

18 Periodieke functies

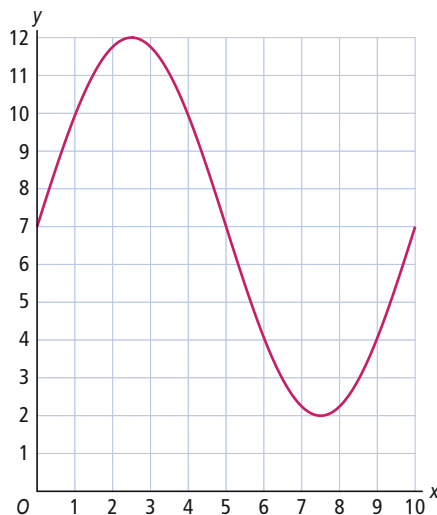
Voorkennis

- V1 a** Eén ademhaling duurt 5 seconden.
b Er zit minimaal 1 liter en maximaal 4 liter lucht in de longen.
c Er zit gemiddeld 2,5 liter lucht in de longen en de maximale afwijking ten opzichte van dit gemiddelde is 1,5 liter.

- V2 a** Grafiek 1:
 evenwichtsstand: $(4 + -2) : 2 = 1$
 amplitude: $4 - 1 = 3$
 periode: $1 - -5 = 6$
 Grafiek 2:
 evenwichtsstand: $(1 + -4) : 2 = -1,5$
 amplitude: $1 - -1,5 = 2,5$
 periode: $(5 - -3) \times 2 = 8 \times 2 = 16$

- b** Grafiek 3 is niet periodiek, omdat de grafiek geen stukje heeft dat zichzelf steeds herhaalt.

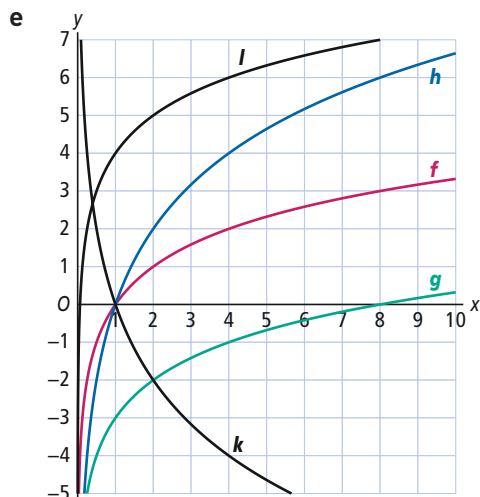
V3



- V4 a** Na $60 : 4 = 15$ seconden is punt A voor het eerst op de hoogte van de as.
 30 seconden later (dus 45 seconden na het begin) is punt A weer op de hoogte van de as.
b Het hoogste punt bevindt zich 20 meter boven de as van het reuzenrad, dus de straal van het rad is 20 meter.
c Punt A is na 80 seconden even hoog als na 20 seconden, dus 10 meter hoog.
d In de eerste minuut bevindt punt A zich na 10 seconden en na 50 seconden 10 meter onder de as. De grafiek herhaalt zich met een periode van 60 seconden, dus punt A bevindt zich ook 10 meter onder de as na bijvoorbeeld 70 seconden, 110 seconden en 130 seconden.
e Punt A legt in één minuut een cirkel af met een straal van 20 meter.
 Dat is $2 \cdot \pi \cdot 20 \approx 126$ meter.

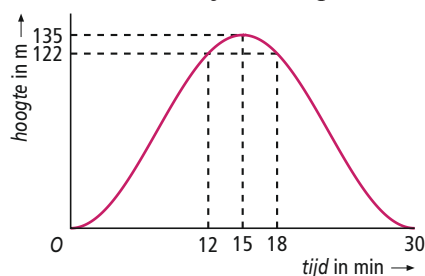
- V5 a** Bij $x = 1$ is de y -waarde bij f gelijk aan 0 en bij g gelijk aan -3 . Je krijgt de grafiek van g dus door de grafiek van f drie eenheden omlaag te schuiven.
 Dus $g(x) = f(x) - 3 = {}^3\log(x) - 3$.
b Bij iedere x -waarde is de y -waarde bij h twee keer zo groot als bij f .
 Alle punten op de grafiek liggen twee keer zo ver van de x -as af.
c $h(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot {}^2\log(x)$

d $j(x) = f(x) + 6 = {}^2\log(x) + 6$

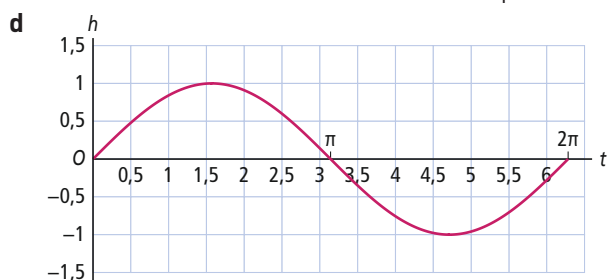


18.1 Sinusfunctie

intro Eén rondgang in het reuzenrad duurt 30 minuten. Na 15 minuten ben je op het hoogste punt van 135 meter. Het duurt $15 - 12 = 3$ minuten voordat je van 122 meter tot 135 meter bent geklommen. Vanwege de symmetrie ben je drie minuten later weer gedaald tot 122 meter. Het duurt in totaal $3 + 3 = 6$ minuten voordat je weer op een hoogte van 122 meter bent.



- 1 a Het wiel is een cirkel met een straal van 1 meter. De omtrek van deze cirkel is $2 \cdot \pi \cdot \text{straal} = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi$ meter.
- b Na π seconden heeft punt P de helft van de cirkel afgelegd. Het punt bevindt zich dan aan de linkerkant op de hoogte van de as.
- c Punt P bevindt zich (voor het eerst) in het laagste punt als het punt driekwart van de cirkel heeft afgelegd. Dat is na $\frac{3}{4} \times 2\pi = 1\frac{1}{2}\pi \approx 4,71$ seconden.

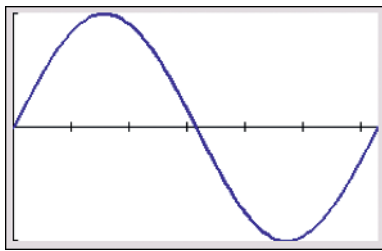


- e De grafiek herhaalt zich met een periode van 2π seconden, dus punt P is opnieuw in het hoogste punt na $\frac{1}{2}\pi + 2\pi = 2\frac{1}{2}\pi \approx 7,85$ seconden.

18 Periodieke functies

2 Invoer: $y_1 = \sin(x)$

Venster: $0 \leq x \leq 2\pi$, $-1 \leq y \leq 1$



De grafieken zijn gelijk.

3 a Je ziet 3 perioden.

b $(-2\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(2\pi, 0)$ en $(4\pi, 0)$

c Op (bijvoorbeeld) het interval $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$ is de grafiek van f toenemend dalend.

d Op (bijvoorbeeld) de intervallen $[0, \frac{1}{2}\pi]$ en $[2\pi, 2\frac{1}{2}\pi]$ is de grafiek van f afnemend stijgend.

e $(-1\frac{1}{2}\pi, 1)$, $(-\frac{1}{2}\pi, -1)$, $(\frac{1}{2}\pi, 1)$, $(1\frac{1}{2}\pi, -1)$, $(2\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(3\frac{1}{2}\pi, -1)$

4 a De grafiek van f herhaalt zich met een periode van 2π .

Op de grafiek ligt het punt $(\frac{1}{2}\pi, 1)$. Eén periode naar rechts ligt het punt

$(2\frac{1}{2}\pi, 1)$ en twee perioden naar rechts ligt het punt $(4\frac{1}{2}\pi, 1)$.

De punten $(2\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(4\frac{1}{2}\pi, 1)$ liggen dus op de grafiek van f .

De functie f heeft in die punten een maximum.

b $(6\frac{1}{2}\pi, 1)$, $(8\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(10\frac{1}{2}\pi, 1)$

c $(1\frac{1}{2}\pi, -1)$, $(3\frac{1}{2}\pi, -1)$ en $(5\frac{1}{2}\pi, -1)$

d $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$ en $(3\pi, 0)$

e De grafiek van f snijdt de x -as in alle x -waarden die een veelvoud zijn van π , dus in de punten $\dots(0, 0), (\pi, 0), (2\pi, 0), (3\pi, 0) \dots$

De grafiek van f zal de x -as dus ook snijden in $(23\pi, 0)$.

5 a De snijpunten van de grafiek met de x -as zijn

$\dots(-\pi, 0), (0, 0), (\pi, 0), (2\pi, 0) \dots$ en dus ook $(7\pi, 0)$.

Het punt $(7\pi, 1)$ ligt niet op de grafiek van f .

b De snijpunten van de grafiek met de x -as zijn

$\dots(-\pi, 0), (0, 0), (\pi, 0), (2\pi, 0) \dots$ en dus ook $(119\pi, 0)$.

Het punt $(119\pi, 0)$ ligt wel op de grafiek van f .

c Op de grafiek ligt het punt $(1\frac{1}{2}\pi, -1)$. Twee perioden naar rechts ligt het

punt $(5\frac{1}{2}\pi, -1)$. Het punt $(5\frac{1}{2}\pi, 1)$ ligt niet op de grafiek van f .

d De snijpunten van de grafiek met de x -as zijn

$\dots(-\pi, 0), (0, 0), (\pi, 0), (2\pi, 0) \dots$ en dus ook $(-11\pi, 0)$.

Het punt $(-11\pi, 0)$ ligt wel op de grafiek van f .

e Op de grafiek ligt het punt $(1\frac{1}{2}\pi, -1)$. Vijf perioden naar links ligt het punt

$(-8\frac{1}{2}\pi, -1)$. Het punt $(-8\frac{1}{2}\pi, 1)$ ligt wel op de grafiek van f .

f Op de grafiek ligt het punt $(\frac{1}{2}\pi, 1)$. 118 perioden naar rechts ligt het punt

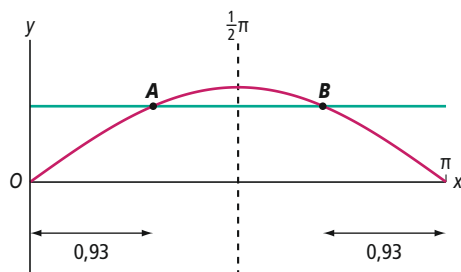
$(236\frac{1}{2}\pi, 1)$. Het punt $(236\frac{1}{2}\pi, 1)$ ligt wel op de grafiek van f .

- 6 a** Invoer: $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = 0,8$
 Venster: $0 \leq x \leq 2\pi$, $-1,5 \leq y \leq 1,5$

Optie: snijpunt

Het eerste snijpunt is $(0,93; 0,80)$, dus de coördinaten van punt A zijn $(0,93; 0,80)$.

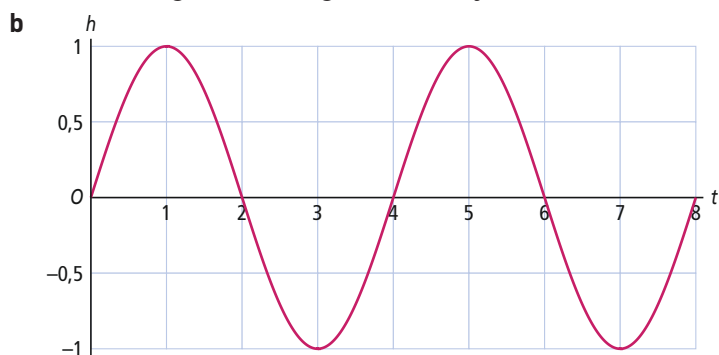
- b** De grafiek van f is (lijn)symmetrisch in de verticale lijn door $x = \frac{1}{2}\pi$.
 Daaruit volgt dat de horizontale afstand tussen $x = 0$ en punt A gelijk is aan de horizontale afstand tussen punt B en $x = \pi$, zie de schets hieronder.



Dus de x -coördinaat van punt B is $\pi - 0,93 \approx 2,21$.

- c** De grafiek van f is (punt)symmetrisch in het punt $(\pi, 0)$.
 Vanwege de symmetrie is de horizontale afstand tussen punt B en $(\pi, 0)$ gelijk aan de horizontale afstand tussen $(\pi, 0)$ en punt C . Deze afstand is $\pi - 2,21 \approx 0,93$. De x -coördinaat van punt C is $\pi + 0,93 \approx 4,07$.
 De coördinaten van punt C zijn $(4,07; -0,80)$.
 Vanwege de symmetrie is de horizontale afstand tussen punt A en $(\pi, 0)$ gelijk is aan de horizontale afstand tussen $(\pi, 0)$ en punt D . Deze afstand is $\pi - 0,93 \approx 2,21$. De x -coördinaat van punt D is $\pi + 2,21 \approx 5,35$.
 De coördinaten van punt D zijn $(5,35; -0,80)$.

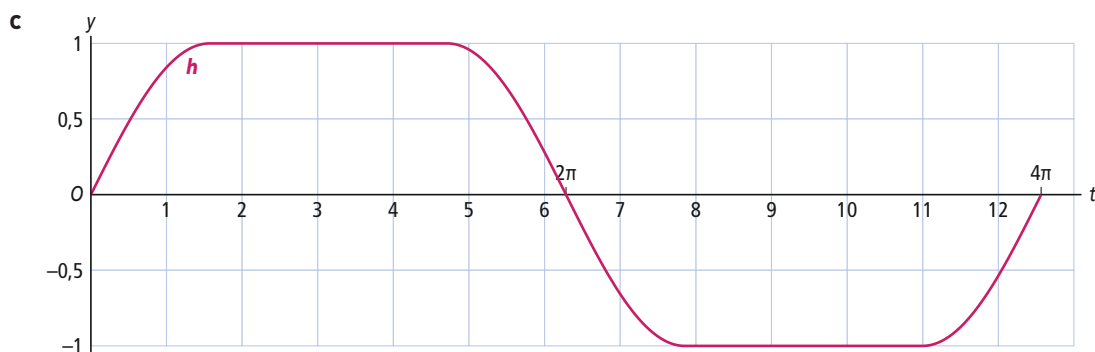
- 7 a** Punt P bereikt (voor het eerst) de grootste hoogte na een kwart van de periode, dus na $\frac{1}{4} \times 4 = 1$ seconde. De periode is 4 seconden, dus punt P bereikt de grootste hoogte ook na bijvoorbeeld 5 seconden en 9 seconden.



- c** Op tijdstip $t = 1$ is de hoogte van punt P ten opzichte van de as van de windmolen gelijk aan 1 meter.
 De hoogte van punt P (ten opzichte van de grond) is dan $1 + 3 = 4$ meter.
- d** Op tijdstip $t = 3$ bevindt punt P zich 1 meter onder de as van de windmolen.
 De hoogte van punt P (ten opzichte van de grond) is dan $3 - 1 = 2$ meter.
- e** Op tijdstip $t = 10$ is punt P even hoog als op tijdstip $t = 8$, dus op dezelfde hoogte als de as van de windmolen. De hoogte van punt P is dan 3 meter.

18 Periodieke functies

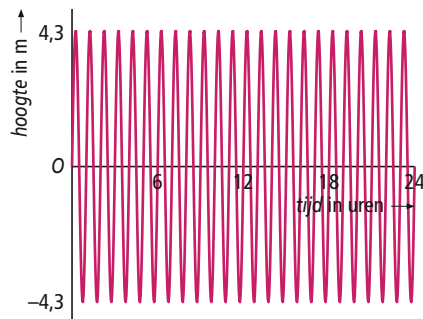
- 05 a** Omdat de periode 2π is, herhaalt de grafiek zich iedere 2π .
 Als je vanaf het punt $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ één periode naar rechts gaat, krijg je het punt $(2\frac{1}{2}\pi, 1)$. Als je twee periodes naar rechts gaat, krijg je het punt $(4\frac{1}{2}\pi, 1)$.
 De punten $(2\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(4\frac{1}{2}\pi, 1)$ liggen dus op de grafiek van f .
- b** Op de grafiek van f ligt het punt $(1\frac{1}{2}\pi, -1)$.
 Twee periodes ($2 \times 2\pi = 4\pi$) naar rechts ligt het punt $(5\frac{1}{2}\pi, -1)$.
 Het punt $(5\frac{1}{2}\pi, -1)$ ligt dus op de grafiek van f .
- c** $(-2\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$ en $(4\pi, 0)$.
- d** $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$ en $(3\pi, 0)$
- e** Op de grafiek ligt het punt $(\frac{1}{2}\pi, 1)$. Zes periodes naar rechts ligt het punt $(12\frac{1}{2}\pi, 1)$. Het punt $A(12\frac{1}{2}\pi, 1)$ ligt wel op de grafiek van f .
- f** Op de grafiek ligt het punt $(1\frac{1}{2}\pi, -1)$. Vijf periodes naar links ligt het punt $(-8\frac{1}{2}\pi, -1)$. Het punt $B(-8\frac{1}{2}\pi, 1)$ ligt niet op de grafiek van f .
- g** De snijpunten van de grafiek met de x -as zijn $\dots(-\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$... en dus ook $(8\pi, 0)$.
 Het punt $C(8\pi, 1)$ ligt niet op de grafiek van f .
- h** De snijpunten van de grafiek met de x -as zijn $\dots(-\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$... en dus ook $(-3\pi, 0)$.
 Het punt $D(-3\pi, 0)$ ligt wel op de grafiek van f .
- i** Op de grafiek ligt het punt $(1\frac{1}{2}\pi, -1)$. Drie periodes naar links ligt het punt $(-4\frac{1}{2}\pi, -1)$. Het punt $E(-4\frac{1}{2}\pi, -1)$ ligt wel op de grafiek van f .
- j** Op de grafiek ligt het punt $(1\frac{1}{2}\pi, -1)$. Elf periodes naar rechts ligt het punt $(23\frac{1}{2}\pi, -1)$. Het punt $F(23\frac{1}{2}\pi, -1)$ ligt wel op de grafiek van f .
- U1 a** De coördinaten van S zijn gelijk aan $(\frac{1}{2}\pi + 1, 0) \approx (2,57; 0)$.
- b** De lengte van de baan is gelijk aan de omtrek van een cirkel met een straal van 1 meter plus twee keer π meter, dus: $2 \cdot \pi \cdot 1 + 2 \cdot \pi = 4\pi = 12,56 \dots$ meter.
 In één uur doorloopt het punt de baan $\frac{3600}{12,56 \dots} \approx 286,5$ keer.



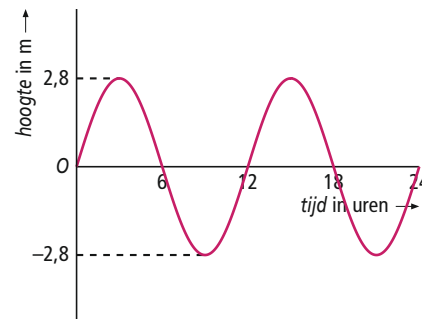
18.2 Amplitude en periode

intro De grafieken van de grote wijzer en de kleine wijzer hebben een andere amplitude (4,3 meter en 2,8 meter) en een andere periode (1 uur en 12 uur)

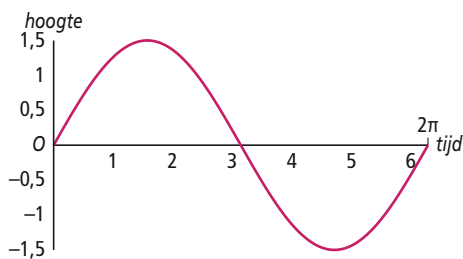
De grote wijzer:



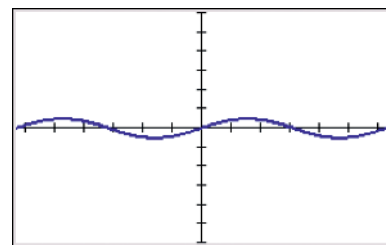
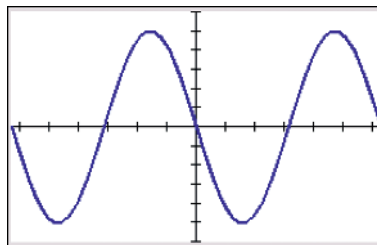
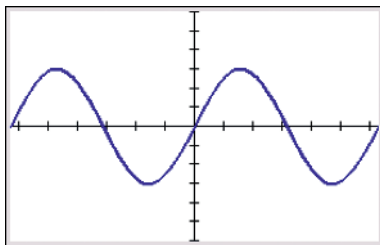
De kleine wijzer:



8



- 9 a Invoer: $y_1 = 3 \cdot \sin(x)$ (en $y_1 = -5 \cdot \sin(x)$ en $y_1 = 0,5 \cdot \sin(x)$)
Venster: $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, $-6 \leq y \leq 6$



Van links naar rechts: $a = 3$, $a = -5$ en $a = 0,5$.

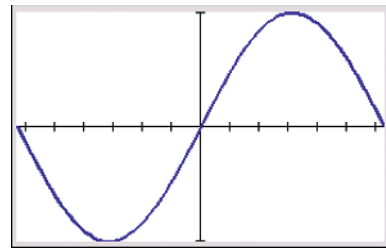
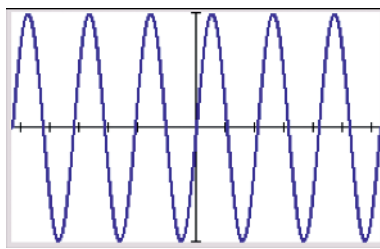
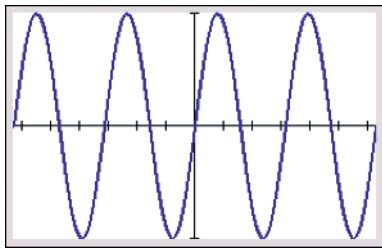
- b Als je het getal a verschillende waarden geeft, verandert de amplitude.
c Als het getal a een negatieve waarde heeft, dan veranderen de maxima in minima en omgekeerd. De grafiek wordt gespiegeld in de x -as.
10 a $a = 4$, dus de amplitude is 4. c $a = \frac{2}{3}$, dus de amplitude is $\frac{2}{3}$.
b $a = 1,8$, dus de amplitude is 1,8. d $a = -8,3$, dus de amplitude is 8,3.

- 11 De coördinaten van de toppen van de grafiek van $h(x) = \sin(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(\frac{3}{2}\pi, -1)$.
De grafiek van $f(x) = 5 \cdot \sin(x)$ ontstaat door de grafiek van $h(x) = \sin(x)$ te vermenigvuldigen met factor 5 ten opzichte van de x -as. Daaruit volgt dat de coördinaten van de toppen van de grafiek van $f(\frac{1}{2}\pi, 5)$ en $(\frac{3}{2}\pi, -5)$ zijn.
De grafiek van $g(x) = -5 \cdot \sin(x)$ ontstaat door de grafiek van $f(x) = 5 \cdot \sin(x)$ te spiegelen in de x -as. De maxima veranderen dan in de minima en omgekeerd. De coördinaten van de toppen van de grafiek van g zijn dus $(\frac{1}{2}\pi, -5)$ en $(\frac{3}{2}\pi, 5)$.

18 Periodieke functies

- 12 a** Invoer: $y_1 = \sin(2x)$ (en $y_1 = \sin(3x)$ en $y_1 = \sin(0,5x)$)

Venster: $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, $-1 \leq y \leq 1$



Van links naar rechts: $b = 2$, $b = 3$ en $b = 0,5$.

Als je het getal b verschillende waarden geeft, verandert de periode.

- b** Voor $b > 1$ is de periode kleiner dan 2π .

Voor $0 < b < 1$ is de periode groter dan 2π .

b	0,5	1	3	π	2π
periode	4π	2π	$\frac{2}{3}\pi$	2	1

- d** Er is een omgekeerd evenredig verband tussen b en de periode, deze is

$$\text{periode} = \frac{2\pi}{b}$$

- 13 a** De periode is $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{0,25} = 8\pi$.

- b** De periode is $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.

- c** De periode is $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{5}} = 10\pi$.

- d** De periode is $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.

- 14 a** $a = 13$, de amplitude is 13.

De periode is $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

- b** $a = -0,6$, de amplitude is 0,6.

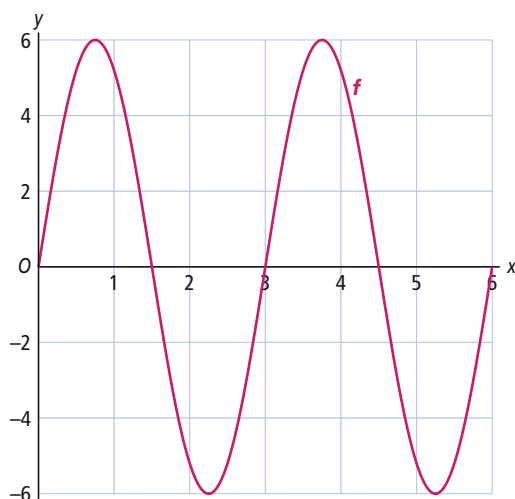
De periode is $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{0,6} = 3\frac{1}{3}\pi$.

- c** $a = -20$, de amplitude is 20.

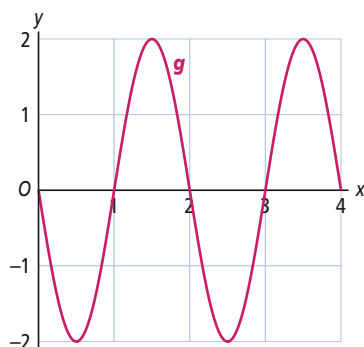
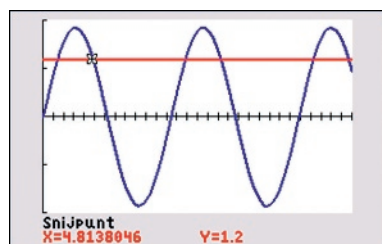
De periode is $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

- d** $a = \frac{1}{10}$, de amplitude is $\frac{1}{10}$.

De periode is $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{0,3\pi} = 6\frac{2}{3}$.

15 a**b** De amplitude is 6, dus $a = 6$ De periode is 3, dus $b = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

$$f(x) = 6 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

c $a = -2$, dus de amplitude van de grafiek van g is 2.De periode van de grafiek van g is $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.**16 a** Tussen twee opeenvolgende hoogwaterstanden zit precies één periode.De periode is $\frac{2\pi}{0,506} = 12,41\dots$, dus 12 uur en $60 \times 0,41\dots \approx 25$ minuten.**b**Invoer: $y_1 = 1,85 \cdot \sin(0,506x)$ en $y_2 = 1,20$ Venster: $0 \leq x \leq 30$, $-2 \leq y \leq 2$

Optie: snijpunt

Er zijn snijpunten bij $x = 1,394\dots$ en $x = 4,813\dots$

Dat komt overeen met 1 uur en 24 minuten en 4 uur en 49 minuten.

Tussen deze tijdstippen staat het water boven 1,20 m.

Tussendoor niet afgerond geeft dat 3 uur en 26 minuten.

18 Periodieke functies

- c De waterhoogte neemt het snelst af als de grafiek overgaat van toenemend dalend naar afnemend dalend. Dat is bij de snijpunten met de horizontale as, dus na een halve periode en na anderhalve periode.

$$0,5 \times \frac{2\pi}{0,506} \approx 6,21, \text{ dat is om } 6.13 \text{ uur.}$$

$$1,5 \times \frac{2\pi}{0,506} \approx 18,63, \text{ dat is om } 18.38 \text{ uur.}$$

- d Als het verschil tussen hoogwater en laagwater 4,3 meter is, dan is de amplitude $4,3 : 2 = 2,15$ meter. De periode verandert niet. Het functievoorschrift is $h(t) = 2,15 \sin(0,506t)$.

- 17 De straal van het rad is 0,9 meter, dus $a = 0,9$.

De periode is 8 seconden, dus $b = \frac{2\pi}{8} = \frac{1}{4}\pi$.

Voor de hoogte van punt A (ten opzichte van de as) geldt $h(t) = 0,9 \cdot \sin\left(\frac{1}{4}\pi t\right)$.
 $h(4,5) = 0,9 \cdot \sin\left(\frac{1}{4}\pi \times 4,5\right) \approx -0,34$, dus de hoogte van punt A na 4,5 seconden is 34 cm onder de as.

- 014 a De amplitude van de grafiek van g is 4.

- b De waarde van a geeft aan hoe groot de amplitude is, dus $a = 4$.

- c De periode van de grafiek van h is 8π .

d $b = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$

e $h(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{1}{4}x\right)$

- U2 a De periode is $\frac{1}{440}$ seconde, dus $b = \frac{2\pi}{\frac{1}{440}} = 880\pi$.

- b De frequentie bij toon D is $1,5 \times 440 = 660$ Hz. De periode is dan $\frac{1}{660}$ seconde en $b = \frac{2\pi}{\frac{1}{660}} = 1320\pi$. Een formule is $T_D = \sin(1320\pi t)$.

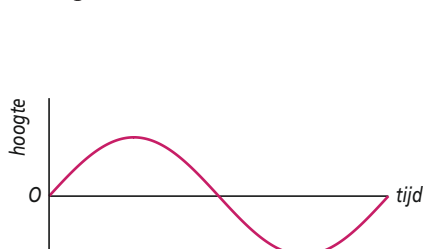
- c Periode is $\frac{2\pi}{1750} \approx 0,0036$ seconden, de frequentie is $\frac{1}{0,00359...} \approx 279$ Hz.

18.3 Verschuiven

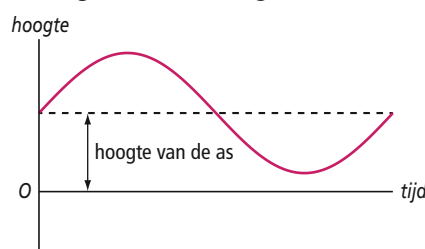
intro Het verschil tussen de twee grafieken is de evenwichtsstand.

De evenwichtsstand van de grafiek van de hoogte van het bakje *ten opzichte van de as* is 0 meter. De evenwichtsstand van de grafiek van de hoogte van het bakje *ten opzichte van de grond* is gelijk aan de hoogte van de as.

Ten opzichte van de as:

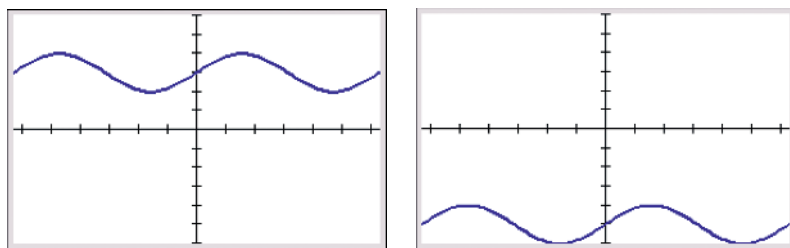


Ten opzichte van de grond:



- 18 a** Invoer: $y_1 = 3 + \sin(x)$ (en $y_1 = -5 + \sin(x)$)

Venster: $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, $-6 \leq y \leq 6$

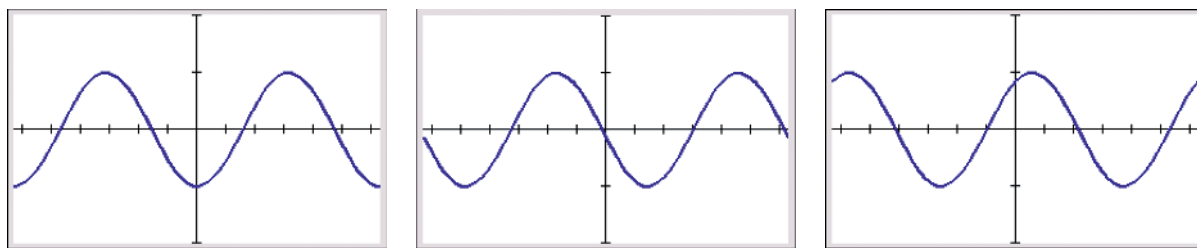


Van links naar rechts: $d = 3$ en $d = -5$.

- b** Als je het getal d verschillende waarden geeft, verandert de evenwichtsstand.
- 19** $g(x) = \sin(x) - 5,7 = -5,7 + \sin(x)$, dus $d = -5,7$.
De evenwichtsstand van g is $-5,7$.
 $h(x) = 4,5 + \sin(x)$, dus $d = 4,5$.
De evenwichtsstand van h is $4,5$.

- 20 a** Invoer: $y_1 = \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ (en $y_1 = \sin(x - 3)$ en $y_1 = \sin(x - (-1)) = \sin(x + 1)$)

Venster: $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, $-2 \leq y \leq 2$



Van links naar rechts: $c = \frac{1}{2}\pi$, $c = 3$ en $c = -1$.

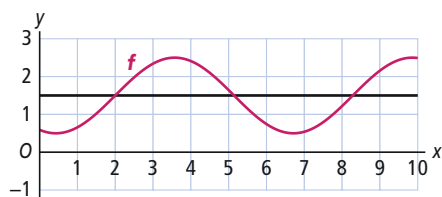
Optie: nulpunt geeft de punten waar de grafiek stijgend de x -as snijdt:

$c = \frac{1}{2}\pi$: $(-4,71; 0)$ en $(1,57; 0)$ (dit zijn de punten $(-1\frac{1}{2}\pi, 0)$ en $(\frac{1}{2}\pi, 0)$)

$c = 3$: $(-3,28; 0)$ en $(3, 0)$

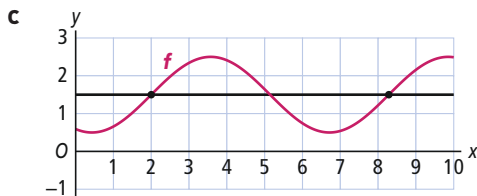
$c = -1$: $(-1; 0)$ en $(5,28; 0)$

- b** Als je de waarde van c varieert, dan verschuift de grafiek in horizontale richting.
- 21 a** De grafiek van $g(x) = \sin(x + 2)$ is ontstaan door de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ twee eenheden naar links te verschuiven. Een verschuiving heeft geen invloed op de periode. Dat betekent dat de periode van de grafiek van g hetzelfde is als die van f , dus 2π .
- b** De grafiek van g gaat bij $x = -2$ stijgend door de evenwichtsstand. De periode is gelijk aan 2π , dus de grafiek gaat ook stijgend door de evenwichtsstand bij $x = -2 + 2\pi \approx 4,28$.
- 22 a**



- b** De waarde van d geeft aan hoe groot de evenwichtsstand is, dus $d = 1,5$.

18 Periodieke functies



d (2; 1,5)

e (2; 1,5) is een beginpunt, dus een mogelijke waarde voor c is 2.

$$f(x) = \sin(x - 2) + 1,5$$

23 a Er staat een minteken vóór $\sin(x - 1)$. Aan dit minteken kun je zien dat de grafiek in het punt (1, 2) niet stijgend, maar dalend door de evenwichtsstand gaat.

De grafiek van $h(x) = 2 - \sin(x - 1)$ is ontstaan uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een spiegeling in de x -as ($y = -\sin(x)$), een verticale verschuiving van 2 omhoog ($y = 2 - \sin(x)$) en een horizontale verschuiving van 1 naar rechts ($y = 2 - \sin(x - 1)$). Door de spiegeling veranderen de punten waar de grafiek stijgend door evenwichtsstand gaat in punten waar de grafiek dalend door de evenwichtsstand gaat (en andersom).

b De spiegeling en de twee verschuivingen (zie vraag a) hebben geen invloed op de periode. Dat betekent dat de periode van de grafiek van h hetzelfde is als die van $f(x) = \sin(x)$, dus 2π .

c Een halve periode ($\frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$) nadat de grafiek dalend door evenwichtsstand gaat, gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand. Dus (bijvoorbeeld) in het punt $(1 + \pi; 2) \approx (4,14; 2)$.

24 a $d = 5$, dus de evenwichtsstand is 5.

$\sin(x + 3) = \sin(x - (-3))$, dus $c = -3$. Dat betekent dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat in het punt $(-3, 5)$.

Twee andere punten waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat zijn $(-3 + 2\pi, 5) \approx (3,28; 5)$ en $(-3 + 4\pi, 5) \approx (9,57; 5)$.

b $d = -4$, dus de evenwichtsstand is -4 .

$c = \frac{2}{3}\pi$. Dat betekent dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat in het punt $(\frac{2}{3}\pi, -4)$.

Twee andere punten waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat zijn $(2\frac{2}{3}\pi, -4)$ en $(4\frac{2}{3}\pi, -4)$.

c $d = 5$, dus de evenwichtsstand is 5.

$c = 0,3$. Vanwege het minteken vóór $\sin(x - 0,3)$ gaat de grafiek in het punt $(0,3; 5)$ niet stijgend, maar dalend door de evenwichtsstand. Een halve periode ($\frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$) later gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand. Dat is in het punt $(0,3 + \pi; 5) \approx (3,44; 5)$.

Twee andere punten waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat zijn $(3,44 + 2\pi, 5) \approx (9,72; 5)$ en $(3,44 + 4\pi, 5) \approx (16,01; 5)$.

d $d = -4,75$, dus de evenwichtsstand is $-4,75$.

$\sin(x + \frac{1}{3}\pi) = \sin(x - (-\frac{1}{3}\pi))$, dus $c = -\frac{1}{3}\pi$. Dat betekent dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat in het punt $(-\frac{1}{3}\pi; -4,75)$.

Twee andere punten waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat zijn $(1\frac{2}{3}\pi; -4,75)$ en $(3\frac{2}{3}\pi; -4,75)$.

- 25 a** $t = 0$ invullen in de formule geeft $h = 1,5 + \sin\left(0 - \frac{1}{2}\pi\right) = 0,5$ meter.
Het blauwe punt bevindt zich dan onderin het rad.
- b** De evenwichtsstand is 1,5 en de amplitude is 1, dus de maximale hoogte is $1,5 + 1 = 2,5$ meter.
- c** De periode is 2π seconden. Na een halve periode bereikt het blauwe punt het hoogste punt, dat is na $\frac{1}{2} \times 2\pi = \pi \approx 3,14$ seconden.
- d** De minimale hoogte is 0,5 meter. De minimale hoogte wordt bereikt op de tijdstippen $t = 0$ en $t = 2\pi \approx 6,28$ seconden.
- 26 a** De wieken zijn 2 meter lang, dus de amplitude a is 2.
De as bevindt zich 5 meter boven de grond, dus de evenwichtsstand d is 5.
De wieken draaien in 3 seconden rond, dus de periode is 3 en $b = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.
Dit geeft de formule $h = 2 \sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + 5$.
- b** Punt Q loopt $\frac{1}{3}$ periode achter op punt P , dat is $\frac{1}{3} \times 3 = 1$ seconde.
Punt P gaat op tijdstip $t = 0$ stijgend door de evenwichtsstand.
Dus punt Q gaat op tijdstip $t = 0 + 1 = 1$ stijgend door de evenwichtsstand.
- c** Punt Q loopt één seconde achter op punt P . Dat betekent dat je de grafiek van punt Q krijgt door de grafiek van punt P één naar rechts te verschuiven.
De formule wordt dan $h = 2 \sin\left(\frac{2}{3}\pi(t - 1)\right) + 5$.
- 022 a** De evenwichtsstand is 2. In het functievoorschrift is dit het getal dat bij $\sin(x - 1)$ wordt opgeteld.
- b** De x -coördinaat van $A(1, 2)$ is 1. In het functievoorschrift is dit het getal dat 'binnen de sinus' van x wordt afgetrokken.
De y -coördinaat van $A(1, 2)$ is 2. In het functievoorschrift is dit het getal dat bij $\sin(x - 1)$ wordt opgeteld.
- c** Punt B is het volgende punt na punt A waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Dat is precies één periode verder.
De x -coördinaat van punt A is 1 en de periode is 2π .
Dus de x -coördinaat van punt B is $1 + 2\pi \approx 7,28$.
- d** Punt C ligt precies één periode na punt B .
De x -coördinaat van punt C is $(1 + 2\pi) + 2\pi = 1 + 4\pi \approx 13,57$.
De coördinaten van punt C zijn $C(13,57; 2)$.
- 024 a** $f(x) = -4 + \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ is van de vorm $f(x) = d + \sin(x - c)$.
 $d = -4$, dus de evenwichtsstand is -4 .
- b** $\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$, dus $c = -\frac{1}{2}\pi$. Dat betekent dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat bij $x = -\frac{1}{2}\pi$, dus in het punt $\left(-\frac{1}{2}\pi, -4\right)$.
- c** De periode van de grafiek van f is 2π .
- d** Omdat de periode 2π is, gaat de grafiek ook stijgend door de evenwichtsstand in het punt $\left(-\frac{1}{2}\pi + 2\pi, -4\right) = \left(1\frac{1}{2}\pi, -4\right)$.
- e** $\left(3\frac{1}{2}\pi, -4\right)$ en $\left(5\frac{1}{2}\pi, -4\right)$
- f** $d = 1$, dus de evenwichtsstand is 1.
 $\sin(x + \pi) = \sin(x - \pi)$, dus $c = -\pi$. Dat betekent dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat in het punt $(-\pi, 1)$.
Twee andere punten waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat zijn $(\pi, 1)$ en $(3\pi, 1)$.

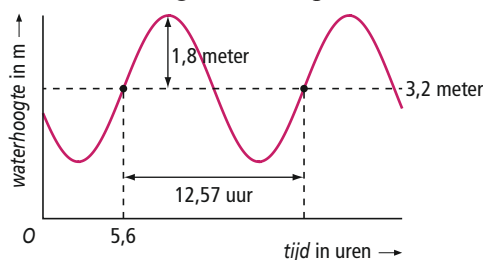
18 Periodieke functies

- g** $d = 2$, dus de evenwichtsstand is 2.
 $c = \frac{1}{2}\pi$. Dat betekent dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat in het punt $(\frac{1}{2}\pi, 2)$.
 Twee andere punten waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat zijn $(2\frac{1}{2}\pi, 2)$ en $(4\frac{1}{2}\pi, 2)$.
- h** $d = 5$, dus de evenwichtsstand is 5.
 $\sin(x + 1,3) = \sin(x - 1,3)$, dus $c = -1,3$. Dat betekent dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat in het punt $(-1,3; 5)$.
 Twee andere punten waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat zijn $(-1,3 + 2\pi; 5) \approx (4,98; 5)$ en $(-1,3 + 4\pi; 5) \approx (11,27; 5)$.
- i** $d = -4,75$, dus de evenwichtsstand is $-4,75$.
 $\sin(x + 2) = \sin(x - 2)$, dus $c = -2$. Dat betekent dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat in het punt $(-2; -4,75)$.
 Twee andere punten waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat zijn $(-2 + 2\pi; -4,75) \approx (4,28; -4,75)$ en $(-2 + 4\pi; -4,75) \approx (10,57; -4,75)$.

U3 De evenwichtsstand is 2, dus $d = 2$.
 De periode is 2π . Een halve periode ($\frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$) nadat de grafiek dalend door evenwichtsstand gaat, gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand, dat is (bijvoorbeeld) in het punt $(\frac{1}{3}\pi + \pi, 2) = (1\frac{1}{3}\pi, 2)$.
 Een mogelijke waarde voor c is dus $1\frac{1}{3}\pi$.
 Dit geeft $f(x) = 2 + \sin(x - 1\frac{1}{3}\pi)$.

18.4 Sinusoïden

- intro** De waterhoogte in de haven wordt beschreven met een sinusfunctie, dus de bijbehorende grafiek is periodiek. Uit de formule kun je het volgende aflezen:
- De evenwichtsstand is 3,2. Dus de gemiddelde waterhoogte is 3,2 meter.
 - De amplitude is 1,8. Daaruit volgt dat de minimale waterhoogte $3,2 - 1,8 = 1,4$ meter is en de maximale waterhoogte $3,2 + 1,8 = 5$ meter.
 - De periode is $\frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \approx 12,57$ uur.
- Dus de grafiek herhaalt zich iedere 12,57 uur (12 uur en 34 minuten).
- Als je de formule schrijft als $H = 3,2 + 1,8 \sin(0,5(t - 5,6))$ kun je aflezen dat $(5,6; 3,2)$ een beginpunt van de grafiek is. Dat betekent dat de grafiek om 5,6 uur (om 05.36) stijgend door de evenwichtsstand gaat.
- De waterhoogte neemt op dat moment het snelst toe.

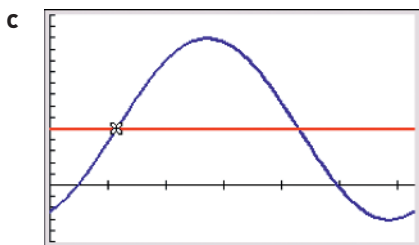


Je kunt met behulp van deze gegevens ook bepalen wat de coördinaten van de toppen van de grafiek zijn, dus op welke tijdstippen de waterhoogte maximaal of minimaal is.

- 27 a** De amplitude is 3, de evenwichtsstand is 4 en de periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$.
- b** De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand in (bijvoorbeeld) het punt (1, 4).

- 28 a** $d = 2$, de evenwichtsstand is 2.
 $a = 4$, de amplitude is 4.
 $b = 1\frac{1}{2}$, de periode is $\frac{2\pi}{1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{3}\pi$.
 $c = 3$, een beginpunt is (3, 2).
- b** $d = 3$, de evenwichtsstand is 3.
 $a = 2$, de amplitude is 2.
 $b = 4$, de periode is $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.
 $c = -\frac{1}{4}\pi$, een beginpunt is $(-\frac{1}{4}\pi, 3)$.
- c** $d = -200$, de evenwichtsstand is -200 .
 $a = 125$, de amplitude is 125.
 $b = 0,1\pi$, de periode is $\frac{2\pi}{0,1\pi} = 20$.
 $c = 0$, een beginpunt is (0, -200).
- d** $d = \frac{5}{8}$, de evenwichtsstand is $\frac{5}{8}$.
 $a = \frac{1}{2}$, de amplitude is $\frac{1}{2}$.
 $b = \frac{1}{3}\pi$, de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$.
 $c = \frac{1}{8}\pi$, een beginpunt is $(\frac{1}{8}\pi, \frac{5}{8})$.

- 29 a** Hoewel $c = 4$ en $d = -3$, gaat de grafiek van f in het punt (4, -3) niet stijgend, maar dalend door de evenwichtsstand. Dit komt doordat er een minteken vóór $2\sin(x - 4)$ staat.
 Het punt (4, -3) is dus geen beginpunt van de grafiek van f .
- b** $b = 1$, de periode van de grafiek van f is $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$.
 Een halve periode ($\frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$) nadat de grafiek dalend door de evenwichtsstand gaat, gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand.
 Een beginpunt is (bijvoorbeeld) $(4 + \pi, -3) \approx (7,14; -3)$



Invoer: $y_1 = 5 - 8\sin(x + 2)$ en $y_2 = 5$

Venster: $0 \leq x \leq 2\pi$, $-5 \leq y \leq 15$

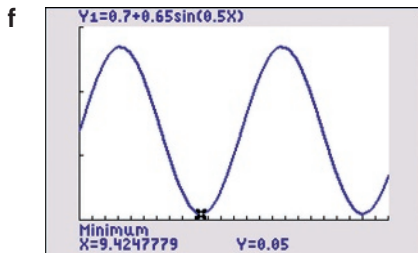
Optie: snijpunt

Er is een snijpunt bij $x \approx 1,14$. Dus een beginpunt is (1,14; 5).

18 Periodieke functies

- d** $c = -2$ en $d = 5$. Vanwege het minteken vóór $8 \sin(x + 2)$ gaat de grafiek in het punt $(-2, 5)$ dalend door de evenwichtsstand.
Een halve periode $(\frac{1}{2} \times 2\pi = \pi)$ nadat de grafiek dalend door evenwichtsstand gaat, gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand. Dat is bij $x = -2 + \pi$ en dat is ongeveer 1,14.

- 30 a** $d = 0,7$, de evenwichtsstand is 0,7 meter.
 $a = 0,65$, de amplitude is 0,65 meter.
De maximale waterhoogte is $0,7 + 0,65 = 1,35$ meter.
- b** $b = 0,5$, de periode is $\frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \approx 12,57$ uur (12 uur en 34 minuten).
- c** $c = 0$, een beginpunt van de grafiek is $(0; 0,7)$.
Een kwart periode na het beginpunt bereikt het water de hoogste stand.
Dat is op $t = 0 + \frac{1}{4} \times 4\pi = \pi = 3,14 \dots$ uur.
Dus na 3 uur en $60 \times 0,14 \dots \approx 8$ minuten, om 3.08 uur.
- d** Het water bereikt één periode later opnieuw de hoogste stand.
Dat is op $t = \pi + 4\pi = 5\pi = 15,70 \dots$ uur.
Dat is na 15 uur en $60 \times 0,70 \dots \approx 42$ minuten, om 15.42 uur.
- e** Driekwart periode na het beginpunt bereikt het water de laagste stand.
Dat is op $t = 0 + \frac{3}{4} \times 4\pi = 3\pi = 9,42 \dots$ uur.
Dus na 9 uur en $60 \times 0,42 \dots \approx 25$ minuten, om 9.25 uur.
Eén periode later bereikt het water opnieuw de laagste stand.
Dat is op $t = 3\pi + 4\pi = 7\pi = 21,99 \dots$ uur.
Dus na 21 uur en $60 \times 0,99 \dots \approx 59$ minuten, om 21.59 uur.



Invoer: $y_1 = 0,7 + 0,65 \cdot \sin(0,5x)$

Venster: $0 \leq x \leq 24, 0 \leq y \leq 1,5$

Optie: minimum

Dit geeft $x \approx 9,42$ en $x \approx 21,99$, dus het water bereikt het laagste punt op $t \approx 9,42$ en $t \approx 21,99$.

Dit komt overeen met opdracht e.

- 31 a** De evenwichtsstand is -2 en de amplitude is 3, dus het maximum is gelijk aan $-2 + 3 = 1$ en het minimum is gelijk aan $-2 - 3 = -5$.
De periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$ en een beginpunt is $(0, -2)$.
De twee hierop volgende snijpunten met de evenwichtsstand zijn $(\frac{1}{2}\pi, -2)$ en $(\pi, -2)$. De toppen zijn $(\frac{1}{4}\pi, 1)$ en $(\frac{3}{4}\pi, -5)$.
- b** De evenwichtsstand is 6 en de amplitude is 8, dus het maximum is gelijk aan $6 + 8 = 14$ en het minimum is gelijk aan $6 - 8 = -2$.
De periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ en een beginpunt is $(0, 6)$.
De twee hierop volgende snijpunten met de evenwichtsstand zijn $(1, 6)$ en $(2, 6)$. De toppen zijn $(\frac{1}{2}, 14)$ en $(1\frac{1}{2}, -2)$.

- c De evenwichtsstand is -42 en de amplitude is 28 , dus het maximum is gelijk aan $-42 + 28 = -14$ en het minimum is gelijk aan $-42 - 28 = -70$.

De periode is $\frac{2\pi}{0,2\pi} = 10$ en een beginpunt is $(-3, -42)$.

De twee hierop volgende snijpunten met de evenwichtsstand zijn $(2, -42)$ en $(7, -42)$. De toppen zijn $(-\frac{1}{2}, -14)$ en $(4\frac{1}{2}, -70)$.

- d Je kunt de formule schrijven als $y = 3,2 - 1,3 \sin(\pi(x + 1))$.

De evenwichtsstand is $3,2$ en de amplitude is $1,3$, dus het maximum is gelijk aan $3,2 + 1,3 = 4,5$ en het minimum is gelijk aan $3,2 - 1,3 = 1,9$.

De periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$. De grafiek gaat in het punt $(-1; 3,2)$ dalend door de

evenwichtsstand, vanwege het minteken vóór $1,3 \sin(\pi(x + 1))$. Een halve periode later, in het punt $(0; 3,2)$, heeft de grafiek een beginpunt.

