Rond je antwoorden af op twee decimalen.

Oplossing

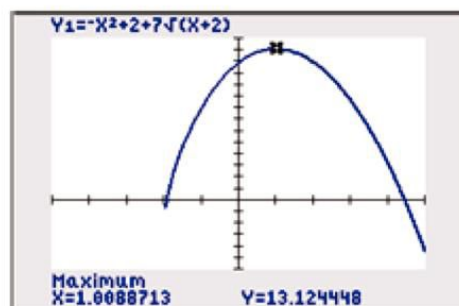
Invoer: $y_1 = -x^2 + 2 + 7\sqrt{x+2}$ en $y_2 = 4$

Venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-6 \leq y \leq 14$

Optie: maximum. De top is (1,01; 13,12).

Optie: snijpunten.

De snijpunten zijn (-1,58; 4) en (3,87; 4).



- 6 Gegeven is de functie $A(p) = (2p - 75)(3p + 81)$.
- De snijpunten van de grafiek van A met de p -as kun je zonder rekenmachine berekenen.
Laat zien hoe en geef de coördinaten van de snijpunten.
 - Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van A .
 - Bereken de p -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van A met de lijn $A(p) = 1000$. Rond je antwoord af op één decimaal.

- 7 Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $3\sqrt{4x-1} = 5$

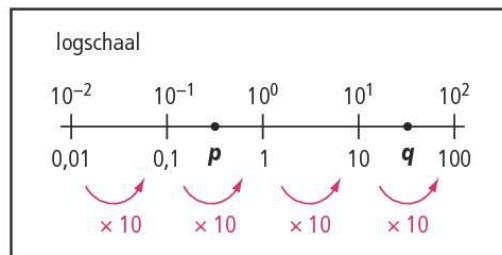
c $p - 4 = p^3 - 3p$

b $\frac{12}{\sqrt{7-2x}} = 4$

d $\frac{2x}{x^2+5} = \frac{1}{3}$

Logaritmische schalen

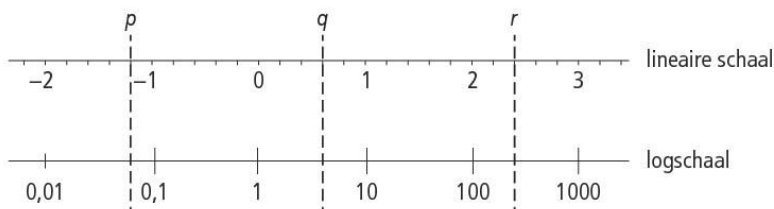
- 8** Je ziet een logaritmische schaalverdeling.
 p is het getal precies midden tussen 0,1 en 1.
 q is het getal precies tussen 10 en 100.
a Bereken in twee decimalen de waarden van p en q .
b Hoe kun je het getal q uit p afleiden?



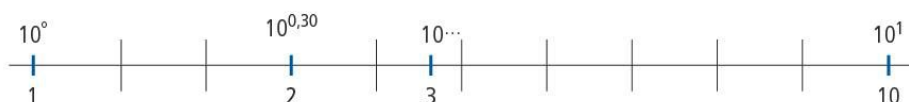
Theorie

Bij een lineaire schaalverdeling wordt bij gelijke stappen een vast getal opgeteld. Bij een logaritmische schaalverdeling of logschaal wordt bij gelijke stappen met een vast getal vermenigvuldigd.

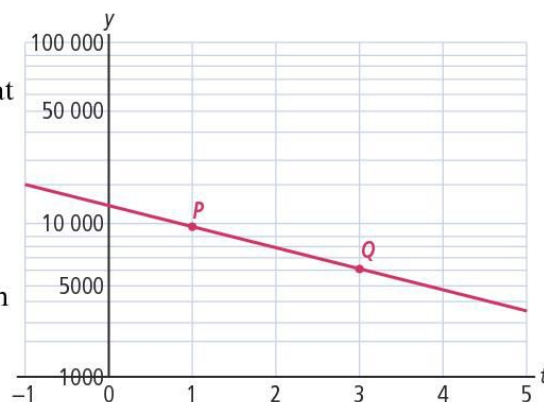
- 9** Gegeven is een lineaire schaal en een logschaal.
 Bereken de getallen die horen bij p , q en r bij zowel de lineaire als de logschaal. Rond indien nodig af op twee decimalen.



- 10** Op onderstaande logschaal zijn de getallen 1, 2, 3 en 10 weergegeven.



- a** Leg uit hoe de plaats van het getal 2 is gevonden.
b Bereken welk getal er op de puntjes moet staan en controleer of het getal 3 op de juiste plek staat.
c Zet de getallen 4 tot en met 9 op de juiste plaats op de logschaal.
- 11** Gegeven is de grafiek bij het verband tussen t en y in een assenstelsel, waarvan de y -as een logschaal is. De grafiek gaat door de punten $P(1, 9600)$ en $Q(3, 6144)$.
a Waarom is dit de grafiek van een exponentieel verband?
b Bereken de groeifactor die hoort bij dit exponentiële verband.
c Stel een formule op bij het verband tussen t en y .
d De grafiek van een andere formule gaat door $(1, 50\,000)$ en is evenwijdig aan de grafiek door de punten P en Q . Wat zegt dat over de groeifactor?
e Geef een formule bij deze grafiek.



Systematisch tellen

- 12** Een stapeltje kaarten bestaat uit ruiten twee tot en met ruiten zeven. Een tweede stapeltje bestaat uit harten twee tot en met harten zeven.
- Van elk stapeltje wordt één kaart afgenomen.
Hoeveel verschillende tweetallen kaarten kun je op die manier krijgen?
 - De getallen op de twee kaarten worden bij elkaar opgeteld.
Om de uitkomsten te noteren kun je gebruik maken van een schema.
Hoe vaak komt de uitkomst 8 voor?
 - Bij hoeveel tweetallen is de som van de getallen op de twee kaarten groter dan negen?
 - Je kunt ook op het verschil van de twee getallen op de kaarten letten.
Welk verschil komt het meeste voor? Hoe vaak is dat?

	2	3	4	5	...
2	4	5	...	...	...
3	5	...	...	...	...
4	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

- 13** Je gooit één keer met een rode, een blauwe en een gele dobbelsteen. De som van de aantallen ogen is 6.
Op hoeveel verschillende manieren kun je een totaal aantal ogen 6 krijgen?



- 14** Acht vrienden, Johan, Siebren, Mohammed, Peter, Igor, Herman, Gerrit en Amir gaan een dag op stap. Ze hebben een Volkswagenbusje gehuurd waar precies acht personen in mogen. Alle acht zijn ze in bezit van een rijbewijs.
- Op hoeveel manieren kunnen ze plaatsnemen in de bus?
 - Uit hun midden kiezen ze een chauffeur, iemand die de pot beheert en een woordvoerder. Hiervoor zijn drie verschillende personen nodig.
Op hoeveel manieren kunnen zij zo'n drietal samenstellen?