De twee hierop volgende snijpunten met de evenwichtsstand zijn $(1; 3,2)$ en $(2; 3,2)$. De toppen zijn $(0,5; 4,5)$ en $(1,5; 1,9)$.

- 32 a De periode is $\frac{2\pi}{0,0172} \approx 365$ dagen, dus een jaar.

- b De maximale daglengte is $12 + 2,7 = 14,7$ uur (14 uur en 42 minuten) en de minimale daglengte is $12 - 2,7 = 9,3$ uur (9 uur en 18 minuten).

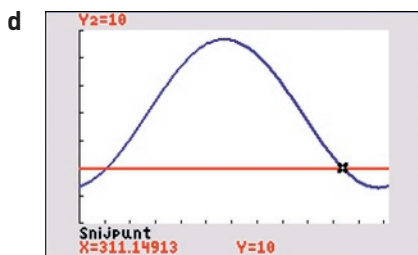
Een beginpunt is $(80, 12)$. Twee hierop volgende snijpunten met de evenwichtsstand zijn $(262,5; 12)$ en $(445; 12)$.

De maximale daglengte wordt bereikt op $(80 + 262,5) : 2 = 171,25$ dagen na 1 januari, dat is op 21 juni.

De minimale daglengte wordt bereikt op $(262,5 + 445) : 2 = 353,75$ dagen na 1 januari, dat is op 21 december.

- c Als je uitgaat van een jaar zonder 29 februari, dan komt 1 mei overeen met $t = 31 + 28 + 31 + 30 = 120$. Invullen in de formule geeft $D = 12 + 2,7 \sin(0,0172(120 - 80)) = 13,71 \dots$ uur.

Dat is 13 uur en 43 minuten.



Invoer: $y_1 = 12 + 2,7 \sin(0,0172(x - 80))$ en $y_2 = 10$

Venster: $0 \leq x \leq 365$, $8 \leq y \leq 15$

Optie: snijpunt

Dit geeft $x = 31,501 \dots$ en $x = 311,149 \dots$, dus

$311,149 \dots - 31,501 \dots = 279,6 \dots$ dagen per jaar is de daglengte meer dan 10 uren.

Dus $365 - 279,6 \dots \approx 85$ dagen is de daglengte minder dan 10 uren.

- e De periode wordt 7 keer zo klein, dus b moet 7 keer zo groot worden.

Dit geeft $b = 0,0172 \times 7 = 0,1204$.

Het getal 80 in de formule is in dagen, door te delen door 7 wordt dat weken.

$80 : 7 \approx 11,43$

De formule wordt $D \approx 12 + 2,7 \sin(0,1204(t - 11,43))$.

18 Periodieke functies

028 a $d = 4$, de evenwichtsstand is 4.

$a = 3$, de amplitude is 3.

$b = 2$, de periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

$c = 1$, de coördinaten van een beginpunt zijn $(1, 4)$.

b $k(x) = 3 \sin(5x) - 2$

$k(x) = -2 + 3 \sin(5(x - 0))$

$a = 3$, $b = 5$, $c = 0$ en $d = -2$

c $d = -2$, de evenwichtsstand is -2 .

$a = 3$, de amplitude is 3.

$b = 5$, de periode is $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.

$c = 0$, een beginpunt is $(0, -2)$.

d $d = 7$, de evenwichtsstand is 7.

$a = 4$, de amplitude is 4.

$b = \pi$, de periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

$c = -2$, een beginpunt is $(-2, 7)$.

e $d = -5$, de evenwichtsstand is -5 .

$a = 1$, de amplitude is 1.

$b = 2$, de periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

$c = -\frac{1}{2}\pi$, een beginpunt is $(-\frac{1}{2}\pi, -5)$.

f $d = -50$, de evenwichtsstand is -50 .

$a = 60$, de amplitude is 60.

$b = 1,5\pi$, de periode is $\frac{2\pi}{1,5\pi} = 1\frac{1}{3}\pi$.

$c = 0$, een beginpunt is $(0, -50)$.

g $d = -3$, de evenwichtsstand is -3 .

$a = 5\frac{1}{2}$, de amplitude is $5\frac{1}{2}$.

$b = 4$, de periode is $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

$c = 2$, een beginpunt is $(2, -3)$.

031 a $(0, 2)$

b evenwichtsstand: 2

amplitude: 3

periode: $\frac{2\pi}{0,5\pi} = 4$

c De grafiek van f gaat bij $x = 0$ stijgend door de evenwichtsstand.

De twee hierop volgende snijpunten met de evenwichtsstand zijn een halve periode en een hele periode verder, dus bij $x = 2$ en $x = 4$.

Precies tussen $x = 0$ en $x = 2$ bereikt f een maximum, dat is bij $x = 1$.

d De waarde van het maximum gelijk aan de evenwichtsstand plus de amplitude, dus $2 + 3 = 5$.

Dit geeft de coördinaten $(1, 5)$.

e De grafiek van f gaat bij $x = 0$, $x = 2$ en $x = 4$ stijgend door de evenwichtsstand.

Precies tussen $x = 2$ en $x = 4$ bereikt f een minimum, dat is bij $x = 3$.

f De waarde van het minimum is gelijk aan de evenwichtsstand minus de amplitude, dus $2 - 3 = -1$.

- g De evenwichtsstand is -4 en de amplitude is 2 , dus het maximum is gelijk aan $-4 + 2 = -2$ en het minimum is gelijk aan $-4 - 2 = -6$.

De periode is $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ en een beginpunt is $(0, -4)$.

De twee hierop volgende snijpunten met de evenwichtsstand zijn $(\frac{1}{3}\pi, -4)$ en $(\frac{2}{3}\pi, -4)$. De toppen zijn $(\frac{1}{6}\pi, -2)$ en $(\frac{1}{2}\pi, -6)$.

- h Je kunt de formule schrijven als $y = 15 + 6 \sin(2(x + 4))$.

De evenwichtsstand is 15 en de amplitude is 6 , dus het maximum is gelijk aan $15 + 6 = 21$ en het minimum is gelijk aan $15 - 6 = 9$.

De periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$ en een beginpunt is $(-4, 15)$.

De twee hierop volgende snijpunten met de evenwichtsstand zijn $(-4 + \frac{1}{2}\pi, 15) \approx (-2,43; 15)$ en $(-4 + \pi, 15) \approx (-0,86; 15)$.

De toppen zijn $(-3,21; 21)$ en $(-1,64; 9)$.

- i De evenwichtsstand is 2 en de amplitude is 17 , dus het maximum is gelijk aan $2 + 17 = 19$ en het minimum is gelijk aan $2 - 17 = -15$.

De periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ en een beginpunt is $(-3, 2)$.

De twee hierop volgende snijpunten met de evenwichtsstand zijn $(-2, 2)$ en $(-1, 2)$. De toppen zijn $(-2\frac{1}{2}, 19)$ en $(-1\frac{1}{2}, -15)$.

- j De evenwichtsstand is 38 en de amplitude is 20 , dus het maximum is gelijk aan $38 + 20 = 58$ en het minimum is gelijk aan $38 - 20 = 18$.

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$. De grafiek gaat in het punt $(0, 38)$ dalend door de evenwichtsstand, vanwege het minteken vóór $20 \sin(\frac{1}{2}\pi x)$. Een halve periode later, in het punt $(2, 38)$, heeft de grafiek een beginpunt.

De twee hierop volgende snijpunten met de evenwichtsstand zijn $(4, 38)$ en $(6, 38)$. De toppen zijn $(3, 58)$ en $(5, 18)$.

U4 In maand t komt in het meer $s(t) = 0,4 \cdot r(t - 1)$ miljoen m^3 water.

De formule wordt $s(t) = 0,4 \cdot (10 + 9 \sin(\frac{1}{6}\pi(t + 2))) = 4 + 3,6 \sin(\frac{1}{6}\pi(t + 2))$.

18.5 Formules opstellen bij sinusoiden

intro In de grafiek zie je dat de bloeddruk een periodiek verschijnsel is. Je kunt het volgende aflezen:

- De maximale bloeddruk is 130 en de minimale bloeddruk is 90 .

Hieruit volgt dat de evenwichtsstand $(130 + 90) : 2 = 110$ is en de amplitude $130 - 110 = 20$.

- De grafiek gaat bij $t = 0$ en $t = 0,8$ stijgend door de evenwichtsstand, dus de periode is $0,8$ seconden.

Je kunt met behulp van deze gegevens een formule opstellen voor de

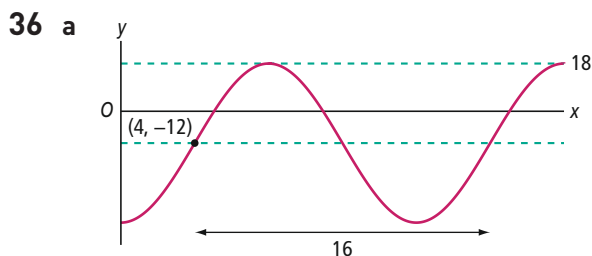
bloeddruk: $B = 110 + 20 \sin(\frac{2\pi}{0,8}t)$ ofwel $B = 110 + 20 \sin(2\frac{1}{2}\pi t)$.

18 Periodieke functies

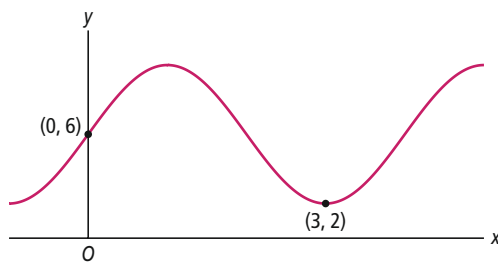
- 33 a** De evenwichtsstand is $(4,5 + -0,5) : 2 = 2$.
b De amplitude is $4,5 - 2 = 2,5$.
c $a = 2,5$ en $d = 2$.
d De periode is 2, dus $b = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
e Aan de grafiek kun je zien dat $c = 0$ doordat de grafiek bij $x = 0$ stijgend door de evenwichtsstand gaat.
f Een formule bij de grafiek is $y = 2 + 2,5 \sin(\pi(x - 0)) = 2 + 2,5 \sin(\pi x)$.

- 34 a** Het maximum is 125 en het minimum 25.
b De evenwichtsstand is $d = (125 + 25) : 2 = 75$ meter.
c De amplitude is $a = 125 - 75 = 50$ meter.
d De periode is 3 seconden, dus $b = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.
e De coördinaten van een beginpunt zijn $(1, 75)$.
f Een beginpunt is $(1, 75)$, dus $c = 1$.
 Dit geeft de formule $H = 75 + 50 \sin\left(\frac{2}{3}\pi(t - 1)\right)$.

- 35** Functie g :
 Het maximum is 3,5 en het minimum is $-1,5$.
 De evenwichtsstand is $d = (3,5 + -1,5) : 2 = 1$.
 De amplitude is $a = 3,5 - 1 = 2,5$.
 De grafiek gaat bij $x = 2$ en $x = 6$ stijgend door de evenwichtsstand.
 De periode is 4 en $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.
 Een beginpunt is $(2, 1)$, dus $c = 2$.
 Een functievoorschrift is $g(x) = 1 + 2,5 \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 2)\right)$.
 Functie h :
 Het maximum is 35 en het minimum is -15 .
 De evenwichtsstand is $d = (35 + -15) : 2 = 10$.
 De amplitude is $a = 35 - 10 = 25$.
 De grafiek gaat bij $x = 5$ en $x = 25$ stijgend door de evenwichtsstand.
 De periode is 20 en $b = \frac{2\pi}{20} = \frac{1}{10}\pi$.
 Een beginpunt is $(5, 10)$, dus $c = 5$.
 Een functievoorschrift is $h(x) = 10 + 25 \sin\left(\frac{1}{10}\pi(x - 5)\right)$.



- De evenwichtsstand is $d = -12$.
 De amplitude is $a = 18 - -12 = 30$.
 De periode is 16 en $b = \frac{2\pi}{16} = \frac{1}{8}\pi$.
 Een beginpunt is $(4, -12)$, dus $c = 4$.
 Een formule bij de sinusoid is $y = -12 + 30 \sin\left(\frac{1}{8}\pi(x - 4)\right)$.

b

De evenwichtsstand is $d = 6$.

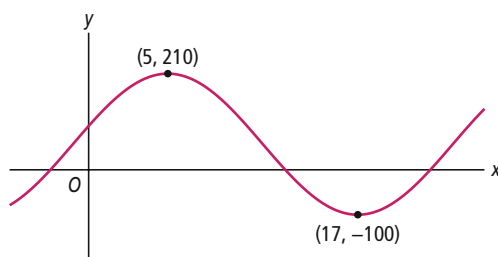
De amplitude is $a = 6 - 2 = 4$.

Vanaf het punt $(0, 6)$ tot het punt $(3, 2)$ is driekwart periode.

De periode is dus $(3 - 0) : \frac{3}{4} = 4$ en $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

Een beginpunt is $(0, 6)$, dus $c = 0$.

Een formule bij de sinusoïde is $y = 6 + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$.

c

De evenwichtsstand is $d = (210 + -100) : 2 = 55$.

De amplitude is $a = 210 - 55 = 155$.

Vanaf het punt $(5, 210)$ tot het punt $(17, -100)$ is een halve periode.

De periode is dus $2 \times (17 - 5) = 2 \times 12 = 24$ en $b = \frac{2\pi}{24} = \frac{1}{12}\pi$.

Een kwart periode vóór het maximum heeft de grafiek een beginpunt. Dat is bij $x = 5 - \frac{1}{4} \cdot 24 = -1$, dus $c = -1$.

Een formule bij de sinusoïde is $y = 55 + 155\sin\left(\frac{1}{12}\pi(x + 1)\right)$.

37 a De hoogste waarde is 58 cm en de laagste waarde -78 cm, dus de evenwichtsstand is $d = (58 + -78) : 2 = -10$.

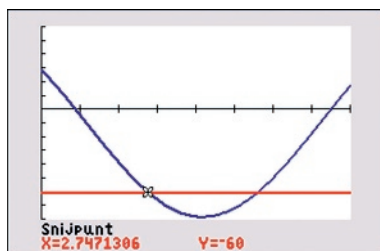
De amplitude is $a = 58 - -10 = 68$.

De periode is $2 \cdot (10.14 - 4.10) = 12.08$ uur, dus $b = \frac{2\pi}{12\frac{8}{60}} \approx 0,52$.

Het beginpunt bevindt zich precies tussen laag- en hoogwater, dus bij

$t = \left(4\frac{10}{60} + 10\frac{14}{60}\right) : 2 = 7,2$, dus $c = 7,2$.

De formule is $H = -10 + 68\sin(0,52(t - 7,2))$.

b

Invoer: $y_1 = -10 + 68\sin(0,52(x - 7,2))$ en $y_2 = -60$

Venster: $0 \leq x \leq 8$, $-80 \leq y \leq 60$

Optie: snijpunt

18 Periodieke functies

Dit geeft $x = 2,747\dots$ en $x = 5,611\dots$

De waterstand ligt $5,611\dots - 2,747\dots = 2,864\dots$ uur meer dan 60 cm onder NAP. Dat is 2 uur en $0,864 \times 60 \approx 52$ minuten.

In de grafiek ligt de waterstand ongeveer 2 uur en 30 minuten meer dan 60 cm onder NAP, dus het verschil is ongeveer 22 minuten.

38 De x -as is de evenwichtsstand, dus $d = 0$ cm.

De amplitude is de helft van het hoogteverschil tussen het hoogste en laagste punt, dus $a = 4,2 : 2 = 2,1$ cm.

Op de foto is te zien dat de golfplaat uit 10 periodes bestaat. Eén periode is dan $98 : 10 = 9,8$ cm, dus $b = \frac{2\pi}{9,8} = \frac{10}{49}\pi$.

Bij $x = 0$ is de golfplaat in een laagste punt. Een kwart periode na dit punt heeft de grafiek een beginpunt, dat is bij $x = 0 + \frac{1}{4} \cdot 9,8 = 2,45$, dus $c = 2,45$.

Een formule bij de sinusoïde is $y = 2,1 \sin\left(\frac{10}{49}\pi(x - 2,45)\right)$.

035 a Het maximum is 5 en het minimum is -1 .

b De evenwichtsstand is $d = (5 + (-1)) : 2 = 2$.

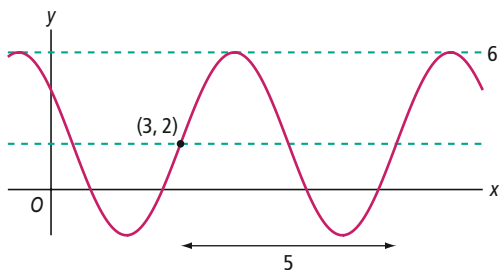
c De amplitude is $a = 5 - 2 = 3$.

d De periode is 4, dus $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

e De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand in het punt $(1, 2)$.
De waarde van c is dus 1.

f $f(x) = 2 + 3 \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 1)\right)$

036 a



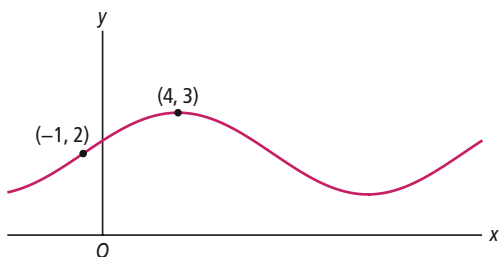
b De evenwichtsstand is gelijk aan de y -coördinaat van een beginpunt, dus $d = 2$.

De amplitude is het maximum minus de evenwichtsstand, dus $a = 6 - 2 = 4$.

c $b = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$

d $(3, 2)$ is een beginpunt, dus $c = 3$.
Dit geeft de formule $y = 2 + 4 \sin\left(\frac{2}{5}\pi(x - 3)\right)$.

e



De evenwichtsstand is $d = 2$.

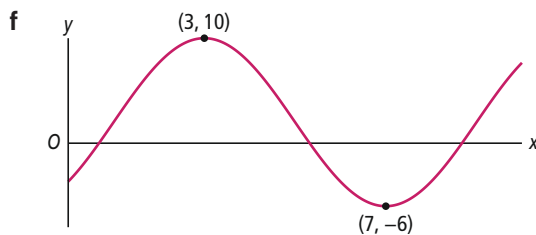
De amplitude is $a = 3 - 2 = 1$.

Vanaf het punt $(-1, 2)$ tot het punt $(4, 3)$ is een kwart periode.

De periode is dus $4 \times (4 - (-1)) = 4 \times 5 = 20$ en $b = \frac{2\pi}{20} = \frac{1}{10}\pi$.

$(-1, 2)$ is een beginpunt, dus $c = -1$.

Een formule bij de sinusoïde is $y = 2 + \sin\left(\frac{1}{10}\pi(x + 1)\right)$.



De evenwichtsstand is $d = (10 + (-6)) : 2 = 2$.

De amplitude is $a = 10 - 2 = 8$.

Vanaf het punt $(3, 10)$ tot het punt $(7, -6)$ is een halve periode.

De periode is dus $2 \times (7 - 3) = 2 \times 4 = 8$ en $b = \frac{2\pi}{8} = \frac{1}{4}\pi$.

Een kwart periode vóór het maximum zit een beginpunt. Dat is bij

$x = 3 - \frac{1}{4} \cdot 8 = 1$, dus $c = 1$.

Een formule bij de sinusoïde is $y = 2 + 8 \sin\left(\frac{1}{4}\pi(x - 1)\right)$.

U5 a De grote wijzer:

De evenwichtsstand is $d = (3,6 + 2,8) : 2 = 3,2$ meter.

De amplitude is $a = 3,6 - 3,2 = 0,4$ meter.

De periode is 1 uur, dus $b = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

Om 0.00 uur staat de grote wijzer bovenaan. Om 0.45 uur gaat de grote wijzer stijgend door de evenwichtsstand, dus $c = \frac{3}{4}$.

De formule voor de grote wijzer is $h = 3,2 + 0,4 \sin\left(2\pi\left(t - \frac{3}{4}\right)\right)$.

De kleine wijzer:

De evenwichtsstand is hetzelfde als bij de grote wijzer, dus 3,2 meter.

De amplitude is $a = 3,4 - 3,2 = 0,2$ meter.

De periode is 12 uur, dus $b = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$.

Om 0.00 uur staat de grote wijzer bovenaan. Om 9.00 uur gaat de kleine wijzer stijgend door de evenwichtsstand, dus $c = 9$.

De formule voor de kleine wijzer is $h = 3,2 + 0,2 \sin\left(\frac{1}{6}\pi(t - 9)\right)$.

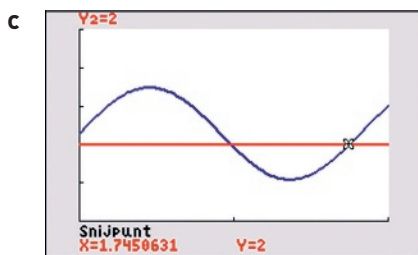
- b** De wijzers staan beide bovenaan om 0.00 uur en 24.00 uur. Daartussen passeren ze elkaar elk uur. Van 0.00 uur tot 12.00 uur legt de grote wijzer 12 ronden af en de kleine wijzer 1 ronde, dus is de grote wijzer 11 keer de kleine wijzer gepasseerd (als je 0.00 uur niet meerekent en 12.00 uur wel). De daarop volgende 12 uur passeert de grote wijzer de kleine wijzer 10 keer (24.00 uur niet meegerekend). Dus per etmaal passeert de grote wijzer de kleine wijzer 21 keer.

18 Periodieke functies

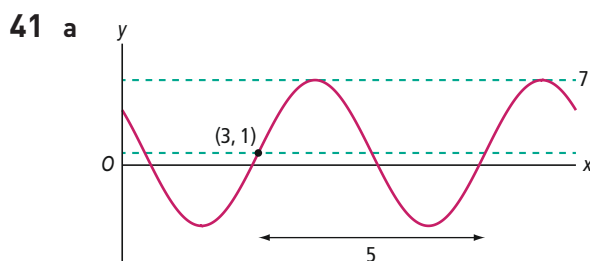
18.6 Gemengde opdrachten

- 39** De evenwichtsstand is $d = (186 + -172) : 2 = 7$ cm.
 De amplitude is $a = 186 - 7 = 179$ cm.
 Op $t = 0$ is het hoogwater en op $t = 12,4$ opnieuw, dus een periode duurt 12,4 uur en $b = \frac{2\pi}{12,4} \approx 0,507$.
 Een beginpunt is bij $t = (6,2 + 12,4) : 2 = 9,3$, dus $c = 9,3$.
 Een formule bij de getijkkromme is $h = 7 + 179 \sin(0,507(t - 9,3))$.

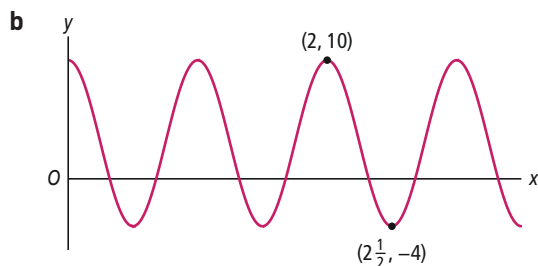
- 40 a** $b = 1,1\pi$, dus de periode is $\frac{2\pi}{1,1\pi} \approx 1,818$ seconden.
 Eén ademhaling duurt ongeveer 1,818 seconden.
b De evenwichtsstand is 2,3 liter en de amplitude is 1,2 liter.
 In de longen zit dus maximaal $2,3 + 1,2 = 3,5$ liter lucht.
 De hoeveelheid lucht in de longen is maximaal een kwart periode na een beginpunt. Een beginpunt is $(0; 2,3)$.
 De hoeveelheid lucht is dus maximaal op $t = 0 + \frac{1}{4} \times 1,818 \approx 0,45$ seconde.
 Eén periode later weer: $t = 0,45 + 1,818 \approx 2,27$ seconde.
 Nog een periode later weer: $t = 2,27 + 1,818 \approx 4,09$ seconde.
 Op de tijdstippen $t = 0,45$, $t = 2,27$ en $t = 4,09$ seconde is de hoeveelheid lucht in de longen maximaal.



Invoer: $y_1 = 2,3 + 1,2 \sin(1,1\pi x)$ en $y_2 = 2$
 Venster: $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 5$
 Optie: snijpunt
 Dit geeft $x = 0,982\dots$ en $x = 1,745\dots$
 Per ademhaling zit er gedurende $1,745\dots - 0,982\dots \approx 0,76$ seconden minder dan 2 liter lucht in de longen.



De evenwichtsstand is $d = 1$.
 De amplitude is $a = 7 - 1 = 6$.
 De periode is 5 en $b = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.
 Een beginpunt is $(3, 1)$, dus $c = 3$.
 Een formule bij de sinusoid is $y = 1 + 6 \sin\left(\frac{2}{5}\pi(x - 3)\right)$.



De evenwichtsstand is $d = (10 + (-4)) : 2 = 3$.

De amplitude is $a = 10 - 3 = 7$.

Vanaf het punt $(2, 10)$ tot het punt $(2\frac{1}{2}, -4)$ is een halve periode.

De periode is dus $2 \times (2\frac{1}{2} - 2) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ en $b = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

Een kwart periode vóór het maximum zit een beginpunt. Dat is bij $x = 2 - \frac{1}{4} \cdot 1 = 1\frac{3}{4}$, dus $c = 1\frac{3}{4}$.

Een formule bij de sinusoiden is $y = 3 + 7 \sin(2\pi(x - 1\frac{3}{4}))$.

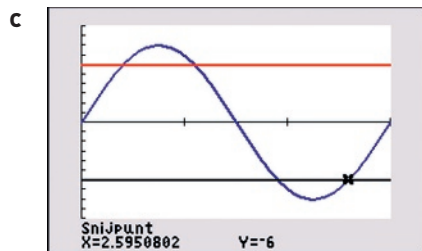
42 a $b = \frac{2}{3}\pi$, dus een periode duurt $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$ seconden.

b Invoer: $y_1 = 8 \sin(\frac{2}{3}\pi x)$ en $y_2 = 3$

Venster: $0 \leq x \leq 6$, $-10 \leq y \leq 10$

Optie: snijpunt

Dit geeft de tijdstippen $t \approx 0,18$; $t \approx 1,32$; $t \approx 3,18$ en $t \approx 4,32$.



Invoer: $y_1 = 8 \sin(\frac{2}{3}\pi x)$ en $y_2 = 6$ en $y_3 = -6$

Venster: $0 \leq x \leq 3$, $-10 \leq y \leq 10$

Optie: snijpunt

De snijpunten van y_1 en y_2 zijn bij $t = 0,404\dots$ en $t = 1,095\dots$

De snijpunten van y_1 en y_3 zijn bij $t = 1,904\dots$ en $t = 2,595\dots$

Van de 3 seconden is de uitwijking gedurende

$(1,095\dots - 0,404\dots) + (2,595\dots - 1,904\dots) = 1,380\dots$ seconden meer dan 6 cm.

Dat is $\frac{1,380\dots}{3} \times 100\% \approx 46,0\%$ van de tijd.

18 Periodieke functies

Onderzoeksoopdrachten

- 43** De formule bij de bovenste sinusoid is van de vorm $S_{\text{bovenste}} = d + a \sin(b(x - c))$.
 De twee sinusoiden hebben dezelfde amplitude, dus $a = 50$ cm.
 De evenwichtslijn van bovenste sinusoid ligt op de hoogte van de top van de onderste sinusoid, dus $d = 100 + 50 = 150$ cm.
 De twee sinusoiden hebben dezelfde periode, dus $b = \frac{\pi}{3}$.
 De twee sinusoiden raken elkaar bij $x = \frac{1}{2}$. De hoogte van het raakpunt is
 $S_{\text{onderste}} = 100 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = 125$ cm.
 $x = \frac{1}{2}$ invullen in de formule voor S_{bovenste} geeft de vergelijking:
 $150 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{2} - c\right)\right) = 125$
 Invoer: $y_1 = 150 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{2} - x\right)\right)$ en $y_2 = 125$
 Venster: $0 \leq x \leq 10$, $100 \leq y \leq 200$
 Optie: snijpunt
 Het eerste snijpunt is bij $x = 1$, dus een mogelijke waarde voor c is 1.
 De formule wordt dan: $S_{\text{bovenste}} = 150 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{3} (x - 1)\right)$.

Samenvatting

- S1 a** De grafiek van f daalt het snelst als de grafiek dalend door de evenwichtsstand gaat. Dat is in de punten $(3\pi, 0)$ en $(5\pi, 0)$.
b $(2\frac{1}{2}\pi, 1)$, $(3\frac{1}{2}\pi, -1)$, $(4\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(5\frac{1}{2}\pi, -1)$.
- S2** Het functievoorschrift van h is $h(x) = -1,5 \sin(x)$.
- S3** De amplitude van $f(x) = 12 \sin(x)$ is 12.
 De amplitude van $g(x) = -0,8 \sin(x)$ is 0,8.
- S4 a** $b = 0,25$, de periode is $\frac{2\pi}{0,25} = 8\pi$.
b $b = 2\pi$, de periode is $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$.
c $b = 0,2\pi$, de periode is $\frac{2\pi}{0,2\pi} = 10$.
- S5 a** De functie p : de evenwichtsstand is 1,5 en de amplitude is 1.
 De functie q : de evenwichtsstand is -1 en de amplitude is 2.
b $p(x) = 1,5 + \sin(x)$ en $q(x) = -1 + 2 \sin(x)$
- S6 a** $h(x) = f(x) + 6 = \sin(x) + 6$
b De grafiek van k ontstaat door de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ 7 eenheden omlaag te verschuiven.

- S7 a** De grafiek van g gaat bij $x = 3$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $c = 3$.
Het functievoorschrift van g is $g(x) = \sin(x - 3)$.
- b** $T = \sin(p + 0,5) = \sin(p - 0,5)$, dus $c = -0,5$.
De grafiek gaat in het punt $(-0,5; 0)$ stijgend door de evenwichtsstand.

- S8 a** Functie f :

$d = 3$, de evenwichtsstand is 3.

$a = 5$, de amplitude is 5.

$b = \frac{1}{2}$, de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Functie g :

$d = 10$, de evenwichtsstand is 10.

$a = -3$, de amplitude is 3.

$b = \frac{1}{3}\pi$, de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$.

- b** De evenwichtsstand is 10 en de amplitude is 3, dus het maximum is gelijk aan $10 + 3 = 13$ en het minimum is gelijk aan $10 - 3 = 7$.

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$. De grafiek gaat in $(0, 10)$ dalend door de evenwichtsstand, vanwege het minteken vóór $3 \sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right)$. Een halve periode later, in het punt $(3, 10)$, heeft de grafiek een beginpunt.

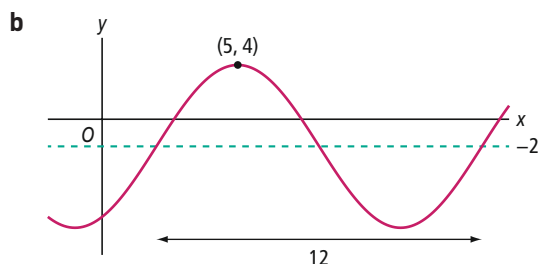
Op het interval $[0, 12]$ zijn de snijpunten met de evenwichtsstand:

$(0, 10)$, $(3, 10)$, $(6, 10)$, $(9, 10)$ en $(12, 10)$.

De toppen liggen halverwege de snijpunten met de evenwichtsstand:

$\left(1\frac{1}{2}, 7\right)$, $\left(4\frac{1}{2}, 13\right)$, $\left(7\frac{1}{2}, 7\right)$ en $\left(10\frac{1}{2}, 13\right)$.

- S9 a** Het maximum is 2 en het minimum is -4 .
De evenwichtsstand is $d = (2 + -4) : 2 = -1$.
De amplitude is $a = 2 - -1 = 3$.
De periode is 4 en $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.
Een beginpunt is $(1, -1)$, dus $c = 1$.
Een functievoorschrift is $f(x) = -1 + 3 \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 1)\right)$.



De evenwichtsstand is $d = -2$.

De amplitude is $a = 4 - -2 = 6$.

De periode is 12 en $b = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$.

Een kwart periode vóór het maximum zit een beginpunt, dat is bij

$x = 5 - \frac{1}{4} \cdot 12 = 2$, dus $c = 2$.

Een functievoorschrift bij de sinusoid is $g(x) = -2 + 6 \sin\left(\frac{1}{6}\pi(x - 2)\right)$.

18 Periodieke functies

Test jezelf

- T1 a** $d = -3$, de evenwichtsstand is -3 .
 $a = 7$, de amplitude is 7 .
 $b = \frac{1}{2}$, de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.
 $c = -\frac{3}{4}\pi$, een beginpunt is $(-\frac{3}{4}\pi, -3)$.
- b** $d = 7$, de evenwichtsstand is 7 .
 $a = -3$, de amplitude is 3 .
 $b = 4$, de periode is $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.
 $c = -4$. De grafiek gaat in het punt $(-4, 7)$ dalend door de evenwichtsstand, vanwege het minteken vóór $3 \sin(4(x + 4))$. Een halve periode later, in het punt $(-4 + \frac{1}{4}\pi, 7) \approx (-3,21; 7)$ heeft de grafiek een beginpunt.
- c** $d = -0,23$, de evenwichtsstand is $-0,23$.
 $a = 0,65$, de amplitude is $0,65$.
 $b = 0,4\pi$, de periode is $\frac{2\pi}{0,4\pi} = 5$.
 $c = 0$, een beginpunt is $(0, -0,23)$.
- T2** De grafiek is (lijn)symmetrisch in de verticale lijn door $x = \frac{1}{2}\pi$.
Daaruit volgt dat de x -coördinaat van punt B gelijk is aan $\pi - 0,78 \approx 2,36$.
Punt C ligt één periode (2π) naar links ten opzichte van punt A , dus de x -coördinaat van punt C is $0,78 - 2\pi \approx -5,50$.
Punt D ligt één periode (2π) naar links ten opzichte van punt B , dus de x -coördinaat van punt D is $2,36 - 2\pi \approx -3,92$.
- T3 a** $b = 1,25$, dus de periode is $\frac{2\pi}{1,25} = 1\frac{3}{5}\pi \approx 5$ seconden.
- b** De evenwichtsstand is $1,2$ liter en de amplitude is $0,7$ liter.
In de longen blijft minimaal $1,2 - 0,7 = 0,5$ liter lucht achter.
- c** Als de ademfrequentie $1,5$ keer zo groot wordt, dan wordt de periode $1,5$ keer zo klein. De waarde van b wordt dan $1,5$ keer zo groot.
Dus $b = 1,25 \times 1,5 = 1,875$.
De minimale longinhoud blijft $0,5$ liter en de maximale longinhoud wordt $2,4$ liter. Dan is de evenwichtsstand $d = (2,4 + 0,5) : 2 = 1,45$ liter en de amplitude $a = 2,4 - 1,45 = 0,95$ liter.
De formule is $H = 1,45 + 0,95 \sin(1,875t)$.
- T4 a** De lengte van de drempel is precies één periode, dus $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$ meter.
- b** De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat, dus in een beginpunt. $c = 1$, het beginpunt is $(1; 0,06)$.
1 meter vanaf het begin van de drempel ligt het eerste punt waar de drempel een maximale helling heeft.
- T5 a** Het maximum is 15 en het minimum is -5 .
De evenwichtsstand is $(15 + (-5)) : 2 = 5$.
De amplitude is $15 - 5 = 10$.
De grafiek heeft een top bij $x = 0$ en $x = 80$, dus de periode is 80 .

- b Uit vraag a volgt $d = 5$ en $a = 10$.

$$b = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{80} = \frac{1}{40}\pi.$$

Een beginpunt is $(60, 5)$. Dus $c = 60$.

Een formule bij de sinusoiden is $y = 5 + 10 \sin\left(\frac{1}{40}\pi(x - 60)\right)$.

- T6 a De maximale daglengte is 19 uur in week 25.

- b Bij $t = 11,5$ en $t = 37,5$ is de daglengte voor alle breedtegraden gelijk.
Deze dagen horen bij het begin van de lente en het begin van de herfst.

- c De daglengte neemt het sterkst toe in een beginpunt.

In de formule is $c = 0$, het beginpunt is $(0, 12)$.

De daglengte neemt het sterkst toe 0 weken na 21 maart, dus op 21 maart.

- d $b = 0,1208$, dus de periode is $\frac{2\pi}{0,1208} \approx 52$ weken oftewel 1 jaar.

- e Bij 52° NB is de maximale daglengte 16,7 uur.

De amplitude is $16,7 - 12 = 4,7$.

- f Invoer: $y_1 = 12 + 4,7 \cdot \sin(0,1208 \cdot x)$ en $y_2 = 16$

Venster: $0 \leq x \leq 52$, $0 \leq y \leq 24$

Optie: snijpunt

Dit geeft $x \approx 8,43$ en $x \approx 17,58$.

Dat betekent dat ongeveer 8,5 week na 21 maart en 17,6 weken na 21 maart de daglengte in Amersfoort 16 uur is.

- g Bij 64° NB is de maximale daglengte 21 uur.

De evenwichtsstand is 12 uur en de amplitude is $21 - 12 = 9$ uur.

De periode is 365 dagen, dus $b = \frac{2\pi}{365} = \frac{2}{365}\pi$.

De tijd is in dagen, dus het beginpunt is bij $t = 7 \times 12 = 84$, dus $c = 84$.

De formule is $d = 12 + 9 \cdot \sin\left(\frac{2}{365}\pi(t - 84)\right)$.

Extra oefening

- E1 a $g(x) = 4 \cdot f(x) = 4 \sin(x)$

- b $h(x) = -3 \cdot f(x) = -3 \sin(x)$

- E2 a Bij een periode van $0,2\pi$ is $b = \frac{2\pi}{0,2\pi} = 10$.

Bij een periode van 8 is $b = \frac{2\pi}{8} = \frac{1}{4}\pi$.

- b $b = 1,5$, dus de periode is $\frac{2\pi}{1,5} = 1\frac{1}{3}\pi$.

$b = \pi$, dus de periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

- E3 a $g(x) = f(x) - 3,4 = \sin(x) - 3,4$

- b De grafiek van h ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door deze 8 eenheden omhoog te verschuiven.

18 Periodieke functies

- E4 a** De grafiek van g gaat bij $x = -1$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $c = -1$. Het functievoorschrift van g is $g(x) = \sin(x - (-1)) = \sin(x + 1)$.
- b** $c = 2,5$, dus de grafiek gaat in het punt $(2,5; 0)$ stijgend door de evenwichtsstand.
- E5 a** $d = -3$, de evenwichtsstand is -3 .
 $a = 2$, de amplitude is 2 .
 $b = 1$, de periode is $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$.
 $c = 5$, een beginpunt is $(5, -3)$.
- b** $d = 7$, de evenwichtsstand is 7 .
 $a = 3$, de amplitude is 3 .
 $b = \frac{1}{2}$, de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.
 $c = -2$, een beginpunt is $(-2, 7)$.
- c** $d = 8$, de evenwichtsstand is 8 .
 $a = 5$, de amplitude is 5 .
 $b = 3\pi$, de periode is $\frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$.
 $c = 1$, een beginpunt is $(1, 8)$.
- d** $d = -2,7$, de evenwichtsstand is $-2,7$.
 $a = -1,6$, de amplitude is $1,6$.
 $b = 1$, de periode is $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$.
 $c = -5$. De grafiek gaat in het punt $(-5; -2,7)$ dalend door de evenwichtsstand, vanwege het minteken vóór $1,6 \sin(x + 5)$. Een halve periode later, in het punt $(-5 + \pi; -2,7) \approx (-1,86; -2,7)$ heeft de grafiek een beginpunt.
- E6 a** Functie f :
 Het maximum is 2 en het minimum is -2 .
 De evenwichtsstand is $d = 0$.
 De amplitude is $a = 2$.
 De periode is 2 en $b = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
 Een beginpunt is $(0, 0)$, dus $c = 0$.
 Een functievoorschrift is $f(x) = 2 \sin(\pi x)$.
 Functie g :
 Het maximum is $3,5$ en het minimum is $-1,5$.
 De evenwichtsstand is $d = (3,5 + (-1,5)) : 2 = 1$.
 De amplitude is $a = 3,5 - 1 = 2,5$.
 De periode is 12 en $b = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$.
 Een beginpunt is $(1,2; 1)$, dus $c = 1,2$.
 Een functievoorschrift is $g(x) = 1 + 2,5 \sin\left(\frac{1}{6}\pi(x - 1,2)\right)$.

- b Van de grafiek van h is de evenwichtsstand $d = (3,5 + 0,5) : 2 = 2$ en de amplitude $a = 3,5 - 2 = 1,5$. De periode is 3 en $b = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

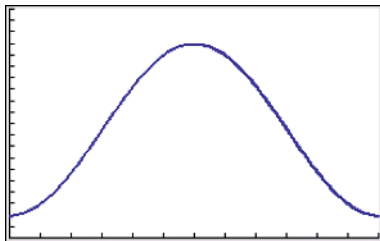
De grafiek van h gaat in het punt $(0, 2)$ dalend door de evenwichtsstand.

Een halve periode later, in het punt $(1\frac{1}{2}, 2)$, heeft de grafiek een beginpunt dus $c = 1\frac{1}{2}$.

De formule bij de grafiek van h is $y = 2 + 1,5 \sin(\frac{2}{3}\pi(x - 1\frac{1}{2}))$.

Als de grafiek van h 2 naar links en 1,5 omhoog wordt geschoven, krijg je een grafiek waarbij de formule $y = 3,5 + 1,5 \sin(\frac{2}{3}\pi(x + \frac{1}{2}))$ hoort.

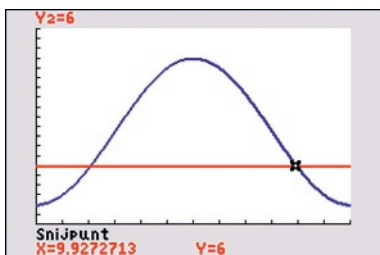
E7 a



Invoer: $y_1 = 9,5 - 7,5 \sin(\frac{1}{6}\pi(x + 3))$

Venster: $0 \leq x \leq 12, 0 \leq y \leq 20$

b



Invoer: $y_1 = 9,5 - 7,5 \sin(\frac{1}{6}\pi(x + 3))$ en $y_2 = 6$

Venster: $0 \leq x \leq 12, 0 \leq y \leq 20$

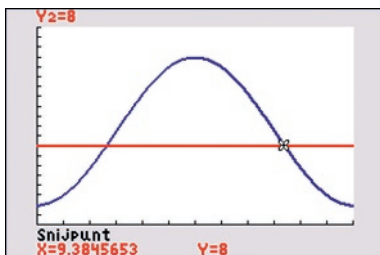
Optie: snijpunt

Dit geeft $x = 2,072\dots$ en $x = 9,927\dots$

Het groeiseizoen duurt $9,927\dots - 2,072\dots \approx 7,85$ maanden.

Dat is ongeveer 7 maanden en 26 dagen.

c



Invoer: $y_1 = 9,5 - 7,5 \sin(\frac{1}{6}\pi(x + 3))$ en $y_2 = 8$

Venster: $0 \leq x \leq 12, 0 \leq y \leq 20$

Optie: snijpunt

Dit geeft $x = 2,615\dots$ en $x = 9,384\dots$. Voor dit gewas duurt het groeiseizoen $9,384\dots - 2,615\dots = 6,769\dots$ maanden. Dat is ongeveer 6 maanden en 23 dagen.

Het groeiseizoen voor dit gewas duurt ongeveer één maand en drie dagen korter.

18 Periodieke functies

E8 a $b = 4\pi$, dus de periode is $\frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.

Het rad draait één keer rond in een halve minuut ofwel 30 seconden.

b $t = 0$ invullen geeft $H = 13 + 12 \sin(4\pi(0 - 0,125)) = 1$ meter.

De persoon stapt in op een hoogte van 1 meter.

c De evenwichtsstand is 13 en de amplitude is 12. De persoon komt dus maximaal $13 + 12 = 25$ meter hoog.

d 10 seconden komt overeen met $t = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$.

$t = \frac{1}{6}$ invullen geeft $H = 13 + 12 \sin\left(4\pi\left(\frac{1}{6} - 0,125\right)\right) = 19$ meter.

De persoon bevindt zich dan op een hoogte van 19 meter.

e Als de tijd in seconden wordt gegeven, is één periode 30 en $b = \frac{2\pi}{30} = \frac{1}{15}\pi$.

Het getal 0,125 in de formule is in minuten, door te vermenigvuldigen met 60 wordt dat seconden. $0,125 \times 60 = 7,5$.

De formule wordt $H = 13 + 12 \sin\left(\frac{1}{15}\pi(t - 7,5)\right)$.

E9 De evenwichtsstand is 9 en de amplitude is 5, dus het maximum is gelijk aan $9 + 5 = 14$ en het minimum is gelijk aan $9 - 5 = 4$.

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 1\frac{1}{3}$ en een beginpunt is $\left(\frac{2}{3}, 9\right)$.

Op het interval $[0, 2]$ zijn de snijpunten met de evenwichtsstand:

$(0, 9)$, $\left(\frac{2}{3}, 9\right)$, $\left(1\frac{1}{3}, 9\right)$ en $(2, 9)$.

De toppen liggen halverwege de snijpunten met de evenwichtsstand:

$\left(\frac{1}{3}, 4\right)$, $(1, 14)$ en $\left(1\frac{2}{3}, 4\right)$.

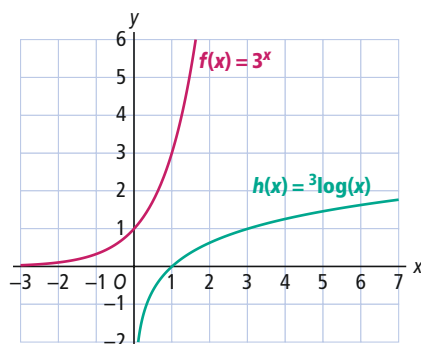
19 Functies bewerken

Voorkennis

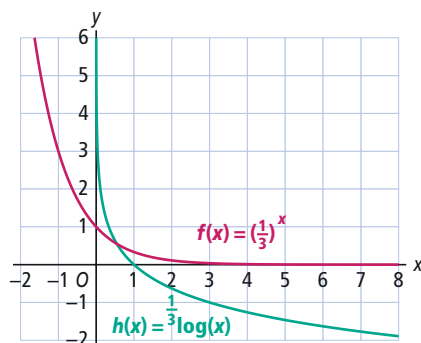
- V1** De grafiek bij de functie $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ gaat door het punt $(0, 3)$ en is dalend. Grafiek 3 hoort hierbij.
 De grafiek bij de functie $g(x) = {}^2\log(x)$ gaat door het punt $(1, 0)$ en is stijgend. Grafiek 1 hoort hierbij.
 De grafiek bij $h(x) = x^2$ is een dalparabool door $(0, 0)$. Deze grafiek is niet getekend.
 De grafiek bij de functie van $i(x) = x^3$ gaat door $(0, 0)$ en is stijgend. Deze functie hoort bij grafiek 2.

- V2 a** Dit is een periodieke grafiek.
b Van de functies $f(x) = a \cdot x^n$ en van de functie $f(x) = {}^s\log(x)$ is geen grafiek getekend.
c Bij grafiek 2 hoort een lineaire functie dus $f(x) = ax + b$.
 Bij grafiek 3 hoort een kwadratische functie dus $f(x) = ax^2 + bx + c$.
 Bij grafiek 4 hoort een exponentiële functie dus $f(x) = b \cdot g^x$.

V3 a



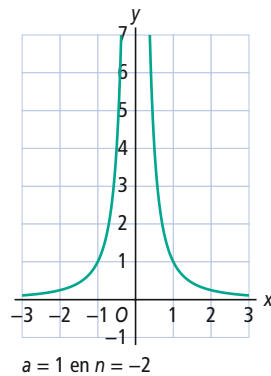
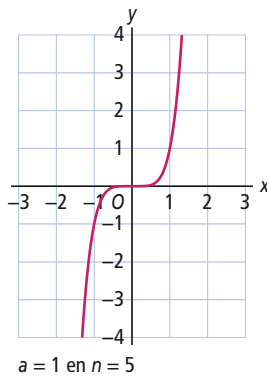
b



- c** f en h zijn stijgend als $g > 1$.
 f en h zijn dalend als $0 < g < 1$.

19 Functies bewerken

V4 a



Als $a = 1$ en $n = 5$, dan is $f(x) = x^5$.

De grafiek is voor $x < 0$ afnemend stijgend en voor $x > 0$ toenemend stijgend.

Als $a = 1$ en $n = -2$, dan is $f(x) = x^{-2}$.

De grafiek is voor $x < 0$ toenemend stijgend en voor $x > 0$ afnemend dalend.

b Als $a = 1$, dan is $f(x) = x^n$.

$(2, \frac{1}{8})$ invullen geeft $\frac{1}{8} = 2^n$.

$$n = {}^2\log\left(\frac{1}{8}\right) = -3$$

$n = -3$ hoort bij deze grafiek.

c Invullen van $x = 1$ in $f(x) = x^n$ geeft $f(1) = 1^n = 1$.

Voor elke waarde van n gaat de grafiek van f door het punt $(1, 1)$.

d Invullen van $(1, 4)$ in $f(x) = a \cdot x^n$ geeft $4 = a \cdot 1^n \Rightarrow 4 = a \cdot 1 \Rightarrow a = 4$.

e Invullen van $(3, 36)$ in $f(x) = 4 \cdot x^n$ geeft $36 = 4 \cdot 3^n$.

$$3^n = 9 \text{ dus } n = 2$$

V5 a $f(x) = x(3 + 2x) - 5(x - 6)$

$$f(x) = 3x + 2x^2 - 5x + 30$$

$$f(x) = 2x^2 - 2x + 30$$

b $g(x) = -3x^4(8x^3 - 7x^6)$

$$g(x) = -24x^7 + 21x^{10}$$

$$g(x) = 21x^{10} - 24x^7$$

c $g(x) = (9 - 4x^3)(x + 5)$

$$g(x) = 9x + 45 - 4x^4 - 20x^3$$

$$g(x) = -4x^4 - 20x^3 + 9x + 45$$

d $i(x) = 5x^4\left(4x + \frac{8}{x^3}\right)$

$$i(x) = 20x^5 + \frac{40x^4}{x^3}$$

$$i(x) = 20x^5 + 40x$$

V6 a $y = 13 - 4(2x - 3)$

$$y = 13 - 8x + 12$$

$$y = 25 - 8x$$

b $y = 6 \cdot 9^{\frac{1}{2}x}$

$$y = 6 \cdot \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^x$$

$$y = 6 \cdot 3^x$$

c $y = (2x + 1)^2$

$$y = 4x^2 + 4x + 1$$

d $y = \frac{12\left(\frac{1}{3}x - 2\right)}{4 - 3\left(\frac{1}{3}x - 2\right)}$

$$y = \frac{4x - 24}{4 - x + 6}$$

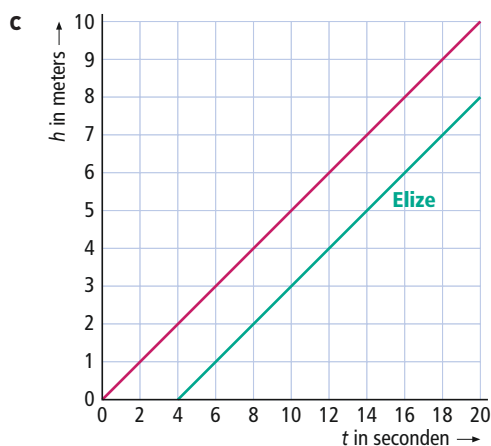
$$y = \frac{4x - 24}{10 - x}$$

19.1 Grafieken verschuiven

intro Grafiek 2 ontstaat door de grafiek 1 vier eenheden omhoog te verschuiven.
Grafiek 2 kan ook ontstaan door grafiek 1 twee eenheden naar rechts te verschuiven.