- 15** Op de foto zie je een stad van keramiek gemaakt door de kunstenaar Elly van de Merwe.
De huisjes zijn in 3 rijen geplaatst. Er zijn 13 huisjes in het kunstwerk zelf en er is nog 1 reservehuisje.
De voorste rij heeft 4 posities om huisjes te plaatsen, de middelste rij heeft 5 posities en de achterste weer 4 posities.
De opstelling van de huisjes kan veranderd worden. Je kunt daarbij de huisjes op de voorste rij en de huisjes op de middelste rij willekeurig verwisselen.
De huisjes op de achterste rij kunnen alleen onderling verwisseld worden. Het reservehuisje past alleen op de voorste twee rijen.
Bereken hoeveel opstellingen er mogelijk zijn met de 14 verschillende huisjes.
(Ontleend aan CE wiskunde vwo A -pilot 2014, tijdvak 1)



SE

CE

K

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Machtsformules
- Formules herleiden
- Differentiëren
- Exponentiële en logaritmische formules herleiden
- Periodieke functies



Machtsformules

Theorie

De macht van een product is gelijk aan het product van de machten. In formule: $(p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a$.

Ook geldt de formule $\left(\frac{p}{q}\right)^a = \frac{p^a}{q^a}$

Je kunt van deze formules gebruikmaken om sommige eigenschappen van formules te verklaren of om formules te vereenvoudigen.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $w = 50 \cdot d^{0,75}$.

Wat gebeurt er met w als d tien keer zo groot wordt?

Oplossing

Substitueer voor d een 10 keer zo grote waarde, dat is $10d$, in de formule $w = 50 \cdot d^{0,75}$.

$$w = 50 \cdot (10d)^{0,75}$$

$$w = 50 \cdot 10^{0,75} \cdot d^{0,75} \quad \text{haakjes weggewerkt}$$

$$w = 10^{0,75} \cdot 50 \cdot d^{0,75} \quad \text{volgorde verwisseld}$$

De uitkomst van deze formule is $10^{0,75} \approx 5,62$ keer zo groot als de uitkomst van de formule $w = 50 \cdot 10^{0,75}$.

Dus w wordt dan ongeveer 5,62 keer zo groot.

Voorbeeld 2

Schrijf de formule $K = 48q^2 \cdot \left(\frac{3}{2q}\right)^4$ in de vorm $K = a \cdot q^b$.

Oplossing

$$K = 48q^2 \cdot \frac{3^4}{(2q)^4} \text{ geeft } K = 48q^2 \cdot \frac{81}{16q^4}$$

$$K = \frac{48 \cdot 81 \cdot q^2}{16q^4} \text{ ofwel } K = 243q^{-2}$$

- 1 Bereken hoeveel keer zo groot B wordt in het geval A tien keer zo groot wordt.

a $B = 12,5 \cdot A^{3,4}$

d $B = 0,45 \cdot A^{-0,125}$

b $B = \frac{0,35}{A^{1,34}}$

e $B = \frac{1235}{A^{0,75}}$

c $B = 1,9876A$

f $B = 12\,500 \cdot A^{\frac{1}{3}}$

- 2 Schrijf in de vorm $K = a \cdot q^b$.

a $K = 0,32 \cdot \left(\frac{2}{q}\right)^{1,5}$

d $K = q^5 \cdot \left(\frac{4}{q^2}\right)^3$

b $K = \frac{16}{q} \cdot \left(\frac{1}{2}q\right)^4$

e $K = \frac{10}{q^5} \cdot \left(\frac{3q}{5}\right)^2$

c $K = -3q^4 \cdot \left(\frac{-2}{q}\right)^3$

f $K = \frac{10q}{2q^3} \cdot (4q)^2$

- 3** Het verband tussen lichaamsgewicht en skeletgewicht van landzoogdieren is te benaderen met de formule $S = 0,0343 \cdot M^{1,083}$. Hierin is S het skeletgewicht in grammen en M het lichaamsgewicht in grammen.
- a** Het lichaamsgewicht van een olifant is 200 000 keer zo groot als dat van een muis. Iemand beweert dat het skeletgewicht van de olifant ook 200 000 keer zo groot is als dat van de muis.
Toon aan dat dat niet waar is.
 - b** Hoeveel keer zo groot is het skeletgewicht van de olifant?
 - c** Het lichaamsgewicht van zoogdier A is 60 keer zo groot als dat van zoogdier B.
Welke verhouding hebben hun skeletgewichten?

Formules herleiden

- 4** Schrijf de formules zonder haakjes en zo kort mogelijk.

- a** $y = (p + 4)(p - 5)$
- b** $q = (t - 5)(6 - 3t)$
- c** $m = 3n^2 + 6n(2n + 5)$
- d** $K = -7x - 4(3x - 2)$
- e** $A = 18k - (17 - 5k)$
- f** $T = 5r + 3r(2r + 2)$

- 5** Herleid de vergelijkingen naar de vorm $y = ax + b$.

- a** $9x + 2y - 10 = 0$
- b** $5x = 4y + 9$
- c** $0,4x + 1,2y = 8$
- d** $5(x - 2) + 2y = 15 + 8y$
- e** $3x + 7y = 12 - 4x + 5y$
- f** $1\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 2\frac{1}{4}$

Theorie

De formule $P = 40 \cdot Q^{2,1}$ hoort bij een machtsverband. In deze formule is P uitgedrukt in Q . Om Q uit te drukken in P , kun je gebruikmaken van de regel: uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$.

Voorbeeld

$P = 40 \cdot Q^{2,1}$
Druk Q uit in P .

Oplossing

$$40 \cdot Q^{2,1} = P$$

$$Q^{2,1} = \frac{P}{40} = 0,025P$$

$$Q = (0,025P)^{\frac{1}{2,1}} = 0,025^{\frac{1}{2,1}} \cdot P^{\frac{1}{2,1}}$$

$$Q \approx 0,173 \cdot P^{0,476}$$

- 6** Druk Q uit in P .

- a** $P = 10 \cdot Q^{0,5}$
- b** $P = 0,04 \cdot Q^{1,25}$
- c** $P = 12 + Q^4$
- d** $P = 16 - Q^{0,01}$
- e** $P = 18 + 2 \cdot Q^{0,1}$
- f** $P = 0,25Q^{25} - 18$

Vaardigheden 9

- 7** Druk y uit in v .
- a** $y \cdot v = 3$ **d** $2y(v + 6) = -2$
- b** $\frac{y}{v} = 2$ **e** $\frac{3v - 9}{y + 1} = 3$
- c** $\frac{9v}{y} = 15$ **f** $\frac{y}{y - 1} = v$

Theorie

In de formule $K = 500 - B \cdot Q^3$ is de variabele K uitgedrukt in de variabelen B en Q . Bij een gegeven waarde voor B kun je door substitutie en herleiden Q uitdrukken in K .

Voorbeeld

Gegeven $K = 500 - B \cdot Q^3$.
Druk Q uit in K als je weet dat $B = 75$.