- 1 a** $s(0) = 0^2 = 0$ en $v(0) = 0^2 + 6 = 6$
Grafiek 3 gaat door het punt $(0, 0)$ en hoort dus bij functie s .
Grafiek 1 gaat door het punt $(0, 6)$ en hoort dus bij functie v .
- b** De grafiek van v ontstaat uit de grafiek van s door deze grafiek 6 omhoog te schuiven.
- c** Grafiek 2 ontstaat uit de grafiek van s door deze 2 omhoog te schuiven.
Grafiek 4 ontstaat uit de grafiek van s door deze 2 omlaag te schuiven.
- d** Een functievoorschrift bij grafiek 2 is $t(x) = x^2 + 2$.
Een functievoorschrift bij grafiek 4 is $w(x) = x^2 - 2$.
- e** $f(0) = 0^2 + a = 12$ dus $a = 12$.

- 2 a** Harold staat na 20 seconden boven aan de trap.
- b** Harold stijgt 0,5 meter per seconde.
Een formule is dus $h = 0,5t$.



- d** De richtingscoëfficiënt is gelijk aan de grafiek van Harold dus $p = 0,5$.
De grafiek van Elize loopt vier seconden achter dus $q = 4$.
- 3 a** Grafiek 1 is uit de grafiek van de standaardfunctie $f(x) = x^2$ ontstaan door een verschuiving van 2 naar rechts en 3 omlaag.
- b** Vervang x door $x - 2$ en trek van de functiewaarden 3 af.
Een functievoorschrift bij grafiek 1 is $h(x) = (x - 2)^2 - 3$.
- c** Grafiek 2 is uit de grafiek van de standaardfunctie $g(x) = \sqrt{x}$ ontstaan door een verschuiving van 3 naar links en 1 omlaag.
- d** Vervang x door $x + 3$ en trek van de functiewaarden 1 af.
Een functievoorschrift bij grafiek 2 is $i(x) = \sqrt{x + 3} - 1$.
- 4 a** De grafiek van m is ontstaan door de grafiek van f 6 naar links en 7 omlaag te verschuiven.
- b** Jan heeft $4x$ vervangen door $4x - 20$ maar je moet x vervangen door $x - \dots$.
- c** $4x - 20 = 4(x - 5)$
De grafiek van k is ontstaan uit de grafiek van f door deze 5 naar rechts en 25 omhoog te verschuiven.

19 Functies bewerken

- 5 a** Herschrijf de formule naar $y = 4 + 11 \sin(2(x - 2))$.
 Vervang x door $x + 5$ en verminder y met 3.
 Een formule bij de beeldgrafiek is $y = 4 + 11 \sin(2(x + 5 - 2)) - 3$.
 Dit kun je vereenvoudigen tot $y = 1 + 11 \sin(2(x + 3))$ ofwel
 $y = 1 + 11 \sin(2x + 6)$.
- b** Herschrijf de formule naar $y = 9 + 11 \sin(2(x - 3))$.
 Er is dus een translatie toegepast van 1 naar rechts en 5 omhoog.
- 6 a** De richtingscoëfficiënt is $2 : 3 = \frac{2}{3}$. Het startgetal is -2 .
 Het functievoorschrift is $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$.
- b** Een verschuiving van 3 omhoog.
- c** Tel bij de functiewaarden 3 op.
 $g(x) = \frac{2}{3}x - 2 + 3 = \frac{2}{3}x + 1$
- d** Een verschuiving van $4\frac{1}{2}$ naar links.
- e** Vervang x door $x + 4\frac{1}{2}$.
 $g(x) = \frac{2}{3}\left(x + 4\frac{1}{2}\right) - 2$
- f** $g(x) = \frac{2}{3}x + 3 - 2 = \frac{2}{3}x + 1$, dit is gelijk aan het antwoord van opdracht c.
- 7** De formule bij de beeldgrafiek is $y = 2(x + 5) - 3$
 Dit kun je herleiden tot $y = 2x + 7$.
 De grafiek van $y = 2x + 7$ kun je ook krijgen door de grafiek van
 $y = 2x - 3$ tien omhoog te verschuiven.
- 03 a** De coördinaten van de top van de grafiek f zijn $(0, 0)$.
- b** De top van de grafiek van g is 3 eenheden naar links verschoven ten opzichte van de top van de grafiek van f .
- c** De top van de grafiek van g is 2 eenheden omhoog verschoven ten opzichte van de top van de grafiek van f .
- d** Om de grafiek 3 naar links te verschuiven, vervang je x door $x - 3$, ofwel $x + 3$.
 Om de grafiek 2 omhoog te verschuiven, tel je 2 bij de functiewaarde op.
 Je krijgt dan $g(x) = (x + 3)^2 + 2$.
- e** De grafiek van h is uit de grafiek van $f(x) = x^2$ ontstaan door een verschuiving van 4 naar rechts en 1 omlaag.
 Vervang x door $x - 4$ en trek van de functiewaarden 1 af.
 Een functievoorschrift bij de grafiek van h is $h(x) = (x - 4)^2 - 1$.
- U1 a** Bij $p = 3$ hoort de functie $g(x) = q + \sqrt{x - 3}$.
 De grafiek is 3 naar rechts verschoven.
 De grafiek gaat door $(7, 1)$ dus $1 = q + \sqrt{7 - 3}$ ofwel $q = -1$.
- b** Bij $q = -2$ hoort de functie $g(x) = -2 + \sqrt{x - p}$.
 De grafiek is 2 omlaag verschoven.
 De grafiek gaat door $(7, 1)$ dus $1 = -2 + \sqrt{7 - p}$.
 $\sqrt{7 - p} = 3$
 $7 - p = 9$
 $p = -2$
- c** $7 = q + \sqrt{1 - p}$
 $\sqrt{1 - p} \geq 0$ dus voor q moet gelden $q \leq 7$.
 Bij waarden van $q > 7$ kun je geen waarde van p berekenen.

19.2 Herschalen

intro De diepte d wordt een factor 100 keer zo groot.

Je moet d dus vermenigvuldigen met 0,01.

$$T = 18 + 2 \cdot 0,01d \text{ ofwel } T = 18 + 0,02d.$$

- 8 a** De trein legt 40 meter af per seconde.
b De trein legt $40 \times 0,001 = 0,04$ km af per seconde.
c Als $s = 1$, dan is $S = 0,001$. Hieruit volgt $S = 0,001s$.
d $S = 0,001 \cdot 40t$ ofwel $S = 0,04 \cdot t$.
e 1 minuut is 60 seconden dus de tijd t in seconden is 60 keer zo groot als de tijd T in minuten, ofwel $t = 60 \cdot T$.
f $S = 0,04 \cdot 60T$ ofwel $S = 2,4T$
 Invullen van $T = 10$ geeft $S = 2,4 \times 10 = 24$.
 Na 10 minuten heeft de trein 24 km afgelegd.

- 9** $s = 6 \cdot 4^2 + 10 = 106$ (dit is de afstand in meters)
 $c = 600 \cdot 4^2 + 1000 = 10\,600$ (dit is de afstand in centimeters)
 $106 \text{ m} = 10\,600 \text{ cm}$, dit komt overeen met de formules.

- 10 a** De hoogte neemt met $(270 - 120) : 3 = 50$ meter per minuut toe.
 De richtingscoëfficiënt is daarom 50.
 De beginhoogte is 120 meter, de bijbehorende formule is $h = 50t + 120$.
b $H = 0,1h$
 Dit geeft $H = 0,1(50t + 120)$.
c $H = 5t + 12$
d $T = 60t$ ofwel $t = \frac{1}{60}T$.
e $H = 5 \cdot \frac{1}{60}T + 12$ ofwel $H = \frac{1}{12}T + 12$.
f De hoogte neemt met $300 : 1\frac{1}{2} = 200$ meter per minuut toe.
 Een formule hierbij is $h = 200t$.
g $k = 0,001h$ en $t = \frac{1}{60}s$
 $k = 0,001(200 \cdot \frac{1}{60}s)$ ofwel $k = \frac{1}{300}s$.

- 11 a** Omdat 1 pond gelijk is aan 0,5 kg geldt $K = 0,5P$.
 $K = 0,5(3a^2 - 4)$ ofwel $K = 1,5a^2 - 2$.
b Omdat 1 jaar gelijk is aan 12 maanden geldt $m = 12j$.
 $T = 3 + 5 \sin(\pi(12j - 1))$.
c Omdat 1 cm^2 gelijk is aan $0,0001 \text{ m}^2$ geldt $A = 0,0001 \cdot O$ dus
 $A = 0,0001 \cdot 2\sqrt{5x + 10}$ ofwel $A = 0,0002\sqrt{5x + 10}$.

- 12 a** $t = 0$ invullen geeft $V = 3,31 + \frac{21}{0 - 148} \approx 3,17$ Volt.
b Los de vergelijking $3,31 + \frac{21}{t - 148} = 1$ op met de rekenmachine.
 Invoer: $y_1 = 3,31 + \frac{21}{x - 148}$ en $y_2 = 1$
 Venster: $0 \leq x \leq 200$, $0 \leq y \leq 2$
 Optie: snijden
 De oplossing is $x = 138,909\dots$
 Na ongeveer 139 uur is de spanning afgenomen tot 1 Volt.

19 Functies bewerken

- c Omdat 1 uur gelijk is aan 60 minuten is $s = 60 \cdot t$ ofwel $t = \frac{1}{60} \cdot s$.
Omdat 1 Volt gelijk is aan 1000 mV geldt $W = 1000 \cdot V$.

$$\text{Dit invullen geeft } W = 1000 \cdot \left(3,31 + \frac{21}{\frac{1}{60} \cdot s - 148} \right).$$

$$W = 1000 \cdot \left(3,31 + \frac{1260}{s - 8880} \right) \text{ ofwel } W = 3310 + \frac{1\,260\,000}{s - 8880}$$

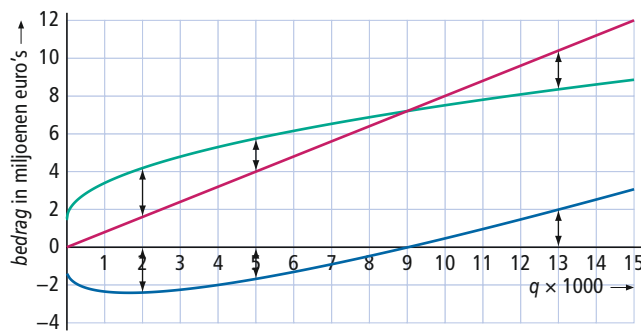
- 13 a** Als ballon B zijn draaggas twee keer zo snel verliest als ballon A, dan zal de hoeveelheid draaggas in ballon B na 2 dagen evenveel zijn als die in ballon A na 4 dagen.
- b** De eenheid bij de variabele tijd is bij ballon B 2 keer zo groot.
In de formule van A vervang je t door $2t$.
Het resultaat is $B = 1000 \cdot 0,995^{2t}$.
- c** De eenheid bij de variabele tijd is bij ballon C $\frac{1}{3}$ keer zo groot.
In de formule van A vervang je t door $\frac{1}{3}t$.
Het resultaat is $C = 1000 \cdot 0,995^{\frac{1}{3}t}$.
- d** $t = 7w$
Dit geeft $A = 1000 \cdot 0,995^{7w}$.

- 010 a** h is waterhoogte in dm.
 H is waterhoogte in meters.
- b** 1 dm is gelijk aan 0,1 m.
- c** Als $h = 1$ dan is $H = 0,1$.
- d** Daarom is $H = 0,1h$.
- e** In stap 4 wordt $6t + 1$ vervangen door $0,1(6t + 1)$.
Dit geeft $H = 0,1 \cdot (6t + 1)$, na haakjes wegwerken wordt dit $H = 0,6t + 0,1$.
- f** t is de tijd in uren.
 T is de tijd in minuten.
- g** 1 uur is gelijk aan 60 minuten.
- h** $T = 60 \cdot t$, dus $t = \frac{1}{60}T$.
- i** $H = 0,6 \cdot \frac{1}{60}T + 0,1$ ofwel $H = 0,01T + 0,1$.

U2 $C = \frac{5}{9}F - 17\frac{7}{9}$
 $\frac{5}{9}F = C + 17\frac{7}{9}$
 $C = \frac{5}{9}F - 17\frac{7}{9}$ en $m = 60u$ substitueren in de formule
 $C = 0,005m - 10$ geeft
 $\frac{5}{9}F - 17\frac{7}{9} = 0,005 \cdot 60u - 10$
 $\frac{5}{9}F - 17\frac{7}{9} = 0,3u - 10$
 $\frac{5}{9}F = 0,3u + 7\frac{7}{9}$
 $F = 0,54u + 14$

19.3 Somfuncties en verschilfuncties

intro



De blauwe grafiek geeft het verband tussen het aantal racefietsen en de winst. De winst is het verschil tussen de opbrengst en de kosten..

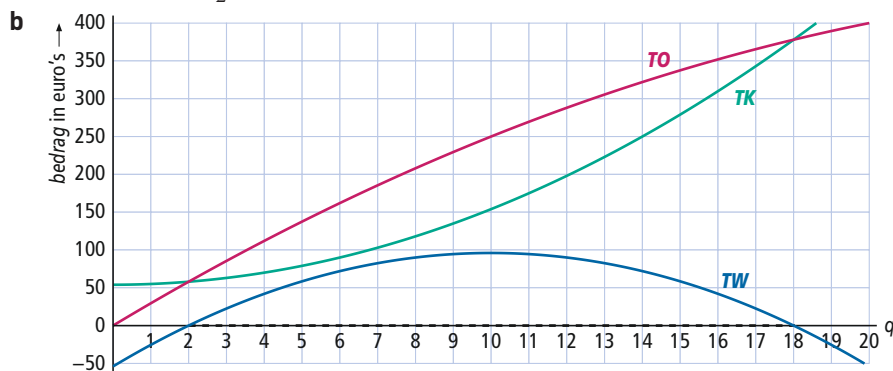
- 14 a** $N = G - S$ omdat de natuurlijke aanwas het verschil is tussen geboorte en sterfte.
- b** Je kunt de grafiek van N tekenen door bij elk jaartal de waarde van G minus de waarde van S te nemen. De punten die je zo krijgt vormen samen de grafiek van N .
- c** In dat punt was de natuurlijke aanwas even groot als de sterfte (in procenten bevolking).
Je kan ook zeggen: de geboorte was twee keer zo groot als de sterfte (in procenten bevolking).
- d** Dat betekent dat de natuurlijke aanwas negatief is, of dat de sterfte groter is dan de geboorte.
- e** Beide formules invullen in $N = G - S$ geeft
 $N = 1,1 - 0,0017t - (0,85 + 0,0071t)$
 $N = 1,1 - 0,0017t - 0,85 - 0,0071t$
 $N = 0,25 - 0,0088t$

- 15 a** $s = h + k$ geeft
 $s = 3m^2 - 4m + 9 + 7 + 10m$
 $s = 3m^2 + 6m + 16$
- $v = h - k$ geeft
 $v = 3m^2 - 4m + 9 - (7 + 10m)$
 $v = 3m^2 - 14m + 2$
- b** $s = h + k$ geeft
 $s = 2 + 6p - \frac{3}{p} + 3 - 5p + \frac{2}{p}$
 $s = 5 + p - \frac{1}{p}$
- $v = h - k$ geeft
 $v = 2 + 6p - \frac{3}{p} - \left(3 - 5p + \frac{2}{p}\right)$
 $v = -1 + 11p - \frac{5}{p}$
- c** $s = h + k$ geeft
 $s = \frac{2}{3}a(a-1) + \left(\frac{1}{2}a-2\right)(2a+5)$
 $s = \frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{3}a + a^2 - 1\frac{1}{2}a - 10$
 $s = 1\frac{2}{3}a^2 - 2\frac{1}{6}a - 10$
- $v = h - k$ geeft
 $v = \frac{2}{3}a(a-1) - \left(\frac{1}{2}a-2\right)(2a+5)$
 $v = \frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{3}a - (a^2 - 1\frac{1}{2}a - 10)$
 $v = -\frac{1}{3}a^2 + \frac{5}{6}a + 10$
- d** $s = h + k$ geeft
 $s = t^2 - \frac{4}{t^2} + \frac{2}{t^3} - 0,7t^2$
 $s = 0,3t^2 - \frac{4}{t^2} + \frac{2}{t^3}$
- $v = h - k$ geeft
 $v = t^2 - \frac{4}{t^2} - \left(\frac{2}{t^3} - 0,7t^2\right)$
 $v = 1,7t^2 - \frac{4}{t^2} - \frac{2}{t^3}$

19 Functies bewerken

16 a $TW = TO - TK$ geeft
 $TW = 30q - \frac{1}{2}q^2 - (54 + q^2)$

$$TW = 30q - 1\frac{1}{2}q^2 - 54$$



c Er wordt winst gemaakt als de grafiek van TW boven de horizontale as ligt, zie het zwart gestippelde gebied in de grafiek bij opdracht b.

d Oplossen $TW = 0$, dus $-1\frac{1}{2}q^2 + 30q - 54 = 0$.

Invoer: $y_1 = -1\frac{1}{2}q^2 + 30q - 54 = 0$

Venster: $0 \leq x \leq 20$, $-50 \leq y \leq 100$

Optie: nulpunt

De oplossing is $x = 2$ en $x = 18$.

Er wordt dus winst gemaakt als q meer dan 2 en minder dan 18 is.

e De maximale winst is bij $q = \frac{2 + 18}{2} = 10$ oftewel bij 10000 producten.

$$TW = 30 \cdot 10 - 1\frac{1}{2} \cdot 10^2 - 54 = 96$$

De maximale winst is €96000,- bij 10000 verkochte producten.

17 a $TW(q) = -\frac{1}{9}q^3 + 273q - (-0,295q^2 + 28q + 463)$

$$TW(q) = -\frac{1}{9}q^3 + 0,295q^2 + 245q - 463$$

$$TW'(q) = -\frac{1}{3}q^2 + 0,59q + 245$$

TW is maximaal als $TW'(q) = 0$.

Invoer: $y = -\frac{1}{3}x^2 + 0,59x + 245$

Venster: $0 \leq x \leq 50$ en $-50 \leq y \leq 50$

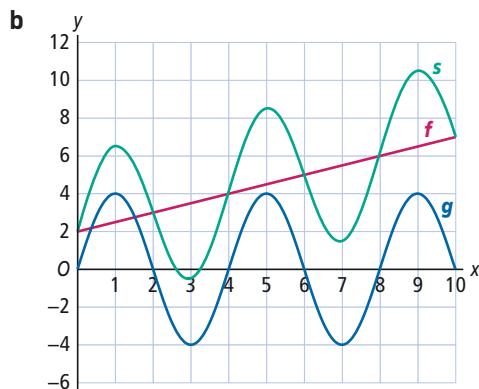
Optie: nulpunt

De oplossing is $x = 28,01$, hier gaat de grafiek van de afgeleide dalend door de horizontale as. De winst is dus maximaal bij ongeveer 28000 producten.

b $TW(28,01) = -\frac{1}{9} \cdot 28,01^3 + 0,295 \cdot 28,01^2 + 245 \cdot 28,01 - 463 \approx 4189$

De maximale winst is ongeveer €4189,-.

- 18 a** De periode van g is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$.



- c** De grafiek van s is niet periodiek omdat niet steeds hetzelfde stuk herhaald wordt, het volgende stuk ligt hoger.
- d** De maximale afwijking van de grafiek van $s(x) = f(x) + g(x)$ ten opzichte van die van $f(x)$ is het maximum van $s(x) - f(x)$ ofwel het maximum van $f(x) + g(x) - f(x) = g(x)$.
Het maximum hiervan is de amplitude, en deze is 4.
- 19 a** De richtingscoëfficiënt is $(355 - 337) : 10 = 1,8$ en het startgetal 337.
Dit geeft $m = 1,8$ en $n = 337$.
- b** De maximale uitwijking ten opzichte van de stippellijn is ongeveer 4.
- c** De periode is één jaar dus $b = 2\pi : 1 = 2\pi$.
 a is de maximale uitwijking ten opzichte van de stippellijn, dus $a = 4$.
De formule wordt dus $S = 4 \sin(2\pi t)$.
- d** De formule voor C is $C = 1,8t + 337 + 4 \sin(2\pi t)$.
De vergelijking $1,8t + 337 + 4 \sin(2\pi t) = 375$ moet worden opgelost.
In de grafiek zie je dat die oplossing na 1990 ligt, dus bij $t > 10$.
Invoer: $y_1 = 1,8x + 337 + 4 \sin(2\pi x)$ en $y_2 = 375$
Venster: $10 \leq x \leq 30$, $350 \leq y \leq 400$
Optie: snijpunt
De oplossing is $x \approx 19,17$
Dit is dus na 19 jaar en iets meer dan 2 maanden. Dit is dus in maart 1999.

- 015 a** $s = 4m^2 + 9m - 13 + -10m + 17$
- b** $s = 4m^2 - m + 4$
- c** Omdat je bij het aftrekken erop moet letten dat het teken kan wisselen.
- d** $v = (4m^2 + 9m - 13) - (-10m + 17)$
- e** $v = 4m^2 + 9m - 13 + 10m - 17$
 $v = 4m^2 + 19m - 30$
- f** $s = 8m^2 - 12m - 7 + 14 - 3m$ $v = 8m^2 - 12m - 7 - (14 - 3m)$
 $s = 8m^2 - 15m + 7$ $v = 8m^2 - 9m - 21$
- g** $s = 5 - 3q + \frac{9}{q} + 12 + 4q - \frac{7}{q}$ $v = 5 - 3q + \frac{9}{q} - \left(12 + 4q - \frac{7}{q}\right)$
 $s = 17 + q + \frac{2}{q}$ $v = -7 - 7q + \frac{16}{q}$

19 Functies bewerken

- U3** Omdat er hier maar twee groepen zijn, moeten alle verkeersongevallen wel door deze twee groepen veroorzaakt worden. De somgrafiek is een grafiek die voor elk jaar 100 procent is.
Dus de horizontale lijn *percentage* = 100.

19.4 Productfuncties en quotiëntfuncties

intro De lengte wordt $l + 6$ en de breedte wordt $b + 6$.

Een formule voor de oppervlakte is dus $Oppervlakte = (l + 6)(b + 6)$.

- 20 a** $a = 188 - 30 \cdot 1,90 = 188 - 57 = 131$ netjes mandarijnen op een dag.
b $w = 0,6 \cdot 1,90 - 0,9 = 1,14 - 0,9 = 0,24$ euro per netje.
 Zijn totale winst is $131 \cdot 0,24 = 31,44$ euro.
c Zijn totale winst is het aantal netjes dat hij verkoopt vermenigvuldigd met de winst per netje.
d $(188 - 30p)(0,6p - 0,9) = 0$
 $188 - 30p = 0$ of $0,6p - 0,9 = 0$
 $30p = 188$ of $0,6p = 0,9$
 $p = \frac{188}{30} = 6\frac{4}{15}$ of $p = \frac{0,9}{0,6} = 1,5$
 Bij een prijs van 1,50 euro en (ongeveer) 6,27 euro per netje maakt hij geen winst en geen verlies.
- 21 a** $(2x - 5) \cdot (7 + 3\frac{1}{2}x) = 0$
 $2x - 5 = 0$ of $7 + 3\frac{1}{2}x = 0$
 $2x = 5$ of $3\frac{1}{2}x = -7$
 $x = 2\frac{1}{2}$ of $x = -2$
b $(2x + 23) \cdot (2^x - 8) = 0$
 $2x + 23 = 0$ of $2^x - 8 = 0$
 $2x = -23$ of $2^x = 8$
 $x = -11\frac{1}{2}$ of $x = {}^2\log(8) = 3$
c $(x^2 - 1) \cdot (6x - 40) = 0$
 $x^2 - 1 = 0$ of $6x - 40 = 0$
 $x^2 = 1$ of $6x = 40$
 $x = -1, x = 1$ of $x = \frac{40}{6} = 6\frac{2}{3}$
d $x^3(1 - \sqrt{x}) = 0$
 $x^3 = 0$ of $1 - \sqrt{x} = 0$
 $x = 0$ of $\sqrt{x} = 1$
 $x = 0$ of $x = 1$
- 22 a** Van 20 cm kun je niet meer dan 2 maal 10 cm afknippen.
b De lengte van het doosje is $40 - 2x$ en de breedte van het doosje is $20 - 2x$.
 De hoogte van het doosje is x .
 De inhoud I van het doosje is lengte $\times$ breedte $\times$ hoogte, dus
 $I = x(20 - 2x)(40 - 2x)$.
c Invoer: $y_1 = x(20 - 2x)(40 - 2x)$
 Venster: $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 2000$
 Optie: maximum
 Dit geeft de oplossing $x \approx 4,23$.
- 23 a** Het aantal verkochte exemplaren kan niet negatief zijn.
b De opbrengst is gelijk aan nul als de teller gelijk aan nul is, dat is hier als $20000q = 0$ oftewel $q = 0$.

c $\frac{20\,000q}{q+500} = 10\,000$

$$20\,000q = 10\,000(q+500)$$

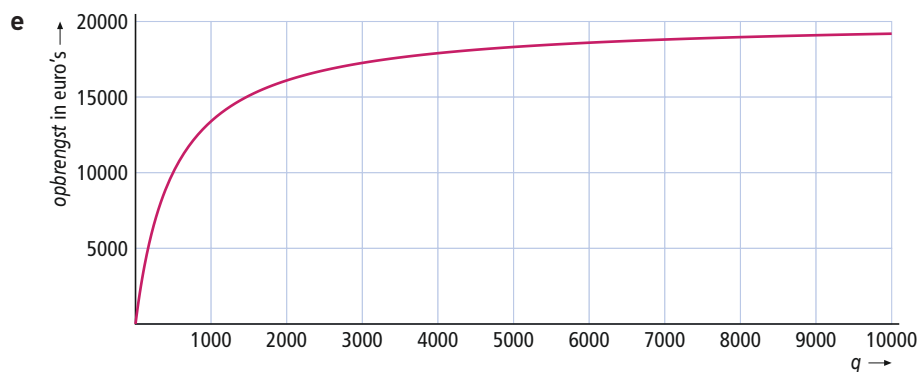
$$q+500 = 2q$$

$$q = 500$$

d

q	0	10 000	20 000	30 000	40 000	50 000
O	0	19 048	19 512	19 672	19 753	19 802

De opbrengst nadert naar 20 000 euro.



f Je ziet dat als q heel groot wordt, de grafiek nadert naar de grenswaarde 20 000.

24 a

t	M
1000	4,004 004 0
2000	4,002 001 000 5
3000	4,001 333 777 926

In de tabel zie je dat bij toenemende waarden van t de waarden van M steeds dichter naderen naar 4. De grenswaarde is $M = 4$.

$M = 0$ als $4t = 0$. Hieruit volgt $t = 0$.

$(0, 0)$ is het snijpunt met de horizontale as.

b

p	M
1000	2,005
2000	2,002 5
3000	2,001 666 667

In de tabel zie je dat bij toenemende waarden van P de waarden van M steeds dichter naderen naar 2. De grenswaarde is $M = 2$.

$M = 0$ als $2p + 5 = 0$. Hieruit volgt $p = -2\frac{1}{2}$.

$(-2\frac{1}{2}, 0)$ is het snijpunt met de horizontale as.

c

b	M
1000	49,887 724 6
2000	49,943 806 2
3000	49,962 525 0

In de tabel zie je dat bij toenemende waarden van b de waarden van M steeds dichter naderen naar 50. De grenswaarde is $M = 50$.

$M = 0$ als $100b - 25 = 0$. Hieruit volgt $b = \frac{1}{4}$.

$(\frac{1}{4}, 0)$ is het snijpunt met de horizontale as.

19 Functies bewerken

d

m	M
1000	0,031 999 36
2000	0,015 499 92
3000	0,010 222 19

In de tabel zie je dat bij toenemende waarden van m de waarden van M steeds dichter naderen naar 0. De grenswaarde is $M = 0$.

$M = 0$ als $3m + 200 = 0$. Hieruit volgt $m = -66\frac{2}{3}$.
 $(-66\frac{2}{3}, 0)$ is het snijpunt met de horizontale as.

25 a $\frac{200q + 12\,000}{2q} = 0$

$$200q + 12\,000 = 0 \text{ mits } 2q \neq 0$$

$$200q = -12\,000 \text{ mits } q \neq 0$$

$$q = -60$$

Deze waarde is niet van belang voor de producent omdat je geen negatief aantal schaatsen kunt produceren.

b

q	GK
1000	106
2000	103
3000	102
10000	100,6

De gemiddelde kosten naderen naar 100 euro.

De grenswaarde is dus 100.

- c** De totale kosten zijn het geproduceerde aantal q vermenigvuldigd met de gemiddelde kosten per paar.

$$\text{Dit geeft } TK = q \left(100 + \frac{6\,000}{q} \right) = 100q + 6\,000.$$

- 021 a** De functie $f(x)$ is de productfunctie van $g(x) = 4x - 3$ en $h(x) = 2,5x + 10$.

- b** Als $A \cdot B = 0$ dan is $A = 0$ of $B = 0$.

c $4x - 3 = 0$ $2,5x + 10 = 0$

$$4x = 3$$

$$2,5x = -10$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$x = -4$$

d Invoer: $y_1 = (4x - 3)(2,5x + 10)$

Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$

Optie: nulpunt

Dit geeft de oplossing $x = 0,75$ en $x = -4$.

e $(3x - 15)(2 + 6x) = 0$

$$3x - 15 = 0 \text{ of } 2 + 6x = 0$$

$$3x = 15 \text{ of } 6x = -2$$

$$x = 5 \text{ of } x = -\frac{1}{3}$$

g $x^2(4x - 30) = 0$

$$x^2 = 0 \text{ of } 4x - 30 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 4x = 30$$

$$x = 0 \text{ of } x = 7\frac{1}{2}$$

f $(2x + 1)(2^x - 16) = 0$

$$2x + 1 = 0 \text{ of } 2^x - 16 = 0$$

$$2x = -1 \text{ of } 2^x = 16$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ of } x = 4$$

h $x^3(2 - \sqrt{x}) = 0$

$$x^3 = 0 \text{ of } 2 - \sqrt{x} = 0$$

$$x = 0 \text{ of } \sqrt{x} = 2$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4$$

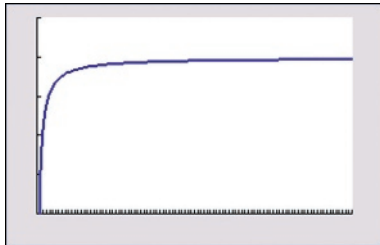
024 a

x	10	100	1000	10000
B	3,619	3,9602	3,996	3,9996

b Bij grote waarden van x nadert B naar 4.

c Invoer: $y_1 = \frac{8x - 4}{1 + 2x}$

Venster: $0 \leq x \leq 100$, $0 \leq y \leq 5$



d Als $\frac{A}{B} = 0$ dan is $A = 0$ (mits $B \neq 0$).

$$8x - 4 = 0$$

$$8x = 4$$

$$x = \frac{1}{2}$$

e De gevraagde coördinaten zijn $(\frac{1}{2}, 0)$.

f

q	C
10	2,5
100	2,9412
1000	2,994
10000	2,9994

De grenswaarde is 3.

$$3q = 0 \text{ dus } q = 0$$

Het snijpunt met de horizontale as is $(0, 0)$.

g

r	C
10	-0,2
100	-1,82
1000	-1,982
10000	-1,998

De grenswaarde is -2.

$$18 - 2r = 0$$

$$2r = 18 \text{ dus } r = 9$$

Het snijpunt met de horizontale as is $(9, 0)$.

h

s	C
10	-39
100	-12,87
1000	-12,08
10000	-12,01

De grenswaarde is -12.

$$24s - 6 = 0$$

$$24s = 6 \text{ dus } s = \frac{1}{4}$$

Het snijpunt met de horizontale as is $(\frac{1}{4}, 0)$.

19 Functies bewerken

i

d	C
10	8,4
100	0,3292
1000	0,0258
10000	0,0025

De grenswaarde is 0.

$$5d + 160 = 0$$

$$5d = -160 \text{ dus } d = -32$$

Het snijpunt met de horizontale as is $(-32, 0)$.

U4 De coördinaten van punt P zijn $(p, 8 - \frac{1}{6}p^2)$.

de lengte van rechthoek $OAPB$ is $OA = p$ en de breedte $AP = 8 - \frac{1}{6}p^2$.

$$A = OA \cdot AP, \text{ dus } A = p \cdot (8 - \frac{1}{6}p^2).$$

b $A = 8p - \frac{1}{6}p^3$

$$\frac{dA}{dp} = 8 - \frac{1}{2}p^2$$

Er is een maximum als $\frac{dA}{dp} = 0$ dus als $8 - \frac{1}{2}p^2 = 0$.

$$\frac{1}{2}p^2 = 8$$

$$p^2 = 16$$

$$p = -4 \text{ (voldoet niet) of } p = 4$$

De oppervlakte is maximaal bij $p = 4$.

$$\text{De maximale oppervlakte van rechthoek } OAPB \text{ is } A = 4(8 - \frac{1}{6} \cdot 4^2) = 21\frac{1}{3}.$$

19.5 Redeneren met formules

intro Bij $t = 0$ is het aantal kakkerlakken $A = 14000 - \frac{13500}{2 \times 0 + 5} = 11300$.

Als t toeneemt, neemt de noemer van de breuk $\frac{13500}{2t + 5}$ toe, dus de uitkomst van $\frac{13500}{2t + 5}$ neemt af.

Van 14000 wordt een steeds kleiner getal afgetrokken, dus A neemt toe.

Het aantal kakkerlakken nadert op den duur naar 14000.

26 a $t = 0$ dus $T = 20 - 16 \cdot 0,75^0 = 4$.

De temperatuur van de melk is 4°C .

b

t	$0,75^t$	$16 \cdot 0,75^t$	$20 - 16 \cdot 0,75^t$
0	1	16	4
5	0,237	3,797	16,203
10	0,056	0,901	19,099

c $0,75 < 1$ dus hoe groter de exponent t is, des te kleiner wordt $0,75^t$.

$0,75^t$ nadert naar nul, $16 \cdot 0,75^t$ nadert ook naar nul.

d $20 - 16 \cdot 0,75^t$ nadert dan naar $20 - 0 = 20$.

De temperatuur nadert op den duur naar 20°C .

27 a $P = \frac{2}{7+2t} - 11$

Bij $t = 0$ is $P = 2 : (7 + 2 \cdot 0) - 11 = -10\frac{5}{7}$.

Als t groter wordt, wordt 2 gedeeld door een steeds groter getal en nadert

$\frac{2}{7+2t}$ naar nul.

$P = \frac{2}{7+2t} - 11$ nadert dan naar $0 - 11 = -11$.

De waarde van P neemt af en de grenswaarde is -11 .

b $P = 4 - 0,85^t$

Bij $t = 0$ is $P = 4 - 1 = 3$.

Als t groter wordt nadert $0,85^t$ naar nul.

$P = 4 - 0,85^t$ nadert dan naar $4 - 0 = 4$.

De waarde van P neemt toe en de grenswaarde is 4.

c $P = 3 + \frac{2}{2t^3 + 5}$

Bij $t = 0$ is $P = 3 + 2 : (0 + 5) = 3\frac{2}{5}$.

Als t groter wordt, wordt 2 gedeeld door een steeds groter getal en nadert

$\frac{2}{2t^3 + 5}$ naar nul.

$P = 3 + \frac{2}{2t^3 + 5}$ nadert dan naar $3 + 0 = 3$.

De waarde van P neemt af en de grenswaarde is 3.

d $P = 7 + 2 \cdot 0,45^t$

Bij $t = 0$ is $P = 7 + 2 \cdot 1 = 9$.

Als t groter wordt nadert $2 \cdot 0,45^t$ naar nul.

$P = 7 + 2 \cdot 0,45^t$ nadert dan naar $7 + 0 = 7$.

De waarde van P neemt af en de grenswaarde is 7.

28 a

t	0	10	20	50	100
K	5,5	7,8626	7,996...	7,999...	8

In de tabel zie je dat de grenswaarde 8 is.

b $K = 3 + \frac{5}{1 + 0,7^t}$

Bij $t = 0$ is $P = 3 + 5 : (1 + 1) = 5,5$.

Als t groter wordt, nadert $0,7^t$ naar 0 en $1 + 0,7^t$ nadert naar 1.

$\frac{5}{1 + 0,7^t}$ nadert dan naar $5 : 1 = 5$.

En $K = 3 + \frac{5}{1 + 0,7^t}$ nadert dan naar $3 + 5 = 8$.

c $w = 14 - \frac{3}{2 - 0,9^t}$

Bij $t = 0$ is $w = 14 - 3 : (2 - 1) = 11$.

Als t groter wordt, nadert $0,9^t$ naar 0 en $2 - 0,9^t$ nadert naar 2.

$\frac{3}{2 - 0,9^t}$ nadert dan naar $3 : 2 = 1,5$.

En $w = 14 - \frac{3}{2 - 0,9^t}$ nadert dan naar $14 - 1,5 = 12,5$.

d

x	0	1	5	10	20	50
r	0,4545	0,4118	-0,25	-0,955	-1	-1

De grenswaarde is -1 .

19 Functies bewerken

29 a $t = 0$ geeft $A = 5 \cdot (2,2 + 5,8 \cdot 0,72^0) = 5 \times 8 = 40$.

b Als t groter wordt nader $5,8 \cdot 0,72^t$ naar nul.

$$2,2 + 5,8 \cdot 0,72^t \text{ nadert dan naar } 2,2 + 0 = 2,2.$$

$$\text{En } A \text{ nadert dan naar } 5 \times 2,2 = 11.$$

Het aantal telefoontjes neemt wel af, maar de grenswaarde is 11.

De doelstelling wordt daarom niet gehaald.

30 a 1 meter is gelijk aan 100 cm.

Los de vergelijking $\frac{320}{1 + 9^{-0,08t+2}} = 100$ op.

Invoer: $y_1 = \frac{320}{1 + 9^{-0,08x+2}}$ en $y_2 = 100$

Venster: $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 200$

Optie: snijpunt

Dit geeft de oplossing $x = 20,51 \dots$

Na $7 \cdot 20,51 \dots \approx 144$ dagen komt de klimplant al één meter boven de grond.

b Maak bijvoorbeeld een tabel.

t	0	10	20	50	100	200
H	3,9	21,4	93,9	316,1	320	320

De klimplant komt maximaal 320 cm boven de grond.

31 a Maak een tabel bij de formule $V = \frac{80M - 30}{M + 0,04}$

M	0,5	1	5	10
V	18,5	48,1	73,4	76,7

In de tabel zie je dat de snelheid V toeneemt als M toeneemt.

b $V = 0$ als $80M - 30 = 0$.

$$80M = 30 \text{ geeft } M = \frac{30}{80} = 0,375.$$

Bij $0,375 \text{ m}^2$ per voetganger komt de voetgangersstroom tot stilstand.

c

M	10	100	200	1000	2000
V	76,7	79,7	79,8	79,97	79,98

In de tabel zie je dat de snelheid V nadert naar 80 meter per minuut.

d Omdat 1 meter per minuut gelijk is aan $\frac{1}{60}$ meter per seconde, wordt de eenheid snelheid $\frac{1}{60}$ keer zo groot. $S = \frac{1}{60} \cdot V$ dus

$$S = \frac{1}{60} \cdot \frac{80M - 30}{M + 0,04} \text{ ofwel } S = \frac{80M - 30}{60M + 2,4}.$$

32 a Invullen van $r = 21,5$ en $d = 2$ in de formule geeft

$$V = \frac{2 \cdot 21,5 + 2}{3,14 \cdot 21,5} = \frac{45}{67,51} = 0,666567 \dots \text{ en dit is ongeveer } \frac{2}{3}.$$

b V is minimaal als beide cirkels elkaar raken en dan is $d = 0$.

$$d = 0 \text{ invullen in de formule geeft } V = \frac{2 \cdot r + 0}{3,14 \cdot r} = \frac{2 \cdot r}{3,14 \cdot r} = \frac{2}{3,14} = 0,63694 \dots$$

en dit is groter dan 0,6369.

- c Als de verhouding gelijk is aan $\frac{3}{4}$ dan is $\frac{2r+d}{3,14 \cdot r} = \frac{3}{4}$

$$3(3,14 \cdot r) = 4(2r + d)$$

$$9,42 \cdot r = 8r + 4d$$

$$1,42 \cdot r = 4d$$

$$r = \frac{4}{1,42} \cdot d$$

$$\text{De waarde van } c = \frac{4}{1,42} \approx 2,817.$$

027 a

p	$p + 1$	$\frac{1}{p + 1}$
0	1	1
10	11	0,0909
100	101	0,0099
1000	1001	0,000999

- b De waarde van $p + 1$ wordt steeds groter.
- c De waarde van $\frac{1}{p + 1}$ nadert naar nul.
- d Als p steeds groter wordt, wordt $\frac{1}{p + 1}$ steeds kleiner.
De waarde van A neemt af.
- e A nadert naar $12 + 0 = 12$.
De formule $A = 12 + \frac{1}{p + 1}$ heeft grenswaarde 12.
- f Bij $x = 0$ is $y = 15 - 6 \cdot 0,8^0 = 9$
Als x steeds groter wordt, nadert $0,8^x$ naar nul want $0,8 < 1$.
 $6 \cdot 0,8^x$ nadert dan ook naar nul.
De waarde van y zal dan naderen naar $y = 15 - 0 = 15$.
- g De waarde van y neemt toe als x steeds groter wordt.
- h De formule $y = 15 - 6 \cdot 0,8^x$ heeft grenswaarde 15.
- i Bij $t = 0$ is $N = \frac{24}{3 + 0} = 8$.
Als t steeds groter wordt, wordt $3 + t$ steeds groter.
24 wordt gedeeld door een steeds groter getal.
 $\frac{24}{3 + t}$ nadert dan naar nul.
De waarde van N zal dan afnemen en de grenswaarde is 0.
- j Bij $t = 0$ is $N = 14 - 2 \cdot 0,85^0 = 12$.
Als t steeds groter wordt, nadert $2 \cdot 0,85^t$ naar 0 want $0,85 < 1$.
De waarde van N neemt toe en de grenswaarde is 14.
- k Bij $t = 0$ is $N = 38 - \frac{80}{4 + 6 \cdot 0^2} = 18$.
Als t steeds groter wordt, wordt $4 + 6 \cdot t^2$ steeds groter.
80 wordt gedeeld door een steeds groter getal.
 $\frac{80}{4 + 6t^2}$ nadert dan naar nul.
De waarde van N zal dan naderen naar $38 - 0 = 38$.
De waarde van N neemt toe en de grenswaarde is 38.

19 Functies bewerken

- l Bij $t = 0$ is $N = 17 + 7 \cdot 0,45^0 = 24$.

Als t steeds groter wordt, nadert $0,45^t$ naar nul want $0,45 < 1$.

$77 \cdot 0,45^t$ nadert dan ook naar nul.

De waarde van N zal dan naderen naar $17 + 0 = 17$.

De waarde van N neemt af en heeft grenswaarde 17.

U5

m	1	10	100	1000	10 000
$\frac{84m - 60}{16m}$	1,5	4,875	5,2125	5,24625	5,249625

Door redeneren of een tabel zie je dat $\frac{84m - 60}{16m}$ nadert naar 5,25.

$B^2 - 1$ nadert dus naar 5,25.

B^2 nadert naar 6,25.

B nadert naar $\sqrt{6,25} = 2,5$.

19.6 Gemengde opdrachten

- 33 a Er is sprake van een exponentieel verband.

De beginhoeveelheid is 4 en de groeifactor is 2 per 2 jaar, dat is gelijk aan $2^{0,5}$ per jaar.

- b Voor 2015 geldt $t = 54$. Het aantal transistoren per chip zou dan

$A = 4 \cdot 2^{0,5 \cdot 54} = 536\,870\,912$ zijn, dus ruim een half miljard.

- c $2^{0,5 \cdot t} = 1000$

$$0,5t = {}^2\log(1000) \approx 9,658$$

$$t \approx 19,9$$

Na 20 jaar is het aantal transistoren 1000 keer zo groot geworden.

Of door voor t een aantal getallen in te vullen en uiteindelijk te komen bij $2^{0,5 \cdot 19} \approx 724$ en $2^{0,5 \cdot 20} = 1024$, dus er is 20 jaar nodig.

- d Omdat 1 week gelijk is aan $\frac{1}{52}$ jaar, wordt de eenheid bij de variabele tijd $\frac{1}{52}$ keer zo groot: $w = 52 \cdot t$ ofwel $t = \frac{1}{52} \cdot w$. Dit invullen geeft

$$A = 4 \cdot 2^{0,5 \cdot \frac{1}{52} \cdot w}$$

$$A = 4 \cdot 2^{\frac{1}{104} \cdot w}$$

Omdat het aantal in miljarden moet je A met 10^{-9} vermenigvuldigen.

$$A = 10^{-9} \cdot 4 \cdot 2^{\frac{1}{104} \cdot w}$$

$$A = 0,000\,000\,004 \cdot 2^{\frac{1}{104} \cdot w}$$

- 34 a $TK = q \cdot p$

$$TK = 5000 \cdot x^{-1} \cdot (250 + 30x^2)$$

$$TK = \frac{5000(250 + 30x^2)}{x}$$

$$TK = \frac{1250000 + 150000x^2}{x}$$

$$TK = \frac{1250000}{x} + 150000x$$

$$\begin{aligned} b \quad TK &= 1\,250\,000 \cdot x^{-1} + 150\,000 \cdot x \\ TK' &= -1\,250\,000 \cdot x^{-2} + 150\,000 \\ TK' &= \frac{-1\,250\,000 + 150\,000x^2}{x^2} \end{aligned}$$

De totale kosten zijn minimaal als $TK' = 0$.

$$-1\,250\,000 + 150\,000x^2 = 0$$

$$150\,000x^2 = 1\,250\,000$$

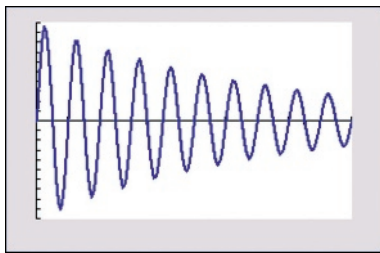
$$x^2 = 1\,250\,000 : 150\,000 = 8,333... \text{ dus } x = \sqrt{8,333...} \approx 2,887$$

De kosten zijn minimaal bij een oppervlakte van ongeveer $2,9 \text{ m}^2$ per paneel.

$$c \quad TK = \frac{1\,250\,000}{2,886...} + 150\,000 \cdot 2,886... = 866\,025,40...$$

De minimale kosten zijn €866.000,-.

- 35 a** Invoer: $y_1 = 2^{-0,1x} \cdot 10 \sin(\pi x)$
Venster: $0 \leq x \leq 20$, $-10 \leq y \leq 10$



- b** De grafiek van $y = 10 \sin(\pi x)$ is een periodieke grafiek met evenwichtstand de x -as, periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ en amplitude 10.

Deze grafiek wordt vermenigvuldigd met $2^{-0,1x}$ en voor grote x nadert dit tot nul.

Daarom zie je naar rechts een steeds kleiner wordende uitwijking.

- c** De toppen zitten bij $x = \frac{1}{2}$, $x = 1\frac{1}{2}$, $x = 2\frac{1}{2}$ enzovoort.

Maak een tabel op je GR met start bijvoorbeeld $x = 50\frac{1}{2}$ en stapgrootte 1.

X	Y1			
61.5	-0.141			
62.5	0.1314			
63.5	-0.123			
64.5	0.1144			
65.5	-0.107			
66.5	0.0996			
67.5	-0.093			
68.5	0.0867			
69.5	-0.081			
70.5	0.0755			
71.5	-0.07			

X=61.5

De kleinste waarde van x waarvoor dat geldt is $x = 66\frac{1}{2}$.

- d** Vervang in het functievoorschrift de term $2^{-0,1x}$ door een term die voor grotere x steeds grotere waarden geeft, bijvoorbeeld $2^{0,1x}$.
Het functievoorschrift wordt dan $g(x) = 2^{0,1x} \cdot 10 \sin(\pi x)$.

- 36 a** De top van grafiek bij functie h heeft coördinaten $(0, 0)$.
De top van de grafiek bij functie f heeft coördinaten $(3, 4)$.
De grafiek is dus 3 naar rechts en 4 omhoog verschoven.
Een functievoorschrift bij grafiek f is $f(x) = -(x - 3)^2 + 4$.
- b** Het randpunt van de grafiek bij functie i is $(0, 0)$
Het randpunt van de grafiek bij functie g is $(-4, -1)$.
De grafiek is dus 4 naar links en 1 omlaag verschoven.
Een functie voorschrift bij grafiek g is $g(x) = \sqrt{x + 4} - 1$

19 Functies bewerken

Onderzoeksoopdrachten

37 a $B > 0$ dus $\frac{8289,3}{B} > 0$.

Als B steeds groter wordt, dan nadert $\frac{8289,3}{B}$ naar nul.

B is de breedte van de weg in meters, je mag aannemen dat $B < 50$ en dat daarom $\log(B) < 1,7$.

Als B groter wordt, dan wordt $\log(B)$ groter en $1,778 - \log(B)$ kleiner.

Als B groter wordt, dan worden beide factoren van de formule voor $N_{\max}$ kleiner en daarom is $N_{\max}$ een dalende functie.

b Een formule voor de breedte van de oorspronkelijke weg is

$$N_{\max} = \frac{8289,3}{B} (1,778 - \log(B)).$$

Een formule voor de bredere weg is dan

$$N_{\max} = \frac{8289,3}{B + 0,5} (1,778 - \log(B + 0,5)).$$

Als het verschil 126 is, dan moet gelden

$$\frac{8289,3}{B} (1,778 - \log(B)) - \frac{8289,3}{B + 0,5} (1,778 - \log(B + 0,5)) = -126.$$

Deze vergelijking invoeren in je rekenmachine.

$$\text{Invoer: } y_1 = \frac{8289,3}{x} (1,778 - \log(x)) - \frac{8289,3}{x + 0,5} (1,778 - \log(x + 0,5))$$

$$y_2 = 126$$

Venster: $0 \leq x \leq 20$, $0 \leq y \leq 200$

Optie: snijpunt

Dit geeft $x \approx 6,50$.

De oorspronkelijke weg was dus 6,5 meter breed (of 65 dm).

Samenvatting

S1 a $s(x) = 6x^3 + 11x^2 - 5 + 20x^2 - 7x^3 + 8$
 $s(x) = -x^3 + 31x^2 + 3$
 $v(x) = 6x^3 + 11x^2 - 5 - (20x^2 - 7x^3 + 8)$
 $v(x) = 13x^3 - 9x^2 - 13$

b $s(x) = 2\sqrt{x} + \frac{18}{x^2} + 3\sqrt{x} - \frac{21}{x^2} + 6$
 $s(x) = 5\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} + 6$
 $v(x) = 2\sqrt{x} + \frac{18}{x^2} - (3\sqrt{x} - \frac{21}{x^2} + 6)$
 $v(x) = -\sqrt{x} + \frac{39}{x^2} - 6$

S2 a $s(x) = 3x - 1 + -2x + 2$
 $s(x) = x + 1$

b $v(x) = 3x - 1 - (-2x + 2)$
 $v(x) = 5x - 3$

- S3 a** Vervang x door $x - -2 = x + 2$ en trek van de functiewaarden 6 af.
Dit geeft $g(x) = {}^5\log(x + 2) - 6$.
- b** De grafiek van j is ontstaan uit de grafiek van k door een verschuiving van 3 naar rechts en 5 omhoog.

- S4** Omdat 1 kilogram gelijk is aan 1000 gram geldt $K = 0,001 \cdot G$.
Dit invullen geeft $K = 0,001 \cdot (0,5h^2 + 3)$ ofwel
 $K = 0,0005h^2 + 0,003$.
Omdat 1 dm gelijk is aan 10 cm geldt $H = 10h$ ofwel $h = 0,1H$.
Dit invullen geeft $K = 0,0005 \cdot \left(\frac{1}{10}H\right)^2 + 0,003$ ofwel
 $K = 0,0005 \cdot 0,01H^2 + 0,003$
 $K = 0,000005 \cdot H^2 + 0,003$

- S5** Voor de snijpunten met de x -as geldt $p(x) = 0$.
 $(5x - 12)(8 - 3x) = 0$
 $5x - 12 = 0$ of $8 - 3x = 0$
 $5x = 12$ of $3x = 8$
 $x = 2\frac{2}{5}$ of $x = 2\frac{2}{3}$

- S6 a** Een tabel bij $f(x) = \frac{7-2x}{4x-5}$ maken.

x	0	10	100	1000	10000
$f(x)$	1,4	-0,371	-0,489	-0,499	-0,5

De grenswaarde van $f(x)$ is $-0,5$.

- b** Voor de snijpunten met de x -as geldt $g(x) = 0$.

$$\frac{x^2 - 9}{2x - 13} = 0 \text{ als } x^2 - 9 = 0 \text{ (en } 2x - 13 \neq 0)$$

$$x^2 = 9$$

$$x = -3 \text{ of } x = 3$$

S7
$$a = 8 - \frac{108}{c^3 + 9}$$

Bij $c = 0$ is $a = 8 - \frac{108}{0 + 9} = 8 - 12 = -4$.

Als c steeds groter wordt, wordt c^3 en $c^3 + 9$ dat ook.

108 wordt gedeeld door een steeds groter getal dus $\frac{108}{c^3 + 9}$ nadert naar nul.

$$8 - \frac{108}{c^3 + 9} \text{ nadert dan naar } 8 - 0 = 8.$$

De waarde van $a = 8 - \frac{108}{c^3 + 9}$ neemt toe en a heeft grenswaarde 8.

19 Functies bewerken

Test jezelf

- T1 a** Grafiek 1 is ontstaan door een verschuiving van 1 naar rechts van de grafiek van $f(x) = x^2$. Bij grafiek 1 hoort $g(x) = (x - 1)^2$.
- b** Grafiek 2 is ontstaan uit door een verschuiving van 3 omhoog van de grafiek van $f(x) = 2^x$. Bij grafiek 2 hoort $h(x) = 2^x + 3$.
- c** Grafiek 3 is ontstaan door een verschuiving van 3 naar links van de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$. Bij grafiek 3 hoort $k(x) = \sqrt{x + 3}$.
- d** Een verschuiving van 2 naar links betekent dat je x vervangt door $x + 2$.
Een verschuiving van drie omlaag betekent dat de evenwichtstand verandert in $2 - 3 = -1$.
Een formule bij de beeldgrafiek is $j(1) = -1 + 4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x + 2)\right)$
 $x = 1$ invullen in deze formule geeft
 $j(1) = -1 + 4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi(1 + 2)\right) = -5$
Ja, de beeldgrafiek gaat door het punt $(1, -5)$.

- T2 a** Voor de snijpunten met de x -as geldt $f(x) = 0$.
 $(x^2 - 1)(2x + 3) = 0$
 $x^2 - 1 = 0$ of $2x + 3 = 0$
 $x = -1$ of $x = 1$ of $x = -1\frac{1}{2}$
De coördinaten van de snijpunten zijn: $(-1, 0)$, $(1, 0)$ en $(-1\frac{1}{2}, 0)$.
- b** $s(x) = (x^2 - 1)(2x + 3) + 3x^2 - 2x$
 $s(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 + 3x^2 - 2x$
 $s(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x - 3$
 $v(x) = (x^2 - 1)(2x + 3) - (3x^2 - 2x)$
 $v(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 - 3x^2 + 2x$
 $v(x) = 2x^3 - 3$
- c** Voor de snijpunten met de horizontale as geldt $g(x) = 0$.
 $3x^2 - 2x = 0$
 $x(3x - 2) = 0$
 $x = 0$ of $3x - 2 = 0$
 $x = 0$ of $x = \frac{2}{3}$
De coördinaten van de snijpunten zijn: $(0, 0)$ en $(\frac{2}{3}, 0)$.

- T3 a** De trendlijn gaat van 1940 naar 1955, dus 15 naar rechts en van 10 naar 6, dus 4 omlaag. Daarom is de richtingscoëfficiënt $a = -\frac{4}{15} \approx -0,27$.
 b is het startgetal, het aantal werkloze boeren in 1940, dus $b = 10$.
Er zijn 15 periodes tussen 1940 en 1955, dus 1 periode is 1 jaar. Hieruit volgt dat $c = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.
- b** De formule is $N = -0,27 \cdot t + 10 + \sin(2\pi t)$ met N in miljoenen en t in jaren.
Omdat 1 maand gelijk is aan $\frac{1}{12}$ jaar, krijg je $m = 12 \cdot t$ ofwel $t = \frac{1}{12} \cdot m$.
Dit invullen geeft $N = -0,27 \cdot \frac{1}{12} \cdot m + 10 + \sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{12} \cdot m\right)$ dat gelijk is
 $N = -0,0225 \cdot m + 10 + \sin\left(\frac{1}{6}\pi \cdot m\right)$.
Het aantal A in duizendtallen betekent dat N duizend keer zo groot wordt.
 $A = 1000\left(-0,0225 \cdot m + 10 + \sin\left(\frac{1}{6}\pi \cdot m\right)\right)$ ofwel
 $A = -22,5 \cdot m + 10000 + 1000 \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi \cdot m\right)$.

- T4 a** Maak een tabel bij de formule $K = \frac{38q + 157}{6q + 18}$

q	0	10	100	1000	10 000	100 000
K	8,722	6,885	6,403	6,341	6,334	6,333

Als q heel groot wordt, dan nadert de kostprijs tot ongeveer 6,33 euro.

- b** Als q heel groot wordt, wordt $6q + 21$ heel groot en de uitkomst van $\frac{33}{6q + 21}$ nadert dan tot nul.

De grenswaarde van $K = 5\frac{1}{3} + \frac{33}{6q + 21}$ is daarom $5\frac{1}{3} + 0 = 5\frac{1}{3}$.

- c** q en dus ook $\frac{33}{6q + 21}$ is altijd positief, dus de uitkomst van

$K = 5\frac{1}{3} + \frac{33}{6q + 21}$ is altijd meer dan $5\frac{1}{3}$.

De grafiek zal de horizontale as niet snijden omdat $K = 0$ niet voorkomt.

- d** De totale productiekosten is het product van het aantal producten q en de kostprijs K per product.

$$TK = q \left(5\frac{1}{3} + \frac{33}{6q + 21} \right) = 5\frac{1}{3}q + \frac{33q}{6q + 21}$$

- e** De grenswaarde van $K = 5\frac{1}{3} + \frac{33}{6q + 21}$ is $5\frac{1}{3}$ (zie opdracht b).

$TK = q \cdot K$. Bij grote waarden van q worden de totale kosten $5\frac{1}{3} \times q$.

De totale kosten zullen blijven stijgen en niet tot een bepaalde waarde naderen.

- T5 a** Het snijpunt met de verticale as is het punt (0, 50), dus de grafiek van $L = \sqrt{x}$ is 50 omhoog verschoven, dus $a = 50$ en $L = 50 + b\sqrt{x}$.

De grafiek gaat bijvoorbeeld ook door het punt (9, 140).

Dit invullen geeft $140 = 50 + b\sqrt{9}$.

$$140 = 50 + 3b$$

$$3b = 90$$

$$b = 30$$

- b** Omdat 1 jaar gelijk is aan 12 maanden, is $x = \frac{1}{12} \cdot s$.

Dit invullen geeft $L = 50 + 30\sqrt{\frac{1}{12} \cdot s}$.

- T6 a** De grafiek van groei is de somgrafiek van die van natuurlijke aanwas en migratiesaldo.

- b** Tussen 2000 en 2010 snijden de grafieken natuurlijke aanwas en groei elkaar. Dat kan alleen als op die momenten het migratiesaldo nul is en dat is in die jaren niet het geval.

- c** In 2010 is de groei 85 ($\times 1000$) en in 2040 is deze nul.

De richtingscoëfficiënt is $-\frac{85}{30} = -2\frac{5}{6}$.

De formule is $G = -2\frac{5}{6}t + 85$, met $t = 0$ in 2010 en G in duizendtallen.

- d** Volgens deze formule zou in 2050 de groei $G = -2\frac{5}{6} \cdot 40 + 85 = -28\frac{1}{3}$ zijn. Dat is een afname van ongeveer 28 duizend in 2050.

19 Functies bewerken

Extra oefening

E1 a $P(m) = 4 + {}^2\log(m - 9)$

De grafiek van P ontstaat uit de grafiek van $f(m) = {}^2\log(m)$ door een verschuiving van 9 naar rechts en 4 omhoog.

b Vervang m door $m + 5$.

$$Q = 4 + {}^2\log(m + 5 - 9) \text{ ofwel } Q = 4 + {}^2\log(m - 4).$$

E2 Omdat 1 kilogram gelijk is aan 10 ons, is $O = 10K$.

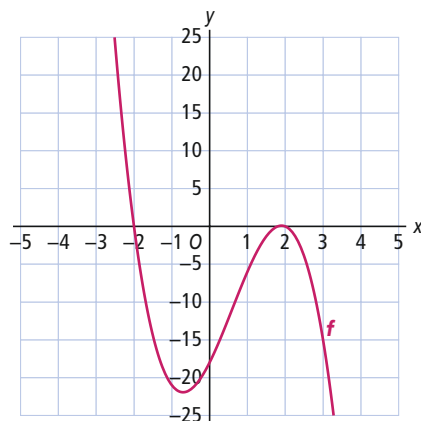
$$\text{De formule wordt } O = 10(3,8(V^2 + 7V)) = 38(V^2 + 7V).$$

$$\text{Omdat } 1 \text{ dm}^3 \text{ gelijk is aan } 0,001 \text{ m}^3, \text{ is } V = 1000v$$

$$\text{Dit geeft } O = 38((1000v)^2 + 7 \cdot 1000v).$$

$$O = 38(1\,000\,000v^2 + 7000v) \text{ ofwel } O = 38\,000\,000v^2 + 266\,000v.$$

E3 a



b $(5x - 9)(2 - 0,5x^2) = 0$

$$5x - 9 = 0 \text{ of } 2 - 0,5x^2 = 0$$

$$5x = 9 \text{ of } x^2 = 4$$

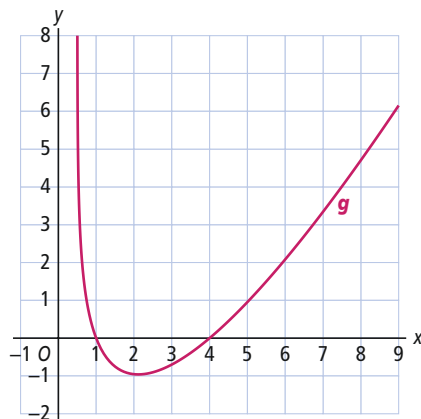
$$x = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5} \text{ of } x = -2 \text{ of } x = 2$$

$(-2, 0)$, $(1\frac{4}{5}, 0)$ en $(2, 0)$ zijn de snijpunten met de x -as.

$$f(0) = (5 \cdot 0 - 9)(2 - 0,5 \cdot 0^2) = -9 \cdot 2 = -18$$

$(0, -18)$ is het snijpunt met de y -as.

c



$$(x - 4) \cdot \log(2x - 1) = 0$$

$$x - 4 = 0 \text{ of } \log(2x - 1) = 0$$

$$x = 4 \text{ of } 2x - 1 = 10^0 = 1$$

$$x = 4 \text{ of } 2x = 2$$

$$x = 4 \text{ of } x = 1$$

(1, 0) en (4, 0) zijn de snijpunten met de x -as.

$g(0) = (0 - 4) \cdot \log(2 \cdot 0 - 1) = -4 \cdot \log(-1)$ dit heeft geen oplossing, dus de grafiek van g heeft geen snijpunt met de y -as.

E4 a $\frac{4x+1}{2-3x} = 0$ als $4x+1 = 0$ dus $x = -\frac{1}{4}$.

Het snijpunt met de horizontale as is $(-\frac{1}{4}, 0)$.

b Maak een tabel bij $f(x) = \frac{4x+1}{2-3x}$

x	0	1	10	100	1000	10000
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	-5	-1,464	-1,346	-1,335	-1,333

De grenswaarde is $-1\frac{1}{3}$.

c $\frac{x^2-4}{3-8x} = 0$ als $x^2-4 = 0$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ of } x = 2$$

De snijpunten met de horizontale as zijn $(-2, 0)$ en $(2, 0)$.

Maak een tabel bij $g(x) = \frac{x^2-4}{3-8x}$

x	0	1	10	100	1000	10000
$g(x)$	-1,333	0,6	-1,247	-12,54	-125	-1250

Er is geen grenswaarde.

E5 a $z = \frac{3}{n+2} - 1$

Bij $n = 0$ is $z = 3 : 2 - 1 = \frac{1}{2}$.

Als n steeds groter wordt, wordt $n+2$ ook groter.

3 wordt gedeeld door een steeds groter getal dus $\frac{3}{n+2}$ nadert naar nul.

$$\frac{3}{n+2} - 1 \text{ nadert dan naar } 0 - 1 = -1.$$

De waarde van $z = \frac{3}{n+2} - 1$ neemt af en heeft grenswaarde -1 .

b $z = 5 + 2 \cdot 0,9^n$

Bij $n = 0$ is $z = 5 + 2 \cdot 1 = 7$.

Als n groter wordt, nadert $0,9^n$ naar nul want $0,9 < 1$.

$2 \cdot 0,9^n$ nadert dan ook naar nul.

$$5 + 2 \cdot 0,9^n \text{ nadert dan naar } 5 + 0 = 5.$$

De waarde van $z = 5 + 2 \cdot 0,9^n$ neemt af en heeft grenswaarde 5.

c $z = 4 - \frac{6}{4n+5}$

Bij $n = 0$ is $z = 4 - (6 : 5) = 2,8$.

Als n steeds groter wordt, wordt $4n+5$ ook groter.

6 wordt gedeeld door een steeds groter getal dus $\frac{6}{4n+5}$ nadert naar nul.

$$4 - \frac{6}{4n+5} \text{ nadert dan naar } 4 - 0 = 4.$$

De waarde van $z = 4 - \frac{6}{4n+5}$ neemt toe en heeft grenswaarde 4.

19 Functies bewerken

$$\text{d } z = \frac{4}{\sqrt{n+9}} + 10$$

Bij $n = 0$ is $z = 4 : 3 + 10 = 11\frac{1}{3}$.

Als n steeds groter wordt, wordt $\sqrt{n+9}$ ook groter.

4 wordt gedeeld door een steeds groter getal dus $\frac{4}{\sqrt{n+9}}$ nadert naar nul.

$\frac{4}{\sqrt{n+9}} + 10$ nadert dan naar $0 + 10 = 10$.

De waarde van $z = \frac{4}{\sqrt{n+9}} + 10$ neemt af en heeft grenswaarde 10.

E6 a De somgrafiek geeft de ontwikkeling van het totaal aantal inwoners in Friesland van 65 jaar en ouder weer.

b m is het aantal mannelijke inwoners.

$$f - m = v$$

$$m = f - v$$

$$m = 820 + 22t - (3t - 14)$$

$$m = 834 + 19t$$

c $T = m + f$

$$T = 834 + 19t + 820 + 22t$$

$$T = 1654 + 41t$$

E7 a Als t groter wordt, wordt $93t + 140$ groter en de breuk $\frac{490}{93t + 140}$ kleiner.

En dus wordt ook de hoeveelheid afval $A = 1,5 + \frac{490}{93t + 140}$ kleiner.

c Voor 2030 geldt $t = 20$. Dit invullen in $A = 1,5 + \frac{490}{93t + 140}$ geeft

$$A = 1,5 + \frac{490}{93 \cdot 20 + 140} = 1,745.$$

De doelstelling van 1,75 miljoen ton per jaar in 2030 wordt dus bereikt.

E8 a De oppervlakte van de poster is 2 m^2 , dus $\text{breedte} \times \text{hoogte} = 2$.

De breedte is x meter, dus $x \times \text{hoogte} = 2$ ofwel $\text{hoogte} = \frac{2}{x}$.

b Aan de linkerzijkant en rechterzijkant gaat 15 cm af, dus in totaal $30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$.

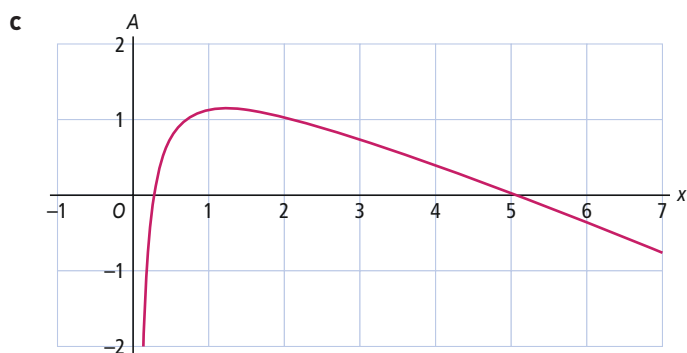
De breedte van het bedrukte deel is daarom $x - 0,3$ meter.

Evenzo gaat er bij de hoogte tweemaal 20 cm af, dus in totaal $40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$.

De hoogte van het bedrukte deel is daarom $\frac{2}{x} - 0,4$ meter.

De oppervlakte is breedte $\times$ hoogte, dit geeft

$$A = (x - 0,3) \left(\frac{2}{x} - 0,4 \right).$$



- d** Een poster moet dusdanige afmetingen hebben dat hij nog iets kan voorstellen. Als de breedte x bijvoorbeeld 4 meter is, dan is de hoogte van de poster $\frac{2}{4} = 0,5$ meter en het bedrukte deel $0,5 - 2 \times 0,2 = 0,1$ meter hoog en dat is niet realistisch, een poster van 4 m breed en 10 cm hoog. Realistische waarden voor x zijn bijvoorbeeld waarden tussen 1 en 3.
- e** Invoer: $y_1 = (x - 0,3)\left(\frac{2}{x} - 0,4\right)$
 Venster: $0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 2$
 Optie: maximum
 Dit geeft $x \approx 1,22$ en $y \approx 1,14$
 De oppervlakte is maximaal $1,14 \text{ m}^2$.

20 Differentiëren

Voorkennis

V1 a $f(x) = 4 \cdot \frac{1}{x^3}$

$$f(x) = 4 \cdot x^{-3}$$

b $f(x) = 3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$

$$f(x) = 3 \cdot x^{-2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = 3 \cdot x^{-1\frac{1}{2}}$$

c $f(x) = (-2)^4 \cdot x^4$

$$f(x) = 16 \cdot x^4$$

d $f(x) = 3^3 \cdot (x^{-2})^3$

$$f(x) = 27 \cdot x^{-6}$$

e $f(x) = \frac{5}{15} \cdot \frac{1}{x^4}$

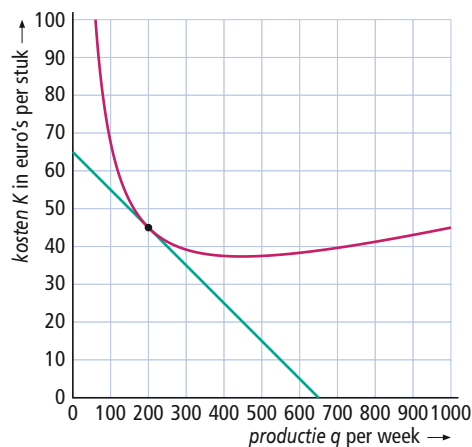
$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-4}$$

f $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 \cdot \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{x}$

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 \cdot 2 \cdot x^{\frac{1}{5}}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{2\frac{1}{5}}$$

V2 a



De getekende raaklijn gaat door de punten (0, 65) en (650, 0).

De helling van de grafiek in (200, 45) is $\frac{0 - 65}{650 - 0} = -0,1$.

b $K = 0,025q + 15 + 5000q^{-1}$

$$\frac{dK}{dq} = 0,025 + 5000 \cdot -1 \cdot q^{-2}$$

$$\frac{dK}{dq} = 0,025 - \frac{5000}{q^2}$$

De helling van de grafiek in het punt (200, 45) is $\frac{dK}{dq} = 0,025 - \frac{5000}{200^2} = -0,1$.

V3 a $g(x) = -6x^2$

$$g'(x) = -6 \cdot 2x$$

$$g'(x) = -12x$$

b $r(t) = \frac{25}{2} \cdot \frac{t^5}{t^{1,5}}$

$$r(t) = 12,5t^{3,5}$$

$$r'(t) = 12,5 \cdot 3,5t^{2,5}$$

$$r'(t) = 43,75t^{2,5}$$

$$r'(t) = 43,75t^2\sqrt{t}$$

c $TK = q^{-0,5} + \frac{15}{3} \cdot \frac{1}{q^2}$

$$TK = q^{-0,5} + 5q^{-2}$$

$$\frac{dTK}{dq} = -0,5q^{-1,5} + 5 \cdot -2q^{-3}$$

$$\frac{dTK}{dq} = -0,5q^{-1,5} - 10q^{-3}$$

$$\frac{dTK}{dq} = -\frac{1}{2q\sqrt{q}} - \frac{10}{q^3}$$

d $A = 5p^{\frac{1}{2}} \cdot p^{\frac{3}{4}}$

$$A = 5p^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{dA}{dp} = 5 \cdot \frac{1}{4}p^{-\frac{3}{4}}$$

$$\frac{dA}{dp} = 6\frac{1}{4}p^{-\frac{3}{4}}$$

$$\frac{dA}{dp} = 6\frac{1}{4} \cdot \sqrt[4]{p}$$

$$\text{e } h(d) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} - d^2 \cdot d^{\frac{1}{2}}$$

$$h(d) = 1\frac{1}{3}d^{-\frac{1}{3}} - d^{2\frac{1}{2}}$$

$$h'(d) = 1\frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3}d^{-\frac{1}{3}} - 2\frac{1}{2}d^{\frac{1}{2}}$$

$$h'(d) = -\frac{4}{9}d^{-\frac{1}{3}} - 2\frac{1}{2}d^{\frac{1}{2}}$$

$$h'(d) = -\frac{4}{9d \cdot \sqrt[3]{d}} - 2\frac{1}{2}d\sqrt{d}$$

$$\text{f } p(q) = 5 \cdot 2^4 \cdot (q^{0,8})^4 + 6q$$

$$p(q) = 80q^{3,2} + 6q$$

$$p'(q) = 80 \cdot 3,2q^{2,2} + 6$$

$$p'(q) = 256q^{2,2} + 6$$

V4 a De schakels zijn $y = u^5$ en $u = 10x - 2$.

$$\frac{dy}{du} = 5u^4 \text{ en } \frac{du}{dx} = 10$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5u^4 \cdot 10 = 50u^4$$

$$f'(x) = 50(10x - 2)^4$$

b De schakels zijn $y = 7u^{0,6}$ en $u = 3 - x$.

$$\frac{dy}{du} = 7 \cdot 0,6u^{-0,4} = 4,2u^{-0,4} \text{ en } \frac{du}{dx} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4,2u^{-0,4} \cdot -1 = -4,2u^{-0,4}$$

$$w'(x) = -4,2(3 - x)^{-0,4}$$

c De schakels zijn $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = 5s^3 - 10$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{ds} = 5 \cdot 3s^2 = 15s^2$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{ds} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot 15s^2 = 7\frac{1}{2}s^2 \cdot u^{-\frac{1}{2}}$$

$$A'(s) = 7\frac{1}{2}s^2(5s^3 - 10)^{-\frac{1}{2}}, \text{ ofwel } A'(s) = \frac{15s^2}{2\sqrt{5s^3 - 10}}$$

d De schakels zijn $y = \frac{3}{u^2} = 3u^{-2}$ en $u = p^2 - p$.

$$\frac{dy}{du} = 3 \cdot -2u^{-3} = -6u^{-3} \text{ en } \frac{du}{dp} = 2p - 1$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dp} = -6u^{-3} \cdot (2p - 1) = (-12p + 6) \cdot u^{-3}$$

$$Q'(p) = (-12p + 6)(p^2 - p)^{-3}, \text{ ofwel } Q'(p) = \frac{-12p + 6}{(p^2 - p)^3}$$

e $g(f) = 3 \cdot (25f + 6)^4$

De schakels zijn $y = 3u^4$ en $u = 25f + 6$.

$$\frac{dy}{du} = 3 \cdot 4u^3 = 12u^3 \text{ en } \frac{du}{df} = 25$$

$$\frac{dy}{df} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{df} = 12u^3 \cdot 25 = 300u^3$$

$$g'(f) = 300(25f + 6)^3$$

f $h(t) = (3t - 1)^{\frac{1}{2}}$

De schakels zijn $y = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = 3t - 1$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dt} = 3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = 4\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$$

$$h'(t) = 4\frac{1}{2}(3t - 1)^{-\frac{1}{2}}, \text{ ofwel } h'(t) = 4\frac{1}{2}\sqrt{3t - 1}$$

20 Differentiëren

20.1 Productregel

intro $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ dus $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, ofwel $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

$g(x)$ kun je niet differentiëren omdat je dit niet kunt schrijven als een kettingfunctie met schakels.

$h(x)$ kun je niet differentiëren omdat je dit niet kunt schrijven als een kettingfunctie met schakels en je kunt (nog) niet een exponentiële functie differentiëren.

$k(x) = x^3$ dus $k'(x) = 3x^2$.

De schakels bij functie m zijn $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = 6x + 1$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot 6 = 3u^{-\frac{1}{2}}$$

$$m'(x) = 3(6x + 1)^{-\frac{1}{2}}, \text{ ofwel } m'(x) = \frac{3}{\sqrt{6x + 1}}$$

1 a Invullen van bijvoorbeeld $x = 1$ in de formule van Willem geeft

$p'(1) = -2 \times 1 = -2$. Volgens de tabel is $p'(1) = -1$.

De formule van Willem voor de afgeleide is dus niet juist.

b $p(x) = x^2 - x^3$

$$p'(x) = 2x - 3x^2$$

c $p'(-3) = 2 \times -3 - 3 \times (-3)^2 = -33$, klopt

$$p'(0) = 2 \times 0 - 3 \times 0^2 = 0, \text{ klopt}$$

$$p'(1) = 2 \times 1 - 3 \times 1^2 = -1, \text{ klopt}$$

$$p'(2) = 2 \times 2 - 3 \times 2^2 = -8, \text{ klopt}$$

$$p'(5) = 2 \times 5 - 3 \times 5^2 = -65, \text{ klopt}$$

2 a ΔO is gelijk aan de som van de drie gearceerde rechthoeken.

Deze rechthoeken hebben oppervlaktes van $\Delta l \cdot b$, $l \cdot \Delta b$ en $\Delta l \cdot \Delta b$.

Dat betekent dat $\Delta O = \Delta l \cdot b + l \cdot \Delta b + \Delta l \cdot \Delta b$.

b Als Δl en Δb heel klein zijn, dan is het product $\Delta l \cdot \Delta b$ praktisch 0.

Dan is $\Delta O \approx \Delta l \cdot b + l \cdot \Delta b + 0$, dus $\Delta O \approx \Delta l \cdot b + l \cdot \Delta b$.

c Dan nadert $\frac{\Delta l}{\Delta t}$ naar $\frac{dl}{dt}$ en $\frac{\Delta b}{\Delta t}$ nadert dan naar $\frac{db}{dt}$.

$$\text{Dan is } \frac{dO}{dt} = \frac{dl}{dt} \cdot b + l \cdot \frac{db}{dt}$$

$$\text{Verder is } \frac{dO}{dt} = O'(t) \quad \frac{dl}{dt} = l'(t), \quad b = b(t), \quad l = l(t) \quad \text{en} \quad \frac{db}{dt} = b'(t).$$

Dit invullen geeft $O'(t) = l'(t) \cdot b(t) + l(t) \cdot b'(t)$.

3 a De functie $f(x)$ is de productfunctie van $g(x) = x^3$ en $h(x) = x^2 - 1$.

De afgeleiden zijn $g'(x) = 3x^2$ en $h'(x) = 2x$.

Met de productregel vind je:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot (x^2 - 1) + x^3 \cdot 2x$$

$$f'(x) = 3x^4 - 3x^2 + 2x^4$$

$$f'(x) = 5x^4 - 3x^2$$

- b** De functie $p(x)$ is de productfunctie van $g(x) = x^2 - 3x$ en $h(x) = 2x + 5$.

De afgeleiden zijn $g'(x) = 2x - 3$ en $h'(x) = 2$.

Met de productregel vind je:

$$p'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$p'(x) = (2x - 3) \cdot (2x + 5) + (x^2 - 3x) \cdot 2$$

$$p'(x) = 4x^2 + 10x - 6x - 15 + 2x^2 - 6x$$

$$p'(x) = 6x^2 - 2x - 15$$

- c** De functie $l(q)$ is de productfunctie van $g(q) = 2q - 7$ en $h(q) = 3 - 5q^2$.

De afgeleiden zijn $g'(q) = 2$ en $h'(q) = -10q$.

Met de productregel vind je:

$$l'(q) = g'(q) \cdot h(q) + g(q) \cdot h'(q)$$

$$l'(q) = 2 \cdot (3 - 5q^2) + (2q - 7) \cdot -10q$$

$$l'(q) = 6 - 10q^2 - 20q^2 + 70q$$

$$l'(q) = -30q^2 + 70q + 6$$

- d** $s(t) = 5(t + 3)(10t - 9)$

$$s(t) = (5t + 15)(10t - 9)$$

De functie $s(t)$ is de productfunctie van $g(t) = 5t + 15$ en $h(t) = 10t - 9$.

De afgeleiden zijn $g'(t) = 5$ en $h'(t) = 10$.

Met de productregel vind je:

$$s'(t) = g'(t) \cdot h(t) + g(t) \cdot h'(t)$$

$$s'(t) = 5 \cdot (10t - 9) + (5t + 15) \cdot 10$$

$$s'(t) = 50t - 45 + 50t + 150$$

$$s'(t) = 100t + 105$$

- 4 a** $f(x) = 9x^2 + 15x + 15x + 25$, ofwel $f(x) = 9x^2 + 30x + 25$

$$f'(x) = 9 \cdot 2x + 30, \text{ ofwel } f'(x) = 18x + 30$$

- b** De schakels zijn $y = u^2$ en $u = 3x + 5$.

$$\frac{dy}{du} = 2u \text{ en } \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 3 = 6u$$

$$f'(x) = 6(3x + 5), \text{ ofwel } f'(x) = 18x + 30$$

- c** De functie $f(x)$ is de productfunctie van $g(x) = 3x + 5$ en $h(x) = 3x + 5$.

De afgeleiden zijn $g'(x) = 3$ en $h'(x) = 3$.

Met de productregel vind je:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = 3 \cdot (3x + 5) + (3x + 5) \cdot 3$$

$$f'(x) = 9x + 15 + 9x + 15$$

$$f'(x) = 18x + 30$$

- 5 a** De schakels zijn $y = u^3$ en $u = 5x - 10$.

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \text{ en } \frac{du}{dx} = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot 5 = 15u^2$$

$$h'(x) = 15(5x - 10)^2$$

- b** De functie $f(x)$ is de productfunctie van $g(x) = 4x$ en $h(x) = (5x - 10)^3$.

De afgeleiden zijn $g'(x) = 4$ en $h'(x) = 15(5x - 10)^2$.

Met de productregel vind je:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = 4 \cdot (5x - 10)^3 + 4x \cdot 15(5x - 10)^2$$

$$f'(x) = 4(5x - 10)^3 + 60x(5x - 10)^2$$

20 Differentiëren

- 6 a** De functie $r(s)$ is de productfunctie van $g(s) = s^2$ en $h(s) = (3s - 5)^3$.

De afgeleide van $g(s)$ is $g'(s) = 2s$.

De afgeleide van $h(s)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = u^3$ en $u = 3s - 5$.

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \text{ en } \frac{du}{ds} = 3$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{ds} = 3u^2 \cdot 3 = 9u^2$$

$$h'(s) = 9(3s - 5)^2$$

Met de productregel vind je:

$$r'(s) = g'(s) \cdot h(s) + g(s) \cdot h'(s)$$

$$r'(s) = 2s \cdot (3s - 5)^3 + s^2 \cdot 9(3s - 5)^2$$

$$r'(s) = 2s(3s - 5)^3 + 9s^2(3s - 5)^2$$

- b** De functie $N(t)$ is de productfunctie van $g(t) = 3t$ en $h(t) = (4t + 1)^5$.

De afgeleide van $g(t)$ is $g'(t) = 3$.

De afgeleide van $h(t)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = u^5$ en $u = 4t + 1$.

$$\frac{dy}{du} = 5u^4 \text{ en } \frac{du}{dt} = 4$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 5u^4 \cdot 4 = 20u^4$$

$$h'(t) = 20(4t + 1)^4$$

Met de productregel vind je:

$$N'(t) = g'(t) \cdot h(t) + g(t) \cdot h'(t)$$

$$N'(t) = 3 \cdot (4t + 1)^5 + 3t \cdot 20(4t + 1)^4$$

$$N'(t) = 3(4t + 1)^5 + 60t(4t + 1)^4$$

- c** De functie $P(n)$ is de productfunctie van $g(n) = 2n^3$ en $h(n) = \sqrt{3 + n}$.

De afgeleide van $g(n)$ is $g'(n) = 2 \cdot 3n^2 = 6n^2$.

De afgeleide van $h(n)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = 3 + n$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dn} = 1$$

$$\frac{dy}{dn} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dn} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$$

$$h'(n) = \frac{1}{2}(3 + n)^{-\frac{1}{2}}$$

Met de productregel vind je:

$$P'(n) = g'(n) \cdot h(n) + g(n) \cdot h'(n)$$

$$P'(n) = 6n^2 \cdot \sqrt{3 + n} + 2n^3 \cdot \frac{1}{2}(3 + n)^{-\frac{1}{2}}$$

$$P'(n) = 6n^2\sqrt{3 + n} + n^3 \cdot (3 + n)^{-\frac{1}{2}}, \text{ ofwel } P'(n) = 6n^2\sqrt{3 + n} + \frac{n^3}{\sqrt{3 + n}}$$

- d** De functie $l(d)$ is de productfunctie van $g(d) = 2d + 5$ en $h(d) = (4 - d)^2$.

De afgeleide van $g(d)$ is $g'(d) = 2$.

De afgeleide van $h(d)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = u^2$ en $u = 4 - d$.

$$\frac{dy}{du} = 2u \text{ en } \frac{du}{dd} = -1$$

$$\frac{dy}{dd} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dd} = 2u \cdot -1 = -2u$$

$$h'(d) = -2(4 - d) = -8 + 2d$$

Met de productregel vind je:

$$l'(d) = g'(d) \cdot h(d) + g(d) \cdot h'(d)$$

$$l'(d) = 2 \cdot (4 - d)^2 + (2d + 5) \cdot (-8 + 2d)$$

$$l'(d) = 2(16 - 8d + d^2) + -16d + 4d^2 - 40 + 10d$$

$$l'(d) = 32 - 16d + 2d^2 - 16d + 4d^2 - 40 + 10d$$

$$l'(d) = 6d^2 - 22d - 8$$

- e** De functie $k(b)$ is de productfunctie van $g(b) = \left(\frac{1}{2}b + 1\right)^4$ en $h(b) = 2b^3$.

De afgeleide van $g(b)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = u^4$ en $u = \frac{1}{2}b + 1$.

$$\frac{dy}{du} = 4u^3 \text{ en } \frac{du}{db} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{db} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{db} = 4u^3 \cdot \frac{1}{2} = 2u^3$$

$$g'(b) = 2\left(\frac{1}{2}b + 1\right)^3$$

De afgeleide van $h(b) = 2 \cdot 3b^2 = 6b^2$.

Met de productregel vind je:

$$k'(b) = g'(b) \cdot h(b) + g(b) \cdot h'(b)$$

$$k'(b) = 2\left(\frac{1}{2}b + 1\right)^3 \cdot 2b^3 + \left(\frac{1}{2}b + 1\right)^4 \cdot 6b^2$$

$$k'(b) = 4b^3\left(\frac{1}{2}b + 1\right)^3 + 6b^2\left(\frac{1}{2}b + 1\right)^4$$

- f** De functie $f(x)$ is de productfunctie van $g(x) = 2x + 1$ en $h(x) = \sqrt{4 - x}$.

De afgeleide van $g(x)$ is $g'(x) = 2$.

De afgeleide van $h(x)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = 4 - x$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot -1 = -\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = -\frac{1}{2}(4 - x)^{-\frac{1}{2}}$$

Met de productregel vind je:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \sqrt{4 - x} + (2x + 1) \cdot -\frac{1}{2}(4 - x)^{-\frac{1}{2}}, \text{ ofwel } f'(x) = 2\sqrt{4 - x} - \frac{2x + 1}{\sqrt{4 - x}}$$

- 7 a** Als $x = 1$ dan is $q = 100 \times 1^{-1} = 100$ en $p = 10 + 5 \times 1^2 = 15$.

De kosten zijn dan $100 \times 15 = \text{€ } 1.500,-$.

Als $x = 4$ dan is $q = 100 \times 4^{-1} = 25$ en $p = 10 + 5 \times 4^2 = 90$.

De kosten zijn dan $25 \times 90 = \text{€ } 2.250,-$.

- b** $TK = q \cdot p$ dus $TK = 100x^{-1} \cdot (10 + 5x^2)$

- c** De formule TK is de productformule van $q = 100x^{-1}$ en $p = 10 + 5x^2$.

De afgeleiden zijn $\frac{dq}{dx} = 100 \cdot -1 \cdot x^{-2} = -100x^{-2}$ en $\frac{dp}{dx} = 5 \cdot 2x = 10x$.

Met de productregel vind je:

$$\frac{dTK}{dx} = \frac{dq}{dx} \cdot p + q \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dTK}{dx} = -100x^{-2} \cdot (10 + 5x^2) + 100x^{-1} \cdot 10x$$

$$\frac{dTK}{dx} = -100 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (10 + 5x^2) + 1000 = \frac{-100(10 + 5x^2)}{x^2} + 1000$$

$$\frac{dTK}{dx} = \frac{-1000 - 500x^2}{x^2} + 1000 = \frac{-1000}{x^2} + 500$$

20 Differentiëren

Deze afgeleide is nul als $x^2 = 2$, dus als $x = \sqrt{2}$.

Bij een oppervlakte van ongeveer $1,41 \text{ m}^2$ per poster zijn de kosten minimaal.

d $x = \sqrt{2}$ invullen geeft $TK = 100 \times \sqrt{2}^{-1} \times (10 + 5 \times \sqrt{2}^2) \approx 1414$.

De totale kosten zijn € 1.414,-.

Er worden dan $100 \times \sqrt{2}^{-1} \approx 71$ posters gedrukt.

03 a In stap 1 zijn de factoren van de productfunctie benoemd.

In stap 2 zijn beide factoren gediifferentieerd.

b Op de eerste puntjes moet $h(x)$ staan, dus $50 + 4x$.

Op de tweede puntjes moet $h'(x)$ staan, dus 4.

c $f'(x) = 10x^4 \cdot (50 + 4x) + 2x^5 \cdot 4$

$$f'(x) = 500x^4 + 40x^5 + 8x^5$$

$$f'(x) = 48x^5 + 500x^4$$

d De functie $f(x)$ is de productfunctie van $g(x) = 2x^2$ en $h(x) = 8 - x^2$.

De afgeleiden zijn $g'(x) = 2 \cdot 2x = 4x$ en $h'(x) = -2x$.

Met de productregel vind je:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = 4x \cdot (8 - x^2) + 2x^2 \cdot -2x$$

$$f'(x) = 32x - 4x^3 - 4x^3$$

$$f'(x) = 32x - 8x^3$$

e $s(t) = (-32 + 4t)(9 + t)$

De functie $s(t)$ is de productfunctie van $g(t) = -32 + 4t$ en $h(t) = 9 + t$.

De afgeleiden zijn $g'(t) = 4$ en $h'(t) = 1$.

Met de productregel vind je:

$$s'(t) = g'(t) \cdot h(t) + g(t) \cdot h'(t)$$

$$s'(t) = 4 \cdot (9 + t) + (-32 + 4t) \cdot 1$$

$$s'(t) = 36 + 4t - 32 + 4t$$

$$s'(t) = 8t + 4$$

f De functie $l(q)$ is de productfunctie van $g(q) = q + 60$ en $h(q) = 8 - q^3$.

De afgeleiden zijn $g'(q) = 1$ en $h'(q) = -3q^2$.

Met de productregel vind je:

$$l'(q) = g'(q) \cdot h(q) + g(q) \cdot h'(q)$$

$$l'(q) = 1 \cdot (8 - q^3) + (q + 60) \cdot -3q^2$$

$$l'(q) = 8 - q^3 - 3q^3 - 180q^2$$

$$l'(q) = -4q^3 - 180q^2 + 8$$

g De functie $p(x)$ is de productfunctie van $g(x) = 6x - 5$ en $h(x) = 2 - x^3$.

De afgeleiden zijn $g'(x) = 6$ en $h'(x) = -3x^2$.

Met de productregel vind je:

$$p'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$p'(x) = 6 \cdot (2 - x^3) + (6x - 5) \cdot -3x^2$$

$$p'(x) = 12 - 6x^3 - 18x^3 + 15x^2$$

$$p'(x) = -24x^3 + 15x^2 + 12$$

06 a $g'(x) = 8 \cdot 3x^2 = 24x^2$

b De functie h bestaat uit twee schakels, namelijk $y = \sqrt{u}$ en $u = 6x + 10$.

c De schakels zijn $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = 6x + 10$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot 6 = 3u^{-\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = 3(6x + 10)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{d } f'(x) &= 24x^2 \cdot \sqrt{6x+10} + 8x^3 \cdot 3(6x+10)^{-\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= 24x^2\sqrt{6x+10} + 24x^3(6x+10)^{-\frac{1}{2}}, \text{ ofwel} \\ f'(x) &= 24x^2\sqrt{6x+10} + \frac{24x^3}{\sqrt{6x+10}} \end{aligned}$$

U1 De functie $u(x)$ is de productfunctie van $g(x) = 3x$ en $h(x) = \sqrt{6x+5}$.

De afgeleide van $g(x)$ is $g'(x) = 3$.

De afgeleide van $h(x)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = 6x + 5$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot 6 = 3u^{-\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = 3(6x+5)^{-\frac{1}{2}}$$

Met de productregel vind je:

$$u'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$u'(x) = 3 \cdot \sqrt{6x+5} + 3x \cdot 3(6x+5)^{-\frac{1}{2}}$$

$$u'(x) = 3 \cdot \sqrt{6x+5} + 9x \cdot (6x+5)^{-\frac{1}{2}}$$

$$u'(x) = \frac{3 \cdot \sqrt{6x+5} \cdot \sqrt{6x+5}}{\sqrt{6x+5}} + \frac{9x}{\sqrt{6x+5}}$$

$$u'(x) = \frac{3(6x+5) + 9x}{\sqrt{6x+5}}$$

$$u'(x) = \frac{18x + 15 + 9x}{\sqrt{6x+5}}$$

$$u'(x) = \frac{27x + 15}{\sqrt{6x+5}}, \text{ dus } a = 27 \text{ en } b = 15.$$

20.2 Quotiëntregel

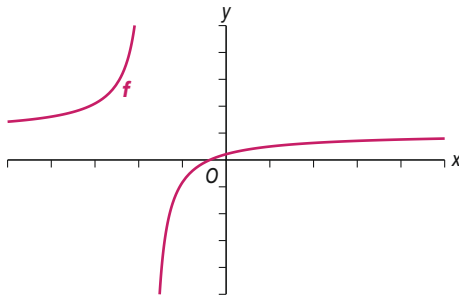
intro Je kunt de functie op de grafische rekenmachine invoeren bij y_1 en dan bij y_2 de formule $(y_1(x + 0,001) - y_1(x))/0,001$. Je moet dan de vergelijking $y_2 = 1$ met de grafische rekenmachine oplossen.

Of door een raaklijn te tekenen met helling 1 die de grafiek van f raakt en dan te kijken in welke punten dat is.

Maar als je de afgeleide van f kunt vinden dan zou je de punten ook kunnen vinden door de vergelijking $f'(x) = 1$ op te lossen.

20 Differentiëren

8 a



- b Dan zou de helling van de grafiek van f overal 2 zijn. De grafiek van f zou dan een rechte lijn zijn met hellingsgetal 2. Dit is niet het geval.

9 a f is een productfunctie omdat je het kunt schrijven als $f(x) = g(x) \cdot h(x)$.

$h(x) = (2x + 7)^{-1}$ is een kettingfunctie met schakels $y = u^{-1}$ en $u = 2x + 7$.

Je hebt dus beide regels nodig om $f(x)$ te differentiëren.

- b In stap 1 is de afgeleide $g'(x)$ berekend.

In stap 2 zijn de schakels van $h(x)$ benoemd.

In stap 3 is de afgeleide $h'(x)$ berekend met de kettingregel.

In stap 4 is de productregel $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$ ingevuld om de afgeleide $f'(x)$ te berekenen.

$$c \quad f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2x+7} + (4x+3) \cdot -2 \cdot \frac{1}{(2x+7)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4}{2x+7} + \frac{-2(4x+3)}{(2x+7)^2}$$

$$d \quad f'(x) = \frac{4(2x+7)}{(2x+7)^2} + \frac{-8x-6}{(2x+7)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x+28-8x-6}{(2x+7)^2}$$

$$f'(x) = \frac{22}{(2x+7)^2}$$

10 a De schakels zijn $y = u^{-1}$ en $u = n(x)$.

$$\frac{dy}{du} = -1 \cdot u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dx} = n'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -1 \cdot u^{-2} \cdot n'(x)$$

De afgeleide is $-1 \cdot (n(x))^{-2} \cdot n'(x)$.

- b $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

$$g(x) = t(x) \text{ en } h(x) = (n(x))^{-1}$$

$$g'(x) = t'(x) \text{ en } h'(x) = -1 \cdot (n(x))^{-2} \cdot n'(x)$$

$$f'(x) = t'(x) \cdot (n(x))^{-1} + t(x) \cdot -1 \cdot (n(x))^{-2} \cdot n'(x)$$

$$c \quad f'(x) = \frac{t'(x)}{n(x)} + \frac{-t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x)}{(n(x))^2} + \frac{-t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

- 11** De functie f is het quotiënt van $t(x) = 5x + 6$ en $n(x) = 2 - x^2$.
De afgeleiden zijn $t'(x) = 5$ en $n'(x) = -2x$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{5 \cdot (2 - x^2) - (5x + 6) \cdot (-2x)}{(2 - x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{10 - 5x^2 + 10x^2 + 12x}{(2 - x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5x^2 + 12x + 10}{(2 - x^2)^2}$$

- 12 a** De formule A is het quotiënt van $t(p) = 6p - 2p^2$ en $n(p) = p + 15$.
De afgeleiden zijn $t'(p) = 6 - 2 \cdot 2p = 6 - 4p$ en $n'(p) = 1$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$\frac{dA}{dp} = \frac{t'(p) \cdot n(p) - t(p) \cdot n'(p)}{(n(p))^2}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{(6 - 4p) \cdot (p + 15) - (6p - 2p^2) \cdot 1}{(p + 15)^2}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{6p + 90 - 4p^2 - 60p - 6p + 2p^2}{(p + 15)^2}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{-2p^2 - 60p + 90}{(p + 15)^2}$$

- b** De formule L is het quotiënt van $t(u) = 1$ en $n(u) = u + 3$.

De afgeleiden zijn $t'(u) = 0$ en $n'(u) = 1$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$\frac{dL}{du} = \frac{t'(u) \cdot n(u) - t(u) \cdot n'(u)}{(n(u))^2}$$

$$\frac{dL}{du} = \frac{0 \cdot (u + 3) - 1 \cdot 1}{(u + 3)^2}$$

$$\frac{dL}{du} = \frac{-1}{(u + 3)^2}$$

- c** De formule R is het quotiënt van $t(s) = (4s + 5)^3$ en $n(s) = s$.

De afgeleide van $t(s)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = u^3$ en $u = 4s + 5$.

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \text{ en } \frac{du}{ds} = 4$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{ds} = 3u^2 \cdot 4 = 12u^2$$

$$t'(s) = 12(4s + 5)^2$$

De afgeleide van $n(s)$ is $n'(s) = 1$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$\frac{dR}{ds} = \frac{t'(s) \cdot n(s) - t(s) \cdot n'(s)}{(n(s))^2}$$

$$\frac{dR}{ds} = \frac{12(4s + 5)^2 \cdot s - (4s + 5)^3 \cdot 1}{s^2}$$

$$\frac{dR}{ds} = \frac{12s(4s + 5)^2 - (4s + 5)^3}{s^2}$$

20 Differentiëren

- d** De formule W is het quotiënt van $t(c) = c$ en $n(c) = \sqrt{2-c}$.

De afgeleide van $t(c)$ is $t'(c) = 1$.

De afgeleide van $n(c)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = 2 - c$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dc} = -1$$

$$\frac{dy}{dc} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dc} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot -1$$

$$n'(c) = -\frac{1}{2} (2 - c)^{-\frac{1}{2}}$$

Met de quotiëntregel vind je:

$$\frac{dW}{dc} = \frac{t'(c) \cdot n(c) - t(c) \cdot n'(c)}{(n(c))^2}$$

$$\frac{dW}{dc} = \frac{1 \cdot \sqrt{2-c} - c \cdot -\frac{1}{2} (2-c)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{2-c})^2}$$

$$\frac{dW}{dc} = \frac{\sqrt{2-c} + \frac{1}{2} c (2-c)^{-\frac{1}{2}}}{2-c}, \text{ ofwel } \frac{dW}{dc} = \frac{\sqrt{2-c} + \frac{c}{2\sqrt{2-c}}}{2-c}$$

- 13 a** De formule N is het quotiënt van $T(t) = 3t^2 - 5$ en $n(t) = 9$.

De afgeleiden zijn $T'(t) = 3 \cdot 2t = 6t$ en $n'(t) = 0$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{T'(t) \cdot n(t) - T(t) \cdot n'(t)}{(n(t))^2}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{6t \cdot 9 - (3t^2 - 5) \cdot 0}{9^2}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{54t}{81}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{2}{3} t$$

- b** $N = \frac{3t^2}{9} - \frac{5}{9}$, dus $N = \frac{1}{3} t^2 - \frac{5}{9}$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{3} \cdot 2t = \frac{2}{3} t$$

- c** De tweede manier is in ieder geval sneller.

- d** De formule N is het quotiënt van $T(t) = 3t(t+4) = 3t^2 + 12t$ en $n(t) = 2t$.

De afgeleiden zijn $T'(t) = 3 \cdot 2t + 12 = 6t + 12$ en $n'(t) = 2$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{(6t + 12) \cdot 2t - (3t^2 + 12t) \cdot 2}{(2t)^2}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{12t^2 + 24t - 6t^2 - 24t}{2^2 \cdot t^2}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{6t^2}{4t^2}, \text{ dus } \frac{dN}{dt} = 1 \frac{1}{2}$$

Of op een andere manier:

$$N = \frac{3t^2 + 12t}{2t} \text{ ofwel } N = \frac{3t^2}{2t} + \frac{12t}{2t} \text{ ofwel } N = 1 \frac{1}{2} t + 6, \text{ dus } \frac{dN}{dt} = 1 \frac{1}{2}.$$

- 14 a** De formule C is het quotiënt van $T(t) = 8t$ en $n(t) = t^2 + 4$.