Oplossing

$500 - 75 \cdot Q^3 = K$ geeft $-75 \cdot Q^3 = K - 500$.

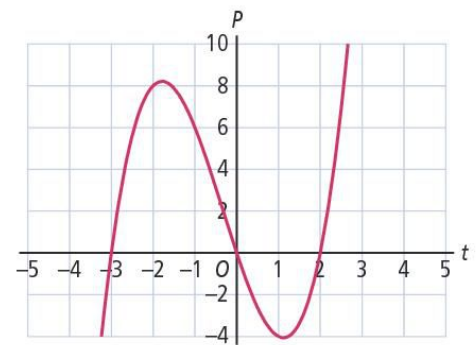
$$Q^3 = \frac{K - 500}{-75} = -\frac{1}{75}K + 6\frac{2}{3} \text{ en dus } Q = \left(-\frac{1}{75}K + 6\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

- 8** Gegeven de formule $K = 500 - B \cdot Q^3$ uit het voorbeeld.
- a** Druk B uit in K als je weet dat $Q = 2$.
- b** Substitueer in de formule $K = 100$ en druk B uit in Q .
- 9** Gegeven zijn de formules $K = p \cdot q$ en $q = -2p + 8$.
Druk K uit in q .

Differentiëren

- 10** Differentieer.
- a** $f(x) = 30x + 5x^7 - 30$ **d** $f(p) = (p - 3)^2$
- b** $A(t) = 0,1t^{100} - 10 + 0,01t$ **e** $W(z) = (z^2 - 4)(z^2 + 4)$
- c** $K(q) = 2(-q + 1) + q$ **f** $T(t) = (t^3 - 4)^5$
- 11** Bepaal $\frac{dA}{dt}$
- a** $A = \sqrt{8t^2 + 6}$ **c** $A = 5(3 - \sqrt{t})^6$
- b** $A = \frac{3}{t^4}$ **d** $A = \frac{7}{2\sqrt{t} + 2}$

- 12** Gegeven is de grafiek van de functie $P(t) = t^3 + t^2 - 6t$.
- Op de grafiek van P ligt het punt A met $t = 2$.
Stel een vergelijking op van de raaklijn in A .
 - Bereken met behulp van de afgeleide functie bij welke waarden van t de grafiek van P een top heeft. Rond je antwoord af op twee decimalen.
 - Bereken met behulp van de afgeleide voor welke waarden van t de helling gelijk is aan 2.



Exponentiële en logaritmische formules herleiden

Theorie

Voor het rekenen met logaritmen gelden de rekenregels hiernaast. Bij deze regels is $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$ en $b > 0$. Soms is het nodig om een getal eerst als een logaritme te schrijven. Zo kun je bijvoorbeeld 3 schrijven als $3 = {}^2\log(2^3) = {}^2\log(8)$ maar ook als $3 = {}^5\log(5^3) = {}^5\log(125)$.

- ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$
- ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$

Voorbeeld 1

Schrijf als één logaritme $4 + 2 \cdot {}^3\log(5)$.

Oplossing

$$4 + 2 \cdot {}^3\log(5) =$$

$${}^3\log(3^4) + 2 \cdot {}^3\log(5) = \quad \quad \quad 4 = {}^3\log(3^4)$$

$${}^3\log(81) + {}^3\log(5^2) = \quad \quad \quad (\text{regel 3})$$

$${}^3\log(81) + {}^3\log(25) =$$

$${}^3\log(81 \cdot 25) = \quad \quad \quad (\text{regel 1})$$

$${}^3\log(2025)$$

Voorbeeld 2

Schrijf als één logaritme ${}^4\log(2x+1) - \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(x)$.

Oplossing

$${}^4\log(2x+1) - \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(x) =$$

$${}^4\log(2x+1) - {}^4\log\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \quad \quad \quad (\text{regel 3})$$

$${}^4\log(2x+1) - {}^4\log(\sqrt{x}) =$$

$${}^4\log\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x}}\right) \quad \quad \quad (\text{regel 2})$$

- 13** Schrijf als één logaritme en zo kort mogelijk.
- $2 - 4 \cdot {}^5\log(3)$
 - $1 - \log(2) + \log(5)$
 - $2 \cdot {}^5\log(3) + {}^5\log(2)$
 - $\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(16) - {}^3\log(12)$
 - $2 \cdot {}^4\log(x) - \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(x)$
 - $\log(2a-1) + \log(a+6)$
 - ${}^7\log(4k-6) - 3 \cdot {}^7\log(k)$
 - $3 \cdot \frac{1}{2} \log(P) - \frac{1}{2} \log(\sqrt{P}) - 3$

- 14** Gegeven is de functie $f(x) = -1 + \log(3x-2)$.
Herleid het functievoorschrift van de functie f tot de vorm $f(x) = \log(ax+b)$.

- 15**
- Schrijf $g(x) = -3 + {}^2\log(8x^4)$ in de vorm $g(x) = a \cdot {}^2\log(x)$.
 - Schrijf $h(x) = 1 + 2 \cdot \log(x) - \log(x^4 + 5)$ in de vorm $h(x) = \log(\dots)$.

- 16** Bij asfaltbetonwegen met dicht asfaltbeton (DAB-wegen) geldt voor het verband tussen de snelheid v in km per uur van het verkeer en het geluidsniveau D in decibel van het verkeer bij benadering de formule: $D = 4 + 36 \cdot \log(v)$.

- a** In een bebouwde kom is de maximaal toegestane verkeerssnelheid 50 km per uur.
 Bereken het maximale geluidsniveau in de bebouwde kom.
b Bij welke snelheid is het geluidsniveau 75 dB?
c Herleid de gegeven formule tot de vorm $D = \log(a \cdot v^b)$.

- 17** Op het blaadje wordt $N(t) = 4 \cdot 5^{-2t+3}$ in de vorm $N(t) = b \cdot g^t$ geschreven.

In stap 1 is gebruik gemaakt van de rekenregel $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$.

Welke rekenregel is gebruikt in stap 2? En welke in stap 3?

	$N(t) = 4 \cdot 5^{-2t+3}$	
	$N(t) = 4 \cdot 5^{-2t} \cdot 5^3$	1
	$N(t) = 4 \cdot 5^3 \cdot (5^{-2})^t$	2
	$N(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^t$	3

- 18** Schrijf in de vorm $N(t) = b \cdot g^t$.

- a** $N(t) = 3^{3+2t}$ **d** $N(t) = 4^{-2-t}$
b $N(t) = 2 \cdot 9^{\frac{1}{2}t}$ **e** $N(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-3t}$
c $N(t) = 5 \cdot 3^{t-2}$ **f** $N(t) = 16^{\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}}$

- 19** **a** Gegeven zijn de formules $u = 6 \cdot (0,6)^t$ en $v = 7,2 \cdot (0,6)^{t-1}$.
 Laat algebraïsch zien dat geldt: $v = 2u$.
b Gegeven zijn de formules $S = 10^{0,4t+2}$ en $U = p \cdot 10^{0,4t}$.
 Bereken de waarde van p waarbij geldt dat voor elke waarde van t geldt: $S = 4U$.