De afgeleiden zijn $T'(t) = 8$ en $n'(t) = 2t$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{T'(t) \cdot n(t) - T(t) \cdot n'(t)}{(n(t))^2}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{8 \cdot (t^2 + 4) - 8t \cdot 2t}{(t^2 + 4)^2}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{8t^2 + 32 - 16t^2}{(t^2 + 4)^2}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{-8t^2 + 32}{(t^2 + 4)^2}$$

De concentratie is maximaal als $\frac{dC}{dt} = 0$, dus $\frac{-8t^2 + 32}{(t^2 + 4)^2} = 0$.

$$-8t^2 + 32 = 0$$

$$8t^2 = 32$$

$$t^2 = 4$$

$$t = 2 \text{ (} t = -2 \text{ vervalt)}$$

De concentratie in het bloed is maximaal na 2 uur.

- b** $t = 0$ invullen in de afgeleide geeft $\frac{dC}{dt} = \frac{-8 \times 0^2 + 32}{(0^2 + 4)^2} = 2$.

Het geneesmiddel wordt met 2 mg/liter per uur opgenomen.

- c** $t = 5$ invullen in de afgeleide geeft $\frac{dC}{dt} = \frac{-8 \times 5^2 + 32}{(5^2 + 4)^2} \approx -0,20$.

Het geneesmiddel wordt met 0,20 mg/liter per uur afgebroken.

- d** De vergelijking $\frac{8t}{t^2 + 4} = 1$ moet worden opgelost.

$$\text{Invoer: } y_1 = \frac{8x}{x^2 + 4} \text{ en } y_2 = 1$$

$$\text{Venster: } 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 3$$

Optie: snijpunt

De coördinaten van de snijpunten zijn (0,54; 1) en (7,46; 1).

Tussen deze snijpunten is de concentratie ten minste 1 mg/liter.

Na ongeveer 7,5 uur moet er een tweede injectie worden gegeven.

- 011 a** De afgeleiden zijn $t'(x) = 13 \cdot 2x = 26x$ en $n'(x) = 1$.

b
$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

- c** Je vermenigvuldigt de hele tweeterm $x + 6$ met $t'(x)$. Als je geen haakjes zou schrijven dan staat er dat je alleen x met $t'(x)$ vermenigvuldigt.

d
$$f'(x) = \frac{26x \cdot (x + 6) - 13x^2 \cdot 1}{(x + 6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{26x^2 + 156x - 13x^2}{(x + 6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{13x^2 + 156x}{(x + 6)^2}$$

20 Differentiëren

- U2 a** De functie f is het quotiënt van $t(x) = -x^2 + 21x - 56$ en $n(x) = x - 1$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = -2x + 21$ en $n'(x) = 1$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{(-2x + 21) \cdot (x - 1) - (-x^2 + 21x - 56) \cdot 1}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 21x - 21 + x^2 - 21x + 56}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 35}{(x - 1)^2}$$

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \text{ dus } -1 \cdot (x - 1)^2 = -x^2 + 2x - 1$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1 + 1 + 35}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (x - 1)^2 + 36}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{36}{(x - 1)^2}$$

b $f'(8) = -1 + \frac{36}{(8 - 1)^2} = -\frac{13}{49}$

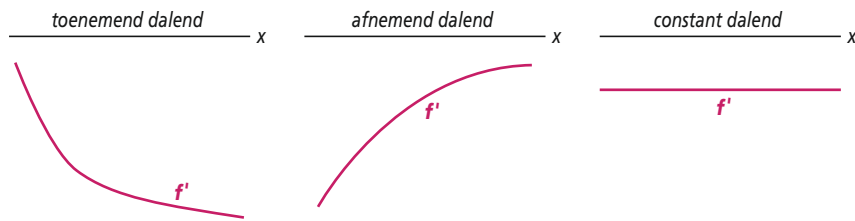
De top van de getekende grafiek is een maximale waarde. Na de top daalt de getekende grafiek dus is $f'(x) < 0$. En dat is ook zo voor alle x -waarden die groter dan de x -coördinaat van de top zijn. $f'(8) < 0$ dus de x -coördinaat van de top is kleiner dan 8.

20.3 Hellinggrafiek

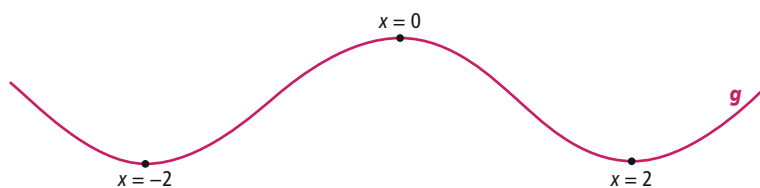
intro Als de linker grafiek een top heeft, dus helling nul, dan snijdt de rechter grafiek de horizontale as en is daar nul. De linker grafiek is de grafiek van f en de rechter grafiek is de grafiek van f' .

- 15 a** De grafiek van H heeft een top na 40 minuten en de bijbehorende formule heeft daar een maximum. De hoeveelheid werkzame stof is dan dus maximaal.
- b** De grafiek van H' snijdt de horizontale as na 40 minuten. Vóór 40 minuten ligt de grafiek van H' boven de horizontale as. Daarna ligt de grafiek van H' onder de horizontale as. Er is dan sprake van een maximale waarde van H .
- c** Van 0 tot 40 minuten ligt de grafiek van H' boven de horizontale as dus de hoeveelheid werkzame stof neemt dan toe.
Na 40 minuten ligt de grafiek van H' onder de horizontale as dus de hoeveelheid werkzame stof neemt dan af.
- d** De grafiek van H is na 70 minuten afnemend dalend.
Je ziet dat de grafiek van H dalend is omdat de grafiek van H' daar onder de horizontale as ligt. Je ziet ook dat de grafiek van H afnemend is doordat de grafiek van H' de horizontale as nadert.

16



- 17 a** Als $x < -2$ dan ligt de hellinggrafiek onder de x -as, dus de grafiek van g is dalend. De hellinggrafiek nadert de x -as, dus de grafiek van g is afnemend dalend.
- b** De grafiek van g' snijdt daar de x -as, dus is de helling van g nul.
- c** g heeft daar een minimum omdat de grafiek links van $x = -2$ daalt en rechts van $x = -2$ stijgt.
- d** Er is geen punt bekend waar de grafiek van g doorheen gaat, maar de vorm van de grafiek moet eruit zien zoals hieronder.



- 18** Hellinggrafiek A ligt vóór $x = 0$ boven de x -as, dus de bijbehorende grafiek is daar stijgend. De hellinggrafiek ligt ná $x = 0$ onder de x -as, dus de bijbehorende grafiek is daar dalend. De enige grafiek die hierbij past, is de grafiek bij functie j .

Hellinggrafiek B ligt overal boven de x -as, dus de bijbehorende grafiek is altijd stijgend. De enige grafiek die hierbij past, is de grafiek bij functie f .

Hellinggrafiek C ligt overal boven de x -as behalve bij $x = 0$, dus de bijbehorende grafiek is overal stijgend behalve bij $x = 0$. Bij $x = 0$ heeft de bijbehorende grafiek een horizontale raaklijn. De enige grafiek die hierbij past, is de grafiek bij functie g .

Hellinggrafiek D ligt overal onder de x -as dus de bijbehorende grafiek is overal dalend. De hellinggrafiek nadert ook de x -as dus de bijbehorende grafiek is afnemend dalend. De enige grafiek die hierbij past, is de grafiek bij functie h .

19 a $\frac{dK}{dP} = 25\,000 \cdot 0,62 \cdot P^{-0,38}$

$$\frac{dK}{dP} = 15\,500 \cdot P^{-0,38}$$



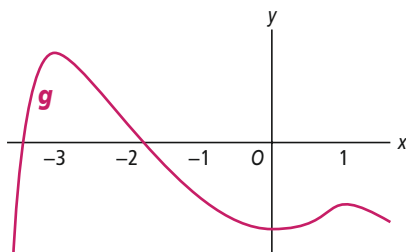
- b** De hellinggrafiek ligt overal boven de P -as dus de grafiek van K is stijgend. De hellinggrafiek nadert de P -as dus de grafiek van K is afnemend stijgend. Dit betekent dat de kosten bij een lage productie (kleine waarden van P) veel sneller toenemen dan bij een hoge productie (grote waarden van P).

20 Differentiëren

- 20** 1: Als de grafiek van f een minimum heeft bij $x = 2$ dan is daar de helling nul. Dit is niet het geval dus uitspraak 1 is niet waar.
- 2: Bij een nulpunt snijdt de grafiek van f de x -as. Je kunt dan geen uitspraak doen over de bijbehorende helling in dat punt. Daardoor kun je niet uit de hellinggrafiek opmaken of de functie f één nulpunt heeft.
- 3: De hellinggrafiek laat zien dat er twee x -waarden zijn waarvoor de helling nul is. In deze punten snijdt de hellinggrafiek de x -as. Bij $x = 0$ is er sprake van een maximum van f omdat de helling van positief naar negatief gaat. Bij $x = 4$ is er sprake van een maximum van f omdat de helling van negatief naar positief gaat. Uitspraak 3 is dus waar.
- 4: Uit de toelichting op uitspraak 3 volgt dat de grafiek van f twee toppen heeft. Een parabool heeft maar één top. Uitspraak 4 is dus niet waar.
- 5: Bij $x = 2$ is de waarde van de helling minimaal. De helling is bij $x = 2$ ook negatief. Dit betekent dat de grafiek bij $x = 2$ het snelst daalt en dat uitspraak 5 waar is.

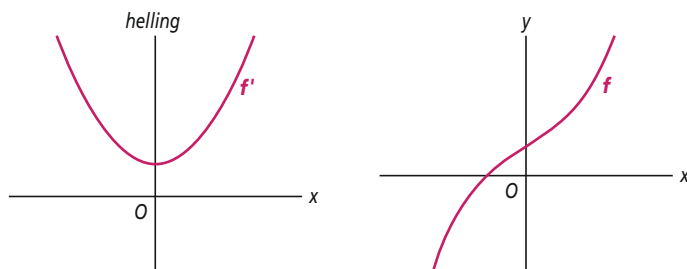
- 017** a De grafiek van g is dan stijgend, want daar is de helling positief.
- b Na opdracht a weet je dat de grafiek van g daar stijgend is. De grafiek van g' nadert de x -as dus de grafiek van g is dan afnemend stijgend.
- c Vóór $x < -3$ is de grafiek van g afnemend stijgend. Na $x = -3$ ligt de grafiek van g' onder de x -as dus is de grafiek van g daar dalend. De grafiek van g gaat bij $x = -3$ over van stijgen in dalen.
- d De grafiek van g gaat bij $x = -3$ van stijgen over in dalen. De functie g heeft dan een maximum bij $x = -3$.
- e De grafiek van g' gaat tussen $x = -3$ en $x = -2$ weg van de x -as, dus de grafiek van g is dan toenemend dalend.
- f Tussen $x = -2$ en $x = 0$ is de grafiek van g afnemend dalend.

g



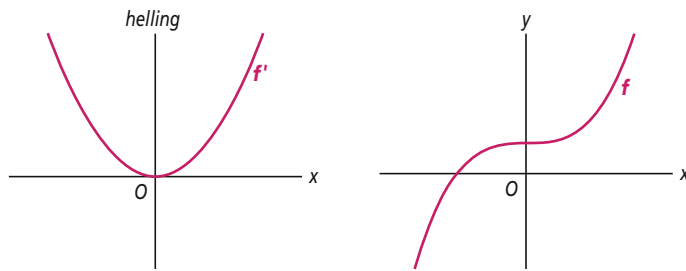
- U3** De grafiek van f'' snijdt de x -as bij $x = 0$ en gaat van negatief naar positief. De grafiek van f' heeft bij $x = 0$ een minimale waarde en is een dalparabool. Er zijn dan drie mogelijke situaties.

- 1 De grafiek van f' heeft geen snijpunten met de x -as. De grafiek van f' ligt helemaal boven de x -as. De grafiek van f gaat dan van afnemend stijgend naar toenemend stijgend.



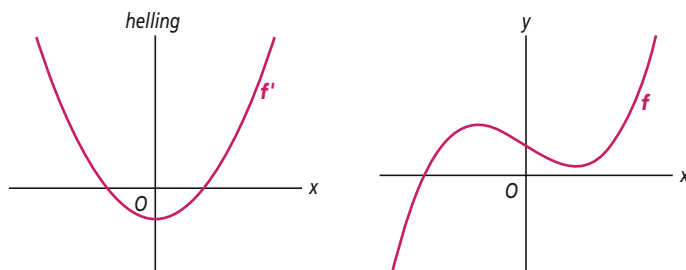
- 2 De grafiek van f' heeft één snijpunt met de x -as.

Dit punt is de top van de grafiek van f' . De grafiek van f gaat dan van afnemend stijgend naar een horizontale raaklijn bij $x = 0$ naar toenemend stijgend.



- 3 De grafiek van f' heeft twee snijpunten met de x -as.

De grafiek van f gaat dan van afnemend stijgend naar toenemend dalend naar afnemend dalend naar toenemend stijgend. De grafiek van f heeft dan twee toppen.



20.4 Redeneren met de afgeleide

intro De afgeleide is een breuk. De teller van de breuk is altijd negatief terwijl de noemer van de breuk altijd positief is. Dit betekent dat de waarde van de afgeleide altijd negatief is waardoor het aantal sprinkhanen juist zou afnemen. Deze afgeleide kan dus niet juist zijn.

- 21 a** De functie h is het quotiënt van $t(x) = 5 - x$ en $n(x) = x + 3$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = -1$ en $n'(x) = 1$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$h'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$h'(x) = \frac{-1 \cdot (x + 3) - (5 - x) \cdot 1}{(x + 3)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-x - 3 - 5 + x}{(x + 3)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-8}{(x + 3)^2}$$

- b** Het maakt niet uit wat je voor x invult, de waarde van $(x + 3)^2$ is altijd positief omdat je een positief getal ($x > 0$) in het kwadraat doet. Als x toeneemt, dan neemt zowel $x + 3$ als ook $(x + 3)^2$ toe.
- c** Je deelt -8 door iets positiefs. De waarde van $h'(x)$ is dan altijd negatief.
- d** De waarde van $h'(x)$ is altijd negatief dus de grafiek van $h'(x)$ ligt altijd onder de x -as. De constante -8 wordt door een steeds groter wordend getal gedeeld waardoor de waarde van $h'(x)$ nadert naar nul. De grafiek van $h'(x)$ komt dan steeds dichterbij de x -as.

20 Differentiëren

- e Als de grafiek van $h'(x)$ onder de x -as ligt dan daalt de grafiek van h .
Als de grafiek van $h'(x)$ daarnaast ook steeds dichterbij de x -as komt dan is de grafiek van h afnemend dalend (voor $x > 0$).

22 a $f'(x) = 1250 \cdot -0,35x^{-1,35} = -437,5x^{-1,35}$ ofwel $f'(x) = \frac{-437,5}{x^{1,35}}$

Als $x > 0$, dan is $f'(x)$ negatief voor elke waarde van x , want de teller is altijd negatief en de noemer is altijd positief en het quotiënt van een negatief getal en een positief getal is negatief. Hieruit volgt dat de grafiek van f dalend is.

Als x toeneemt, dan neemt $x^{1,35}$ ook toe. De breuk $\frac{-437,5}{x^{1,35}}$ nadert dan naar

nul want $-437,5$ wordt door een steeds groter getal gedeeld.

De grafiek van f is daarom afnemend dalend.

b $g(x) = -6x^{-12}$

$g'(x) = -6 \cdot -12x^{-13} = 72x^{-13}$ ofwel $g'(x) = \frac{72}{x^{13}}$

Als $x > 0$, dan is $g'(x)$ positief voor elke waarde van x , want de teller en noemer zijn beide positief en het quotiënt van twee positieve getallen is positief. Hieruit volgt dat de grafiek van g stijgend is.

Als x toeneemt, dan neemt x^{13} ook toe. De breuk $\frac{72}{x^{13}}$ nadert dan naar nul

want 72 wordt door een steeds groter getal gedeeld.

De grafiek van g is afnemend stijgend.

23 a De afgeleide van $124,9$ is 0 .

De afgeleide van $R = 0,0007(1,5t + 5)^3$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = 0,0007u^3$ en $u = 1,5t + 5$.

$$\frac{dy}{du} = 0,0007 \cdot 3u^2 = 0,0021u^2 \text{ en } \frac{du}{dt} = 1,5$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 0,0021u^2 \cdot 1,5 = 0,00315u^2$$

$$\frac{dR}{dt} = 0,00315(1,5t + 5)^2$$

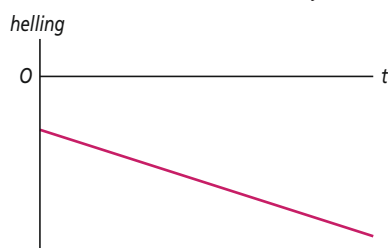
$(1,5t + 5)^2$ is positief en $0,00315 \cdot (1,5t + 5)^2$ is dus ook positief. Hieruit volgt dat de grafiek van R stijgt: het aantal reigers neemt toe.

Als t toeneemt, dan neemt $(1,5t + 5)^2$ toe en $0,00315 \cdot (1,5t + 5)^2$ dus ook.

Er is dan sprake van een toenemende stijging.

b Invoer: $y_1 = 4500 - \frac{1}{20}(x + 30)^2$ en $y_2 = \frac{y_1(x + 0,001) - y_1(x)}{0,001}$

Venster: $0 \leq x \leq 60$, $-10 \leq y \leq 2$



De hellinggrafiek ligt onder de t -as, dus de grafiek van K is dalend. De hellinggrafiek gaat weg van de t -as, dus de grafiek van K is toenemend dalend. De aantallen kikkers namen dus steeds sterker af.

- 24 a** Des te minder mensen er in de tunnel zijn, des te groter R wordt.
 $\frac{26}{R}$ nadert dan naar nul en er wordt steeds minder van 87 afgetrokken
 waardoor de waarde van V toeneemt.

Dus als er weinig mensen in de tunnel zijn, dan lopen mensen sneller.

b $V = 87 - 26R^{-1}$

$$\frac{dV}{dR} = 0 - 26 \cdot -1R^{-2} = 26R^{-2}$$

$$\frac{dV}{dR} = \frac{26}{R^2}$$

Als $R > 0$, dan is $\frac{dV}{dR}$ positief voor elke waarde van R , want de teller en de

noemer zijn beide positief en het quotiënt van twee positieve getallen is altijd positief. Hieruit volgt dat de grafiek van V stijgend is. Als er weinig mensen in de tunnel zijn dan lopen mensen sneller.

- 25 a** $t = 23,49$ invullen geeft $P = 4,99087(42,5 - 23,49)^{1,81} \approx 1030,7$
 De atlete krijgt 1030 punten.

b De schakels zijn $y = 4,99087u^{1,81}$ en $u = 42,5 - t$.

$$\frac{dy}{du} = 4,99087 \cdot 1,81u^{0,81} = 9,0034747u^{0,81} \text{ en } \frac{du}{dt} = -1$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 9,0034747u^{0,81} \cdot -1 = -9,0034747u^{0,81}$$

$$\frac{dP}{dt} = -9,0034747(42,5 - t)^{0,81}$$

Als t tussen 0 en 42,5 ligt, dan is $(42,5 - t)^{0,81}$ positief en is $\frac{dP}{dt}$ negatief

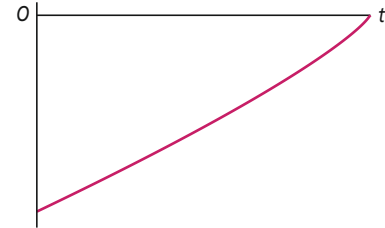
voor elke waarde van t omdat je een negatief getal vermenigvuldigt met een positief getal. Hieruit volgt dat de grafiek van P daalt.

Als t toeneemt, dan nadert $42,5 - t$ naar nul en dus ook $(42,5 - t)^{0,81}$ en ook $-9,0034747(42,5 - t)^{0,81}$. De grafiek van P is dan afnemend dalend.

c Invoer: $y_1 = -9,0034747(42,5 - x)^{0,81}$

Venster: $0 \leq x \leq 42,5$, $-200 \leq y \leq 10$

helling



De hellinggrafiek ligt onder de x -as, dus de grafiek van P is dalend.

De hellinggrafiek nadert de x -as, dus de grafiek van P is afnemend dalend.

Dit betekent dat bij kleine waarden van t , het verschil in punten sneller afneemt dan bij grote waarden van t . Het verschil in puntenaantal is bij de twee snelste lopers groter dan bij de twee langzaamste lopers.

- 26 a** $1\,000\,000\,000 : 125 = 8\,000\,000$ minuten levensduur

$$8\,000\,000 : 60 = 133\,333\frac{1}{3} \text{ uur levensduur}$$

$$133\,333\frac{1}{3} : 24 \approx 5555,6 \text{ dagen levensduur}$$

$$5555,6 : 365 \approx 15,2 \text{ jaar levensduur}$$

De gemiddelde levensduur is dus 15,2 jaar.

20 Differentiëren

b Als L in jaren is, dan is $L = \frac{1\,000\,000\,000}{H}$ ofwel $H = \frac{1\,000\,000\,000}{L}$

Als L in minuten is, dan is $H = \frac{1\,000\,000\,000}{60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot L}$ ofwel $H \approx \frac{1900}{L}$

c $H = 1900L^{-1}$

$$\frac{dH}{dL} = 1900 \cdot -1L^{-2} = -1900L^{-2}, \text{ ofwel } \frac{dH}{dL} = \frac{-1900}{L^2}$$

Als $L > 0$, dan is $\frac{dH}{dL}$ negatief voor elke waarde van L , want de teller is

negatief en de noemer is altijd positief. Het quotiënt van een negatief getal en een positief getal is altijd negatief. Hieruit volgt dat de grafiek van H daalt.

Als L toeneemt, dan neemt L^2 ook toe en $\frac{-1900}{L^2}$ nadert dan naar nul want

-1900 wordt door een steeds groter getal gedeeld.

De grafiek van H is daarom afnemend dalend.

022 a $f'(x) = 32 \cdot 1,2x^{0,2} = 38,4 \cdot x^{0,2}$

b Als $x > 0$, dan is $x^{0,2}$ positief en $38,4 \cdot x^{0,2}$ ook, dus $f'(x)$ is positief.

c De grafiek van f is stijgend voor $x > 0$ omdat $f'(x)$ positief is.

d

x	0	100	200	300	400	500
$f'(x)$	0	96,46	110,80	120,16	127,28	133,08

e De afgeleide neemt toe als x toeneemt.

f Als x toeneemt, dan neemt $x^{0,2}$ ook toe. Dan neemt $38,4 \cdot x^{0,2}$, dus $f'(x)$ ook toe.

g De grafiek van f is stijgend volgens opdracht c, en toenemend volgens opdracht f. De grafiek van f is dus toenemend stijgend.

h $g(x) = -4x^{-2}$

$$g'(x) = -4 \cdot -2x^{-3} = 8x^{-3}, \text{ ofwel } g'(x) = \frac{8}{x^3}$$

Als $x > 0$, dan is $g'(x)$ positief voor elke waarde van x , want de teller en noemer zijn beide positief en het quotiënt van twee positieve getallen is altijd positief. Hieruit volgt dat de grafiek van g stijgend is.

Als x toeneemt, dan neemt x^3 ook toe en $\frac{8}{x^3}$ nadert dan naar nul, want 8

wordt door een steeds groter getal gedeeld.

De grafiek van g is daarom afnemend stijgend.

U4 a Volgens Pythagoras is $r^2 = x^2 + 10^2$, dus $r = \sqrt{x^2 + 100}$.

Dit invullen geeft $S = 100\,000 \cdot (\sqrt{x^2 + 100})^{-3}$, ofwel $S = \frac{100\,000}{(\sqrt{x^2 + 100})^3}$

Dit kun je schrijven als $S = \frac{100\,000}{(\sqrt{x^2 + 100})^2 \cdot \sqrt{x^2 + 100}}$ ofwel

$$S = \frac{100\,000}{(x^2 + 100)\sqrt{x^2 + 100}}$$

b $S = \frac{100\,000}{(x^2 + 100)^{1\frac{1}{2}}}$, ofwel $S = 100\,000(x^2 + 100)^{-1\frac{1}{2}}$

De schakels zijn $y = 100\,000u^{-1\frac{1}{2}}$ en $u = x^2 + 100$.

$$\frac{dy}{du} = 100\,000 \cdot -1\frac{1}{2}u^{-2\frac{1}{2}} = -150\,000u^{-2\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -150\,000u^{-2\frac{1}{2}} \cdot 2x = -300\,000x \cdot u^{-2\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dS}{dx} = -300\,000x(x^2 + 100)^{-2\frac{1}{2}}, \text{ ofwel } \frac{dS}{dx} = \frac{-300\,000x}{(x^2 + 100)^{2\frac{1}{2}}}$$

Als de grafiek van S van toenemend dalend naar afnemend dalend overgaat,

dan heeft $\frac{dS}{dx}$ daar een minimale waarde.

$$\text{Invoer: } y_1 = \frac{-300\,000x}{(x^2 + 100)^{2\frac{1}{2}}}$$

Venster: $0 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 0$

Optie: minimum

De coördinaten van de top zijn $(5; -8,59)$.

De gevraagde waarde van x is 5.

20.5 Gemengde opdrachten

27 a $f(t) = t \cdot \sqrt[4]{t} \cdot \sqrt[3]{t} = t \cdot 2 \cdot t^{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{3}}$ ofwel $f(t) = 2t^{1\frac{5}{6}}$

$$f'(t) = 2 \cdot 1\frac{5}{6}t^{\frac{5}{6}} = 3\frac{2}{3}t^{\frac{5}{6}}$$
 ofwel $f'(t) = 3\frac{2}{3} \cdot \sqrt[6]{t^5}$

b $T(q) = f(q) + g(q)$ met $f(q) = 7q^2$ en $g(q) = \frac{q}{2q^2 + 3}$

$$f'(q) = 7 \cdot 2q = 14q$$

De functie g is het quotiënt van $t(q) = q$ en $n(q) = 2q^2 + 3$.

De afgeleide van $t(q)$ is $t'(q) = 1$.

De afgeleide van $n(q)$ is $n'(q) = 2 \cdot 2q = 4q$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$g'(q) = \frac{t'(q) \cdot n(q) - t(q) \cdot n'(q)}{(n(q))^2}$$

$$g'(q) = \frac{1 \cdot (2q^2 + 3) - q \cdot 4q}{(2q^2 + 3)^2}$$

$$g'(q) = \frac{2q^2 + 3 - 4q^2}{(2q^2 + 3)^2}$$

$$g'(q) = \frac{-2q^2 + 3}{(2q^2 + 3)^2}$$

$$T'(q) = f'(q) + g'(q)$$

$$T'(q) = 14q + \frac{-2q^2 + 3}{(2q^2 + 3)^2}$$

c De functie $l(n)$ is de productfunctie van $g(n) = \sqrt{2n-1}$ en $h(n) = 3n+2$.

De afgeleide van $g(n)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = 2n-1$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dn} = 2$$

$$\frac{dy}{dn} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dn} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = u^{-\frac{1}{2}}$$

$$g'(n) = (2n-1)^{-\frac{1}{2}} \text{ ofwel } g'(n) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$$

De afgeleide van $h(n)$ is $h'(n) = 3$.

20 Differentiëren

Met de productregel vind je:

$$l'(n) = g'(n) \cdot h(n) + g(n) \cdot h'(n)$$

$$l'(n) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \cdot (3n+2) + \sqrt{2n-1} \cdot 3$$

$$l'(n) = \frac{3n+2}{\sqrt{2n-1}} + 3\sqrt{2n-1}$$

d $Z(a) = (2a + \sqrt{9} \cdot \sqrt{a})^2$, ofwel $Z(a) = (2a + 3a^{\frac{1}{2}})^2$

De schakels zijn $y = u^2$ en $u = 2a + 3a^{\frac{1}{2}}$.

$$\frac{dy}{du} = 2u \text{ en } \frac{du}{da} = 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} = 2 + 1\frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{da} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{da} = 2u \cdot \left(2 + 1\frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$Z'(a) = 2(2a + 3a^{\frac{1}{2}}) \left(2 + 1\frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$Z'(a) = (4a + 6\sqrt{a}) \cdot \left(2 + \frac{3}{2\sqrt{a}}\right)$$

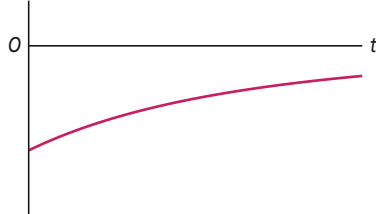
- 28 a** Als t toeneemt dan neemt $(0,05t + 1)^2$ toe en $\frac{120}{(0,05t + 1)^2}$ nadert dan naar nul, want 120 wordt door een steeds groter getal gedeeld.

De inhoud neemt daarom af.

b Invoer: $y_1 = \frac{120}{(0,05x + 1)^2}$ en $y_2 = \frac{y_1(x + 0,001) - y_1(x)}{0,001}$

Venster: $0 \leq x \leq 10$, $-20 \leq y \leq 5$

helling



De hellinggrafiek ligt onder de x -as, dus de grafiek van I is dalend.

De hellinggrafiek nadert de x -as, dus de grafiek van I is afnemend dalend.

De inhoud van het reservoir neemt dus steeds langzamer af.

c $I = 120(0,05t + 1)^{-2}$

De schakels zijn $y = 120u^{-2}$ en $u = 0,05t + 1$.

$$\frac{dy}{du} = 120 \cdot -2u^{-3} = -240u^{-3} \text{ en } \frac{du}{dt} = 0,05$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -240u^{-3} \cdot 0,05 = -12u^{-3}$$

$$\frac{dI}{dt} = -12(0,05t + 1)^{-3}, \text{ ofwel } \frac{dI}{dt} = \frac{-12}{(0,05t + 1)^3}$$

Als $t > 0$, dan is $\frac{dI}{dt}$ negatief voor elke waarde van t , want de teller is negatief

en de noemer is altijd positief en het quotiënt van een positief getal en een negatief getal is negatief. Hieruit volgt dat de grafiek van I daalt.

Als t toeneemt, dan neemt ook $(0,05t + 1)^3$ toe. $\frac{-12}{(0,05t + 1)^3}$ nadert dan naar

nul, want -12 wordt door een steeds groter getal gedeeld.

De grafiek van I is afnemend dalend.

De inhoud van het reservoir neemt dus steeds langzamer af.

29 a $v = 40$ invullen geeft $A = \frac{1680 \times 40}{400 + 40^2} = 33,6$

$33,6 \times 15 = 504$ auto's passeren in die 15 minuten tijd.

b De formule A is het quotiënt van $t(v) = 1680v$ en $n(v) = 400 + v^2$.

De afgeleiden zijn $t'(v) = 1680$ en $n'(v) = 2v$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$\frac{dA}{dv} = \frac{1680 \cdot (400 + v^2) - 1680v \cdot 2v}{(400 + v^2)^2}$$

$$\frac{dA}{dv} = \frac{672000 + 1680v^2 - 3360v^2}{(400 + v^2)^2}$$

$$\frac{dA}{dv} = \frac{672000 - 1680v^2}{(400 + v^2)^2}$$

Er is een extreme waarde als $\frac{672000 - 1680v^2}{(400 + v^2)^2} = 0$

$$672000 - 1680v^2 = 0$$

$$1680v^2 = 672000$$

$$v^2 = 400$$

$$v = 20 \quad (v = -20 \text{ vervalt})$$

Bij een snelheid van 20 km per uur is het aantal passerende auto's per minuut zo groot mogelijk.

c $v = 20$ invullen in de formule geeft $A = \frac{1680 \times 20}{400 + 20^2} = 42$.

Er passeren dan 42 auto's per minuut.

Onderzoeksopdrachten

30 a Je weet dat $\text{snelheid} = \frac{\text{afstand}}{\text{tijd}}$, dus $\text{tijd} = \frac{\text{afstand}}{\text{snelheid}}$

De snelheid van Bert is 1,5 m/s en de stroomsnelheid is v m/s. Als Bert tegen de stroom in zwemt, dan is zijn snelheid v m/s minder dan 1,5 m/s, dus $1,5 - v$ m/s. Op dezelfde manier is zijn snelheid met de stroom mee $1,5 + v$ m/s. De afstand is steeds 500 meter.

De tijd dat hij erover doet als hij tegen de stroom in zwemt is $\frac{500}{1,5 - v}$

De tijd dat hij erover doet als hij met de stroom mee zwemt is $\frac{500}{1,5 + v}$

De tijd dat hij nodig heeft om heen en weer te zwemmen is de som van deze

twee tijden, dus $\frac{500}{1,5 - v} + \frac{500}{1,5 + v}$

b $t = \frac{500}{1,5 - v} + \frac{500}{1,5 + v}$

$$t = \frac{500(1,5 + v)}{(1,5 - v)(1,5 + v)} + \frac{500(1,5 - v)}{(1,5 + v)(1,5 - v)}$$

$$t = \frac{750 + 500v + 750 - 500v}{2,25 - v^2} \text{ ofwel } t = \frac{1500}{2,25 - v^2} \text{ dus } t = 1500(2,25 - v^2)^{-1}$$

De schakels zijn $y = 1500u^{-1}$ en $u = 2,25 - v^2$.

$$\frac{dy}{du} = 1500 \cdot -1u^{-2} = -1500u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dv} = -2v$$

20 Differentiëren

$$\frac{dy}{dv} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} = -1500u^{-2} \cdot -2v = 3000v \cdot u^{-2}$$

$$\frac{dt}{dv} = 3000v(2,25 - v^2)^{-2}, \text{ ofwel } \frac{dt}{dv} = \frac{3000v}{(2,25 - v^2)^2}$$

Het snelst heen en terug betekent $\frac{dt}{dv} = 0$.

Dit betekent $3000v = 0$, dus $v = 0$. De stroomsnelheid is 0 m/s.

Bert is inderdaad het snelst heen en terug bij stilstaand water.

- 31 a** Teken een rechte lijn tussen de punten van de grafiek bij $t = 0$ en $t = 16$. De helling van deze lijn geeft de gemiddelde snelheid aan waarmee het aantal everzwijnen toeneemt. Als het aantal everzwijnen sneller toeneemt dan het gemiddelde, dan is de grafiek tussen deze aantallen everzwijnen steiler dan de getekende rechte lijn. Dit is tussen ongeveer $t = 4$ en $t = 13\frac{1}{3}$ het geval dus in de jaren 2025 tot en met 2034.

b $\frac{dA}{dt} = -2 \cdot 3t^2 + 52 \cdot 2t + 2$

$$\frac{dA}{dt} = -6t^2 + 104t + 2$$

Als de grafiek van A overgaat van toenemend stijgend naar afnemend dalend, dan heeft de afgeleide van A een maximum.

Invoer: $y_1 = -6x^2 + 104x + 2$

Venster: $0 \leq x \leq 16$, $0 \leq y \leq 500$

Optie: maximum

De coördinaten van de top zijn (8,67; 452,67).

Na 8,67 jaar gaat de grafiek over van toenemend stijgend naar afnemend dalend. Dit is in 2029 het geval.

Samenvatting

S1 a $f(x) = (x^3 + 2x - 6)(8 - 10x - 5x^2)$

De functie $f(x)$ is de productfunctie van $g(x) = x^3 + 2x - 6$ en

$$h(x) = 8 - 10x - 5x^2.$$

De afgeleiden zijn $g'(x) = 3x^2 + 2$ en $h'(x) = -10 - 5 \cdot 2x = -10 - 10x$.

Met de productregel vind je:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = (3x^2 + 2) \cdot (8 - 10x - 5x^2) + (x^3 + 2x - 6) \cdot (-10 - 10x)$$

$$f'(x) = -25x^4 - 40x^3 - 6x^2 + 20x + 76$$

b $g(x) = -6x(5x + 90)^{11} + 56$

$$g(x) = f(x) + j(x) \text{ met } f(x) = -6x(5x + 90)^{11} \text{ en } j(x) = 56$$

De functie $f(x)$ is de productfunctie van $h(x) = -6x$ en $i(x) = (5x + 90)^{11}$.

De afgeleide van $h(x)$ is $h'(x) = -6$.

De afgeleide van $i(x)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = u^{11}$ en $u = 5x + 90$.

$$\frac{dy}{du} = 11u^{10} \text{ en } \frac{du}{dx} = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 11u^{10} \cdot 5 = 55u^{10}$$

$$i'(x) = 55(5x + 90)^{10}$$

Met de productregel vind je:

$$f''(x) = h'(x) \cdot i(x) + h(x) \cdot i'(x)$$

$$f''(x) = -6 \cdot (5x + 90)^{11} + -6x \cdot 55(5x + 90)^{10}$$

$$f''(x) = -6(5x + 90)^{11} - 330x(5x + 90)^{10}$$

De afgeleide van $j(x) = 0$.

$$g'(x) = f''(x) + j'(x)$$

$$g'(x) = -6(5x + 90)^{11} - 330x(5x + 90)^{10}$$

c $h(x) = 3x(x - 8)^2$

De functie $h(x)$ is de productfunctie van $i(x) = 3x$ en $j(x) = (x - 8)^2$.

De afgeleide van $i(x)$ is $i'(x) = 3$.

De afgeleide van $j(x)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = u^2$ en $u = x - 8$.

$$\frac{dy}{du} = 2u \text{ en } \frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 1 = 2u$$

$$j'(x) = 2(x - 8) = 2x - 16$$

Met de productregel vind je:

$$h'(x) = i'(x) \cdot j(x) + i(x) \cdot j'(x)$$

$$h'(x) = 3 \cdot (x - 8)^2 + 3x \cdot (2x - 16)$$

$$h'(x) = 3x^2 - 48x + 192 + 6x^2 - 48x$$

$$h'(x) = 9x^2 - 96x + 192$$

S2 a De functie f is het quotiënt van $t(x) = 5x$ en $n(x) = 6 - x$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = 5$ en $n'(x) = -1$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{5 \cdot (6 - x) - 5x \cdot -1}{(6 - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{30 - 5x + 5x}{(6 - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{30}{(6 - x)^2}$$

b $g(x) = \frac{(5 + 3x)^2}{4x} = \frac{9x^2 + 30x + 25}{4x}$

De functie g is het quotiënt van $t(x) = 9x^2 + 30x + 25$ en $n(x) = 4x$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = 9 \cdot 2x + 30 = 18x + 30$ en $n'(x) = 4$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$g'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$g'(x) = \frac{(18x + 30) \cdot 4x - (9x^2 + 30x + 25) \cdot 4}{(4x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{72x^2 + 120x - 36x^2 - 120x - 100}{16x^2}$$

$$g'(x) = \frac{36x^2 - 100}{16x^2}$$

$$g'(x) = \frac{9x^2 - 25}{4x^2}$$

20 Differentiëren

- c De functie h is het quotiënt van $t(x) = -5$ en $n(x) = (3x + 8)^2$.

De afgeleide van $t(x)$ is $t'(x) = 0$.

De afgeleide van $n(x)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = u^2$ en $u = 3x + 8$.

$$\frac{dy}{du} = 2u \text{ en } \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 3 = 6u$$

$$n'(x) = 6(3x + 8) = 18x + 48$$

Met de quotiëntregel vind je:

$$h'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$h'(x) = \frac{0 \cdot (3x + 8)^2 - (-5) \cdot (18x + 48)}{((3x + 8)^2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{90x + 240}{(3x + 8)^4} \text{ ofwel } h'(x) = \frac{30(3x + 8)}{(3x + 8)^4} = \frac{30}{(3x + 8)^3}$$

- d $i(x) = 16 + \frac{54x}{3x^3 - 2x} = 16 + \frac{54}{3x^2 - 2}$

$$i(x) = f(x) + g(x) \text{ met } f(x) = 16 \text{ en } g(x) = \frac{54}{3x^2 - 2}$$

De functie g is het quotiënt van $t(x) = 54$ en $n(x) = 3x^2 - 2$.

De afgeleide van $t(x)$ is $t'(x) = 0$.

De afgeleide van $n(x)$ is $n'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$g'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

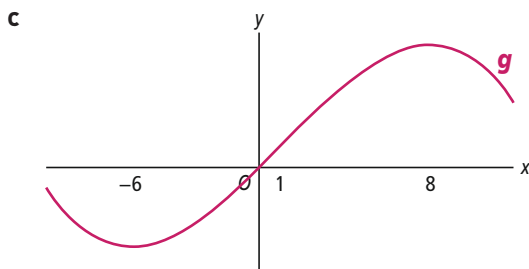
$$g'(x) = \frac{0 \cdot (3x^2 - 2) - 54 \cdot 6x}{(3x^2 - 2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-324x}{(3x^2 - 2)^2}$$

$$i'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$i'(x) = 0 + \frac{-324x}{(3x^2 - 2)^2} \text{ ofwel } i'(x) = \frac{-324x}{(3x^2 - 2)^2}$$

- S3 a** De hellinggrafiek snijdt de x -as bij $x = -6$. De grafiek van g heeft bij $x = -6$ dan een horizontale raaklijn. Links van $x = -6$ ligt de hellinggrafiek onder de x -as dus daar daalt de grafiek van g . Rechts van $x = -6$ ligt de hellinggrafiek boven de x -as dus daar stijgt de grafiek van g . De grafiek van g heeft dan een minimum bij $x = -6$.
- b** A: De hellinggrafiek ligt onder de x -as, dus de grafiek van g is dalend.
De hellinggrafiek nadert de x -as, dus de grafiek van g is afnemend dalend.
B: De hellinggrafiek ligt boven de x -as, dus de grafiek van g is stijgend.
De hellinggrafiek gaat weg van de x -as, dus de grafiek van g is toenemend stijgend.
C: De hellinggrafiek ligt boven de x -as, dus de grafiek van g is stijgend.
De hellinggrafiek nadert de x -as, dus de grafiek van g is afnemend stijgend.
D: De hellinggrafiek ligt onder de x -as, dus de grafiek van g is dalend.
De hellinggrafiek gaat weg van de x -as, dus de grafiek van g is toenemend dalend.



S4 $T = 1536 \cdot (576 - w^2)^{-1}$
De schakels zijn $y = 1536u^{-1}$ en $u = 576 - w^2$.

$$\frac{dy}{du} = 1536 \cdot -1u^{-2} = -1536u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dw} = -2w$$

$$\frac{dy}{dw} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dw} = -1536u^{-2} \cdot -2w = 3072w \cdot u^{-2}$$

$$\frac{dT}{dw} = 3072w(576 - w^2)^{-2}$$

$$\frac{dT}{dw} = \frac{3072w}{(576 - w^2)^2}$$

Als $0 \leq w < 24$, dan is $\frac{dT}{dw}$ positief voor elke waarde van w , want de teller en

de noemer zijn altijd positief en het quotiënt van twee positieve getallen is positief. Hieruit volgt dat de grafiek van T stijgt.

Als w toeneemt, dan neemt $3072w$ toe en $(576 - w^2)^2$ af. De uitkomst van

$\frac{3072w}{(576 - w^2)^2}$ neemt dan toe. De grafiek van T is toenemend stijgend.

Test jezelf

T1 a $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x^2 + 6x = 2x^3 + 7x^2 + 6x$
 $f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x + 6$
 $f'(x) = 6x^2 + 14x + 6$

b De functie $g(x)$ is de productfunctie van $f(x) = 2x^2$ en $h(x) = (4 - 5x)^3$.

De afgeleide van $f(x)$ is $f'(x) = 2 \cdot 2x = 4x$.

De afgeleide van $h(x)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = u^3$ en $u = 4 - 5x$.

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \text{ en } \frac{du}{dx} = -5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot -5 = -15u^2$$

$$h'(x) = -15(4 - 5x)^2$$

Met de productregel vind je:

$$g'(x) = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x)$$

$$g'(x) = 4x \cdot (4 - 5x)^3 + 2x^2 \cdot -15(4 - 5x)^2$$

$$g'(x) = 4x(4 - 5x)^3 - 30x^2(4 - 5x)^2$$

20 Differentiëren

- c De functie h is het quotiënt van $t(x) = x^3 - 2x$ en $n(x) = 1 + x$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = 3x^2 - 2$ en $n'(x) = 1$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$h'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$h'(x) = \frac{(3x^2 - 2) \cdot (1 + x) - (x^3 - 2x) \cdot 1}{(1 + x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{3x^2 + 3x^3 - 2 - 2x - x^3 + 2x}{(1 + x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 2}{(1 + x)^2}$$

- d $j(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 5x$

$$j'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 5 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 5$$

$$j'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 6x - 5$$

- e De functie $k(x)$ is de productfunctie van $g(x) = x - 1$ en $h(x) = \sqrt{2x + 8}$.

De afgeleide van $g(x)$ is $g'(x) = 1$.

De afgeleide van $h(x)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = 2x + 8$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = u^{-\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = (2x + 8)^{-\frac{1}{2}}$$

Met de productregel vind je:

$$k'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$k'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x + 8} + (x - 1) \cdot (2x + 8)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \sqrt{2x + 8} + \frac{x - 1}{\sqrt{2x + 8}}$$

- f $l(x) = 3(3x + 5)^{-\frac{1}{2}}$

De schakels zijn $y = 3u^{-\frac{1}{2}}$ en $u = 3x + 5$.

$$\frac{dy}{du} = 3 \cdot -\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = -\frac{3}{2} u^{-\frac{1}{2}}$$

$$l'(x) = -\frac{3}{2} (3x + 5)^{-\frac{1}{2}}$$

$$l'(x) = \frac{-9}{2(3x + 5)\sqrt{3x + 5}}$$

T2 a $\sqrt{-2t^2 + 210t + 900} = 0$

Invoer: $y_1 = \sqrt{-2x^2 + 210x + 900}$

Venster: $0 \leq x \leq 200$, $0 \leq y \leq 30$

Optie: nulpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn $(109, 1; 0)$ (het andere snijpunt voldoet niet). De waterton is na ruim 109 dagen leeg.

- b** De schakels zijn $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = -2t^2 + 210t + 900$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dt} = -2 \cdot 2t + 210 = -4t + 210$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4t + 210) = (-2t + 105)u^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dH}{dt} = (-2t + 105)(-2t^2 + 210t + 900)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{-2t + 105}{\sqrt{-2t^2 + 210t + 900}}$$

- c** Als $0 \leq t \leq 52\frac{1}{2}$, dan is $\frac{dH}{dt}$ positief voor elke waarde van t , want de teller en noemer zijn beide positief en het quotiënt van twee positieve getallen is altijd positief. Hieruit volgt dat de grafiek van H stijgt.
- d** De waterhoogte is maximaal als $\frac{dH}{dt} = 0$.

$$\frac{-2t + 105}{\sqrt{-2t^2 + 210t + 900}} = 0$$

$$\text{Dan is } -2t + 105 = 0, \text{ dus } t = 52\frac{1}{2}.$$

Na $52\frac{1}{2}$ dagen is de waterhoogte maximaal, en deze is dan

$$\sqrt{-2 \cdot \left(52\frac{1}{2}\right)^2 + 210 \cdot 52\frac{1}{2} + 900} \approx 80 \text{ cm.}$$

- T3 a** De verdubbelingstijd bij 40°C is kleiner dan de verdubbelingstijd bij 42°C . Dit betekent dat de populatie bij 40°C eerder is verdubbeld dan bij 42°C . Nee, de groei van de populatie bij 42°C is niet sterker dan de groei bij 40°C .

- b** $V = 16,9 \cdot (-T^2 + 75T - 1350)^{-1}$
De schakels zijn $y = 16,9u^{-1}$ en $u = -T^2 + 75T - 1350$.

$$\frac{dy}{du} = 16,9 \cdot -1u^{-2} = -16,9u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dT} = -2T + 75$$

$$\frac{dy}{dT} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dT} = -16,9u^{-2} \cdot (-2T + 75) = (33,8T - 1267,5) \cdot u^{-2}$$

$$\frac{dV}{dT} = (33,8T - 1267,5) \cdot (-T^2 + 75T - 1350)^{-2}$$

$$\frac{dV}{dT} = \frac{33,8T - 1267,5}{(-T^2 + 75T - 1350)^2}$$

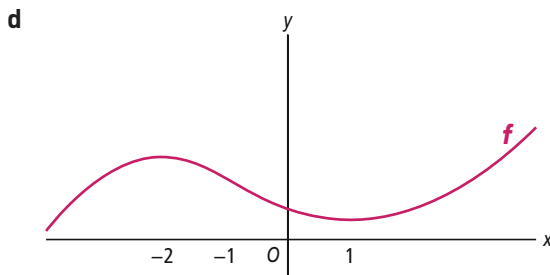
- c** De groei is het sterkst als $\frac{33,8T - 1267,5}{(-T^2 + 75T - 1350)^2} = 0$.

$$33,8T - 1267,5 = 0 \text{ dus } T = \frac{1267,5}{33,8} = 37,5$$

De groei is bij een temperatuur van $37,5^\circ\text{C}$ het hoogst.

- T4 a** De hellinggrafiek ligt boven de x -as, dus de grafiek van f is stijgend. De hellinggrafiek nadert de x -as, dus de grafiek van f is afnemend stijgend.
- b** De grafiek van f is afnemend dalend als de hellinggrafiek onder de x -as ligt en de x -as nadert. Dit is het geval op het interval $\langle -1, 1 \rangle$.
- c** De grafiek van f heeft twee toppen. Bij $x = -2$ snijdt de hellinggrafiek de x -as en de helling gaat van positief naar negatief. Er is sprake van een top bij $x = -2$ dat bij een maximum van f hoort. Bij $x = 1$ snijdt de hellinggrafiek de x -as en de helling gaat van negatief naar positief. Er is sprake van een top bij $x = 1$ dat bij een minimum van f hoort.

20 Differentiëren



T5 a In Appingedam is $d = 1027 : 24 = 42,79\dots$

$$N = \frac{0,6 \cdot 42,79\dots}{0,15 + 0,0027 \cdot 42,79\dots} \approx 96,7$$

In Delfzijl is $d = 1668 : 133 = 12,54\dots$

$$N = \frac{0,6 \cdot 12,54\dots}{0,15 + 0,0027 \cdot 12,54\dots} \approx 40,9$$

b In Loppersum is $d = 710 : 111 = 6,39\dots$

$$N = \frac{0,6 \cdot 6,39\dots}{0,15 + 0,0027 \cdot 6,39\dots} \approx 22,9$$

In de nieuwe gemeente is het grondoppervlakte $24 + 133 + 111 = 268 \text{ km}^2$ en het aantal basisschoolleerlingen $1027 + 1668 + 710 = 3405$.

$d = 3405 : 268 \approx 12,70\dots$

$$N = \frac{0,6 \cdot 12,70\dots}{0,15 + 0,0027 \cdot 12,70\dots} \approx 41,4$$

Het is voor een gemeente nadelig als de opheffingsnorm lager wordt.

Dit is alleen het geval voor de gemeente Appingedam.

c De formule N is het quotiënt van $t(d) = 0,6d$ en $n(d) = 0,15 + 0,0027d$.

De afgeleiden zijn $t'(d) = 0,6$ en $n'(d) = 0,0027$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$\frac{dN}{dd} = \frac{t'(d) \cdot n(d) - t(d) \cdot n'(d)}{(n(d))^2}$$

$$\frac{dN}{dd} = \frac{0,6 \cdot (0,15 + 0,0027d) - 0,6d \cdot 0,0027}{(0,15 + 0,0027d)^2}$$

$$\frac{dN}{dd} = \frac{0,09 + 0,00162d - 0,00162d}{(0,15 + 0,0027d)^2}$$

$$\frac{dN}{dd} = \frac{0,09}{(0,15 + 0,0027d)^2}$$

d Als $d > 0$, dan is $\frac{dN}{dd}$ positief voor elke waarde van d , want teller en noemer

zijn beide positief en het quotiënt van twee positieve getallen is altijd positief. Hieruit volgt dat de grafiek van N stijgt.

Als d toeneemt, dan neemt $(0,15 + 0,0027d)^2$ toe. De uitkomst van

$\frac{0,09}{(0,15 + 0,0027d)^2}$ nadert dan naar nul, want 0,09 wordt door een steeds groter getal gedeeld.

De grafiek van N is daarom afnemend stijgend.

e De grafiek van N is afnemend stijgend. Dit betekent dat bij kleine waarden van d de verandering van N groter is dan bij grote waarden van d .

De uitspraak van de politicus klopt.

Extra oefening

- E1 a** De functie $f(x)$ is de productfunctie van $g(x) = 8 - 3x + 2x^4$ en $h(x) = 1 + x + 7x^2$.

De afgeleiden zijn $g'(x) = -3 + 2 \cdot 4x^3 = -3 + 8x^3$ en

$$h'(x) = 1 + 7 \cdot 2x = 1 + 14x.$$

Met de productregel vind je:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = (-3 + 8x^3) \cdot (1 + x + 7x^2) + (8 - 3x + 2x^4) \cdot (1 + 14x)$$

$$f'(x) = -3 - 3x - 21x^2 + 8x^3 + 8x^4 + 56x^5 + 8 + 112x - 3x - 42x^2 + 2x^4 + 28x^5$$

$$f'(x) = 84x^5 + 10x^4 + 8x^3 - 63x^2 + 106x + 5$$

- b** De functie $g(x)$ is de productfunctie van $f(x) = x$ en $h(x) = \sqrt{5-x}$.

De afgeleide van $f(x)$ is $f'(x) = 1$.

De afgeleide van $h(x)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = 5 - x$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot -1 = -\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = -\frac{1}{2} (5-x)^{-\frac{1}{2}}$$

Met de productregel vind je:

$$g'(x) = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x)$$

$$g'(x) = 1 \cdot \sqrt{5-x} + x \cdot -\frac{1}{2} (5-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = \sqrt{5-x} - \frac{x}{2\sqrt{5-x}}$$

- c** De functie $h(x)$ is de productfunctie van $f(x) = 3x - 4$ en $g(x) = (7 - 2x)^2$.

De afgeleide van $f(x)$ is $f'(x) = 3$.

De afgeleide van $g(x)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = u^2$ en $u = 7 - 2x$.

$$\frac{dy}{du} = 2u \text{ en } \frac{du}{dx} = -2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot -2 = -4u$$

$$g'(x) = -4(7 - 2x) = 8x - 28$$

Met de productregel vind je:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$h'(x) = 3 \cdot (7 - 2x)^2 + (3x - 4) \cdot (8x - 28)$$

$$h'(x) = 147 - 84x + 12x^2 + 24x^2 - 116x + 112$$

$$h'(x) = 36x^2 - 200x + 259$$

- d** De functie $j(x)$ is de productfunctie van $g(x) = 5 + \sqrt{x} = 5 + x^{\frac{1}{2}}$ en $h(x) = (3 - 6x)^{10}$.

De afgeleide van $g(x)$ is $g'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$.

De afgeleide van $h(x)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = u^{10}$ en $u = 3 - 6x$.

$$\frac{dy}{du} = 10u^9 \text{ en } \frac{du}{dx} = -6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 10u^9 \cdot -6 = -60u^9$$

$$h'(x) = -60(3 - 6x)^9$$

20 Differentiëren

Met de productregel vind je:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot (3 - 6x)^{10} + (5 + \sqrt{x}) \cdot -60(3 - 6x)^9$$

$$f'(x) = \frac{(3 - 6x)^{10}}{2\sqrt{x}} - \frac{60(5 + \sqrt{x})}{(3 - 6x)^9}$$

- e De functie $k(x)$ is de productfunctie van $g(x) = 5x^2$ en $h(x) = \sqrt{x-1}$.

De afgeleide van $g(x)$ is $g'(x) = 5 \cdot 2x = 10x$.

De afgeleide van $h(x)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = x - 1$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2} (x - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

Met de productregel vind je:

$$k'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$k'(x) = 10x \cdot \sqrt{x-1} + 5x^2 \cdot \frac{1}{2} (x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$k'(x) = 10x\sqrt{x-1} + \frac{5x^2}{2\sqrt{x-1}}$$

- f De functie $l(x)$ is de productfunctie van $g(x) = x + 3$ en $h(x) = (x - 3)^2$.

De afgeleide van $g(x)$ is $g'(x) = 1$.

De afgeleide van $h(x)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = u^2$ en $u = x - 3$.

$$\frac{dy}{du} = 2u \text{ en } \frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 1 = 2u$$

$$h'(x) = 2(x - 3) = 2x - 6$$

Met de productregel vind je:

$$l'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$l'(x) = 1 \cdot (x - 3)^2 + (x + 3)(2x - 6)$$

$$l'(x) = x^2 - 6x + 9 + 2x^2 - 6x + 6x - 18$$

$$l'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

- E2 a De formule y is het quotiënt van $t(x) = 4 - x$ en $n(x) = 2x + 1$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = -1$ en $n'(x) = 2$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 \cdot (2x + 1) - (4 - x) \cdot 2}{(2x + 1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 1 - 8 + 2x}{(2x + 1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-9}{(2x + 1)^2}$$

- b** De formule y is het quotiënt van $t(x) = 6x$ en $n(x) = 8x + 10$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = 6$ en $n'(x) = 8$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6 \cdot (8x + 10) - 6x \cdot 8}{(8x + 10)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{48x + 60 - 48x}{(8x + 10)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{60}{(8x + 10)^2}$$

- c** De formule y is het quotiënt van $t(x) = 17$ en $n(x) = -x^2 + 5x$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = 0$ en $n'(x) = -2x + 5$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \cdot (-x^2 + 5x) - 17 \cdot (-2x + 5)}{(-x^2 + 5x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{34x - 85}{(-x^2 + 5x)^2}$$

- d** De formule y is het quotiënt van $t(x) = 100x - 110$ en $n(x) = x^2$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = 100$ en $n'(x) = 2x$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{100 \cdot x^2 - (100x - 110) \cdot 2x}{(x^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{100x^2 - 200x^2 + 220x}{x^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-100x^2 + 220x}{x^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-100x + 220}{x^3}$$

- e** De formule y is het quotiënt van $t(x) = x$ en $n(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

De afgeleide van $t(x)$ is $t'(x) = 1$.

De afgeleide van $n(x)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = x^2 - 1$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = x \cdot u^{-\frac{1}{2}}$$

$$n'(x) = x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

Met de quotiëntregel vind je:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 - 1} - x \cdot x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x^2 - 1})^2}$$

20 Differentiëren

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{(x^2 - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x^2 - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

- f De formule y is het quotiënt van $t(x) = 5x^4 - 7x$ en $n(x) = 3x + 2$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = 5 \cdot 4x^3 - 7 = 20x^3 - 7$ en $n'(x) = 3$.

Met de quotiëntregel vind je:

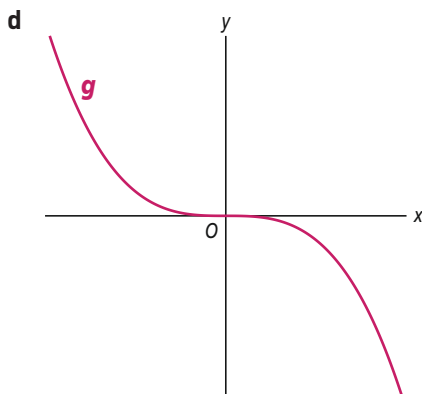
$$\frac{dy}{dx} = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(20x^3 - 7) \cdot (3x + 2) - (5x^4 - 7x) \cdot 3}{(3x + 2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{60x^4 + 40x^3 - 21x - 14 - 15x^4 + 21x}{(3x + 2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{45x^4 + 40x^3 - 14}{(3x + 2)^2}$$

- E3 a De hellinggrafiek ligt boven de x -as, dus de grafiek van f is stijgend.
De hellinggrafiek gaat weg van de x -as, dus de grafiek van f is toenemend stijgend.
- b Op het interval $\langle \leftarrow, 0 \rangle$ ligt de hellinggrafiek onder de x -as, dus daar is de grafiek van g dalend. De hellinggrafiek nadert de x -as, dus de grafiek van g is daar afnemend dalend.
- c De enige plaats waar de hellinggrafiek de x -as snijdt, is bij $x = 0$, dus de grafiek van g heeft een horizontale raaklijn bij $x = 0$. De hellinggrafiek ligt links en rechts van $x = 0$ onder de x -as dus de grafiek van g daalt daar.
De grafiek van g heeft dus geen top.



- E4 $G = 75(x - 5)^{-1} + 15,8$
 $G = F + H$ met $F = 75(x - 5)^{-1}$ en $H = 15,8$.
 De afgeleide van F bereken je met de kettingregel.
 De schakels zijn $y = 75u^{-1}$ en $u = x - 5$.

$$\frac{dy}{du} = 75 \cdot -1u^{-2} = -75u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -75u^{-2} \cdot 1 = -75u^{-2}$$

$$\frac{dF}{dx} = -75(x - 5)^{-2}$$

De afgeleide van H is $\frac{dH}{dx} = 0$.

$$\frac{dG}{dx} = \frac{dF}{dx} + \frac{dH}{dx}$$

$$\frac{dG}{dx} = -75(x-5)^{-2}, \text{ ofwel } \frac{dG}{dx} = \frac{-75}{(x-5)^2}$$

$\frac{dG}{dx}$ is negatief voor elke waarde van x , want de teller is negatief en de

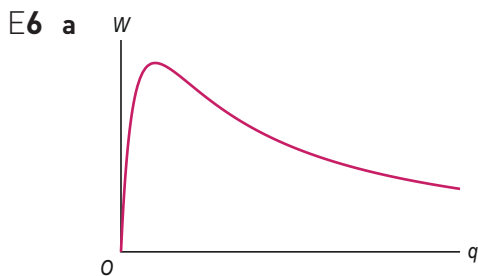
noemer is altijd positief en het quotiënt van een negatief getal en een positief getal is negatief. Hieruit volgt dat de grafiek van G dalend is.

Als x toeneemt, dan neemt $(x-5)^2$ ook toe. De uitkomst van $\frac{-75}{(x-5)^2}$ nadert

dan naar nul, want -75 wordt door een steeds groter getal gedeeld.

De grafiek van G is afnemend dalend. Dan daalt de prijs per m^2 steeds minder sterk bij toenemende grootte van een vloeroppervlak.

- E5 a** De winst neemt toe als de hellinggrafiek boven de u -as ligt. Dit is het geval op het interval $\langle 0, 40 \rangle$.
- b** De winst is maximaal als de hellinggrafiek de u -as snijdt en de hellinggrafiek eerst boven de u -as lag, en daarna onder de u -as. Dit is het geval bij $u = 40$.
- c** De grafiek van W gaat over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend als de hellinggrafiek een top heeft dat bij een maximale waarde hoort. Dit is het geval bij $u = 20$.



- b** De functie $W(q)$ is het quotiënt van $t(q) = 180q$ en $n(q) = (0,5q + 1)^2$.

De afgeleide van $t(q)$ is $t'(q) = 180$.

De afgeleide van $n(q)$ bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = u^2$ en $u = 0,5q + 1$.

$$\frac{dy}{du} = 2u \text{ en } \frac{du}{dq} = 0,5$$

$$\frac{dy}{dq} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dq} = 2u \cdot 0,5 = u$$

$$n'(q) = 0,5q + 1$$

Met de quotiëntregel vind je:

$$W'(q) = \frac{t'(q) \cdot n(q) - t(q) \cdot n'(q)}{(n(q))^2}$$

$$W'(q) = \frac{180 \cdot (0,5q + 1)^2 - 180q \cdot (0,5q + 1)}{((0,5q + 1)^2)^2}$$

$$W'(q) = \frac{45q^2 + 180q + 180 - 90q^2 - 180q}{(0,5q + 1)^4}$$

$$W'(q) = \frac{-45q^2 + 180}{(0,5q + 1)^4}$$

20 Differentiëren

$$\text{c} \quad W'(4) = \frac{-45 \cdot 4^2 + 180}{(0,5 \cdot 4 + 1)^4} = -6\frac{2}{3}$$

Dit betekent dat als er 400 producten verkocht worden, de winst op dat moment met $6\frac{2}{3}$ euro per product afneemt.

$$\text{d} \quad \text{De winst is maximaal als } \frac{-45q^2 + 180}{(0,5q + 1)^4} = 0.$$

$$-45q^2 + 180 = 0$$

$$q^2 = 4$$

$$q = 2 \quad (q = -2 \text{ vervalt})$$

De winst is maximaal als $q = 2$.

$$\text{e} \quad W(2) = \frac{180 \cdot 2}{(0,5 \cdot 2 + 1)^2} = 90$$

De maximale winst is $90 \times 100 = 9000$ euro.

21 Exponentiële en logaritmische functies

Voorkennis

V1 a $\frac{184}{164} \approx 1,12$; $\frac{206}{184} \approx 1,12$; $\frac{230}{206} \approx 1,12$ en $\frac{258}{230} \approx 1,12$

Er is sprake van exponentiële groei, want de factor is steeds ongeveer gelijk.

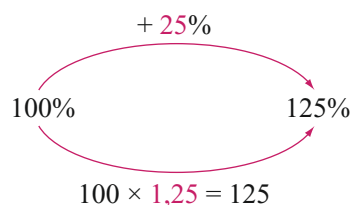
b De groeifactor per jaar is 1,12.

c Per jaar neemt het aantal konijnen met 12% toe.

d $b = 164$ en $g = 1,12$

e Op 1 januari 2030 geldt $t = 13$. Er zijn dan $164 \cdot 1,12^{13} \approx 716$ konijnen.

V2 a



b Bij de groeifactor 0,91 hoort een procentuele afname van 9%.

c Bij een toename van 40,5% hoort de groeifactor 1,405.

d Bij een afname van 1,7% hoort de groeifactor 0,983.

V3 a De groeifactor per kwartaal is 1,14.

b De groeifactor per jaar is $1,14^4 \approx 1,6890$.

De groeifactor per halfjaar is $1,14^2 = 1,2996$.

De groeifactor per maand is $1,14^{\frac{1}{3}} \approx 1,0446$.

c Het groeipercentage per jaar is 68,90%.

Het groeipercentage per halfjaar is 29,96%.

Het groeipercentage per maand is 4,46%.

V4 a De groeifactor per vier dagen is $\frac{37}{100} = 0,37$.

De groeifactor per dag is $0,37^{\frac{1}{4}} \approx 0,78$.

b Een formule is $N = 100 \cdot 0,78^t$.

c De op te lossen vergelijking is $100 \cdot 0,78^t = 10$

$$0,78^t = 0,1$$

$$t = {}^{0,78}\log(0,1) \approx 9,3$$

Na 9,3 dagen is er nog 10 mg van het geneesmiddel in het lichaam aanwezig.

V5 a ${}^2\log(8) = 3$, want $8 = 2^3$.

b ${}^2\log(16) = 4$, want $16 = 2^4$.

c ${}^2\log(10)$ is geen geheel getal, want 10 is geen macht van 2.

d ${}^2\log(10) = \frac{\log(10)}{\log(2)} \approx 3,32$

V6 a ${}^3\log(10) + {}^3\log(7) =$

$${}^3\log(10 \times 7) = {}^3\log(70)$$

b $4 \cdot \frac{1}{3}\log(2) =$

$$\frac{1}{3}\log(2^4) = \frac{1}{3}\log(16)$$

c $2 \cdot {}^7\log(a) - {}^7\log(5) =$

$${}^7\log(a^2) - {}^7\log(5) =$$

$${}^7\log\left(\frac{a^2}{5}\right) = {}^7\log\left(\frac{1}{5}a^2\right)$$

d ${}^5\log(b) + 3 \cdot {}^5\log(2) =$

$${}^5\log(b) + {}^5\log(2^3) =$$

$${}^5\log(b) + {}^5\log(8) = {}^5\log(8b)$$

21 Exponentiële en logaritmische functies

$$\begin{aligned} \text{e } {}^3\log(15) - \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(25) &= \\ {}^3\log(15) - {}^3\log(25^{\frac{1}{2}}) &= \\ {}^3\log(15) - {}^3\log(5) &= \\ {}^3\log\left(\frac{15}{5}\right) &= \\ {}^3\log(3) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } 3 \cdot \log(x) + \log(5x) &= \\ \log(x^3) + \log(5x) &= \\ \log(x^3 \cdot 5x) &= \log(5x^4) \end{aligned}$$

V7 a ${}^2\log(2^1) = 1$, ${}^2\log(2^2) = 2$, ${}^2\log(2^3) = 3$ en ${}^2\log(2^{10}) = 10$

b ${}^a\log(g^a) = a$

c Hij kiest voor grondtal 5 omdat ${}^5\log(2)$ ook grondtal 5 heeft.

d ${}^5\log(5^3) + {}^5\log(2) =$
 ${}^5\log(125) + {}^5\log(2) =$
 ${}^5\log(125 \times 2) = {}^5\log(250)$

e A $2 + {}^3\log(8) =$
 ${}^3\log(3^2) + {}^3\log(8) =$
 ${}^3\log(9) + {}^3\log(8) =$
 ${}^3\log(9 \times 8) = {}^3\log(72)$
B $5 + 4 \cdot {}^2\log(x) =$
 ${}^2\log(2^5) + {}^2\log(x^4) =$
 ${}^2\log(32) + {}^2\log(x^4) = {}^2\log(32x^4)$

21.1 Formules herleiden

intro De formule is goed te gebruiken voor vragen waarbij je moet berekenen na hoeveel tijd er een bepaald aantal inwoners besmet is.

1 a ${}^2\log(5) = \frac{\log(5)}{\log(2)} \approx 2,32$

b A $4^t = 12$
 $t = {}^4\log(12) \approx 1,79$

B $3 \cdot 1,2^t = 21$
 $1,2^t = 7$
 $t = {}^{1,2}\log(7) \approx 10,67$

C $0,65^{2t} = 3$
 $2t = {}^{0,65}\log(3)$
 $t = \frac{1}{2} \cdot {}^{0,65}\log(3) \approx -1,28$
D $3,8 \cdot 2,5^t - 1 = 19$
 $3,8 \cdot 2,5^t = 19$
 $2,5^t = 5$
 $t = {}^{2,5}\log(5) \approx 1,76$

2 a Stap 1: links en rechts verwisseld.
 Stap 2: links en rechts $- 6$.

b $x = {}^2\log(y - 6)$

c $A = 0,5 \cdot 3^q$

$$0,5 \cdot 3^q = A$$

$$3^q = 2A$$

$$q = {}^3\log(2A)$$

3 a $N = 2 \cdot 3^t$

$$2 \cdot 3^t = N$$

$$3^t = \frac{1}{2} N$$

$$t = {}^3\log\left(\frac{1}{2}N\right)$$

d $N = 2 \cdot 3^{0,5t} - 12$

$$2 \cdot 3^{0,5t} - 12 = N$$

$$2 \cdot 3^{0,5t} = N + 12$$

$$3^{0,5t} = \frac{N + 12}{2}$$

$$0,5t = {}^3\log\left(\frac{N + 12}{2}\right)$$

$$t = 2 \cdot {}^3\log\left(\frac{N + 12}{2}\right)$$

$$t = 2 \cdot {}^3\log\left(\frac{1}{2}N + 6\right)$$

b $N = 0,1 \cdot 5^{t-6}$

$$0,1 \cdot 5^{t-6} = N$$

$$5^{t-6} = 10N$$

$$t - 6 = {}^5\log(10N)$$

$$t = 6 + {}^5\log(10N)$$

c $N = 4 \cdot 0,72^t + 1$

$$4 \cdot 0,72^t + 1 = N$$

$$4 \cdot 0,72^t = N - 1$$

$$0,72^t = \frac{N - 1}{4}$$

$$t = {}^{0,72}\log\left(\frac{1}{4}N - \frac{1}{4}\right)$$

e $N = 10^{1,25t+4}$

$$10^{1,25t+4} = N$$

$$1,25t + 4 = \log(N)$$

$$1,25t = \log(N) - 4$$

$$t = \frac{4}{5} \cdot \log(N) - 3\frac{1}{5}$$

f $6N - 1 = \frac{1}{3} \cdot 7^t$

$$\frac{1}{3} \cdot 7^t = 6N - 1$$

$$7^t = 18N - 3$$

$$t = {}^7\log(18N - 3)$$

4 a Na vijf dagen geldt $t = 5$.

Na vijf dagen is er nog $A = 1000 \cdot 0,995^{2 \times 5} \approx 951 \text{ m}^3$ draaggas aanwezig.

b Op $t = 0$ is er $A = 1000 \cdot 0,995^{2 \times 0} = 1000 \text{ m}^3$ draaggas aanwezig.

De hoeveelheid draaggas is gehalveerd als er nog $1000 : 2 = 500 \text{ m}^3$ draaggas aanwezig is. De op te lossen vergelijking is $1000 \cdot 0,995^{2t} = 500$.

$$0,995^{2t} = 0,5$$

$$2t = {}^{0,995}\log(0,5) \text{ dus } t = \frac{1}{2} \cdot {}^{0,995}\log(0,5) \approx 69$$

Na 69 dagen is de hoeveelheid draaggas gehalveerd.

c $1000 \cdot 0,995^{2t} = A$

$$0,995^{2t} = \frac{A}{1000}$$

$$2t = {}^{0,995}\log\left(\frac{A}{1000}\right)$$

$$t = \frac{1}{2} \cdot {}^{0,995}\log\left(\frac{A}{1000}\right)$$

$$A = 500 \text{ invullen geeft } t = \frac{1}{2} \cdot {}^{0,995}\log\left(\frac{500}{1000}\right) \approx 69.$$

Dit antwoord komt overeen met het antwoord van opdracht b.

5 a Stap 1: links en rechts verwisseld

Stap 2: links en rechts + 1

b Uit $t = {}^g\log(a)$ volgt $g^t = a$.

21 Exponentiële en logaritmische functies

6 a $p = {}^4\log(q)$

$${}^4\log(q) = p$$

$$q = 4^p$$

b $p = {}^{0,8}\log(q) - 9$

$${}^{0,8}\log(q) - 9 = p$$

$${}^{0,8}\log(q) = p + 9$$

$$q = 0,8^{p+9}$$

c $p = 5 \cdot {}^3\log(2q)$

$$5 \cdot {}^3\log(2q) = p$$

$${}^3\log(2q) = \frac{1}{5}p$$

$$2q = 3^{\frac{1}{5}p}$$

$$q = \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{5}p}$$

d $p = 4 - 2 \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{2}q\right)$

$$4 - 2 \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{2}q\right) = p$$

$$-2 \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{2}q\right) = p - 4$$

$${}^5\log\left(\frac{1}{2}q\right) = -\frac{1}{2}p + 2$$

$$\frac{1}{2}q = 5^{-\frac{1}{2}p+2}$$

$$q = 2 \cdot 5^{-\frac{1}{2}p+2}$$

e $p = \log(3q + 2)$

$$\log(3q + 2) = p$$

$$3q + 2 = 10^p$$

$$3q = 10^p - 2$$

$$q = \frac{1}{3} \cdot 10^p - \frac{2}{3}$$

f ${}^2\log(pq) = 1$

$$pq = 2^1$$

$$q = \frac{2}{p}$$

7 a $y = 2 + {}^3\log(x + 5)$

$$y = {}^3\log(3^2) + {}^3\log(x + 5)$$

$$y = {}^3\log(9) + {}^3\log(x + 5)$$

$$y = {}^3\log(9(x + 5))$$

$$y = {}^3\log(9x + 45)$$

b $y = -2 + {}^2\log(10 - x)$

$$y = {}^2\log(2^{-2}) + {}^2\log(10 - x)$$

$$y = {}^2\log\left(\frac{1}{4}\right) + {}^2\log(10 - x)$$

$$y = {}^2\log\left(\frac{1}{4}(10 - x)\right)$$

$$y = {}^2\log\left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right)$$

$$y = {}^2\log\left(-\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}\right)$$

8 a Op $t = 0$ is er $C = 500 - 500 \cdot 0,96^0 = 0$ mol per dm^3 aanwezig.

Op $t = 10$ is er $C = 500 - 500 \cdot 0,96^{10} \approx 168$ mol per dm^3 aanwezig.

In de eerste tien minuten is de concentratie met 168 mol per dm^3 toegenomen.

b Als t heel groot wordt, dan nadert $0,96^t$ tot nul. Dan nadert $500 \cdot 0,96^t$ ook tot nul en dus nadert $500 - 500 \cdot 0,96^t$ tot $500 - 0 = 500$.

De grenswaarde is 500 mol per dm^3 .

c $C = 500 - 500 \cdot 0,96^t$

$$500 - 500 \cdot 0,96^t = C$$

$$-500 \cdot 0,96^t = C - 500$$

$$0,96^t = -\frac{1}{500} C + 1$$

$$t = {}^{0,96}\log\left(-\frac{1}{500} C + 1\right)$$

d $C = 17$ invullen geeft $t = {}^{0,96}\log\left(-\frac{1}{500} \cdot 250 + 1\right) \approx 17$.

Na 17 minuten is de concentratie 250 mol per dm^3 .

- 9 a** Bij $x = 18$ hoort $P = 100$. Deze waarden in de formule invullen geeft

$$100 = a \cdot \log(18 + 1)$$

$$100 = a \cdot \log(19)$$

$$a = \frac{100}{\log(19)} \approx 78,201$$

b $P = 78 \cdot \log(x + 1)$

$$78 \cdot \log(x + 1) = P$$

$$\log(x + 1) = \frac{1}{78}P$$

$$x + 1 = 10^{\frac{1}{78}P}$$

$$x = 10^{\frac{1}{78}P} - 1$$

$$n = \frac{1}{78} \approx 0,013 \text{ en } m = -1$$

- 03 a** Stap 2: links en rechts $- 2$.

Stap 3: links en rechts $: 3$.

b $t = {}^{0,5}\log\left(\frac{1}{3}N - \frac{2}{3}\right)$

c $N = 6 \cdot 9^t$

$$6 \cdot 9^t = N$$

$$9^t = \frac{1}{6}N$$

$$t = {}^9\log\left(\frac{1}{6}N\right)$$

d $N = \frac{1}{4} \cdot 0,81^t$

$$\frac{1}{4} \cdot 0,81^t = N$$

$$0,81^t = 4N$$

$$t = {}^{0,81}\log(4N)$$

f $N = 0,5 \cdot 5^{t-3}$

$$0,5 \cdot 5^{t-3} = N$$

$$5^{t-3} = 2N$$

$$t - 3 = {}^5\log(2N)$$

$$t = {}^5\log(2N) + 3$$

g $N = 2 \cdot 10^{3t} - 4$

$$2 \cdot 10^{3t} - 4 = N$$

$$2 \cdot 10^{3t} = N + 4$$

$$10^{3t} = \frac{1}{2}N + 2$$

$$3t = \log\left(\frac{1}{2}N + 2\right)$$

$$t = \frac{1}{3} \cdot \log\left(\frac{1}{2}N + 2\right)$$

e $N = 7 + 9 \cdot 2^t$

$$7 + 9 \cdot 2^t = N$$

$$9 \cdot 2^t = N - 7$$

$$2^t = \frac{1}{9}N - \frac{7}{9}$$

$$t = {}^2\log\left(\frac{1}{9}N - \frac{7}{9}\right)$$

h $8N = \frac{1}{3} \cdot 0,1^t$

$$\frac{1}{3} \cdot 0,1^t = 8N$$

$$0,1^t = 24N$$

$$t = {}^{0,1}\log(24N)$$

- 06 a** Stap 2: links en rechts $- 7$.

b $10p = 4^{q-7}$

c $p = \frac{4^{q-7}}{10}$

d $p = {}^2\log(q)$

$${}^2\log(q) = p$$

$$q = 2^p$$

f $p = 3 \cdot {}^8\log(4q)$

$$3 \cdot {}^8\log(4q) = p$$

$${}^8\log(4q) = \frac{1}{3}p$$

$$4q = 8^{\frac{1}{3}p}$$

$$q = \frac{1}{4} \cdot 8^{\frac{1}{3}p}$$

g $p = 1 - {}^5\log(2q)$

$$1 - {}^5\log(2q) = p$$

$$-{}^5\log(2q) = p - 1$$

$${}^5\log(2q) = -p + 1$$

$$2q = 5^{-p+1}$$

$$q = \frac{1}{2} \cdot 5^{-p+1}$$

e $p = {}^{0,2}\log(q) + 6$

$${}^{0,2}\log(q) + 6 = p$$

$${}^{0,2}\log(q) = p - 6$$

$$q = 0,2^{p-6}$$

21 Exponentiële en logaritmische functies

$$\text{h } p = \log\left(\frac{1}{5}q\right)$$

$$\log\left(\frac{1}{5}q\right) = p$$

$$\frac{1}{5}q = 10^p$$

$$q = 5 \cdot 10^p$$

$$\text{i } {}^2\log(p+q) = 1$$

$$p+q = 2^1$$

$$q = 2 - p$$

$$\text{U1 } {}^2\log(R) = 4,45 - 2,31S$$

$$R = 2^{4,45-2,31S}$$

$$R = 2^{4,45} \cdot 2^{-2,31S}$$

$$R = 2^{4,45} \cdot (2^{-2,31})^S$$

$$R \approx 21,86 \cdot 0,20^S$$

De waarden zijn $b \approx 21,86$ en $g \approx 0,20$.

21.2 Het getal e

intro Anne heeft deze afgeleide berekent met de regel: de afgeleide van

$$f(x) = cx^n \text{ is } f'(x) = n \cdot cx^{n-1}.$$

Deze afgeleide kan niet kloppen, want als deze wel zou kloppen dan is

$$f'(0) = 0 \cdot 2^{0-1} = 0. \text{ Dit zou betekenen dat de grafiek van } f \text{ in } x = 0 \text{ niet stijgt}$$

en niet daalt, maar in de grafiek is te zien dat de grafiek van f stijgt in $x = 0$.

10 a De groeifactor is $\frac{2}{1} = 2$ en de beginwaarde is 1.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	1	0,693
1	2	1,386
2	4	2,773
3	8	5,545
4	16	11,090

$$\text{c } \frac{1,386}{0,693} = 2, \frac{2,773}{1,386} = 2, \frac{5,545}{2,773} = 2, \frac{11,090}{5,545} = 2$$

Er is sprake van exponentiële groei, want de factor is steeds gelijk.

d De groeifactor is gelijk aan 2 en de beginwaarde is gelijk aan 0,69.

$$\text{e } f'(x) = 0,69 \cdot 2^x$$

x	$g(x)$	$g'(x)$
0	1	1,099
1	3	3,269
2	9	9,888
3	27	29,663
4	81	88,988

$$\text{g } \frac{3,296}{1,099} = 3, \frac{9,888}{3,269} = 3, \frac{29,663}{9,888} = 3, \frac{88,988}{29,663} = 3$$

De afgeleide is $g'(x) = 1,10 \cdot 3^x$.

11 a	functie f	afgeleide f'
	$f(x) = 2^x$	$f'(x) \approx 0,69 \cdot 2^x$
	$f(x) = 2,5^x$	$f'(x) \approx 0,92 \cdot 2,5^x$
	$f(x) = 3^x$	$f'(x) \approx 1,10 \cdot 3^x$
	$f(x) = 4^x$	$f'(x) \approx 1,39 \cdot 4^x$

- b In de tabel zie je dat de beginwaarde van de afgeleide kleiner dan 1 is als $a \leq 2,5$ en dat de beginwaarde van de afgeleide groter dan 1 is als $a \geq 3$. Hieruit volgt dat $f'(x) = 1 \cdot a^x$ voor a tussen 2,5 en 3.

- 12 a $f'(x) = 4 \cdot e^x$ c $h'(x) = -e^x$
 b $g'(x) = 1\frac{1}{2} \cdot e^x$ d $k'(x) = 0,2 \cdot e^x$

- 13 a Met de kettingregel:

$$y = e^u \text{ en } u = 3x + 5$$

$$\frac{dy}{du} = e^u \text{ en } \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot 3 = 3 \cdot e^u$$

$$f'(x) = 3 \cdot e^{3x+5}$$

- b Met de kettingregel:

$$y = e^u \text{ en } u = -t$$

$$\frac{dy}{du} = e^u \text{ en } \frac{du}{dt} = -1$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = e^u \cdot -1 = -1 \cdot e^u$$

$$g'(t) = -1 \cdot e^{-t}$$

- c Met de kettingregel:

$$y = 2 \cdot e^u \text{ en } u = 4q - 7$$

$$\frac{dy}{du} = 2 \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dq} = 4$$

$$\frac{dy}{dq} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dq} = 2 \cdot e^u \cdot 4 = 8 \cdot e^u$$

$$p'(q) = 8 \cdot e^{4q-7}$$

- d Met de kettingregel:

$$y = 15 \cdot e^u \text{ en } u = -2d$$

$$\frac{dy}{du} = 15 \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dd} = -2$$

$$\frac{dy}{dd} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dd} = 15 \cdot e^u \cdot -2 = -30 \cdot e^u$$

$$l'(d) = -30 \cdot e^{-2d}$$

- e De functie B is het product van $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ en $h(x) = e^x$.

$$g'(x) = x^2 \text{ en } h'(x) = e^x$$

Met de productregel:

$$B'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$B'(x) = x^2 \cdot e^x + \frac{1}{3}x^3 \cdot e^x$$

- f Met de kettingregel:

$$y = e^u \text{ en } u = -8p + 1$$

$$\frac{dy}{du} = e^u \text{ en } \frac{du}{dp} = -8$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dp} = e^u \cdot -8 = -8 \cdot e^u$$

21 Exponentiële en logaritmische functies

De functie W is het product van

$$g(p) = -7p \text{ en } h(p) = e^{8p+1}$$

$$g'(p) = -7 \text{ en } h'(p) = 8 \cdot e^{8p+1}$$

Met de productregel:

$$W'(p) = g'(p) \cdot h(p) + g(p) \cdot h'(p)$$

$$W'(p) = -7 \cdot e^{8p+1} + -7p \cdot 8 \cdot e^{8p+1}$$

$$W'(p) = -7 \cdot e^{8p+1} - 56p \cdot e^{8p+1}$$

- 14 a** De formule is te schrijven als $P = 40 \cdot (e^{-0,006})^t$.

De groeifactor per dag is $e^{-0,006} \approx 0,994$.

- b** De op te lossen vergelijking is $(e^{-0,006})^t = \frac{1}{2}$
 $t = e^{-0,006} \log\left(\frac{1}{2}\right) \approx 116$

De halveringstijd is ongeveer 116 dagen.

- c** Met de kettingregel:

$$y = 40 \cdot e^u \text{ en } u = -0,006t$$

$$\frac{dy}{du} = 40 \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dt} = -0,006$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 40 \cdot e^u \cdot -0,006 = -0,24 \cdot e^u$$

$$\frac{dP}{dt} = -0,24 \cdot e^{-0,006t}$$

- d** Voor honderd dagen geldt $t = 100$.

$$t = 100 \text{ invullen in } \frac{dP}{dt} \text{ geeft } \frac{dP}{dt} = -0,24 \cdot e^{-0,006 \cdot 100} \approx -0,13.$$

Na honderd dagen neemt het vermogen af met 0,13 watt per dag.

- 15 a** Na twee uur geldt $t = 2$.

$t = 2$ invullen in de formule geeft

$$C = 2 - 2 \cdot e^{-0,1 \times 2} \approx 0,36$$

Twee uur nadat het infuus wordt gestart is de concentratie 0,36 mg per liter.

- b** Met de kettingregel:

$$y = -2 \cdot e^u \text{ en } u = -0,1t$$

$$\frac{dy}{du} = -2 \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dt} = -0,1$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -2 \cdot e^u \cdot -0,1 = 0,2 \cdot e^u$$

$$\frac{dC}{dt} = 0,2 \cdot e^{-0,1t}$$

$$t = 2 \text{ invullen in } \frac{dC}{dt} \text{ geeft } \frac{dC}{dt} = 0,2 \cdot e^{-0,1 \times 2} \approx 0,16.$$

Na twee uur neemt de concentratie toe met 0,16 mg per liter per uur.

- c** $C = 2 - 2 \cdot e^{-0,1t}$

$$2 - 2 \cdot e^{-0,1t} = C$$

$$-2 \cdot e^{-0,1t} = C - 2$$

$$e^{-0,1t} = -\frac{1}{2}C + 1$$

$$-0,1t = \ln\left(-\frac{1}{2}C + 1\right)$$

$$t = -10 \cdot \ln\left(-\frac{1}{2}C + 1\right)$$

$$t = -10 \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{2}C\right)$$

- d $C = 0,5$ invullen in de formule van opdracht c geeft
 $t = -10 \cdot \log\left(1 - \frac{1}{2} \times 0,5\right) = 2,876\dots$
 Het middel is werkzaam na 2 uur en $0,876\dots \times 60 \approx 53$ minuten.

- 16 a Voor 1 januari 2017 geldt $t = 0$ en voor 1 januari 2020 geldt $t = 36$.

Op 1 januari 2017 waren er $B = \frac{1200}{1 + 0,5 \cdot e^{-0,04 \times 0}} = 800$ bevers en op 1 januari

2020 waren er $B = \frac{1200}{1 + 0,5 \cdot e^{-0,04 \times 36}} \approx 1073$ bevers.

Dat is een toename van $\frac{1073 - 800}{800} \times 100\% \approx 34,1\%$.

- b $1 + 0,5 \cdot e^{-0,04t}$ kan geschreven worden als $1 + \frac{0,5}{e^{0,04t}}$

Als t steeds groter wordt, dan wordt $e^{0,04t}$ ook steeds groter. De breuk $\frac{0,5}{e^{0,04t}}$

wordt dan kleiner, want de constante 0,5 wordt door een steeds groter getal gedeeld en de breuk nadert dan naar nul. Voor grote waarden van t nadert de noemer $1 + 0,5 \cdot e^{-0,04t}$ naar de waarde $1 + 0 = 1$.

- c Voor grote waarden van t nadert de noemer $1 + 0,5 \cdot e^{-0,04t}$ naar 1.

B nadert dan naar de grenswaarde $\frac{1200}{1} = 1200$.

- d Met de kettingregel:

$$y = 0,5 \cdot e^u \text{ en } u = -0,04t$$

$$\frac{dy}{du} = 0,5 \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dt} = -0,04$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 0,5 \cdot e^u \cdot -0,04 = -0,02 \cdot e^u$$

De functie B is het quotiënt van $g(t) = 1200$ en $h(t) = 1 + 0,5 \cdot e^{-0,04t}$.

Met de quotiëntregel:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{0 \cdot (1 + 0,5 \cdot e^{-0,04t}) - 1200 \cdot -0,02 \cdot e^{-0,04t}}{(1 + 0,5 \cdot e^{-0,04t})^2}$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{24 \cdot e^{-0,04t}}{(1 + 0,5 \cdot e^{-0,04t})^2}$$

- e Voor 1 juli 2020 geldt $t = 42$.

$$t = 42 \text{ invullen in } \frac{dB}{dt} \text{ geeft } \frac{dB}{dt} = \frac{24 \cdot e^{-0,04 \times 42}}{(1 + 0,5 \cdot e^{-0,04 \times 42})^2} \approx 3,74.$$

Op 1 juli 2020 is de groeisnelheid van het aantal bevers gelijk aan 3,74 bevers per maand.

- f $e^{-0,04t}$ is positief voor elke waarde van t . Hieruit volgt dat de teller voor elke waarde van t van positief is. De noemer is ook altijd positief, dus $\frac{dB}{dt}$ is voor elke waarde van t positief. De grafiek van B stijgt.

- 013 a De schakels zijn $y = e^u$ en $u = 4x + 1$.

b $\frac{dy}{du} = e^u$ en $\frac{du}{dx} = 4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot 4$$

$$f'(x) = 4 \cdot e^{4x+1}$$

- c $g(x) = 3x$ en $g'(x) = 3$

$$h(x) = e^x \text{ en } h'(x) = e^x$$

$$k'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$k'(x) = 3 \cdot e^x + 3x \cdot e^x$$

21 Exponentiële en logaritmische functies

d Met de kettingregel:

$$y = e^u \text{ en } u = 2x - 1$$

$$\frac{dy}{du} = e^u \text{ en } \frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot 2 = 2 \cdot e^u$$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x-1}$$

e Met de kettingregel:

$$y = 3 \cdot e^u \text{ en } u = -\frac{1}{2}t$$

$$\frac{dy}{du} = 3 \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 3 \cdot e^u \cdot -\frac{1}{2} = -1\frac{1}{2} \cdot e^u$$

$$h'(t) = -1\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

f Met de kettingregel:

$$y = 0,5 \cdot e^u \text{ en } u = p + 10$$

$$\frac{dy}{du} = 0,5 \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dq} = 1$$

$$\frac{dy}{dq} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dq} = 0,5 \cdot e^u \cdot 1 = 0,5 \cdot e^u$$

$$q'(p) = 0,5 \cdot e^{p+10}$$

g Met de kettingregel:

$$y = 10 \cdot e^u \text{ en } u = -7d + 4$$

$$\frac{dy}{du} = 10 \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dd} = -7$$

$$\frac{dy}{dd} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dd} = 10 \cdot e^u \cdot -7 = -70 \cdot e^u$$

$$s'(d) = -70 \cdot e^{-7d+4}$$

h De functie A is het product van $g(x) = x^4$ en $h(x) = e^x$.

$$g'(x) = 4x^3 \text{ en } h'(x) = e^x$$

Met de productregel:

$$A'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$B'(x) = 4x^3 \cdot e^x + x^4 \cdot e^x$$

i Met de kettingregel:

$$y = e^u \text{ en } u = 2 + 3q$$

$$\frac{dy}{du} = e^u \text{ en } \frac{du}{dq} = 3$$

$$\frac{dy}{dq} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dq} = e^u \cdot 3 = 3 \cdot e^u$$

De functie W is het product van

$$g(q) = 6q \text{ en } h(q) = e^{2+3q}$$

$$g'(q) = 6 \text{ en } h'(q) = 3 \cdot e^{2+3q}$$

Met de productregel:

$$W'(q) = g'(q) \cdot h(q) + g(q) \cdot h'(q)$$

$$W'(q) = 6 \cdot e^{2+3q} + 6q \cdot 3e^{2+3q}$$

$$W'(q) = 6 \cdot e^{2+3q} + 18q \cdot e^{2+3q}$$

U2 a $f'(x) = e^x + e \cdot x^{e-1} + 1$

$$f'(0) = e^0 + e \cdot 0^{e-1} + 1 = 2$$

b Drie functies waarvan de afgeleide gelijk is aan zichzelf zijn bijvoorbeeld:

$$g(x) = 0, h(x) = 5 \cdot e^x \text{ en } m(x) = 9 \cdot e^{x+10}.$$

21.3 Exponentiële functies differentiëren

intro De termen $\frac{1}{2}$ en $\left(\frac{1}{2}\right)^t$ zijn beide positief voor elke waarde van t . De afgeleide

$V'(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ is dus altijd positief en dit zou betekenen dat de grafiek van V stijgend is. Dit kan niet kloppen omdat er langzaam lucht uit de band ontsnapt en de grafiek van V dus dalend moet zijn.

17 a Met de kettingregel:

$$y = e^u \text{ en } u = 5x$$

$$\frac{dy}{du} = e^u \text{ en } \frac{du}{dx} = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot 5 = 5 \cdot e^u$$

$$h'(x) = 5 \cdot e^x$$

Op dezelfde manier is $k'(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{1}{3}x}$.

b De afgeleide van $f(x) = e^{ax}$ bereken je met de kettingregel

$$y = e^u \text{ en } u = ax$$

$$\frac{dy}{du} = e^u \text{ en } \frac{du}{dx} = a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot a = a \cdot e^u$$

$$f'(x) = a \cdot e^{ax}$$

c Stap 1: rekenregel $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$ is toegepast.

Stap 2: uit $g^A = g^B$ volgt $A = B$.

Stap 3: uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.

d $a = {}^e\log(2) \approx 0,69$

$$f(x) = e^{ax} \approx e^{0,69 \cdot x}$$

e $f'(x) = a \cdot e^{ax} \approx 0,69 \cdot e^{0,69 \cdot x} = 0,69 \cdot 2^x$

f $e^{ax} = 3^x$

$$(e^a)^x = 3^x$$

$$e^a = 3$$

$$a = {}^e\log(3) \approx 1,10$$

$$g(x) \approx e^{1,10 \cdot x}$$

$$g'(x) \approx 1,10 \cdot e^{1,10 \cdot x}$$

18 a $f'(x) = \ln(4) \cdot 4^x$

$$f'(x) \approx 1,39 \cdot 4^x$$

b $g'(x) = 300 \cdot \ln(1,75) \cdot 1,75^x$

$$g'(x) \approx 167,88 \cdot 1,75^x$$

c $h'(x) = 25 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$$h'(x) \approx -17,33 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

d $k'(x) = 6 \cdot \ln(0,8) \cdot 0,8^x$

$$k'(x) \approx -1,34 \cdot 0,8^x$$

19 a Met de kettingregel:

$$y = 10^u \text{ en } u = 2s - 2$$

$$\frac{dy}{du} = \ln(10) \cdot 10^u \text{ en } \frac{du}{ds} = 2$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{ds} = \ln(10) \cdot 10^u \cdot 2$$

$$r'(s) = 2 \cdot \ln(10) \cdot 10^{2s-2}$$

$$r'(s) \approx 4,61 \cdot 10^{2s-2}$$

b Met de kettingregel:

$$y = 9 \cdot 7^u \text{ en } u = \frac{1}{2}t$$

$$\frac{dy}{du} = 9 \cdot \ln(7) \cdot 7^u \text{ en } \frac{du}{dt} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 9 \cdot \ln(7) \cdot 7^u \cdot \frac{1}{2}$$

$$h'(t) = 4\frac{1}{2} \cdot \ln(7) \cdot 7^{\frac{1}{2}t}$$

$$h'(t) \approx 8,76 \cdot 7^{\frac{1}{2}t}$$

21 Exponentiële en logaritmische functies

c Met de kettingregel:

$$y = 45 \cdot 3^u \text{ en } u = 4b + 6$$

$$\frac{dy}{du} = 45 \cdot \ln(3) \cdot 3^u \text{ en } \frac{du}{db} = 4$$

$$\frac{dy}{db} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{db} = 45 \cdot \ln(3) \cdot 3^u \cdot 4$$

$$k'(b) = 180 \cdot \ln(3) \cdot 3^{4b+6}$$

$$k'(b) \approx 197,75 \cdot 3^{4b+6}$$

e Met de kettingregel:

$$y = 8 \cdot e^u \text{ en } u = -0,64p$$

$$\frac{dy}{du} = 8 \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dp} = -0,64$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dp} = 8 \cdot e^u \cdot -0,64$$

$$N'(p) = -5,12 \cdot e^{-0,64p}$$

d Met de kettingregel:

$$y = -1,3 \cdot 4^u \text{ en } u = n + 1$$

$$\frac{dy}{du} = -1,3 \cdot \ln(4) \cdot 4^u \text{ en } \frac{du}{dn} = 1$$

$$\frac{dy}{dn} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dn} = -1,3 \cdot \ln(4) \cdot 4^u \cdot 1$$

$$W'(n) = -1,3 \cdot \ln(4) \cdot 4^{n+1}$$

$$W'(n) \approx -1,80 \cdot 4^{n+1}$$

f $f'(x) = 5x^4 - \ln(5) \cdot 5^x$

$$f'(x) \approx 5x^4 - 1,61 \cdot 5^x$$

20 a Het verband tussen N en t is exponentieel.

Een formule is $N = 120\,000 \cdot 1,018^t$.

b De op te lossen vergelijking is $120\,000 \cdot 1,018^t = 150\,000$.

$$1,018^t = 1,25$$

$$t = {}^{1,018}\log(1,25) \approx 12,5$$

In 2033 zal het aantal inwoners gelijk zijn aan 150 000.

$$\frac{dN}{dt} = 120\,000 \cdot \ln(1,018) \cdot 1,018^t$$

$$t = 12,5 \text{ invullen in } \frac{dN}{dt} \text{ geeft } \frac{dN}{dt} = 120\,000 \cdot \ln(1,018) \cdot 1,018^{12,5} \approx 2676.$$

Het inwoneraantal neemt op dat moment toe met 2676 inwoners met jaar.

21 a Na één dag geldt $t = 1$.

$$t = 1 \text{ invullen in de formule geeft } C = 2 \cdot 1 \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot 1} \approx 1,43.$$

Na één dag is de concentratie 1,43 mg per liter.

b Met de kettingregel:

$$y = e^u \text{ en } u = -\frac{1}{3}t$$

$$\frac{dy}{du} = e^u \text{ en } \frac{du}{dt} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = e^u \cdot -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \cdot e^u$$

De formule is het product van $g(t) = 2t$ en $h(t) = e^{-\frac{1}{3}t}$.

$$g'(t) = 2 \text{ en } h'(t) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$$

Met de productregel:

$$\frac{dC}{dt} = 2 \cdot e^{-\frac{1}{3}t} + 2t \cdot -\frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$$

$$\frac{dC}{dt} = 2 \cdot e^{-\frac{1}{3}t} - \frac{2}{3}t \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$$

De concentratie gif is maximaal als $\frac{dC}{dt} = 0$.

$$\text{Invoer: } y_1 = 2 \cdot e^{-\frac{1}{3}x} - \frac{2}{3}x \cdot e^{-\frac{1}{3}x}$$

$$\text{Venster: } 0 \leq x \leq 10, -1 \leq y \leq 2$$

Optie: nulpunt

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de t -as zijn $(3, 0)$.

De concentratie gif in de melk is maximaal na 3 dagen.

- c Na drie dagen geldt $t = 3$.

$t = 3$ invullen in de formule geeft de maximale concentratie gif:

$$C = 2 \cdot 3 \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot 3} \approx 2,21 \text{ mg per liter.}$$

- 22 a** Eerst de tabel verder invullen:

<i>tijd t in minuten</i>	<i>percentage P</i>	<i>verschil</i>
0	5	95
15	39	61
30	61	39
45	75	25
60	84	16
75	90	10
90	94	6

$$\frac{61}{95} \approx 0,64, \frac{39}{61} \approx 0,64, \frac{25}{39} \approx 0,64, \frac{16}{25} = 0,64, \frac{10}{16} \approx 0,63, \frac{6}{10} = 0,6$$

De factor is steeds ongeveer gelijk, dus is er sprake van exponentiële afname.

- b De groeifactor per kwartier is 0,64.

- c De groeifactor per minuut is $0,64^{\frac{1}{15}} \approx 0,971$.

- d $t = 0$ invullen geeft:

$$P = 100 - b \cdot g^0 = 100 - b$$

Op $t = 0$ is $P = 5$, dus moet $100 - b = 5$ zijn. Hieruit volgt $b = 95$.

- e $P = 100 - 95 \cdot 0,971^t$

- f De batterij is voor de helft opgeladen als geldt $P = 50$.

$$100 - 95 \cdot 0,971^t = 50$$

$$-95 \cdot 0,971^t = -50$$

$$0,971^t = \frac{10}{19}$$

$$t = {}^{0,971}\log\left(\frac{10}{19}\right) \approx 21,8$$

Na ongeveer 22 minuten is de telefoon voor de helft opgeladen.

- g $\frac{dP}{dt} = -95 \cdot \ln(0,971) \cdot 0,971^t$

$$\frac{dP}{dt} \approx 2,80 \cdot 0,971^t$$

- h $\frac{dP}{dt}$ is altijd positief en nadert nul als t steeds groter wordt, want de

groeifactor is kleiner dan 1. Hieruit volgt dat de grafiek van P afnemend dalend is. Het percentage neemt daarom steeds langzamer toe.