Theorie

Naast de rekenregels gebruik je soms de hoofdeigenschap van logaritmen:

Uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$ en omgekeerd.

Deze eigenschap gebruik je bijvoorbeeld om een formule met logaritmen te herleiden naar een formule met exponenten of andersom.

Voorbeeld 1

$$y = \frac{1}{5} \cdot 2^{x-4}, \text{ druk } x \text{ uit in } y.$$

Oplossing

$$2^{x-4} = 5y$$

$$x - 4 = {}^2\log(5y)$$

$$x = 4 + {}^2\log(5y)$$

Voorbeeld 2

$$y = 4 - {}^3\log(5x), \text{ druk } x \text{ uit in } y.$$

Oplossing

$${}^3\log(5x) = 4 - y$$

$$5x = 3^{4-y}$$

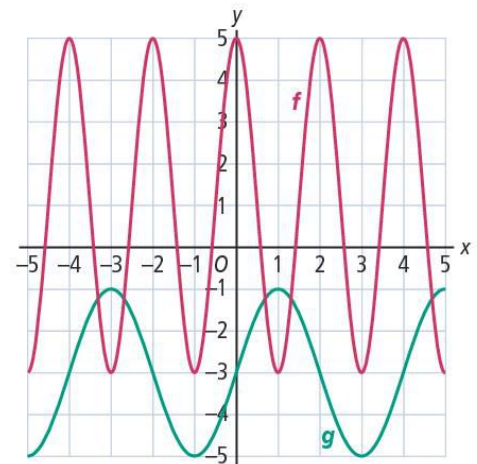
$$y = \frac{1}{5} \cdot 3^{4-y}$$

- 20** Druk x uit in y .
- a** $y = 3 \cdot 5^{x+2}$ **d** $y = 2 + 5 \cdot \log\left(\frac{1}{2}x\right)$
- b** $y = 3 \cdot {}^5\log(x+2)$ **e** $y = -12 + 15 \cdot 7^{2x-1}$
- c** $y = -1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **f** $y = -4,5 + 1,6 \cdot {}^7\log(4x-3)$

- 21** Het verband tussen de variabelen S en T voldoet aan de formule ${}^2\log(2S) = 3 - {}^2\log(3T)$.
- a** Herleid de gegeven formule tot de vorm ${}^2\log(\dots) = 3$.
- b** De formule die je opdracht a gevonden hebt, is ook te schrijven als $S \cdot T = a$.
Bereken algebraïsch de waarde van a .

Periodieke functies

- 22** Gegeven zijn de grafieken van de functies f en g .
- a** Geef van beide grafieken de periode, de evenwichtsstand en de amplitude.
- b** Stel de functievoorschriften op van f en g .
- 23** Bereken de evenwichtsstand, de amplitude en de periode van de grafieken bij de volgende formules.
- a** $A = 8 - 3 \sin(4(t+3))$
- b** $B = 200 + 450 \sin(\pi k)$
- c** $C = 0,3 \sin(4 - 0,1x) - 0,2$
- 24** **a** Van de grafiek van de functie $f(x) = a \sin(bx)$ is de amplitude 5 en de periode $\frac{3}{4}\pi$.
Bereken a en b .
- b** Stel een functievoorschrift op van een sinusoiden waarvan de punten $\left(\frac{1}{4}\pi, -3\right)$ en $\left(\frac{3}{4}\pi, 3\right)$ toppen zijn.



- 25** De hoeveelheid lucht in de longen is bij een regelmatige ademhaling een periodiek verschijnsel waarvoor bij een persoon bij benadering de formule $V = 2,5 + 1,8 \sin(0,4\pi t)$ geldt. Hierin is t in seconden en V in liters.
- a** Bereken hoeveel lucht zich in de longen bevindt als $t = 3$.
- b** Hoe vaak wordt volgens deze formule in één minuut in- en uitgeademd?
- c** Bereken op welke tijdstippen tussen 0 en 10 seconden er zich precies 3 liter lucht in de longen bevindt.
- d** Bij elke ademhaling is enige tijd minder dan een liter lucht in de longen.
Bereken hoeveel seconden dit het geval is.

Vaardigheden 10

SE

CE

K

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rijen
- Formules herleiden
- Sinusoiden
- Systematisch tellen



Vaardigheden 10

Rijen

- 1 In januari 2021 krijgt Petra € 50,- kledinggeld per maand en elke volgende maand krijgt ze er € 1,50 bij. Het bedrag aan kledinggeld dat ze ontvangt kun je met een rij $u(n)$ beschrijven, waarbij $u(0) = 50$ het kledinggeld is dat ze in januari krijgt en n het aantal maanden na januari 2021.
- Stel een recursieve formule en een directe formule op voor de rij $u(n)$.
 - De rij $u(n)$ is een rekenkundige rij. Waarom?
 - Bereken het totale bedrag aan kledinggeld dat zij in het eerste halfjaar van 2021 ontvangt.
 - Gerdine krijgt in januari 2021 ook € 50,- kledinggeld en zij krijgt elke volgende maand 2% er bij. Het bedrag aan kledinggeld dat zij krijgt, kun je beschrijven met de meetkundige rij met recursieve formule $v(n+1) = v(n) \cdot 1,02$ waarbij $v(0) = 50$.
Stel een directe formule op voor deze rij.

Theorie

Bij een rekenkundige rij geldt voor de som van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$:

$$\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{1}{2} \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$$

Bij een meetkundige rij met reden r geldt voor de som van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$:

$$\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{\text{eerstvolgende term} - \text{eerste term}}{r - 1}$$

Voorbeeld 1

Gegeven is de rekenkundige rij u : 16; 14,5; 13 ..., met $u(1) = 16$.
Bereken de som van de 7e tot en met de 21e term.

Oplossing

Het verschil is $-1,5$, dus $u(0) = 17,5$.
Een directe formule voor de rij is $u(n) = 17,5 - 1,5 \cdot n$.
 $u(7) = 7$ en $u(21) = -14$.
De 7e tot en met de 21e term zijn 15 termen.
De gevraagde som is

$$\sum_{k=7}^{21} u(k) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (7 + (-14)) = -52,5.$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de rij $v(n) = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Bereken $\sum_{k=3}^9 v(k)$.

Oplossing

v is een meetkundige rij met reden $\frac{1}{2}$.
De gevraagde som is

$$\sum_{k=3}^9 u(k) = \frac{v(10) - v(3)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - 128}{-\frac{1}{2}} = 254.$$

- 2 Bereken met behulp van de formules voor zowel Petra als Gerdine uit opdracht 1, het totale bedrag zij in 2021 aan kledinggeld zullen ontvangen.

- 3** Van een rekenkundige rij is gegeven $u_2 = -269$ en $u_{120} = 85$.
- Bereken u_1 en u_{100} .
 - Stel een recursieve formule en een directe formule op voor de rij u_n .
 - Bereken $\sum_{k=1}^{20} u_k$.
- 4** Van een meetkundige rij is gegeven $u_2 = 135$ en $u_5 = 3645$.
- Bereken u_1 en u_{10} .
 - Stel een recursieve formule en een directe formule op voor de rij u_n .
 - Bereken $\sum_{k=2}^9 u_k$.
- 5** Nico zet 1500 euro op een bankrekening bij een rente van 2% per jaar. Hij gaat ervan uit dat het rentepercentage in de komende 20 jaar niet wijzigt.
- Noem v_n de rente die wordt bijgeschreven na n jaar.
Bereken v_1 , v_2 en v_3 .
 - Toon aan dat v een meetkundige rij is. Stel een directe formule op voor v_n .
 - Om te berekenen hoeveel rente Nico na twintig jaar in totaal heeft ontvangen, tel je de rentes die hij elk jaar ontvangt bij elkaar op.
Hoeveel rente heeft Nico na 20 jaar in totaal ontvangen?
 - Een andere manier om de hoeveelheid rente te berekenen over 20 jaar, is $1500 \cdot 1,02^{20} - 1500$.
Leg dit uit.

Formules herleiden

- 6** Druk K uit in t .
- $t = \frac{1}{2}(6K - 5)$
 - $3(K - 5) + 2t = 6 - 4(t - 3)$
 - $(t + 5)(2K - 3) = 8$
 - $t(2K - 1) = 3t + 6$
 - $2t - 7 = (K - 3)^3$
 - $t = \sqrt{3K + 1}$
- 7** Gegeven zijn de formules $Y = 5K^{0,7}L^{0,6}$ en $L = K^{0,5}$.
- Druk Y uit in K .
 - Druk K uit in L en druk Y uit in L .
- 8** Druk y uit in x en vereenvoudig het resultaat.
- $y = 4 - 3t^2$ en $t = x - 2$
 - $y = t^2 - 4$ en $t = \sqrt{x + 1}$
 - $y = t^2 - 2t - 7$ en $t = 3x$
 - $\frac{2y}{2t + 6} = 4$ en $3x + t = 2$

- 9** Op het blaadje is de formule $y = \frac{3}{x} - \frac{5}{x+2} + 2$ herleid tot een vorm met één breuk.

- a** Leg uit waarom in stap 1 zowel de teller als de noemer van de eerste breuk met $x+2$ zijn vermenigvuldigd.
b Met welke factor zijn teller en noemer van de tweede breuk vermenigvuldigd? En hoe zit dat in de derde breuk?
c Leg uit wat er in de stappen 2 en 3 is gebeurd.

$y = \frac{3}{x} - \frac{5}{x+2} + \frac{2}{1}$	
$y = \frac{3 \cdot (x+2)}{x \cdot (x+2)} - \frac{5 \cdot x}{x \cdot (x+2)} + \frac{2 \cdot x \cdot (x+2)}{x \cdot (x+2)}$	1
$y = \frac{3x+6-5x+2x^2+4x}{x(x+2)}$	2
$y = \frac{2x^2+2x+6}{x(x+2)}$	3

- 10** Herleid de formules tot een vorm met één breuk.

a $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

d $y = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$

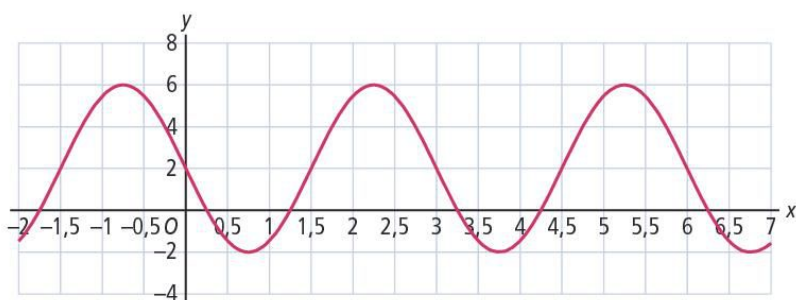
b $y = 3 - \frac{2}{x}$

e $y = 2\sqrt{x-1} + \frac{5}{\sqrt{x-1}}$

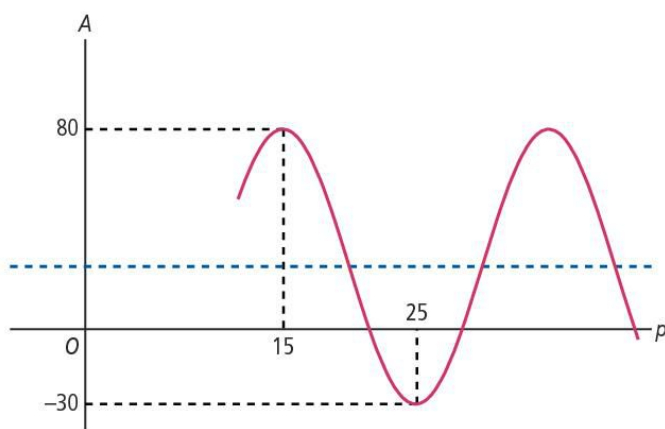
c $y = \frac{1}{x} - \frac{3}{4} + \frac{2}{x-1}$

f $y = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}$

Sinusoïden



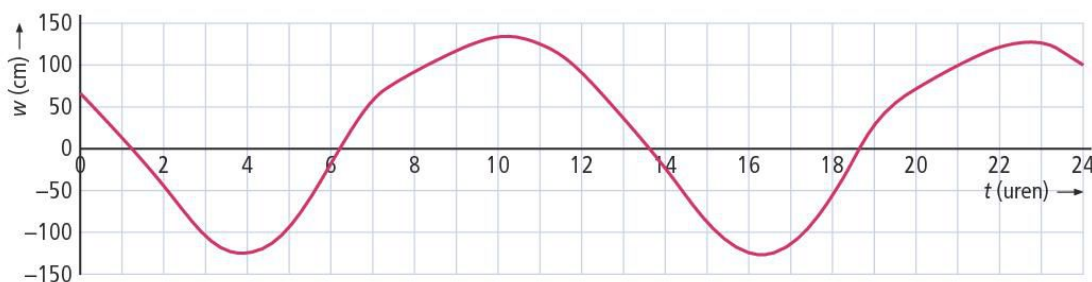
- 11** De grafiek is een sinusoïde. Gebruik deze grafiek bij de beantwoording van de volgende vragen.
- Hoe groot is de evenwichtsstand?
 - Hoe groot is de amplitude?
 - Hoe groot is de periode?
 - Geef de coördinaten van een punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
- 12**
- Stel een formule op voor de sinusoïde uit opdracht 11.
 - Leg uit dat de grafiek in opdracht 11 ook kan worden beschreven door $y = 2 - 4\sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right)$.
 - Beredeneer wat de coördinaten zijn van de toppen op het interval $[10, 16]$.



- 13** De gegeven sinusöide geeft het verband tussen de variabelen A en p .

- Stel een formule op voor de sinusöide.
- Bereken met behulp van symmetrie en periodiciteit de coördinaten van de eerste top waarvoor geldt $p > 100$.