- 019 a** De schakels zijn $y = 4,5 \cdot 2^u$ en $u = 3x + 1$.

- b $y = 4,5 \cdot 2^u$ en $u = 3x + 1$

$$\frac{dy}{du} = 4,5 \cdot \ln(2) \cdot 2^u \text{ en } \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4,5 \cdot \ln(2) \cdot 2^u \cdot 3$$

$$f'(x) = 13,5 \cdot \ln(2) \cdot 2^{3x+1}$$

- c $\ln(2) \approx 0,69$ en $13,5 \cdot \ln(2) \approx 9,36$

Hieruit volgt $f'(x) \approx 9,36 \cdot 2^{3x+1}$.

21 Exponentiële en logaritmische functies

U3 Als t steeds groter wordt, dan neemt $0,9^t$ af en nadert nul. De term $9 \cdot 0,9^t$ nadert dan ook naar nul. Hieruit volgt dat de noemer $1 + 9 \cdot 0,9^t$ voor grote waarden van t nadert naar 1.

De grenswaarde is $\frac{1000}{1} = 1000$.

De helft van de grenswaarde is $1000 : 2 = 500$.

Om te berekenen na hoeveel dagen het aantal fruitvliegjes gelijk is aan 500,

moet de vergelijking $\frac{1000}{1 + 9 \cdot 0,9^t} = 500$ worden opgelost.

$$1 + 9 \cdot 0,9^t = 2$$

$$9 \cdot 0,9^t = 1$$

$$0,9^t = \frac{1}{9}$$

$$t = {}^{0,9}\log\left(\frac{1}{9}\right) = 20,854\dots$$

De formule N is het quotiënt van $g(t) = 1000$ en $h(t) = 1 + 9 \cdot 0,9^t$.

$$g'(t) = 0 \text{ en } h'(t) = 9 \cdot \ln(0,9) \cdot 0,9^t$$

Met de quotiëntregel:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{0 \cdot (1 + 9 \cdot 0,9^t) - 1000 \cdot 9 \cdot \ln(0,9) \cdot 0,9^t}{(1 + 9 \cdot 0,9^t)^2}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{-9000 \cdot \ln(0,9) \cdot 0,9^t}{(1 + 9 \cdot 0,9^t)^2}$$

Het aantal fruitvliegjes neemt het snelt toe als de grafiek van $\frac{dN}{dt}$ een maximum heeft.

$$\text{Invoer: } y_1 = \frac{-9000 \cdot \ln(0,9) \cdot 0,9^x}{(1 + 9 \cdot 0,9^x)^2}$$

$$\text{Venster: } 0 \leq x \leq 50, 0 \leq y \leq 30$$

Optie: maximum

De coördinaten van de top die bij een maximum horen, zijn (20,854; 26,340).

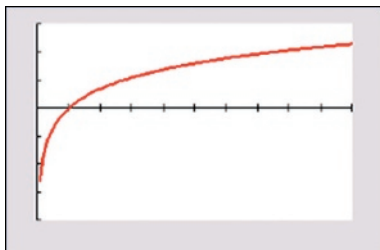
Je ziet inderdaad dat op het moment dat het aantal fruitvliegjes gelijk is aan de helft van de grenswaarde, dat dan het aantal fruitvliegjes in de afgesloten ruimte het snelst toeneemt.

21.4 Logaritmische functies differentiëren

intro De grafiek van g is afnemend stijgend. Dat betekent dat de hellinggrafiek van deze groeicurve boven de horizontale ligt en nadert naar 0.

23 a Invoer: $y_1 = \ln(x)$

$$\text{Venster: } 0 \leq x \leq 10, -4 \leq y \leq 3$$



b	x	0,5	1	2	5	10
	$f'(x)$	2	1	0,5	0,2	0,1

- c $0,5 \times 2 = 1, 1 \times 1 = 1, 2 \times 1 = 1, 5 \times 0,2 = 1$ en $10 \times 0,1 = 1$
 $x \cdot f'(x)$ is steeds gelijk aan 1.
- d Uit $x \cdot f'(x) = 1$ volgt $f'(x) = \frac{1}{x}$ wanneer je links en rechts deelt door x .

24 a $f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x}$
 $f'(x) = \frac{4}{x}$

c Met de kettingregel:
 $y = 5 \cdot \ln(u)$ en $u = 3x$
 $\frac{dy}{du} = 5 \cdot \frac{1}{u}$ en $\frac{du}{dx} = 3$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5 \cdot \frac{1}{u} \cdot 3 = \frac{15}{u}$
 $h'(x) = \frac{15}{3x}$
 $h'(x) = \frac{5}{x}$

b Met de kettingregel:
 $y = \ln(u)$ en $u = 2x + 5$
 $\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$ en $\frac{du}{dx} = 2$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 2 = \frac{2}{u}$
 $g'(x) = \frac{2}{2x + 5}$

d Met de kettingregel:
 $y = \ln(u)$ en $u = -x$
 $\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$ en $\frac{du}{dx} = -1$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot -1 = \frac{-1}{u}$
 $g'(x) = \frac{-1}{-x}$
 $g'(x) = \frac{1}{x}$

25 a ${}^2\log(x) = \frac{{}^e\log(x)}{{}^e\log(2)} = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(x)$

b $g(x) = {}^2\log(x)$ en uit opdracht a volgt dat dit gelijk is aan
 $g(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(x)$
 Met de productregel:
 $g'(x) = 0 \cdot \ln(x) + \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{x}$
 $g'(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{x}$

c Op de manier van opdracht a kun je aantonen dat ${}^3\log(x) = \frac{1}{\ln(3)} \cdot \ln(x)$.
 Op de manier van opdracht b volgt hieruit dat $h'(x) = \frac{1}{\ln(3)} \cdot \frac{1}{x}$

26 a $f'(x) = \frac{1}{\ln(5) \cdot x}$
 $f'(x) \approx \frac{1}{1,61 \cdot x}$

b $g'(t) = 9 \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot t}$
 $g'(t) \approx \frac{9}{-0,69 \cdot t}$

21 Exponentiële en logaritmische functies

$$\text{c } p'(q) = \frac{1}{\ln(10) \cdot q} + 1$$

$$p'(q) \approx \frac{1}{2,30 \cdot q} + 1$$

d Met de kettingregel:

$$y = {}^7\log(u) \text{ en } u = d + 1$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\ln(7) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\ln(7) \cdot u} \cdot 1 = \frac{1}{\ln(7) \cdot u}$$

$$l'(d) = \frac{1}{\ln(7) \cdot (d + 1)}$$

$$l'(d) \approx \frac{1}{1,95d + 1,95}$$

e Met de kettingregel:

$$y = {}^2\log(u) \text{ en } u = 3r - 7$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\ln(2) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{dr} = 3$$

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dr} = \frac{1}{\ln(2) \cdot u} \cdot 3 = \frac{3}{\ln(2) \cdot u}$$

$$A'(r) = \frac{3}{\ln(2) \cdot (3r - 7)}$$

$$A'(r) \approx \frac{3}{2,08r - 4,85}$$

f Met de kettingregel:

$$y = {}^{0,1}\log(u) \text{ en } u = 2s$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\ln(0,1) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{ds} = 2$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{ds} = \frac{1}{\ln(0,1) \cdot u} \cdot 2 = \frac{2}{\ln(0,1) \cdot u}$$

$$B'(s) = \frac{2}{\ln(0,1) \cdot 2s}$$

$$B'(s) \approx \frac{1}{-2,30s}$$

27 a Met de kettingregel:

$$y = {}^{1,06}\log(u) \text{ en } u = 2p - 6$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\ln(1,06) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{dp} = 2$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dp} = \frac{1}{\ln(1,06) \cdot u} \cdot 2 = \frac{2}{\ln(1,06) \cdot u}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{2}{\ln(1,06) \cdot (2p - 6)}$$

$$\frac{dA}{dp} \approx \frac{2}{0,12p - 0,35}$$

b Met de kettingregel:

$$y = 4 \cdot \log(u) \text{ en } u = \frac{1}{2}p$$

$$\frac{dy}{du} = 4 \cdot \frac{1}{\ln(10) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{dp} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dp} = 4 \cdot \frac{1}{\ln(10) \cdot u} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{\ln(10) \cdot u}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{2}{\ln(10) \cdot \frac{1}{2}p} + 3$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{4}{\ln(10) \cdot p} + 3$$

$$\frac{dA}{dp} \approx \frac{4}{2,30p} + 3$$

- c De formule A is het quotiënt van $t(p) = p + 2$ en $n(p) = \ln(p)$.

$$t'(p) = 1 \text{ en } n'(p) = \frac{1}{p}$$

Met de quotiëntregel:

$$\frac{dA}{dp} = \frac{t'(p) \cdot n(p) - t(p) \cdot n'(p)}{(n(p))^2}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{1 \cdot \ln(p) - (p + 2) \cdot \frac{1}{p}}{(\ln(p))^2}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{\ln(p) - 1 + \frac{2}{p}}{(\ln(p))^2}$$

- d Met de kettingregel:

$$y = {}^3\log(u) \text{ en } u = p - 4p^3$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\ln(3) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{dp} = 1 - 12p^2$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dp} = \frac{1}{\ln(3) \cdot u} \cdot (1 - 12p^2) = \frac{1 - 12p^2}{\ln(3) \cdot u}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{1 - 12p^2}{\ln(3) \cdot (p - 4p^3)}$$

$$\frac{dA}{dp} \approx \frac{1 - 12p^2}{1,10p - 4,39p^3}$$

- e Met de kettingregel:

$$y = \ln(u) \text{ en } u = 12p + 7$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \text{ en } \frac{du}{dp} = 12$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dp} = \frac{1}{u} \cdot 12 = \frac{12}{u}$$

De formule A is het product van $g(p) = p$ en $h(p) = \ln(12p + 7)$.

$$g'(p) = 1 \text{ en } h'(p) = \frac{12}{12p + 7}$$

Met de productregel:

$$\frac{dA}{dp} = g'(p) \cdot h(p) + g(p) \cdot h'(p)$$

$$\frac{dA}{dp} = 1 \cdot \ln(12p + 7) + p \cdot \frac{12}{12p + 7}$$

$$\frac{dA}{dp} = \ln(12p + 7) + \frac{12p}{12p + 7}$$

- f Met de kettingregel:

$$y = \ln(u) \text{ en } u = 2p$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \text{ en } \frac{du}{dp} = 2$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dp} = \frac{1}{u} \cdot 2 = \frac{2}{u}$$

21 Exponentiële en logaritmische functies

De formule A is het quotiënt van $t(p) = 5$ en $n(p) = \ln(2p) + 3$.

$$t'(p) = 0 \text{ en } n'(p) = \frac{2}{2p} = \frac{1}{p}$$

Met de quotiëntregel:

$$\frac{dA}{dp} = \frac{t'(p) \cdot n(p) - t(p) \cdot n'(p)}{(n(p))^2}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{0 \cdot (\ln(2p) + 3) - 5 \cdot \frac{1}{p}}{(\ln(2p) + 3)^2}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{-\frac{5}{p}}{(\ln(2p) + 3)^2}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{-5}{p \cdot (\ln(2p) + 3)^2}$$

28 a $t = 1$ invullen in de formule geeft

$$s = 6 + 13,8 \cdot \log(1) = 6$$

$t = 2$ invullen in de formule geeft

$$s = 6 + 13,8 \cdot \log(2) \approx 10,2$$

Tussen $t = 1$ en $t = 2$ heeft het autootje $10,2 - 6 = 4,2$ km afgelegd.

b $s = 6 + 13,8 \cdot \log(t)$

$$6 + 13,8 \cdot \log(t) = s$$

$$13,8 \cdot \log(t) = s - 6$$

$$\log(t) = \frac{s - 6}{13,8}$$

$$t = 10^{\frac{s-6}{13,8}}$$

c $s = 12,5$ invullen in de formule van opdracht b:

$$t = 10^{\frac{12,5-6}{13,8}} = 2,958\dots$$

Na ongeveer 3,0 uur heeft het autootje 12,5 kilometer afgelegd.

d $\frac{ds}{dt} = 13,8 \cdot \frac{1}{\ln(10) \cdot t}$

$$t = 5 \text{ invullen in } \frac{ds}{dt} \text{ geeft } \frac{ds}{dt} = 13,8 \cdot \frac{1}{\ln(10) \cdot 5} \approx 1,2.$$

Na 5 uur rijdt het autootje 1,2 km per uur.

e De op te lossen vergelijking is $13,8 \cdot \frac{1}{\ln(10) \cdot t} = 1$.

$$\frac{13,8}{\ln(10) \cdot t} = 1$$

$$\ln(10) \cdot t = \frac{13,8}{1}$$

$$t = \frac{13,8}{\ln(10)} \approx 6,0$$

Na 6 uur is de snelheid nog maar 1 kilometer per uur.

29 a $t = 0$ invullen in de formule geeft

$$T = 150 \cdot \ln(8 \cdot 0 + 1) + T_0$$

$$T = 150 \cdot 0 + T_0 = T_0$$

Op tijdstip $t = 0$ is de temperatuur gelijk aan T_0 .

b De temperatuur op $t = 0$ is gelijk aan T_0 en de temperatuur na t uur is gelijk aan T . Hieruit volgt dat de temperatuurstijging gelijk is aan $T - T_0$.

Uit $T = 150 \cdot \ln(8t + 1) + T_0$ volgt $T - T_0 = 150 \cdot \ln(8t + 1)$ wanneer je zowel links als rechts T_0 aftrekt.

- c De op te lossen vergelijking is $150 \cdot \ln(8t + 1) = 500$.

$$\ln(8t + 1) = 3\frac{1}{3}$$

$$8t + 1 = e^{3\frac{1}{3}}$$

$$8t = e^{3\frac{1}{3}} - 1$$

$$t = \frac{e^{3\frac{1}{3}} - 1}{8} \approx 3,4$$

Na 3,4 minuten is de temperatuurstijging 500 graden Celsius.

- d Met de kettingregel:

$$y = 150 \cdot \ln(u) \text{ en } u = 8t + 1$$

$$\frac{dy}{du} = 150 \cdot \frac{1}{u} \text{ en } \frac{du}{dt} = 8$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 150 \cdot \frac{1}{u} \cdot 8 = \frac{1200}{u}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1200}{8t + 1}$$

$$t = 3,4 \text{ invullen in } \frac{dT}{dt} \text{ geeft } \frac{dT}{dt} = \frac{1200}{8 \times 3,4 + 1} \approx 42,8.$$

Op dat moment stijgt de temperatuur met een snelheid van 42,8 graden Celsius per minuut.

- e Als t steeds groter wordt, neemt de noemer $8t + 1$ toe. De uitkomst van de breuk $\frac{1200}{8t + 1}$ neemt dan af, want de constante 1200 wordt door een steeds groter getal gedeeld. De snelheid waarmee de temperatuur stijgt neemt dus af. Hieruit volgt dat de temperatuur het snelst stijgt op $t = 0$, als de brand net is uitgebroken.

- 024 a** De functie $f(x)$ is geen kettingfunctie omdat tussen de haakjes bij de natuurlijke logaritme alleen x staat. De functie $g(x)$ is een kettingfunctie omdat tussen de haakjes bij de natuurlijke logaritme $4x - 7$ staat. Om die reden heb je wel de kettingregel nodig om $g(x)$ te differentiëren en niet om $f(x)$ te differentiëren.

b $f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x}$ ofwel $f'(x) = \frac{4}{x}$

c $y = \ln(u)$ en $u = 4x - 7$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \text{ en } \frac{du}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 4 = \frac{4}{u}$$

$$g'(x) = \frac{4}{4x - 7}$$

d $g'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x}$

$$g'(x) = \frac{3}{x}$$

- e Met de kettingregel:

$$y = \ln(u) \text{ en } u = 6x + 1$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \text{ en } \frac{du}{dx} = 6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 6 = \frac{6}{u}$$

$$f'(x) = \frac{6}{6x + 1}$$

21 Exponentiële en logaritmische functies

f Met de kettingregel:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \ln(u) \text{ en } u = 2x$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} = \frac{1}{2u} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2u} \cdot 2 = \frac{1}{u}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2x}$$

g Met de kettingregel:

$$y = \ln(u) \text{ en } u = x + 1$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \text{ en } \frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 1 = \frac{1}{u}$$

$$k'(x) = \frac{1}{x+1}$$

027 a A is het quotiënt van $t(p) = \ln(p)$ en $n(p) = 2p - 1$.

b In stap 1: $t'(p) = \frac{1}{p}$

In stap 2: $n'(p) = 2$

c $\frac{dA}{dp} = \frac{t'(p) \cdot n(p) - t(p) \cdot n'(p)}{(n(p))^2}$

d Er zijn haakjes geplaatst om $2p - 1$ omdat $t'(p)$ met de hele term $2p - 1$ vermenigvuldigd moet worden. Als deze haakjes er niet zouden staan, dan zou $t'(p)$ alleen met $2p$ vermenigvuldigd worden.

$$\frac{dA}{dp} = \frac{\frac{1}{p} \cdot (2p - 1) - \ln(p) \cdot 2}{(2p - 1)^2}$$

U4 a $t = 0$ invullen in de formule geeft $s = 180 \cdot \log(0,02 \cdot 0^3 + 1) = 180 \cdot \log(1) = 0$

$t = 10$ invullen in de formule geeft $s = 180 \cdot \log(0,02 \cdot 10^3 + 1) \approx 238$

De gemiddelde snelheid gedurende de eerste tien seconden is $238:10 = 23,8$ meter per seconde.

b Met de kettingregel:

$$y = 180 \cdot \log(u) \text{ en } u = 0,02t^3 + 1$$

$$\frac{dy}{du} = 180 \cdot \frac{1}{\ln(10) \cdot u} = \frac{180}{\ln(10) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{dt} = 0,06t^2$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{180}{\ln(10) \cdot u} \cdot 0,06t^2 = \frac{10,8t^2}{\ln(10) \cdot u}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{10,8t^2}{\ln(10) \cdot (0,02t^3 + 1)}$$

$$t = 2 \text{ invullen in } \frac{ds}{dt} \text{ geeft } \frac{ds}{dt} = \frac{10,8 \cdot 2^2}{\ln(10) \cdot (0,02 \cdot 2^3 + 1)} \approx 16,2.$$

Op tijdstip $t = 2$ rijdt de auto met een snelheid van 16,2 meter per seconde.

c De snelheid is maximaal als $\frac{ds}{dt}$ een maximum heeft.

$$\text{Invoer: } y_1 = \frac{10,8 \cdot x^2}{\ln(10) \cdot (0,02 \cdot x^3 + 1)}$$

Venster: $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 40$

Optie: maximum

De coördinaten van de top die bij een maximum horen, zijn (4,642; 33,684).

De snelheid is maximaal als $t \approx 4,6$.

21.5 Logaritmische schalen

intro Lisa heeft geen gelijk. De grafiek is weliswaar een rechte lijn, maar op de verticale as is een logaritmische schaalverdeling aangebracht. Dit betekent dat de luchtdruk exponentieel afneemt.

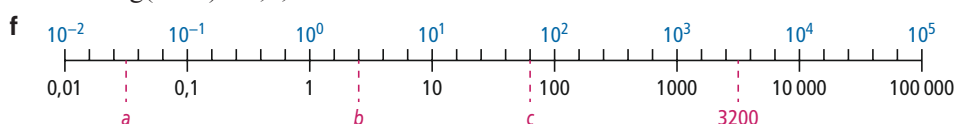
30 a Je kunt zien dat er een logaritmische schaalverdeling is gebruikt omdat de waarden bij de schaal steeds met 10 vermenigvuldigd worden.

b $a = 10^{-1,5} \approx 0,032$

c $b = 10^{0,4} \approx 2,5$

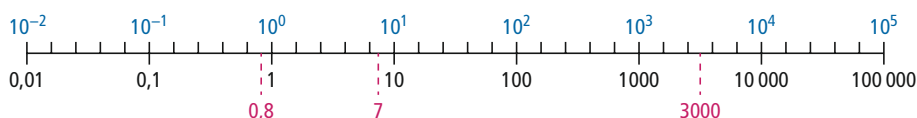
d $b = 10^{1,8} \approx 63,1$

e $t = {}^{10}\log(3200) \approx 3,5$, dus $3200 = 10^{3,5}$



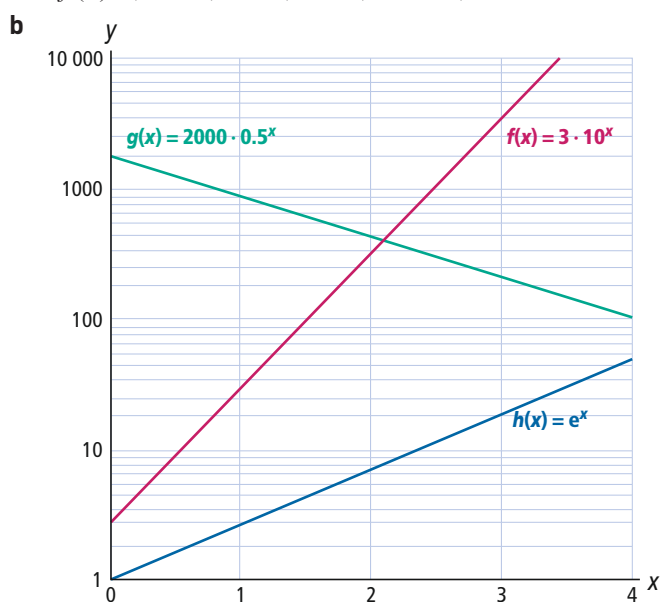
31 $10^t = 0,8$ $10^t = 7$
 $t = \log(0,8) \approx -0,1$ $t = \log(7) \approx 0,85$
 $0,8 = 10^{-0,1}$ $7 = 10^{0,85}$

$10^t = 3000$
 $t = \log(3000) \approx 3,5$
 $3000 = 10^{3,5}$



32 a

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	30	300	3000	30000



c De grafiek is een rechte lijn.

d De grafiek van g is een rechte lijn omdat het een exponentieel verband betreft. Voor het tekenen van een rechte lijn heb je slechts twee punten nodig.

21 Exponentiële en logaritmische functies

e

x	0	2
$g(x)$	2000	500

Zie het assenstelsel bij opdracht b.

f

x	0	4
$h(x)$	1	55

Zie het assenstelsel bij opdracht b.

- 33 a** Tussen $t = 0$ en $t = 4$ is de grafiek bij benadering een rechte lijn. Dit betekent dat de gemiddelde hoogte van de zonnebloemen in de eerste vier weken bij benadering exponentieel is toegenomen.
- b** Als t steeds groter wordt, dan neemt $0,497^t$ af en nadert naar nul, want $0,497 < 1$. Hieruit volgt dat de noemer $1 + 25 \cdot 0,497^t$ ook afneemt en $1 + 25 \cdot 0 = 1$ nadert. De grenswaarde is $\frac{256}{1} = 256$.
- De gemiddelde hoogte van de zonnebloemen is maximaal 256 cm.
- c** In de figuur gaat de grafiek op den duur naar de horizontale lijn op hoogte 256.
- d** De formule H is het quotiënt van $g(t) = 256$ en $h(t) = 1 + 25 \cdot 0,497^t$.
 $g'(t) = 0$ en $h'(t) = 25 \cdot \ln(0,497) \cdot 0,497^t$
 Met de quotiëntregel:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{g'(t) \cdot h(t) - g(t) \cdot h'(t)}{(h(t))^2}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{0 \cdot (1 + 25 \cdot 0,497^t) - 256 \cdot 25 \cdot \ln(0,497) \cdot 0,497^t}{(1 + 25 \cdot 0,497^t)^2}$$

$$\frac{dH}{dt} \approx \frac{4475 \cdot 0,497^t}{(1 + 25 \cdot 0,497^t)^2}$$
- e** De zonnebloemen groeien het snelst als $\frac{dH}{dt}$ een maximum heeft.
 Invoer: $y_1 = \frac{4475 \cdot 0,497^x}{(1 + 25 \cdot 0,497^x)^2}$
 Venster: $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 50$
 Optie: maximum
 De coördinaten van de top zijn (4,604; 44,75).
 Na 4,6 weken groeien de zonnebloemen het snelst.
- f** De maximale groeisnelheid is 44,75 cm per week.

- 34 a** Bram denkt dit omdat de grafiek tussen 1 maart en 1 april steiler is dan tussen 1 april en 1 mei.
 In de grafiek kun je aflezen dat er op 1 maart 70 besmettingen waren, op 1 april 200 000 en op 1 mei ongeveer 1 000 000. In maart zijn er $200\,000 - 70 = 199\,930$ besmettingen bij gekomen en in april $1\,000\,000 - 200\,000 = 800\,000$. In april is de toename van het aantal besmettingen groter dan in maart. Nee, Bram heeft geen gelijk.
- b** De groeifactor per maand was tussen 1 maart en 1 april $\frac{200\,000}{70} \approx 2857$.
 De verdubbelingstijd kan berekend worden door $2857^t = 2$ op te lossen.
 $t = {}^{2857}\log(2) = 0,0871\dots$
 De verdubbelingstijd is 0,0871... maanden, dus $0,0871 \times 31 \approx 2,7$ dagen.
- c** Op $t = 0$ geldt $N = b \cdot e^{a \cdot 0} = b$.
 Op $t = 0$, dus 1 mei 2020, waren er 1 070 000 besmettingen. Hieruit volgt dat $b = 1\,070\,000$.

- d Voor 1 juli 2020 geldt $t = 61$.

$(61, 2\,630\,000)$ invullen in de formule geeft $2\,630\,000 = 1\,070\,000 \cdot e^{a \cdot 61}$.

$$e^{a \cdot 61} = \frac{2\,630\,000}{1\,070\,000}$$

$$61 \cdot a = \ln\left(\frac{2\,630\,000}{1\,070\,000}\right) \text{ dus } a = \frac{\ln\left(\frac{2\,630\,000}{1\,070\,000}\right)}{61} \approx 0,01474$$

- e $N = 1\,070\,000 \cdot e^{0,01474t}$

Met de kettingregel:

$$y = 1\,070\,000 \cdot e^u \text{ en } u = 0,01474t$$

$$\frac{dy}{du} = 1\,070\,000 \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dt} = 0,01474$$

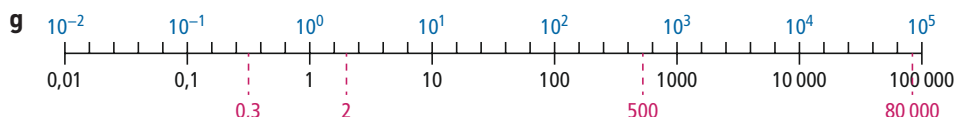
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 1\,070\,000 \cdot e^u \cdot 0,01474 = 15\,771,8 \cdot e^u$$

$$\frac{dN}{dt} = 15\,771,8 \cdot e^{0,01474t}$$

$$t = 0 \text{ invullen in } \frac{dN}{dt} \text{ geeft } \frac{dN}{dt} = 15\,771,8 \cdot e^{0,01474 \cdot 0} = 15\,771,8$$

Op 1 mei 2020 nam het aantal besmettingen toe met 15 771,8 per dag.

- 031** a Met de rekenmachine kun je narekenen dat $10^0 = 1$.
 $0,01 = 10^{-2}$, $0,1 = 10^{-1}$, $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, $10\,000 = 10^4$ en $100\,000 = 10^5$.
- b Met de rekenmachine kun je narekenen dat $10^{2,5} \approx 316$.
- c De exponenten nemen lineair toe. Dit betekent dat $10^{2,5}$ precies tussen 10^2 en 10^3 in ligt omdat 2,5 precies tussen 2 en 3 in ligt.
- d Uit $10^t = 500$ volgt $t = {}^{10}\log(500) \approx 2,7$.
- e 500 ligt tussen 10^2 en 10^3 , want het ligt tussen 100 en 1000.
- f 500 ligt dichterbij 10^3 dan bij 10^2 omdat 2,7 dichterbij 3 dan bij 2 ligt.



- h**
- | | |
|------------------------------|---------------------------|
| $10^t = 0,3$ | $10^t = 2$ |
| $t = \log(0,3) \approx -0,5$ | $t = \log(2) \approx 0,3$ |
| $0,3 = 10^{-0,5}$ | $2 = 10^{0,3}$ |

$$10^t = 80\,000$$

$$t = \log(80\,000) \approx 4,9$$

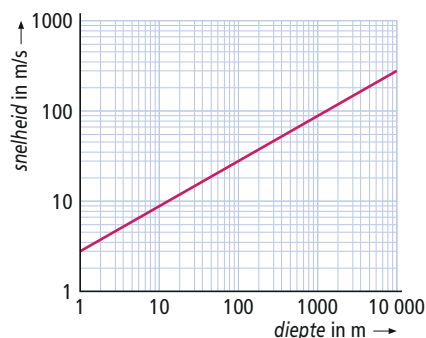
$$80\,000 = 10^{4,9}$$

Op de log-schaal bij opdracht g zijn de getallen 0,3; 2 en 80 000 aangegeven.

21 Exponentiële en logaritmische functies

U5 a

d	1	10	100	1000	10 000
v	3	9,5	30	94,9	300



b De grafiek is een rechte lijn.

c $v = 3 \cdot d^{0,5}$

$$\log(v) = \log(3 \cdot d^{0,5})$$

$$\log(v) = \log(3) + \log(d^{0,5})$$

$$\log(v) = \log(3) + 0,5 \cdot \log(d)$$

$$a = 0,5 \text{ en } b = \log(3) \approx 0,48$$

21.6 Gemengde opdrachten

35 a $N = 5 + \frac{1}{4} \cdot 8^{t+2}$

$$5 + \frac{1}{4} \cdot 8^{t+2} = N$$

$$\frac{1}{4} \cdot 8^{t+2} = N - 5$$

$$8^{t+2} = 4N - 20$$

$$t + 2 = {}^8\log(4N - 20)$$

$$t = -2 + {}^8\log(4N - 20)$$

c $N = \ln(12 - t)$

$$\ln(12 - t) = N$$

$$12 - t = e^N$$

$$-t = e^N - 12$$

$$t = -e^N + 12$$

b $N = 3 \cdot \log(2t)$

$$3 \cdot \log(2t) = N$$

$$\log(2t) = \frac{1}{3}N$$

$$2t = 10^{\frac{1}{3}N}$$

$$t = \frac{1}{2} \cdot 10^{\frac{1}{3}N}$$

d $\frac{1}{3}N - 2 \cdot e^{0,1t} = 0$

$$-2 \cdot e^{0,1t} = -\frac{1}{3}N$$

$$e^{0,1t} = \frac{1}{6}N$$

$$0,1t = \ln\left(\frac{1}{6}N\right)$$

$$t = 10 \ln\left(\frac{1}{6}N\right)$$

36 a De hoeveelheid daglicht is gehalveerd als $P = 50$.

$$100 \cdot 0,75^d = 50$$

$$0,75^d = 0,5$$

$$d = {}^{0,75}\log(0,5) \approx 2,4$$

Op een diepte van 2,4 meter is de hoeveelheid daglicht gehalveerd.

b $P = 100 \cdot 0,75^d$

$$100 \cdot 0,75^d = P$$

$$0,75^d = \frac{1}{100}P$$

$$d = {}^{0,75}\log\left(\frac{1}{100}P\right)$$

c $A = 60 + 2 \cdot {}^{0,9}\log(d)$

$$A = {}^{0,9}\log(0,9^{60}) + {}^{0,9}\log(d^2)$$

$$A = {}^{0,9}\log(0,9^{60} \cdot d^2)$$

$$A \approx {}^{0,9}\log(0,0018 \cdot d^2)$$

- d $P = 1$ invullen in de formule van opdracht b geeft

$$d = {}^{0,75}\log\left(\frac{1}{100} \cdot 1\right) = 16,00\dots$$

$d = 16,00\dots$ invullen in de formule van opdracht c geeft

$$A = {}^{0,9}\log(0,0018 \cdot 16,00\dots^2) \approx 7,4$$

Als er nog maar 1% van de hoeveelheid daglicht aanwezig is, dan zijn er nog 7,4 algen per cm^2 .

- 37 a** Met de kettingregel:

$$y = 7 \cdot e^u \text{ en } u = 2x + 1$$

$$\frac{dy}{du} = 7 \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 7 \cdot e^u \cdot 2 = 14 \cdot e^u$$

$$f'(x) = 2 + 14 \cdot e^{2x+1}$$

- b** Met de kettingregel:

$$y = {}^5\log(u) \text{ en } u = 3t$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\ln(5) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{dt} = 3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{\ln(5) \cdot u} \cdot 3 = \frac{3}{\ln(5) \cdot u}$$

De functie k is het product van $g(t) = 5t^2$ en $h(t) = {}^5\log(3t)$.

$$g'(t) = 10t \text{ en } h'(t) = \frac{3}{\ln(5) \cdot 3t} = \frac{1}{\ln(5) \cdot t}$$

Met de productregel:

$$k'(t) = g'(t) \cdot h(t) + g(t) \cdot h'(t)$$

$$k'(t) = 10t \cdot {}^5\log(3t) + 5t^2 \cdot \frac{1}{\ln(5) \cdot t}$$

$$k'(t) = 10t \cdot {}^5\log(3t) + \frac{5t}{\ln(5)}$$

- c** Met de kettingregel:

$$y = 6 \cdot \ln(u) \text{ en } u = p + 1$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{6}{u} \text{ en } \frac{du}{dp} = 1$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dp} = \frac{6}{u} \cdot 1 = \frac{6}{u}$$

$$Q'(p) = -\frac{6}{p+1}$$

- d** De functie W is het quotiënt van $t(a) = 3$ en $n(a) = 7 + 4 \cdot 2^a$.

$$t'(a) = 0 \text{ en } n'(a) = 4 \cdot \ln(2) \cdot 2^a$$

Met de quotiëntregel:

$$W'(a) = \frac{t'(a) \cdot n(a) - t(a) \cdot n'(a)}{(n(a))^2}$$

$$W'(a) = \frac{0 \cdot (7 + 4 \cdot 2^a) - 3 \cdot 4 \cdot \ln(2) \cdot 2^a}{(7 + 4 \cdot 2^a)^2}$$

$$W'(a) = \frac{-12 \cdot \ln(2) \cdot 2^a}{(7 + 4 \cdot 2^a)^2}$$

$$W'(a) \approx \frac{-8,3 \cdot 2^a}{(7 + 4 \cdot 2^a)^2}$$

21 Exponentiële en logaritmische functies

- 38 a** 90% van 3,6 liter is $0,9 \times 3,6 = 3,24$ liter.

De op te lossen vergelijking is $3,6 \cdot (1 - e^{-2,5t}) = 3,24$.

$$1 - e^{-2,5t} = 0,9$$

$$-e^{-2,5t} = -0,1$$

$$e^{-2,5t} = 0,1$$

$$-2,5t = \ln(0,1)$$

$$t = \frac{\ln(0,1)}{-2,5} \approx 0,92$$

Na 0,92 seconden is 90% van de maximale hoeveelheid verse lucht ingeademd.

- b** $L = 3,6 \cdot (1 - e^{-2,5t})$ ofwel $L = 3,6 - 3,6 \cdot e^{-2,5t}$

Met de kettingregel:

$$y = e^u \text{ en } u = -2,5t$$

$$\frac{dy}{du} = e^u \text{ en } \frac{du}{dt} = -2,5$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = e^u \cdot -2,5 = -2,5 \cdot e^u$$

$$\frac{dL}{dt} = -3,6 \cdot -2,5 \cdot e^{-2,5t} \text{ ofwel } \frac{dL}{dt} = 9 \cdot e^{-2,5t}$$

$$t = 0 \text{ invullen in } \frac{dL}{dt} \text{ geeft } \frac{dL}{dt} = 9 \cdot e^{-2,5 \times 0} = 9.$$

Op tijdstip $t = 0$ neemt de hoeveelheid verse lucht toe met 9 liter per seconde.

- c** In de grafiek is af te lezen dat de maximale hoeveelheid verse lucht gelijk is aan 2,2 liter. Hieruit volgt dat $a \cdot 3,6 = 2,2$ dus $a = \frac{2,2}{3,6} = \frac{11}{18} \approx 0,61$.

Onderzoeksopdrachten

- 39 a** In de grafiek is te zien dat de grenswaarde gelijk is aan 28 000.

Als t groter wordt, neemt e^{-bt} af en nadert naar nul. De noemer neemt dan

ook af en nadert naar $1 + c \cdot 0 = 1$. De grenswaarde N is $\frac{a}{1} = a$.

Hieruit volgt dat $a = 28\,000$.

- b** 5 besmettingen op 1 januari 2014 komt overeen met de coördinaten (0, 5).

Deze coördinaten in de formule invullen geeft $\frac{28\,000}{1 + c \cdot e^{-b \cdot 0}} = 5$

$$\frac{28\,000}{1 + c} = 5$$

$$1 + c = \frac{28\,000}{5}$$

$$1 + c = 5600 \text{ dus } c = 5599$$

Halverwege oktober komt ongeveer overeen met $t = 288$.

De coördinaten (288, 10 000) invullen in de formule geeft

$$\frac{28\,000}{1 + 5599 \cdot e^{-b \cdot 288}} = 10\,000$$

$$1 + 5599 \cdot e^{-b \cdot 288} = 2,8$$

$$5599 \cdot e^{-b \cdot 288} = 1,8$$

$$e^{-b \cdot 288} = \frac{1,8}{5599} \text{ dus } -b \cdot 288 = \ln\left(\frac{1,8}{5599}\right) \text{ en } b = \frac{\ln\left(\frac{1,8}{5599}\right)}{-288} \approx 0,028.$$

40 a $v = 80$ invullen in de formule geeft

$$L = 89,5 - 9,9 \cdot \log(80a) + 0,16 \cdot 80 - 0,03a$$

$$L = 102,3 - 9,9 \cdot \log(80a) - 0,03a$$

Met de kettingregel:

$$y = -9,9 \cdot \log(u) \text{ en } u = 80a$$

$$\frac{dy}{du} = -9,9 \cdot \frac{1}{\ln(10) \cdot u} = \frac{-9,9}{\ln(10) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{da} = 80$$

$$\frac{dy}{da} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{da} = \frac{-9,9}{\ln(10) \cdot u} \cdot 80 = \frac{-792}{\ln(10) \cdot u}$$

$$\frac{dL}{da} = \frac{-792}{\ln(10) \cdot 80a} - 0,03$$

De teller is negatief en de noemer $\ln(10) \cdot 80a$ is altijd positief, want a is

positief en $\ln(10)$ ook. Hieruit volgt dat de uitkomst van de breuk $\frac{-792}{\ln(10) \cdot u}$

altijd negatief is en dus is de uitkomst van $\frac{dL}{da} = \frac{-792}{\ln(10) \cdot u} - 0,03$ ook altijd

negatief. De grafiek van L is dalend. Hieruit kan geconcludeerd worden dat de lawaaioverlast afneemt als de afstand tot de snelweg groter wordt.

b $a = 100$ invullen in de formule:

$$L = 89,5 - 9,9 \cdot \log(v \cdot 100) + 0,16v - 0,03 \cdot 100$$

$$L = 89,5 - 9,9 \cdot \log(100v) + 0,16v - 3$$

$$L = 86,5 - 9,9 \cdot \log(100v) + 0,16v$$

$$\text{Invoer: } y_1 = 86,5 - 9,9 \cdot \log(100x) + 0,16x$$

$$\text{Venster: } 0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 100$$

Optie: minimum

De coördinaten van de top die bij een minimum hoort, zijn (26,872; 56,849).

Het gemiddelde lawaainiveau bij deze woning is minimaal bij een gemiddelde snelheid van 27 km per uur.

Samenvatting

S1 a $s = 10^r$

$$10^r = s$$

$$r = \log(s)$$

c $s = 5 - 4 \cdot 0,81^r$

$$5 - 4 \cdot 0,81^r = s$$

$$-4 \cdot 0,81^r = s - 5$$

$$0,81^r = -\frac{1}{4}s + 1\frac{1}{4}$$

$$r = {}^{0,81}\log\left(-\frac{1}{4}s + 1\frac{1}{4}\right)$$

b $s = 3 \cdot 1,2^r$

$$3 \cdot 1,2^r = s$$

$$1,2^r = \frac{1}{3}s$$

$$r = {}^{1,2}\log\left(\frac{1}{3}s\right)$$

d $s = 9 + e^{-0,25r}$

$$9 + e^{-0,25r} = s$$

$$e^{-0,25r} = s - 9$$

$$-0,25r = \ln(s - 9)$$

$$r = -4 \cdot \ln(s - 9)$$

S2 a $y = {}^{0,65}\log(x)$

$${}^{0,65}\log(x) = y$$

$$x = 0,65^y$$

c $y = \log(21 + x)$

$$\log(21 + x) = y$$

$$21 + x = 10^y$$

$$x = 10^y - 21$$

b $y = 7 + {}^8\log(0,1x)$

$$7 + {}^8\log(0,1x) = y$$

$${}^8\log(0,1x) = y - 7$$

$$0,1x = 8^{y-7}$$

$$x = 10 \cdot 8^{y-7}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $y = 2 + \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$

$$2 + \frac{1}{2} \cdot \ln(x) = y$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln(x) = y - 2$$

$$\ln(x) = 2y - 4$$

$$x = e^{2y-4}$$

21 Exponentiële en logaritmische functies

S3 a $g'(t) = 12 \cdot e^t$

b Met de kettingregel:

$$y = \frac{1}{4} \cdot e^u \text{ en } u = 4x - 1$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{4} \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{4} \cdot e^u \cdot 4 = e^u$$

$$A'(x) = e^{4x-1}$$

S4 a $f'(x) = 4 \cdot \ln(1,6) \cdot 1,6^x$

$$f'(x) \approx 1,88 \cdot 1,6^x$$

b Met de kettingregel:

$$y = 10^u \text{ en } u = -t$$

$$\frac{dy}{du} = \ln(10) \cdot 10^u \text{ en } \frac{du}{dx} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \ln(10) \cdot 10^u \cdot -1 = -\ln(10) \cdot 10^u$$

$$B'(t) = -\ln(10) \cdot 10^{-t} + 10$$

$$B'(t) \approx -2,30 \cdot 10^{-t} + 10$$

S5 a $\frac{dN}{dt} = 800 \cdot \ln(3) \cdot 3^t$

$$\frac{dN}{dt} \approx 878,9 \cdot 3^t$$

b $t = 2$ invullen in $\frac{dN}{dt}$ geeft

$$\frac{dN}{dt} = 878,9 \cdot 3^2 = 7910,1$$

Op $t = 2$ neemt het aantal bacteriën toe met een snelheid van 7910 bacteriën per uur.

S6 a $f'(x) = 7 \cdot \frac{1}{x} = \frac{7}{x}$

b De functie h is het product van $f(t) = 5t$ en $g(t) = {}^{0,65}\log(t)$.

$$f'(t) = 5 \text{ en } g'(t) = \frac{1}{\ln(0,65) \cdot t}$$

Met de productregel:

$$h'(t) = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

$$h'(t) = 5 \cdot {}^{0,65}\log(t) + 5t \cdot \frac{1}{\ln(0,65) \cdot t}$$

$$h'(t) = 5 \cdot {}^{0,65}\log(t) + \frac{5t}{\ln(0,65)t}$$

$$h'(t) = 5 \cdot {}^{0,65}\log(t) + \frac{5}{\ln(0,65)}$$

$$h'(t) = 5 \cdot {}^{0,65}\log(t) - 11,61$$

c Met de kettingregel:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \log(u) \text{ en } u = 1 - 2n$$

$$\frac{dy}{du} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln(10) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{dn} = -2$$

$$\frac{dy}{dn} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dn} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln(10) \cdot u} \cdot -2 = \frac{1}{\ln(10) \cdot u}$$

$$W'(n) = \frac{1}{\ln(10) \cdot (1 - 2n)}$$

$$W'(n) \approx \frac{1}{2,30 - 4,61 \cdot n}$$

d De functie T is het quotiënt van $t(q) = q$ en $n(q) = \ln q$.

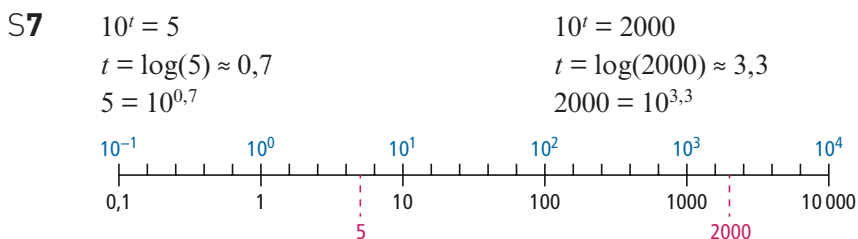
$$t'(q) = 1 \text{ en } n'(q) = \frac{1}{q}$$

Met de quotiëntregel:

$$T'(q) = \frac{t'(q) \cdot n(q) - t(q) \cdot n'(q)}{(n(q))^2}$$

$$T'(q) = \frac{1 \cdot \ln(q) - q \cdot \frac{1}{q}}{(\ln(q))^2}$$

$$T'(q) = \frac{\ln(q) - 1}{(\ln(q))^2}$$



- S8 a Je kunt zien dat er op de verticale as een logaritmische schaalverdeling is gebruikt omdat de getallen bij de as steeds met 10 zijn vermenigvuldigd.
- b b is de startwaarde, de waarde van N bij $t = 0$. $t = 0$ hoort bij 1 januari 2015 en op dat moment is $N = 40$. Hieruit volgt dat $b = 40$.
- c Op de grafiek liggen de punten met coördinaten $(0, 40)$ en $(5, 200)$.

De groeifactor per 5 jaar is $\frac{200}{40} = 5$ dus de groeifactor per jaar is

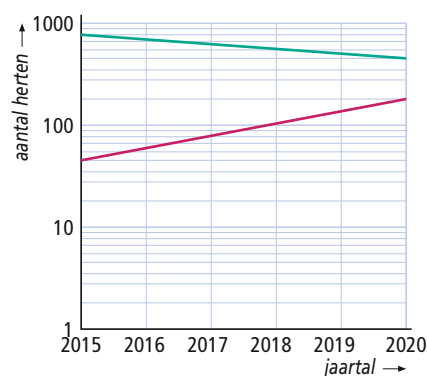
$$g = 5^{\frac{1}{5}} \approx 1,380.$$

d Voor 1 januari 2025 geldt $t = 10$.

Op 1 januari 2025 zullen er $40 \cdot 1,380^{10} \approx 1002$ herten zijn.

e

t	0	5
N	800	499



21 Exponentiële en logaritmische functies

Test jezelf

- T1 a** $A = 6 - 2 \cdot 0,75^t$
 $6 - 2 \cdot 0,75^t = A$
 $-2 \cdot 0,75^t = A - 6$
 $0,75^t = -\frac{1}{2}A + 3$
 $t = {}^{0,75}\log\left(-\frac{1}{2}A + 3\right)$
- b** $A = e^{0,5-3t}$
 $e^{0,5-3t} = A$
 $0,5 - 3t = \ln(A)$
 $-3t = \ln(A) - 0,5$
 $t = -\frac{1}{3} \cdot \ln(A) + \frac{1}{6}$
- c** $A = 5 \cdot {}^4\log(t) + 1$
 $5 \cdot {}^4\log(t) + 1 = A$
 $5 \cdot {}^4\log(t) = A - 1$
 ${}^4\log(t) = \frac{1}{5}A - \frac{1}{5}$
 $t = 4^{\frac{1}{5}A - \frac{1}{5}}$
- d** $\frac{1}{2}A = \ln(t - 1) - 8$
 $\ln(t - 1) - 8 = \frac{1}{2}A$
 $\ln(t - 1) = \frac{1}{2}A + 8$
 $t - 1 = e^{\frac{1}{2}A + 8}$
 $t = e^{\frac{1}{2}A + 8} + 1$
- T2 a** Het aantal liter chemische vloeistof in de tank neemt met 70% per minuut af.
- b** $V = 200 \cdot 0,30^t$
 $200 \cdot 0,30^t = V$
 $0,30^t = \frac{1}{200} V$
 $t = {}^{0,30}\log\left(\frac{1}{200} V\right)$
- c** De helft van de hoeveelheid chemische vloeistof is verwijderd als
 $V = 200 : 2 = 100$.
 $V = 100$ invullen in de formule van opdracht b geeft
 $t = {}^{0,30}\log\left(\frac{1}{200} \cdot 100\right) = 0,5757\dots$
 De helft van de hoeveelheid chemische vloeistof is verdwenen na
 $0,5757\dots \times 60 \approx 35$ seconden.
- d** $\frac{dV}{dt} = 200 \cdot \ln(0,30) \cdot 0,30^t$
 $\frac{dV}{dt} \approx -240,8 \cdot 0,30^t$
- e** $t = 1$ invullen in $\frac{dV}{dt}$ geeft $\frac{dV}{dt} = -240,8 \cdot 0,30^1 \approx -72,2$.
 Na precies één minuut neemt de hoeveelheid chemische vloeistof af met 72,2 liter per minuut.
- f** De op te lossen vergelijking is $-240,8 \cdot 0,30^t = -1$.
 $0,30^t = \frac{1}{240,8}$
 $t = {}^{0,30}\log\left(\frac{1}{240,8}\right) \approx 4,55$
 Na 4 minuten en $0,55 \times 60 \approx 33$ seconden is de afnamesnelheid van de hoeveelheid chemische vloeistof gelijk aan één liter per minuut.
- T3 a** $f'(x) = -8 \cdot \ln(0,91) \cdot 0,91^x$
 $f'(x) \approx 0,75 \cdot 0,91^x$
- b** Met de kettingregel:
 $y = \frac{1}{2} \cdot e^u$ en $u = 5x - 1$
 $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} \cdot e^u$ en $\frac{du}{dx} = 5$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \cdot e^u \cdot 5 = 2\frac{1}{2} \cdot e^u$
 $g'(x) = 2\frac{1}{2} \cdot e^{5x-1}$

c Met de kettingregel:

$$y = 12 \cdot e^u \text{ en } u = -0,28t$$

$$\frac{dy}{du} = 12 \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dt} = -0,28$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 12 \cdot e^u \cdot -0,28 = -3,36 \cdot e^u$$

De functie h is het product van $f(t) = 300$ en $g(t) = 1 + 12 \cdot e^{-0,28t}$.

$$f'(t) = 0 \text{ en } g'(t) = -3,36 \cdot e^{-0,28t}$$

Met de productregel:

$$h'(t) = \frac{f'(t) \cdot g(t) - f(t) \cdot g'(t)}{(g(t))^2}$$

$$h'(t) = \frac{0 \cdot (1 + 12 \cdot e^{-0,28t}) - 300 \cdot -3,36 \cdot e^{-0,28t}}{(1 + 12 \cdot e^{-0,28t})^2}$$

$$h'(t) = \frac{1008 \cdot e^{-0,28t}}{(1 + 12 \cdot e^{-0,28t})^2}$$

d Met de kettingregel:

$$y = 4 \cdot {}^2\log(u) \text{ en } u = \frac{1}{4}s$$

$$\frac{dy}{du} = 4 \cdot \frac{1}{\ln(2) \cdot u} = \frac{4}{\ln(2) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{ds} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{ds} = \frac{4}{\ln(2) \cdot u} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{\ln(2) \cdot u}$$

$$r'(s) = \frac{1}{\ln(2) \cdot \frac{1}{4}s} \text{ ofwel } r'(s) = \frac{4}{\ln(2) \cdot s}$$

$$r'(s) \approx \frac{4}{0,69s}$$

e De functie U is het product van $f(z) = z^3$ en $g(z) = {}^{0,8}\log(z)$.

$$f'(z) = 3z^2 \text{ en } g'(z) = \frac{1}{\ln(0,8) \cdot z}$$

Met de productregel:

$$U'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$$

$$U'(z) = 3z^2 \cdot {}^{0,8}\log(z) + z^3 \cdot \frac{1}{\ln(0,8) \cdot z}$$

$$U'(z) = 3z^2 \cdot {}^{0,8}\log(z) + \frac{z^2}{\ln(0,8)}$$

$$U'(z) \approx 3z^2 \cdot {}^{0,8}\log(z) - 4,48z^2$$

f De functie B is het product van $t(x) = \ln(x)$ en $n(x) = x + 2$.

$$t'(x) = \frac{1}{x} \text{ en } n'(x) = 1$$

Met de quotiëntregel:

$$B'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$B'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (x + 2) - \ln(x) \cdot 1}{(x + 2)^2}$$

$$B'(x) = \frac{\frac{x + 2}{x} - \ln(x)}{(x + 2)^2}$$

21 Exponentiële en logaritmische functies

T4 a $GW = GO - GK$

$$GW = 17,5 \cdot \log(2q + 1) - 2\sqrt{q}$$

b Met de kettingregel:

$$y = 17,5 \cdot \log(u) \text{ en } u = 2q + 1$$

$$\frac{dy}{du} = 17,5 \cdot \frac{1}{\ln(10) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{dq} = 2$$

$$\frac{dy}{dq} = 17,5 \cdot \frac{1}{\ln(10) \cdot u} \cdot 2 = \frac{35}{\ln(10) \cdot u}$$

$$\frac{dGW}{dq} = \frac{35}{\ln(10) \cdot (2q + 1)} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{q}}$$

$$\frac{dGW}{dq} = \frac{35}{\ln(10) \cdot (2q + 1)} - \frac{1}{\sqrt{q}}$$

De gemiddelde winst is maximaal als geldt $\frac{dGW}{dq} = 0$.

$$\text{Invoer: } y_1 = \frac{35}{\ln(10) \cdot (2x + 1)} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Venster: $0 \leq x \leq 100$, $-1 \leq y \leq 1$

Optie: nulpunt

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de q -as zijn (56,758; 0).