- 14** Rijkswaterstaat publiceert voor een aantal plaatsen langs de Nederlandse kust de verwachte waterstanden. Deze worden met behulp van een wiskundig model berekend op basis van meetgegevens over een lange periode daarvoor.
De grafiek geeft de verwachte waterstand op 14 november 2012 voor Schiermonnikoog.



Met de formule $w = 4 + 128 \sin(0,51(t + 5,4))$ kunnen de waarden in de grafiek worden benaderd.

Hierin is w de waterstand in cm en t de tijd in uren met $t = 0$ om 0:00 uur.

Het tijdstip van de maximale waterstand 's avonds verschilt volgens de formule met dat in de grafiek.

Bereken hoeveel minuten dat verschil is.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2014, tijdvak 1)

Systematisch tellen

- 15** Vijf vriendinnen, Petra, Ineke, Hanneke, Gerlinde en Ans willen een feest geven. Uit hun midden kiezen ze een drietal dat samen het feest gaat organiseren. Ans vraagt zich af hoeveel verschillende drietallen er geselecteerd kunnen worden. Ze probeert het antwoord te vinden met een systematische aanpak.
- Op een stukje papier schrijft ze de namen en daaronder het rijtje w w w n n. Dat betekent in dit geval dat ze als eerste drietal Petra, Ineke en Hanneke heeft geselecteerd. De w staat voor 'wel kiezen' en de n voor 'niet kiezen'.
- Welk drietal heeft ze in de volgende rij geselecteerd?
 - Onderzoek hoeveel verschillende drietallen in totaal geselecteerd kunnen worden.

P	I	H	G	A
w	w	w	n	n
w	w	n	w	n
...	...	...	...	...

Theorie

Een combinatie van 3 uit 7 is een keuze van een drietal uit een zevental: drie wel kiezen en vier niet kiezen.

Een rooster is een geschikt telmodel om het aantal mogelijke drietallen te berekenen, want drie kiezen uit zeven komt overeen met het aantal manieren om in een rooster drie stappen naar rechts en vier stappen omhoog te doen.

Een route in een rooster vanuit (0, 0) naar (3, 4) bestaat uit zeven stappen waarvan drie naar rechts en vier omhoog.

Het totaal aantal mogelijke routes noteer je als $\binom{7}{3}$.

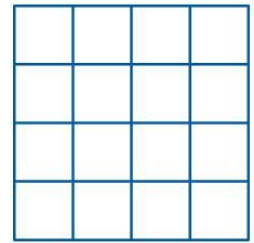
Dit getal kun je met je rekenmachine berekenen.



1	5	15	35	70
1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

- 16**
 - In een vaas zitten 12 witte en 3 rode ballen. Je pakt de ballen er een voor een uit en legt ze naast elkaar neer. Een mogelijk rijtje dat zo ontstaat is
w w w w w r r w w w w w w w r
Hoeveel verschillende rijtjes kunnen zo ontstaan?
 - Je gooit 10 keer met een muntstuk.
Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er met vijf keer kop en vijf keer munt?
 - Op hoeveel manieren kun je een groep van zeven personen in een groep van drie en een groep van vier verdelen?
- 17** In een kamer zijn acht lampen die onafhankelijk van elkaar aan gedaan kunnen worden.
Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er
- om precies vijf lampen aan te doen?
 - om minstens vijf lampen aan te doen?

- 18** Bereken het aantal mogelijkheden om dit 4×4 -bord te verven.
- Als elk veld naar vrije keus zwart of wit geverfd wordt.
 - Als 8 velden zwart en 8 velden wit geverfd worden.
 - Als 2 velden wit, 4 zwart en 10 rood geverfd worden.
 - Als elk veld met een andere kleur geverfd wordt, waarbij uit 20 kleuren gekozen mag worden.



- 19** Negen toeristen moeten over een gele, een rode en een blauwe boot worden verdeeld.
- Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er, als
- in elke boot drie personen komen.
 - in elke boot minstens 2 en hoogstens 4 personen komen.
 - geen enkele boot leeg is.

- 20** Een groot kerkorgel telt soms wel enkele duizenden orgelpijpen. De pijpen zijn gegroepeerd in registers. Zo'n register is een rij van ruim 50 pijpen van verschillende lengte. Een aantal registers is hiernaast afgebeeld. Elk register onderscheidt zich van andere registers door vorm en materiaal van de pijpen. Elk register klinkt daardoor anders.
- Hilde gaat naar de muziekschool voor orgelles. Daar speelt ze op een orgel dat één toetsenbord heeft en 16 registers. Als alle registers op 'aan' staan, komt er bij het indrukken van een toets geluid uit 16 orgelpijpen. Voordat Hilde gaat spelen, moet ze eerst kiezen welk(e) register(s) ze 'aan' wil hebben. Zo'n keuze heet een registratie. Zet ze bijvoorbeeld alleen de registers 3, 7 en 13 op 'aan' dan zal bij het indrukken van een toets maar uit drie pijpen geluid komen. In de les mag ze een, twee of drie registers aanzetten. Anders hebben anderen last van het geluid.



- Bereken uit hoeveel verschillende registraties ze in de les kan kiezen.
- Haar leraar is organist in een kerk met een groot orgel. Dat orgel heeft 45 registers en drie toetsenborden, aangeduid met I, II en III. In de tabel hiernaast lees je af aan welke toetsenborden de verschillende registers gekoppeld zijn. Hilde mag voor één keer op dit kerkorgel spelen. Omdat ze nog niet op meer dan één toetsenbord tegelijk kan spelen, moet ze eerst het toetsenbord kiezen waarop ze zal gaan spelen. Daarna nog de registratie bij het gekozen toetsenbord. Van haar leraar mag ze helemaal vrij kiezen, geluidsoverlast is nu geen probleem.

Bereken uit hoeveel registraties ze kan kiezen.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 1995, tijdvak 2)

<i>pijpen van</i>	<i>gekoppeld aan toetsenbord</i>
registers 1 t/m 16	I
registers 17 t/m 31	II
registers 32 t/m 45	III

Vaardigheden 11

SE

CE

K

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Logaritmische en exponentiële formules
- Differentiëren
- Rijen
- Systematisch tellen



Vaardigheden 11

Logaritmische en exponentiële formules

1 Schrijf als één logaritme.

- a $3 + {}^2\log(5)$
- b $2 \cdot {}^3\log(x) + {}^3\log(x-1)$
- c $2 \cdot {}^6\log(2x) - {}^6\log(4x) + 1$
- d $\log(100x + 200) - \log(x + 2)$

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$${}^g\log(a^p) = p \cdot {}^g\log(a)$$

Uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$
en omgekeerd.

- 2 a Laat zien dat de formule $u = 0,5 \cdot 3^p$ te herleiden is tot $p = {}^3\log(2u)$.
- b Laat zien dat de formule $p = {}^{0,65}\log\left(\frac{1-u}{2}\right)$ te herleiden is tot $u = 1 - 2 \cdot 0,65^p$.
- c Gegeven is de formule $p = {}^{1,2}\log(10u - 250)$.
Druk u uit in p .

3 Druk t uit in N .

- a $N = \frac{3}{1 + 2^t}$
- b $N = \frac{24}{2 + 0,5 \cdot 3^t}$

4 Gegeven is de formule $P = 8K + {}^2\log(W) + 40$.

- a Neem $W = 1024$ en druk K uit in P .
- b Neem $K = 25$ en druk W uit in P .
- c Neem $P = 50$ en druk W uit in K .

5 Gegeven is de formule $L = \frac{300}{1 + 299 \cdot 0,65^t}$

- a Leg uit waarom $0,65^t$ naar 0 nadert als de waarde van t steeds groter wordt.
- b Ga na tot welke waarde $1 + 299 \cdot 0,65^t$ op den duur nadert.
- c Beredeneer hoe groot de grenswaarde van L is.

6 Beredeneer hoe groot de grenswaarde is.

- a $U = 3 + 21 \cdot 0,43^p$
- b $G = \frac{14}{2 + 3 \cdot {}^{0,5}\log(x)}$
- c $H = 13,2(3 + 0,81^{2p})$
- d $F = 2 + 0,6^{\frac{1}{L}}$

- 7** Vliegtuigen veroorzaken in de buurt van vliegvelden veel geluidsoverlast. De geluidsbelasting B (de hoeveelheid geluid) op een plaats in de buurt van een vliegveld hangt af van het aantal vliegtuigen N dat per jaar passeert en van het gemiddelde geluidsniveau per vliegtuig L . Voor het verband tussen L , N en B geldt de formule $B = 20 \cdot \log(N) + \frac{4}{3}L - 157$.
- a** In een bepaald jaar is het gemiddelde geluidsniveau per vliegtuig gelijk aan 76 en de geluidsbelasting op een plek in de buurt van een vliegveld 53,3.
Bereken het aantal vliegtuigen dat in dat jaar deze plek passeert.
- b** Stel dat het aantal vliegtuigen dat passeert, verdubbelt en dat het gemiddelde geluidsniveau per vliegtuig gelijk blijft.
Met hoeveel neemt B toe als N verdubbelt?
- c** Voor $B = 53,3$ is het verband tussen B en L gegeven door de formule $53,3 = 20 \cdot \log(N) + \frac{4}{3}L - 157$.
Druk L uit in N .
- d** Vanwege een milieuwetgeving is de maximale geluidsbelasting gelijk aan 45.
Het maximaal toegestane aantal vliegtuigen bij deze geluidsbelasting is afhankelijk van het gemiddelde geluidsniveau per vliegtuig.
Laat zien dat voor het verband tussen N en L de formule $N = 1,259 \cdot 10^{10} \cdot 0,858^L$ geldt.
- e** Door technologische ontwikkelingen neemt het gemiddelde geluidsniveau per vliegtuig in 20 jaar tijd af van 76 naar 70.
Bereken hoeveel vliegtuigen er méér mogen vliegen bij een gelijkblijvende geluidsbelasting van $B = 45$.
(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2003, tijdvak 2)

Differentiëren

Theorie

Dit overzicht van de formules die je kunt gebruiken bij het differentiëren, staat ook op een pagina Formules van het Centraal Examen.

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

- 8** Gegeven is de functie $f(x) = 4\sqrt{x} - \frac{1}{2}x$.
- Bereken de gemiddelde toename van f als x toeneemt van $x = 1$ tot $x = 4$.
 - Bereken het differentiequotient $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ over het interval $[0, 1]$.
 - Bepaal het functievoorschrift van $f'(x)$.
 - Beredeneer met behulp van de afgeleide dat de grafiek van f dalend is voor $x > 16$.

- 9** Differentieer en vereenvoudig je antwoord.

- | | |
|---|---|
| a $f(x) = 0,64x^{2,75} - 3,75x^{0,12}$ | e $h(x) = (2x^2 + 7x - 4)(5 - 3x)$ |
| b $g(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2}$ | f $l(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{3x + 7}$ |
| c $k(x) = (3x^2 - 5)^4$ | g $j(x) = (x^2 - 3x) \cdot \sqrt{x}$ |
| d $q(x) = 8 + 3 \cdot e^{4x}$ | h $w(x) = 10^{-x} + 10^{2x}$ |

- 10 a** Differentieer de functie $g(x) = (2x - 1) \ln(x)$.

- b** Gegeven is de formule $y = \log(x) + 3$.

Stel een formule op voor $\frac{dy}{dx}$

- c** Gegeven is de formule $P = \frac{15,6}{G} - 22,8$.

Stel een formule op voor $\frac{dP}{dG}$

- 11** De directie van een vervoersmaatschappij heeft onderzoek laten doen naar het verband tussen de jaarlijkse winst en het aantal passagiers. Voor de gemiddelde winst GW in euro's per passagier kan het volgende model worden gebruikt:

$GW = -0,125q + 10 - \frac{150}{q}$. Hierin is q het aantal passagiers in miljoenen per jaar. De formule geldt voor $10 \leq q \leq 50$.

- In 2015 werden 25 miljoen passagiers vervoerd.
Bereken de gemiddelde winst per passagier in 2015.
- Bereken ook de totale winst in 2015.
- Toon aan dat je met de formule $TW = -0,125q^2 + 10q - 150$ de totale winst in miljoenen euro's in een jaar kunt berekenen.
- Bereken bij welk aantal passagiers de maximale totale winst wordt bereikt.
Hoe groot is die maximale winst?

Rijen

- 12** Op de foto zie je een amfitheater. Het theater heeft 58 oplopende rijen voor toeschouwers. De bovenste rij heeft plaats voor 456 toeschouwers. Op elke volgende rij is het aantal zitplaatsen telkens 6 minder.

- Bereken het aantal zitplaatsen op de onderste rij.
- Ga met een berekening na of er in dit theater plaats is voor 16000 mensen.



- 13** Abe is een fanatieke hardloper. Voor de sponsorloop die zijn school organiseert om geld in te zamelen voor een goed doel, heeft hij een schema gemaakt. Hij gaat ervan uit dat hij rustig begint en elke ronde steeds 2 seconden sneller loopt dan de voorgaande ronde. De eerste ronde loopt hij in 150 seconden, over de tweede ronde doet hij dus 148 seconden, enzovoort. De rondetijden voldoen aan de formule $t(n) = 152 - 2n$. Hierin is $t(n)$ de tijd in seconden voor ronde n . De totale tijd $T(n)$ die Abe over n ronden doet, voldoet aan de formule $T(n) = 151n - n^2$.

- Toon aan dat de formule voor $T(n)$ juist is.
- De sponsorloop duurt 30 minuten.
Bereken hoeveel volledige ronden Abe in die tijd kan afleggen.
- Abe wordt gesponsord door zijn ouders. Voor zijn eerste ronde geven zij slechts 0,01 euro, maar elke volgende ronde geven zij twee keer zo veel als voor de voorgaande ronde. Het bedrag in euro's dat hij krijgt in de n -de ronde, kun je berekenen met de formule $b_n = 0,005 \cdot 2^n$.
Toon aan dat de formule voor b_n juist is.
- Hoeveel euro betalen zijn ouders als Abe na 10 ronden stopt?

- 14** Aan het einde van elke maand moet een drogisterijketen tandpasta inkopen bij de groothandel. Om een schatting te maken van het aantal in te kopen tubes wordt het volgende model gebruikt: neem het gemiddelde van de verkoop in de twee voorgaande maanden.

- In januari zijn 5200 tubes verkocht en in februari 4000 tubes.
Bereken hoeveel tubes tandpasta in maart worden ingekocht.
- Als je aanneemt dat de schatting steeds de werkelijke verkoop in die maand is, kun je met dit model ook de verkoop van de volgende maanden uitrekenen. In een formule: $V(n+2) = \frac{1}{2} V(n+1) + \frac{1}{2} V(n)$ met $V(0) = 5200$ en $V(1) = 4000$. Hierin is $V(n)$ het aantal verkochte tubes tandpasta n maanden na januari.
Bereken hoeveel tubes tandpasta volgens dit model in juli worden verkocht.
- Als je met dit model een groot aantal maanden doorrekent, verandert het aantal tubes tandpasta niet meer.
Bereken na hoeveel maanden dit voor het eerst het geval is.

Systematisch tellen

- 15** In Nederland zijn ongeveer 24,7 miljoen bankpassen in omloop. Elke bankpas is beveiligd met een pincode bestaande uit vier cijfers, elk te kiezen uit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9. Daarbij mag een cijfer vaker voorkomen.

- Hoeveel verschillende pincodes bestaan er?
- Ga ervan uit dat alle pincodes even vaak voorkomen. Hoeveel bankpassen hebben naar verwachting dezelfde pincode als jouw bankpas?
- Tom is zijn pincode vergeten. Hij weet nog wel dat er één 4 en het cijfer 6 in voorkomen. Bij de bank heeft hij drie pogingen om zijn pincode in te toetsen. Indien de code de derde keer weer fout is, wordt zijn pas geblokkeerd. Heeft Tom genoeg mogelijkheden om er zeker van te zijn dat zijn pas niet geblokkeerd wordt?
- Hoeveel pincodes kun je maken met de cijfers 2 en 5 als die er allebei in moeten voorkomen?



Theorie

Je kunt op verschillende manieren een telprobleem oplossen.

- door alle mogelijkheden systematisch uit te schrijven of
- door gebruik te maken van een (deel van) een boomdiagram, een rooster, een wegendiagram, schema of tabel.

Soms moet je deelresultaten combineren.

- 16** Een gezelschap van vier mannen en vier vrouwen heeft zojuist met elkaar gedineerd. Nu moeten drie personen aangewezen worden die de afwas zullen doen.

Bereken het aantal mogelijke drietallen met twee mannen en één vrouw.

- 17** Je gooit met een viervlaksdobbelsteen (1 tot en met 4) en een zesvlaksdobbelsteen (1 tot en met 6). Je noteert de som van de aantallen ogen.

- Op hoeveel manieren kun je het resultaat 8 krijgen?
- Om de uitkomsten te noteren kun je gebruikmaken van een schema. Het schema is al voor een deel ingevuld. Hoeveel uitkomsten hebben als resultaat 5 of groter?
- Stel je berekent het verschil tussen de aantallen ogen die je gegooit hebt. Daarbij trek je het kleinste aantal van het grootste aantal af. Bij een gelijk aantal ogen is het verschil 0. Welk verschil komt het meest voor? En welk verschil het minst?

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	..	..	..
4	..	..	..	..
5	..	..	..	..
6	..	..	..	..

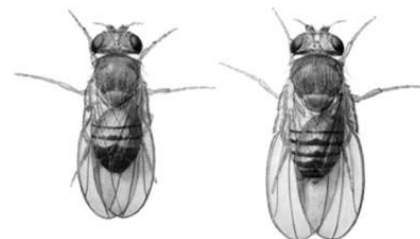
- 18** Je gooit met een rode, een gele en een zwarte (gewone) dobbelsteen en telt de aantallen ogen bij elkaar op. Beredeneer op hoeveel verschillende manieren je het resultaat 15 kunt krijgen.

- 19** Een pas onafhankelijk geworden land moet een vlag kiezen. De vlag bestaat uit drie horizontale banen, die elk een kleur krijgen. Daarbij kan gekozen worden uit de kleuren geel, blauw en zwart. Twee banen met dezelfde kleur mogen niet aan elkaar grenzen.

Bereken hoeveel verschillende vlaggen mogelijk zijn.



- 20** Bij praktische opdrachten voor het vak biologie over kruisingen wordt vaak gebruik gemaakt van fruitvliegjes (*Drosophila melanogaster*). Deze fruitvliegjes zijn namelijk makkelijk te kweken en de ontwikkeling van ei tot fruitvliegje duurt maar negen dagen. Men kan dus in zeer korte tijd veel generaties kweken. Bovendien is een aantal eigenschappen van fruitvliegjes goed zichtbaar: oogkleur (rood/zwart), vleugelvorm (kort/lang) en huidskleur (donker/geel). Een fruitvliegje met zwarte oogkleur, korte vleugels en een gele huidskleur wordt getypeerd als: z-k-g.



- a** Leg uit dat er op basis van deze eigenschappen acht typen mannetjes en acht typen vrouwtjes zijn.
- b** Voor een kruisingsexperiment moeten vier fruitvliegjes, twee mannelijke en twee vrouwelijke, in een kweekruimte worden geplaatst. Hierbij gelden twee eisen:
- De twee mannelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.
 - De twee vrouwelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.

Bereken hoeveel verschillende samenstellingen in de kweekruimte mogelijk zijn.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2012, tijdvak 2)

- 21** Een planoloog wil graag weten op grond van welke eigenschappen de bewoners de straten van hun wijk beoordelen. Als onderdeel van zijn onderzoek legt hij een aantal proefpersonen groepjes van drie straten voor. Hij vraagt hen bij elk groepje aan te wijzen welke twee van de drie straten het meest op elkaar lijken. Het onderzoek heeft betrekking op 10 straten, voor het gemak A, B, C, D, E, F, G, H, K, L genoemd. Hieruit worden alle mogelijke groepjes van drie gevormd en elk groepje wordt in alfabetische volgorde op een kaartje geschreven. Hiernaast zie je drie voorbeelden.

D	D	A
F	H	C
G	K	D

- a** Bereken hoeveel kaartjes er nodig zijn.
- b** Op hoeveel kaartjes komt straat A voor?
- c** Op hoeveel kaartjes komen de straten A en B samen voor?
- d** Een proefpersoon is bereid om bij alle kaartjes zijn keuze van twee straten te maken.

Onderzoek of het mogelijk is dat hij 7 keer voor de straten AB, 7 keer voor de straten AC en 7 keer voor de straten AD kiest.

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 1990, tijdvak 1)