De gemiddelde winst is maximaal bij 57 verkochte producten.

c De maximale gemiddelde winst is $17,5 \cdot \log(2 \cdot 57 + 1) - 2\sqrt{57} \approx 20,96$ euro per product. De maximale winst is $57 \times 20,96 \approx \text{€ } 1194,72$.

T5 a De grafiek gaat door de punten (0, 20) en (22, 1000).

De groeifactor per jaar is $\left(\frac{1000}{20}\right)^{\frac{1}{22}} \approx 1,195$.

Een formule is $N = 20 \cdot 1,195^t$.

b Voor begin 1990 geldt $t = 13$.

Begin 1990 waren er $N = 20 \cdot 1,195^{13} \approx 203$ ransuilen.

c Voor het begin van 1990 geldt $t = 0$ en voor het begin van 1995 geldt $t = 5$.

Begin 1990 waren er $N = 225 - 43 \cdot 0,6^0 = 182$ ransuilen en begin 1995 waren er $N = 225 - 43 \cdot 0,6^5 \approx 222$.

Tussen begin 1990 en begin 1995 is het aantal ransuilen met

$$\frac{222 - 182}{182} \times 100\% \approx 22,0\% \text{ toegenomen.}$$

d $\frac{dR}{dt} = -43 \cdot \ln(0,6) \cdot 0,6^t$

Begin 1995 nam het aantal ransuilen toe met $\frac{dR}{dt} = -43 \cdot \ln(0,6) \cdot 0,6^5 \approx 1,7$ ransuilen per jaar.

e Als t steeds groter wordt, dan neemt $0,6^t$ af en nadert naar nul.

$225 - 43 \cdot 0,6^t$ neemt dan toe en nadert naar $225 - 43 \times 0 = 225$.

De grenswaarde is 225.

T6 a $H = 10$ invullen in de formule geeft

$$M = 16 \cdot \ln(10) + 31 \approx 68$$

Een hond van 10 jaar is in mensenjaren 68 jaar.

b $\frac{dM}{dH} = 16 \cdot \frac{1}{H} = \frac{16}{H}$

De waarde van H is altijd positief. De constante 16 is ook positief. Een positief getal gedeeld door een positief getal is positief, dus de waarde van

$\frac{dM}{dH}$ is altijd positief. Daarom is de grafiek van H stijgend.

Als H steeds groter wordt, wordt de constante 16 door een steeds groter

getal gedeeld. Hierdoor neemt $\frac{16}{H}$ af en nadert naar nul. Dus de grafiek van H is afnemend stijgend.

- c** In de praktijk betekent dit dat als de leeftijd van een hond toeneemt dat dan zijn mensenleeftijd in verhouding steeds minder toeneemt.

d $M = 16 \cdot \ln(H) + 31$

$$16 \cdot \ln(H) + 31 = M$$

$$16 \cdot \ln(H) = M - 31$$

$$\ln(H) = \frac{M - 31}{16}$$

$$H = e^{\frac{M-31}{16}}$$

$$H = e^{\frac{1}{16}M - \frac{31}{16}}$$

$$H = e^{\frac{1}{16}M} \cdot e^{-\frac{31}{16}}$$

$$H = e^{\frac{31}{16}} \cdot \left(e^{\frac{1}{16}}\right)^M$$

$$H \approx 0,1441 \cdot e^{0,0625M}$$

- e** $M = 75$ invullen in de formule van opdracht d geeft

$$H \approx 0,1441 \cdot e^{0,0625 \cdot 75} \approx 15,65$$

De echte leeftijd van een hond als deze 75 mensenjaren oud is, is 15 jaren en $0,65 \times 12 \approx 8$ maanden.

Extra oefening

E1 a $y = 8^{x-3}$

$$8^{x-3} = y$$

$$x - 3 = {}^8\log(y)$$

$$x = {}^8\log(y) + 3$$

c $y = 3 + \frac{1}{2} \cdot 10^x$

$$3 + \frac{1}{2} \cdot 10^x = y$$

$$\frac{1}{2} \cdot 10^x = y - 3$$

$$10^x = 2y - 6$$

$$x = \log(2y - 6)$$

b $y = 12 - 4 \cdot 0,72^x$

$$12 - 4 \cdot 0,72^x = y$$

$$-4 \cdot 0,72^x = y - 12$$

$$0,72^x = -\frac{1}{4}y + 3$$

$$x = {}^{0,72}\log\left(-\frac{1}{4}y + 3\right)$$

d $y = 50 \cdot e^{-0,001x}$

$$50 \cdot e^{-0,001x} = y$$

$$e^{-0,001x} = \frac{1}{50}y$$

$$-0,001x = \ln\left(\frac{1}{50}y\right)$$

$$x = -1000 \ln\left(\frac{1}{50}y\right)$$

E2 a $s = \log(r)$

$$\log(r) = s$$

$$r = 10^s$$

c ${}^{0,8}\log(r - s) = 1$

$$r - s = 0,8^1$$

$$r = s + 0,8$$

b $s = \frac{2}{3} \cdot {}^7\log(r) - 3$

$$\frac{2}{3} \cdot {}^7\log(r) - 3 = s$$

$$\frac{2}{3} \cdot {}^7\log(r) = s + 3$$

$${}^7\log(r) = 1,5s + 4\frac{1}{2}$$

$$r = 7^{1,5s + 4\frac{1}{2}}$$

d $s = 2 \cdot \ln(0,5r - 3)$

$$2 \cdot \ln(0,5r - 3) = s$$

$$\ln(0,5r - 3) = \frac{1}{2}s$$

$$0,5r - 3 = e^{\frac{1}{2}s}$$

$$0,5r = e^{\frac{1}{2}s} + 3$$

$$r = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}s} + 6$$

21 Exponentiële en logaritmische functies

E3 a $f'(x) = e^x$

b $g(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x - \frac{1}{2}x$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x - \frac{1}{2}$$

c Met de kettingregel:

$$y = e^u \text{ en } u = 3x + 8$$

$$\frac{dy}{du} = e^u \text{ en } \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot 3 = 3 \cdot e^u$$

$$h'(x) = 3 \cdot e^{3x+8}$$

d Met de kettingregel:

$$y = e^u \text{ en } u = 1 - x$$

$$\frac{dy}{du} = e^u \text{ en } \frac{du}{dx} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot -1 = -e^u$$

De functie k is het product van $f(x) = 4x$ en $g(x) = e^{1-x}$.

$$f'(x) = 4 \text{ en } g'(x) = -e^{1-x}$$

Met de productregel:

$$k'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$k'(x) = 4 \cdot e^{1-x} + 4x \cdot -e^{1-x}$$

$$k'(x) = 4 \cdot e^{1-x} - 4x \cdot e^{1-x}$$

E4 a $f'(x) = 7 \cdot \ln(0,8) \cdot 0,8^x$

$$f'(x) \approx -1,56 \cdot 0,8^x$$

b $g'(x) = -5 \cdot \ln(0,91) \cdot 0,91^x$

$$g'(x) \approx 0,47 \cdot 0,91^x$$

c Met de kettingregel:

$$y = 10^u \text{ en } u = 4x + 9$$

$$\frac{dy}{du} = \ln(10) \cdot 10^u \text{ en } \frac{du}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \ln(10) \cdot 10^u \cdot 4 = 4 \ln(10) \cdot 10^u$$

$$h'(x) = 4 \ln(10) \cdot 10^{4x+9}$$

$$h'(x) \approx 9,21 \cdot 10^{4x+9}$$

d De functie k is het quotiënt van $t(x) = 3^x$ en $n(x) = x^3$.

$$t'(x) = \ln(3) \cdot 3^x \text{ en } n'(x) = 3x^2$$

Met de quotiëntregel:

$$k'(x) = \frac{\ln(3) \cdot 3^x \cdot x^3 - 3^x \cdot 3x^2}{x^6}$$

$$k'(x) \approx \frac{1,10 \cdot x^3 \cdot 3^x - 3x^2 \cdot 3^x}{x^6}$$

E5 a Met de kettingregel:

$$y = \ln(u) \text{ en } u = \frac{1}{2}x - 5$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \text{ en } \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2u}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}x - 5\right)}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x - 10}$$

b Met de kettingregel:

$$y = \ln(u) \text{ en } u = 2x$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 2 = \frac{2}{u}$$

Op dezelfde manier kun je laten zien dat de afgeleide van $\ln(3x)$ gelijk is aan $\frac{3}{3x}$.

$$g'(x) = \frac{2}{2x} - \frac{3}{3x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

c De functie h is het product van $f(x) = 6x^2$ en $g(x) = {}^5\log(x)$.

$$f'(x) = 12x \text{ en } g'(x) = \frac{1}{\ln(5) \cdot x}$$

Met de productregel:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$h'(x) = 12x \cdot {}^5\log(x) + 6x^2 \cdot \frac{1}{\ln(5) \cdot x}$$

$$h'(x) = 12x \cdot {}^5\log(x) + \frac{6x}{\ln(5)}$$

$$h'(x) \approx 12x \cdot {}^5\log(x) + 3,73x$$

d Met de kettingregel:

$$y = \log(u) \text{ en } u = x^2 + x + 1$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\ln(10) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\ln(10) \cdot u} \cdot 2x + 1 = \frac{2x + 1}{\ln(10) \cdot u}$$

$$k'(x) = \frac{2x + 1}{\ln(10) \cdot (x^2 + x + 1)}$$

$$k'(x) \approx \frac{2}{2,30x^2 + 2,30x + 2,30}$$

E6

$$10^t = 0,5$$

$$t = \log(0,5) \approx -0,3$$

$$0,5 = 10^{-0,3}$$

$$10^t = 20$$

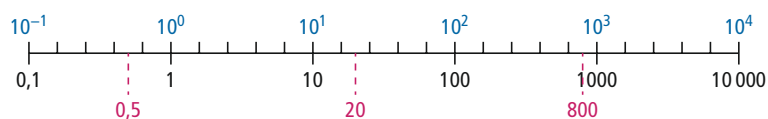
$$t = \log(20) \approx 1,3$$

$$20 = 10^{1,3}$$

$$10^t = 800$$

$$t = \log(800) \approx 2,9$$

$$800 = 10^{2,9}$$



21 Exponentiële en logaritmische functies

E7 a De grafiek gaat door de punten (0; 0,12) en (5, 30).

$$g = \left(\frac{30}{0,12}\right)^{\frac{1}{5}} = 250^{\frac{1}{5}} \approx 3,0$$

b De op te lossen vergelijking is $0,12 \cdot 3,0^t = 100$.

$$3,0^t = \frac{100}{0,12}$$

$$t = {}^{3,0}\log\left(\frac{100}{0,12}\right) = 6,121\dots$$

De oppervlakte was 100 km² na 6 uren en $0,121\dots \times 60 \approx 7$ minuten.

Dat was op het tijdstip 16:07 uur.

c $\frac{dA}{dt} = 0,12 \cdot \ln(3,0) \cdot 3,0^t$

$$t = 6,121\dots \text{ invullen in } \frac{dA}{dt} \text{ geeft}$$

$$\frac{dA}{dt} = 0,12 \cdot \ln(3,0) \cdot 3,0^{6,121\dots} = 109,86\dots$$

De oppervlakte nam op dat tijdstip toe met een snelheid van 110 km²/uur.

E8 a $F = b \cdot g^t$

$$\text{De groeifactor } g = \left(\frac{1065}{140}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,9667\dots$$

$$\text{De beginhoeveelheid } b = 140 : 1,9667\dots^2 = 36,194\dots$$

$$\text{De formule is } F = 36 \cdot 1,967^t.$$

b Op $t = 0$ zijn er $F = \frac{340}{1 + 54 \cdot e^{-0,24 \cdot 0}} \approx 6$.

Als t heel groot wordt, neemt $e^{-0,24t}$ af en nadert naar nul. De noemer neemt

dan ook af en nadert naar $1 + 54 \times 0 = 1$. De grenswaarde is $\frac{340}{1} = 340$.

Volgens de formule is het mogelijk dat er 6 tot 340 fruitvliegjes in de kweekruimte aanwezig zijn.

c Met de kettingregel:

$$y = 54 \cdot e^u \text{ en } u = -0,24t$$

$$\frac{dy}{du} = 54 \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dt} = -0,24$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 54 \cdot e^u \cdot -0,24 = -12,96 \cdot e^u$$

$$\text{De formule } F \text{ is het quotiënt van } f(t) = 340 \text{ en } g(t) = 1 + 54 \cdot e^{-0,24t}$$

$$f'(t) = 0 \text{ en } g'(t) = -12,96 \cdot e^{-0,24t}$$

Met de quotiëntregel:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{f'(t) \cdot g(t) - f(t) \cdot g'(t)}{(g(t))^2}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{0 \cdot (1 + 54 \cdot e^{-0,24t}) - 340 \cdot -12,96 \cdot e^{-0,24t}}{(1 + 54 \cdot e^{-0,24t})^2}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{4406,4 \cdot e^{-0,24t}}{(1 + 54 \cdot e^{-0,24t})^2}$$

d Het aantal fruitvliegjes neemt het snelst toe als $\frac{dF}{dt}$ een maximum heeft.

$$\text{Invoer: } y_1 = \frac{4406,4 \cdot e^{-0,24x}}{(1 + 54 \cdot e^{-0,24x})^2}$$

$$\text{Venster: } 0 \leq x \leq 30, 0 \leq y \leq 30$$

Optie: maximum

De coördinaten van de top van de grafiek die bij een maximum hoort, zijn (16,621; 20,4).

17 dagen na de start van het experiment verdooft Gijs de fruitvliegjes om ze te kunnen tellen.

22 Afsluiting formules en verbanden

Voorkennis

- V1 a** De grafiek snijdt de verticale as in het punt $y = 3$.
Het getal $\frac{1}{2}$ is de toename van de y -coördinaat bij een toename van 1 van de x -coördinaat.
- b** De lijn m gaat door de punten $P(6, -2)$ en $Q(3, 3)$. Dan is

$$a = \frac{\text{toename tweede coördinaat}}{\text{toename eerste coördinaat}} = \frac{3 - (-2)}{3 - 6} = -\frac{5}{3}$$
- c** Gebruik bijvoorbeeld de coördinaten van P , $x = 6$ en $y = -2$.
Vul deze in de vergelijking $y = -\frac{5}{3}x + b$ in.
Je krijgt dan $-2 = -\frac{5}{3} \cdot 6 + b$.
 $-2 = -10 + b$ dus $b = 8$.
- V2 a** Lijn p gaat door $A(8, 1)$ en $B(-2, 6)$.
De richtingscoëfficiënt is $\frac{6 - 1}{-2 - 8} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$ dus $y = -\frac{1}{2}x + b$.
Vul nu de coördinaten van punt $A(8, 1)$ in.
 $1 = -\frac{1}{2} \cdot 8 + b$ dus $b = 5$.
De vergelijking van lijn p is $y = -\frac{1}{2}x + 5$.
- b** Lijn q gaat door $C(-28, 10)$ en $D(20, 46)$.
De richtingscoëfficiënt is $\frac{46 - 10}{20 - (-28)} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$ dus $y = \frac{3}{4}x + b$.
Vul de coördinaten van punt $C(-28, 10)$ in.
 $10 = \frac{3}{4} \cdot (-28) + b$ dus $b = 31$.
De vergelijking van lijn q is $y = \frac{3}{4}x + 31$.
- c** Lijn r gaat door $A(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4})$ en $B(\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2})$.
De richtingscoëfficiënt is $\frac{2\frac{1}{2} - (-2\frac{1}{4})}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{4\frac{3}{4}}{-\frac{1}{4}} = -19$ dus $y = -19x + b$.
Vul de coördinaten van punt $F(\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2})$ in.

$$2\frac{1}{2} = -19 \cdot \frac{1}{4} + b$$

$$b = 2\frac{1}{2} + 4\frac{3}{4} = 7\frac{1}{4}$$

De vergelijking van lijn r is $y = -19x + 7\frac{1}{4}$.
- V3 a** Er is sprake van een lineair verband omdat de grafiek een rechte lijn is.
- b** Gezin A heeft 80 m^3 heeft gebruikt en € 150,50 betaald.
Gezin B heeft 200 m^3 verbruikt en heeft € 342,50 betaald.
De richtingscoëfficiënt van de gevraagde lijn is $\frac{342,5 - 150,5}{200 - 80} = \frac{192}{120} = 1,6$.
De vergelijking van de lijn wordt dan $b = 1,6w + c$. Hier zijn b en w de variabelen en c is het startgetal dat we zoeken.
Met de gegevens van gezin A vind je de vergelijking:

$$150,5 = 1,6 \cdot 80 + c$$

$$c = 150,5 - 128 = 22,5$$

De formule wordt $b = 1,60 \cdot w + 22,50$.

22 Afsluiting formules en verbanden

c De richtingscoëfficiënt wordt nu $\frac{211,85 - 192,25}{143 - 129} = \frac{19,6}{14} = 1,4$.

De vergelijking wordt $b = 1,4 \cdot w + c$.

Je vult bijvoorbeeld de gegevens van Boelens in, je krijgt de vergelijking

$$211,85 = 1,4 \cdot 143 + c$$

$$c = 211,85 - 200,20 = 11,65$$

De formule voor dit waterbedrijf is dus $b = 1,40 \cdot w + 11,65$.

V4 a $y = 5(3x - 1) - 3(x + 2)$
 $y = 15x - 5 - 3x - 6$
 $y = 12x - 11$

b $y = \frac{5x - 7}{30} - \frac{x}{3} - 3x$
 $y = \frac{5}{30}x - \frac{7}{30} - \frac{1}{3}x - 3x$
 $y = \frac{1}{6}x - \frac{2}{6}x - 3x - \frac{7}{30}$
 $y = -3\frac{1}{6}x - \frac{7}{30}$

c $y = x^2 - (x + 3)(x + 7)$
 $y = x^2 - (x^2 + 3x + 7x + 21)$
 $y = x^2 - x^2 - 3x - 7x - 21$
 $y = -10x - 21$

d $y = (x - 8)(2x - 3) - \frac{6x^2 + 4}{3}$
 $y = 2x^2 - 19x + 24 - \left(2x^2 + 1\frac{1}{3}\right)$
 $y = 2x^2 - 19x + 24 - 2x^2 - 1\frac{1}{3}$
 $y = -19x + 22\frac{2}{3}$

V5 a $y = 5x^3 \cdot -2x^{1,3}$
 $y = 5 \cdot -2 \cdot x^3 \cdot x^{1,3}$
 $y = -10x^{3+1,3}$
 $y = -10x^{4,3}$

b $y = \frac{4,8x^{3,7}}{3x^{-1,4}}$
 $y = \frac{4,8}{3} \cdot x^{3,7-(-1,4)}$
 $y = 1,6x^{5,1}$

c $y = 6\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x}$
 $y = 6x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}}$
 $y = 6x^{\frac{3}{4}}$

d $y = x^{1,5} \cdot (2x^{4,2} \cdot x^{-1,8})^2$
 $y = x^{1,5} \cdot (2x^{2,4})^2$
 $y = x^{1,5} \cdot 4x^{4,8}$
 $y = 4x^{6,3}$

V6 a $y = 7 \cdot 5^{x+1}$
 $y = 7 \cdot 5^1 \cdot 5^x$
 $y = 35 \cdot 5^x$

b $y = \frac{5 \cdot 2^x}{8 \cdot 0,5^x}$
 $y = \frac{5}{8} \cdot \frac{2^x}{2^{-x}}$
 $y = \frac{5}{8} \cdot 2^{2x}$
 $y = \frac{5}{8} \cdot 4^x$

c $y = 7 \cdot 2^{-2} \cdot 8^x \cdot 32^{0,2}$
 $y = (7 \cdot 2^{-2} \cdot 32^{0,2}) \cdot 8^x$
 $y = (7 \cdot 2^{-2} \cdot 2) \cdot 8^x$
 $y = 7 \cdot 2^{-1} \cdot 8^x$
 $y = 3\frac{1}{2} \cdot 8^x$

d $y = 6 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3} \cdot 9^x$
 $y = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^x \cdot 9^x$
 $y = 2 \cdot (3 \cdot 9)^x$
 $y = 2 \cdot 27^x$

22.1 Lineaire verbanden

intro Tot een hoeveelheid van 2 m^3 is het bedrag evenredig met de hoeveelheid.
 Bij 2 m^3 of minder betaal je €150,- per m^3 .
 Bij meer dan 2 m^3 betaal je voor elke m^3 extra €50,-.

- 1** A: Op basis van de eerste twee paren in de tabel, namelijk (1, 2) en (2, 5), zou de richtingscoëfficiënt $\frac{5-2}{2-1} = 3$ moeten zijn. Op basis van de laatste twee paren zou dit echter $\frac{14-11}{8-5} = 1$ zijn. Dat kan dus niet, dus geen lineair verband.
 B: Steeds als de waarde van x met 1 toeneemt, neemt y met $1\frac{1}{2}$ toe.
 Als x met 3 toeneemt, neemt y met $4\frac{1}{2}$ toe.
 Dit klopt, het verband is lineair.
 C: Bij de eerste twee paren in de tabel neemt x met 2 toe, en neemt y met 24 af. Dus bij een toename van x met 1, neemt y met 12 af.
 Dit is niet in de hele tabel het geval. Het verband is dus niet lineair.

2 a $0,1q - p = 13$
 $0,1q = p + 13$
 $q = 10(p + 13)$
 $q = 10p + 130$

b $p = 1\frac{1}{2}q - 16$
 $1\frac{1}{2}q = p + 16$
 $\frac{2}{3} \cdot (1\frac{1}{2}q) = \frac{2}{3} \cdot (p + 16)$
 $q = \frac{2}{3}p + 10\frac{2}{3}$

c $18 - 3p + 24q = 0$
 $24q = 3p - 18$
 $q = \frac{1}{24} \cdot (3p - 18)$
 $q = \frac{3}{24}p - \frac{18}{24}$ ofwel $q = \frac{1}{8}p - \frac{3}{4}$

3 a $2x + 8 = 5y - x + 7$
 $5y - x + 7 = 2x + 8$
 $5y = 3x + 1$
 $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$
 Je kunt de vergelijking schrijven in de vorm $y = a \cdot x + b$. Het verband is dus lineair.

b $2x + 8 = 5y - x + 7$ kun je schrijven als $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$ (zie opdracht a).

De bijbehorende vergelijking is $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5} = \frac{1}{2}x + 14\frac{1}{2}$.

Links en rechts vermenigvuldigen met 10 geeft

$$6x + 2 = 5x + 145$$

$$x = 143 \text{ en } y = \frac{1}{2} \cdot 143 + 14\frac{1}{2} = 86$$

c $10y - 6x = 1$
 $10y = 6x + 1$
 $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{10}$

De grafieken bij de twee vergelijkingen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt.

De grafieken lopen evenwijdig en snijden elkaar niet.

22 Afsluiting formules en verbanden

- 4 a** Om 19.45 uur is de temperatuur $14,7^{\circ}\text{C}$.
Om 20.00 uur is de temperatuur $14,4^{\circ}\text{C}$.
- b** De afname is $\frac{14,7 - 14,4}{15} = 0,02^{\circ}\text{C}$ per minuut.
- c** Om 19.55 uur is de temperatuur $14,7 - 10 \times 0,02 = 14,5^{\circ}\text{C}$.
- d** De temperatuur tussen 18.00 uur en 18.45 uur neemt niet lineair af.
- 5 a** De gemiddelde toename per jaar van het aantal eenoudergezinnen is in 20 jaar gelijk aan $\frac{590\,000 - 385\,000}{20} = 10\,250$.
Het aantal eenoudergezinnen is in 2015 ongeveer gelijk aan $385\,000 + 15 \cdot 10\,250 = 538\,750$.
- b** Het aantal eenoudergezinnen is in 2030 ongeveer gelijk aan $590\,000 + 10 \cdot 10\,250 = 692\,500$.
- 6 a** Het gemiddelde gewicht van de Nederlandse vrouw is in 30 jaar 5 kg gestegen. Het gewicht neemt dus $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ kg per jaar toe.
De formule is van de vorm $G = \frac{1}{6}t + b$.
Op $t = 0$ (1981) is het gemiddelde gewicht gelijk aan 65 kg, het startgetal is dus 65.
Het lineaire verband wordt beschreven met de formule $G = \frac{1}{6}t + 65$.
- b** De bijbehorende vergelijking is $66,5 = \frac{1}{6}t + 65$.
 $\frac{1}{6}t = 1\frac{1}{2}$ dus $t = 1\frac{1}{2} : \frac{1}{6} = 9$
Dus 9 jaar na 1981 was het gewicht gemiddeld 66,5 kg.
In 1990 was volgens de formule het gemiddelde gewicht 66,5 kg.
- 7 a** Tussen 1974 en 2011 neemt de bevolking telkens in ongeveer 12 jaar met een miljard toe. De toename is daar dus lineair.
- b** In 1987 waren er 5 miljard mensen.
De toename van 0,5 miljard duurt $12 : 2 = 6$ jaar.
In $1987 + 6 = 1993$ waren er voor het eerst meer dan 5,5 miljard mensen.
- c** De toename tussen 1974 en 2011 is de toename per jaar $3 : 37 \approx 0,08$ miljard.
In 1980 waren er ongeveer $4 + 6 \times 0,08 \approx 4,5$ miljard mensen.
- d** In 2030 zullen er dus volgens dit model $7 + 19 \times 0,08 \approx 8,5$ miljard mensen zijn.
- e** Tussen 2011 en 2020 is de toename 0,8 miljard.
Dit is een toename van $0,8 : 9 \approx 0,09$ miljard per jaar.
De bevolking is dus na 2011 sneller gegroeid.
- 8** De groei van de bevolking tussen 1804 en 1959 was niet lineair.
- 9** Volgens de prognose is de jaarlijkse toename van de bewoners in Amersfoort-Vathorst $\frac{30\,000 - 23\,000}{9} = \frac{7\,000}{9}$.
Het aantal bewoners in Amersfoort-Vathorst op 1 januari 2010 was dus $23\,000 - 6 \cdot \frac{7\,000}{9} \approx 18\,300$.

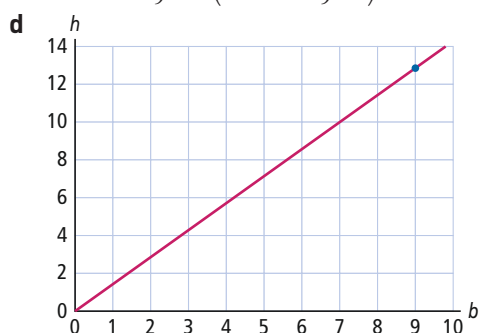
- X1 a** De coördinaten van punt B zijn $(20, -9)$.
Dit betekent dat in 2000 de gierzwaluw op 23 april terugkeerde.
- b** De coördinaten van dat punt zijn $(29, -13)$.
De vroegste datum was in 2009, 13 dagen voor 2 mei.
Dit was dus op 19 april 2009.
- c** Volgens de grafiek komen de gierzwaluwen in 40 jaar 12 dagen eerder terug.
Dit is $\frac{12}{40} = 0,3$ dagen per jaar eerder.
De formule bij de lijn is $n = -0,3t$.
- d** Bij $t = 50$ is $n = -0,3 \times 50 = -15$
De datum is dus 17 april.
- X2 a** Bij ongeveer 13 kg is de melkproductie maximaal. Bij de verhoging van 13 kg naar 14 kg per dag is voor het eerst sprake van een afname. Bij de verhoging van 14 kg naar 15 kg per dag neemt de melkproductie verder af.
- b** Tussen 14 kg en 15 kg krachtvoer per dag neemt de melkproductie met ongeveer $0,11 - 0,03 = 0,08$ kg per dag af.
De afname bij 14 kg is 0,03 kg per dag.
De totale afname bij 18 kg is dus $0,03 + 4 \times 0,08 = 0,35$ kg per dag.

22.2 Evenredig en omgekeerd evenredig

intro Als het aantal kippen a keer zo groot wordt, wordt de oppervlakte per kip a keer zo klein.

Als het aantal kippen a keer zo groot wordt, wordt de totale hoeveelheid voer per dag ook a keer zo groot.

- 10 a** De breedte wordt 5 keer zo groot.
De hoogte is dan $5 \times 13 = 65$ cm.
- b** De hoogte wordt dan ook 8 keer zo groot.
- c** De hoogte van de foto is $\frac{13}{9}$ keer groter dan de breedte.
Dus $h = \frac{13}{9} \cdot b$ (of $h = 1\frac{4}{9} \cdot b$)



- 11 a**
- | | | | | | |
|---------------|-----|-----|----|---|------|
| lengte in cm | 0,1 | 0,5 | 1 | 6 | 96 |
| breedte in cm | 240 | 48 | 24 | 4 | 0,25 |

b Dan wordt de lengte zes keer zo klein, ofwel $\frac{1}{6}$ keer zo groot.

c Het verband tussen b en l is $b \cdot l = 24$ ofwel $b = \frac{24}{l}$

Op de puntjes moet 24 staan.

22 Afsluiting formules en verbanden

12 a Bij tabel A geldt $\frac{11}{2} = 5,5$; $\frac{38,5}{7} = 5,5$; $\frac{66}{12} = 5,5$ en $\frac{99}{18} = 5,5$.

Het verband tussen p en q is recht evenredig.

Bij tabel B is het verband niet evenredig en niet omgekeerd evenredig.

Bij tabel C geldt $5 \cdot 13,2 = 66$; $8 \cdot 8,25 = 66$; $12 \cdot 5,5 = 66$ en $24 \cdot 2,75 = 66$.

Het verband tussen x en y is omgekeerd evenredig.

b Bij tabel A hoort de formule $q = 5,5 \cdot p$.

Bij tabel B neemt w met 3 af als u met 1 toeneemt.

Als $u = 0$ dan is $w = 1 + 3 \cdot 3 = 10$

Een formule bij tabel B is $w = 10 - 3u$.

Bij tabel C hoort de formule $x \cdot y = 66$ ofwel $y = \frac{66}{x}$.

13 a Simon loopt deze 150 m in 187 stappen. Zijn staplengte is dus $S = \frac{150}{187}$.

Die 187 stappen doet hij in 100 seconden. Het aantal stappen per minuut is

$$n = \frac{60}{100} \cdot 187 = 112,2.$$

Voor Simon geldt dus $\frac{n}{S} = \frac{112,2}{\frac{150}{187}} \approx 140$.

De formule klopt in dit geval.

b Voor Sietse geldt een staplengte $S = 0,85$.

Volgens de formule is $\frac{n}{0,85} = 140$

Dus het aantal stappen per minuut is $n = 0,85 \times 140 = 119$.

In een uur doet hij dus 60×119 stappen van 0,85 meter.

De afgelegde afstand per uur is $60 \times 119 \times 0,85 \text{ m} = 6069 \text{ m} \approx 6,1 \text{ km}$.

Zijn snelheid is 6,1 km per uur.

c Uitgaande van $\frac{n}{S} = 140$ is het aantal stappen per minuut $n = 140 \cdot S$.

Bij een staplengte van S meter legt de wandelaar dus $60 \times 140 \cdot S \cdot S$ meter per uur af ofwel $8400 \cdot S^2$ meter per uur.

Dit is $8,4 \cdot S^2$ km per uur.

14 a 90 cm is 0,9 m dus $d = 0,9$.

$$0,9 = \frac{270}{h^{1,54}}$$

$$h^{1,54} = \frac{270}{0,9} = 300$$

$$h = 300^{\frac{1}{1,54}} \approx 40,6 \text{ meter.}$$

b h wordt twee keer zo groot, dus vervang h door $2h$.

$$d = \frac{270}{(2h)^{1,54}}$$

$$d = \frac{270}{2^{1,54} \cdot h^{1,54}}$$

$$d = \frac{1}{2^{1,54}} \cdot \frac{270}{h^{1,54}}$$

$$d \text{ wordt } \frac{1}{2^{1,54}} \approx 0,344 \text{ keer zo groot.}$$

- 15** Bij een windmolen van dit type geldt $1400 = 0,000197 \cdot v^3 \cdot L^2$.

$$v^3 = \frac{1400}{0,000197 \cdot L^2}$$

$$v^3 = \frac{1400}{0,000197} L^{-2}$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{1400}{0,000197}} \cdot L^{-\frac{2}{3}} \approx 192 \cdot L^{-\frac{2}{3}}$$

$$v \approx 192 \cdot L^{-\frac{2}{3}}$$

De gevraagde exponent is $-\frac{2}{3}$.

- X3 a** $H = 0,2$ en $D = 15$ invullen geeft $V = 3,72 \cdot \frac{15}{58,5 \cdot 0,2} \approx 4,77$ dus het vriespunt daalt dus zelfs tot onder de -4 °C.

b $V = 3,72 \cdot \frac{D}{58,5 \cdot H}$

$$V = \left(\frac{3,72}{58,5 \cdot H} \right) \cdot D$$

Voor een vaste waarde van H is V dus evenredig met D .

c $4 = 3,72 \cdot \frac{D}{58,5 \cdot H}$

$$4 = \frac{D}{H} \cdot \frac{3,72}{58,5}$$

$$\frac{D}{H} \cdot \frac{3,72}{58,5} = 4$$

$$\frac{D}{H} = \frac{58,5 \cdot 4}{3,72} \approx 62,9 \text{ ofwel } D = 62,9 \cdot H$$

De hoeveelheid neerslag H is uitgedrukt in kg/m^2 en de dosering D is uitgedrukt in gram/m^2 .

De dosering d in kg/m^2 is $d = 0,001 \cdot D$.

$$d = 0,001 \cdot 62,9 \cdot H = 0,0629 \cdot H$$

Het gevraagde percentage is ongeveer 6,3%.

- X4 a** Voor Marian geldt $20 < BMI \leq 25$.

$$\frac{g}{1,63^2} = 20 \text{ geeft } g = 20 \cdot 1,63^2 \approx 53,1 \text{ kg.}$$

$$\frac{g}{1,63^2} = 25 \text{ geeft } g = 25 \cdot 1,63^2 \approx 66,4 \text{ kg.}$$

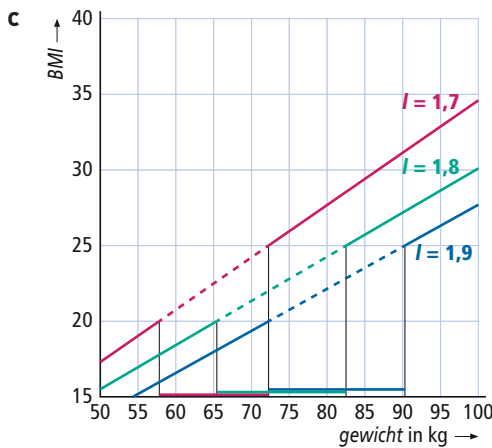
Het gewicht van Marian ligt tussen 53 kg en 66 kg.

b Bij $l = 1,7$ is $BMI = \frac{g}{1,7^2} \approx 0,346 \cdot g$ en $c \approx 0,346$.

Bij $l = 1,8$ is $BMI = \frac{g}{1,8^2} \approx 0,309 \cdot g$ en $c \approx 0,309$.

Bij $l = 1,9$ is $BMI = \frac{g}{1,9^2} \approx 0,277 \cdot g$ en $c \approx 0,277$.

22 Afsluiting formules en verbanden



d In de grafiek bij opdracht c zie je dat:

Bij $l = 1,7$, het gezonde gewicht ligt tussen ongeveer 58 kg en 72 kg.

Bij $l = 1,8$, het gezonde gewicht ligt tussen ongeveer 65 kg en 81 kg.

Bij $l = 1,9$, het gezonde gewicht ligt tussen ongeveer 72 kg en 90 kg.

22.3 Formules opstellen

intro $b \cdot 0,9^t$ nadert op den duur naar nul en T naar 20 graden Celsius, dus $a = 20$.

Op het tijdstip $t = 0$ is $T = 95$.

$20 + b \cdot 0,9^0 = 95$ dus $b \cdot 0,9^0 = 75$ ofwel $b \cdot 1 = 75$.

De gevraagde waarden zijn $a = 20$ en $b = 75$.

16 a Als je naar de eerste twee paren kijkt zou de richtingscoëfficiënt

$\frac{24,2 - 12,1}{2,2 - 1,0} = 10\frac{1}{12}$ moeten zijn, terwijl de laatste twee paren een

richtingscoëfficiënt geven van $\frac{53,1 - 37,2}{5,4 - 3,6} \approx 8,83$, dus het verband is niet lineair.

b Indien dit het geval is, dan geldt een formule van de vorm $M = b \cdot g^S$.

De groeifactor g tussen de eerste twee paren getallen is $\left(\frac{24,2}{12,1}\right)^{\frac{1}{1,2}} \approx 1,78$.

De groeifactor g tussen de laatste twee paren getallen is $\left(\frac{53,1}{37,2}\right)^{\frac{1}{1,8}} \approx 1,22$.

Een exponentieel verband kan niet twee verschillende groeifactoren hebben, dus hier is geen exponentieel verband.

c $S = 1$ en $M = 12,1$ invullen in $M = p \cdot S^q$ geeft $12,1 = p \cdot 1^q$ en $1^q = 1$ voor alle waarden van q .

Hieruit volgt $p = 12,1$.

d Bij de vergelijking $31,2 = p \cdot 2,9^q$ weet je niet de uitkomst van $2,9^q$ en hou je twee variabelen.

Bij de vergelijking $12,1 = p \cdot (1,0)^q$ is $(1,0)^q$ altijd 1.

Dus valt hier de variabele q uit de vergelijking weg.

e Uitgaande van $M = 12,1 \cdot S^q$ moet dit kloppen voor $M = 53,1$ en $S = 5,4$.

$$53,1 = 12,1 \cdot (5,4)^q$$

$$(5,4)^q = \frac{53,1}{12,1}$$

$$q = {}^{5,4}\log\left(\frac{53,1}{12,1}\right) \approx 0,877.$$

f De formule wordt dus nu $M = 12,1 \cdot S^{0,877}$.

g

S	1,0	2,2	2,9	3,6	5,4
M	12,1	24,16	30,78	37,21	53,1

De tabellen komen overeen. Je kunt dus concluderen dat er sprake is van een machtsverband.

17 a De formule is $y = c \cdot x^n$.

Als je de gegevens van het eerste paar invult dan krijg je $5 = c \cdot 1^n$ ofwel $c = 5$.

b De formule heeft de vorm $y = 5 \cdot x^n$. Je kunt de waarde van n bepalen door de gegevens van een van de andere paren te gebruiken, bijvoorbeeld de laatste. Je krijgt dan $140 = 5 \cdot 8^n$.

$$8^n = 28 \text{ dus } n = {}^8\log 28 \approx 1,60$$

De formule is $y = 5 \cdot x^{1,60}$.

c Als x vijf keer zo groot wordt, vervang je x door $5x$.

$$y = 5 \cdot (5x)^{1,60}$$

$$y = 5 \cdot 5^{1,60} \cdot x^{1,60}$$

y wordt dus $5^{1,6} \approx 13,1$ keer zo groot.

18 a Een lineaire formule is van de vorm $D = aK + b$.

$$\text{De richtingscoëfficiënt } a = \frac{17 - 4}{6 - 1} = 2,6, \text{ je krijgt } D = 2,6 \cdot K + b.$$

Vul bijvoorbeeld $K = 1$ en $D = 4$ in om het startgetal b te vinden:

$$4 = 2,6 \cdot 1 + b \text{ dus } b = 1,4.$$

De gezochte lineaire formule is $D = 2,6 \cdot K + 1,4$.

b Een exponentiële formule is van de vorm $D = b \cdot g^K$.

$$\text{De groeifactor } g \text{ is } \left(\frac{17}{4}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1,336.$$

Vul bijvoorbeeld $K = 1$ en $D = 4$ in om de beginhoeveelheid te vinden.

$$4 = b \cdot 1,336 \dots^1$$

$$b = \frac{4}{1,336 \dots} \approx 2,995$$

De exponentiële formule is $D = 2,995 \cdot 1,336^K$.

c Een machtsformule bij de tabelwaarden heeft de vorm $D = c \cdot K^n$.

Invullen van de meetgegevens geeft $4 = c \cdot 1^n$ dus $c = 4$.

$D = 4 \cdot K^n$, nu $K = 6$ en $D = 17$ invullen

$$17 = 4 \cdot 6^n$$

$$6^n = \frac{17}{4}$$

$$n = {}^6\log\left(4\frac{1}{4}\right) \approx 0,808$$

De machtsformule is $D = 4 \cdot K^{0,808}$.

19 In 2010 telde met 348 roofvogels, dus als $t = 0$ dan $R = 348$.

Dit invullen in de vergelijking $R = a - b \cdot 0,6^t$ geeft $348 = a - b \cdot 0,6^0$ en omdat $0,6^0 = 1$ geldt $348 = a - b$ ofwel $a = b + 348$.

In 2014 telde men 504 roofvogels, dus als $t = 4$, dan is $R = 504$.

Dit invullen in de vergelijking $R = a - b \cdot 0,6^t$ geeft

$$504 = a - b \cdot 0,6^4$$

$$504 = a - 0,1296 \cdot b$$

$$a = 504 + 0,1296 \cdot b$$

22 Afsluiting formules en verbanden

De uitdrukkingen in a aan elkaar gelijk stellen geeft

$$b + 348 = 504 + 0,1296 \cdot b$$

$$0,8704 \cdot b = 156 \text{ dus } b = \frac{156}{0,8704} \approx 179,23 \text{ en } a \approx 179,23 + 348 = 527,23.$$

- 20 a** Als t steeds groter wordt dan nadert $\frac{a}{t+c}$ naar nul.

Dan nadert $T = \frac{a}{t+c} + b$ naar b .

De tabel suggereert dat voor grote waarden van t , T nadert naar 6, dus $b = 6$.

De formule wordt nu $T = \frac{a}{t+c} + 6$.

- b** $t = 0$ en $T = 18$ invullen in de formule geeft $18 = \frac{a}{0+c} + 6$.

$$12 = \frac{a}{c} \text{ dus } a = 12c.$$

- c** $t = 20$ en $T = 8,4$ invullen in de formule geeft $8,4 = \frac{a}{20+c} + 6$.

$$\frac{a}{20+c} = 2,4 \text{ ofwel } a = 48 + 2,4c$$

- d** Een vergelijking bij de formules van opdracht b en c wordt $12c = 48 + 2,4c$.

$$9,6c = 48$$

$$c = 48 : 9,6 = 5$$

$$a = 12c = 12 \times 5 = 60$$

De formule is $T = \frac{60}{t+5} + 6$.

e

t	T	T via formule
0	18	18
5	12	12
10	10	10
15	9	9
20	8,4	8,4
200	6,3	6,29
2000	6,03	6,0299
20000	6,003	6,002999

De formule past goed bij de gegeven tabel.

- 21 a** De dagproductie verschilt ongeveer $16,0 - 9,5 = 6,5$ kg.

b $M(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$

$$M'(t) = 2a \cdot t + b.$$

Voor de t -coördinaat van de top geldt dat de afgeleide nul is als $t = 12$, dus

$$2a \cdot 12 + b = 0$$

$$24a + b = 0 \text{ ofwel } b = -24a.$$

- c** Omdat $b = -24a$ is de formule voor $M(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ te schrijven als

$$M(t) = a \cdot t^2 - 24a \cdot t + c.$$

De grafiek gaat door (4, 6), dit invullen geeft

$$6 = a \cdot 4^2 - 24a \cdot 4 + c.$$

$$6 = 16a - 96a + c$$

$$6 = -80a + c$$

$$c = 80a + 6$$

- d De formule voor M kan nu worden geschreven als

$$M(t) = a \cdot t^2 - 24a \cdot t + 80a + 6.$$

De grafiek gaat ook door (12; 9,8), dit invullen geeft

$$9,8 = a \cdot 12^2 - 24a \cdot 12 + 80a + 6$$

$$9,8 = 144a - 288a + 80a + 6$$

$$3,8 = -64a \text{ dus } a = 3,8 : -64 \approx -0,06$$

- e $b = -24 \times -0,0593... = 1,425$

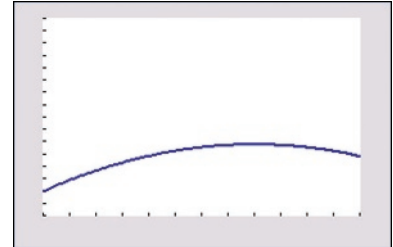
$$c = 80 \times -0,0593... + 6 = 1,25$$

Een formule is $M = -0,06t^2 + 1,425t + 1,25$

$$\text{Invoer: } y_1 = -0,06x^2 + 1,425x + 1,25$$

$$\text{Venster: } 4 \leq x \leq 16, 4 \leq y \leq 20$$

De grafiek bij de gevonden formule komt goed overeen met de kromme voor vaarzen.



- X5 a De oppervlakte van het grondvlak is $2x$, de hoogte is $9 - a \cdot x$.

$$\text{De inhoud } I = \frac{1}{3} \cdot 2x \cdot (9 - ax) = \frac{2}{3}x \cdot (9 - ax) = 6x - \frac{2}{3}ax^2.$$

- b Voor $a = 2$ is de inhoud $I_2(x) = 6x - 1\frac{1}{3}x^2$.

$$I'_2(x) = 6 - 2\frac{2}{3}x.$$

De inhoud is maximaal als $I'_2(x) = 0$ dus als $6 - 2\frac{2}{3}x = 0$.

$$2\frac{2}{3}x = 6 \text{ dus } x = 6 : 2\frac{2}{3} = 2\frac{1}{4}.$$

- c $I'_a(x) = 6 - 1\frac{1}{3}ax$

De inhoud is maximaal als $I'_a(x) = 0$ ofwel $6 - 1\frac{1}{3}ax = 0$.

$$ax = 6 : 1\frac{1}{3} = 4\frac{1}{2} \text{ dus } x_{\text{MAX}} = \frac{4\frac{1}{2}}{a} \text{ ofwel } x_{\text{MAX}} = \frac{9}{2a}.$$

- X6 a De evenwichtsstand is $(13 + 57) : 2 = 35$ dus $a = 35$.

De amplitude is $57 - 35 = 22$ dus $b = 22$.

De periode is 24 dagen dus $c = 2\pi : 24 = \frac{1}{12}\pi$.

De formule is dus $F = 35 + 22 \sin\left(\frac{1}{12}\pi(t - 3)\right)$.

- b De evenwichtsstand is $a = 2$.

De amplitude is $3,8 - 2 = 1,8$ dus $b = 1,8$.

De periode is 24 dagen dus $c = 2\pi : 24 = \frac{1}{12}\pi$

De grafiek gaat stijgend door de evenwichtstand bij $t = 18$.

De formule is $G = 2 + 1,8 \sin\left(\frac{1}{12}\pi(t - 18)\right)$.

22.4 Redeneren met formules

intro Als a steeds groter wordt, nadert de uitkomst van de breuk naar nul en nadert G naar 0,015.

Gaat a van 1 naar 2, dan gaat G van 5,015 naar 2,515; een daling van 2,5.

Gaat a van 100 naar 101, dan gaat G van 0,065 naar 0,0645...; dat is een daling van 0,0005, dus een veel kleinere daling.

- 22 a Als t steeds groter wordt nadert $0,756^t$ naar nul, $35 \cdot 0,756^t$ nadert dus ook naar nul. En de noemer $1 + 35 \cdot 0,756^t$ nadert naar $1 + 0 = 1$.

De noemer van de breuk nadert naar 1 dus P nadert naar $\frac{100}{1} = 100$.

-

-

- $\underline{x} =$

e De grenswaarde is $3\frac{1}{3}$ als $\frac{2}{p} = 3\frac{1}{3}$.

$$3\frac{1}{3} \cdot p = 2 \text{ dus } p = 2 : 3\frac{1}{3} = \frac{3}{5}.$$

f In de formule $A = \frac{2}{p} - \frac{1}{x}$ is $p > 0$ dus $\frac{2}{p} > 0$.

Als $x > 0$ groter wordt dan wordt $\frac{1}{x}$ kleiner en $\frac{2}{p} - \frac{1}{x}$ wordt groter.

Dus is A voor $x > 0$ een stijgende functie van x voor elke $p > 0$.

g In de formule $A = \frac{2}{p} - \frac{1}{x}$ is p een constante dus $\frac{2}{p}$ is constant.

Je kunt dit schrijven als $A = c - x^{-1}$.

$$\frac{dA}{dx} = 0 - -1 \cdot x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

h Omdat $\frac{1}{x^2} > 0$ voor $x > 0$, is de grafiek van A een stijgende grafiek.

Als x toeneemt neemt $\frac{1}{x^2}$ af en nadert nul. De grafiek van A is dus een afnemend stijgende grafiek.

24 a Als x toeneemt dan neemt $\ln(2x)$ ook toe. Dus $10 + 3 \cdot \ln(2x)$ neemt toe.

b $\frac{dK}{dx} = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2x} = \frac{3}{x}$

c De grafiek van $\frac{dK}{dx}$ ligt bij $x > 0$ boven de x -as en is een dalende grafiek.

Dit betekent dat de grafiek van K een afnemend stijgende grafiek is.

25 a Als t steeds groter wordt, nadert $0,68^t$ naar nul en $62 \cdot 0,68^t$ nadert dan ook naar nul.

1900 wordt dan door een steeds kleiner getal gedeeld, dus G neemt toe.

b Als t toeneemt nadert de waarde van de noemer naar $1,3 + 0 = 1,3$.

De waarde van G nadert naar de grenswaarde $\frac{1900}{1,3} \approx 1462$ gram.

c De formule G is het quotiënt van $T = 1900$ en $N = 1,3 + 62 \cdot 0,68^t$.

$$T' = 0 \text{ en } N' = \ln(0,68) \cdot 62 \cdot 0,68^t$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{0 - 1900 \cdot \ln(0,68) \cdot 0,68^t}{(1,3 + 62 \cdot 0,68^t)^2} = \frac{45431 \cdot 0,68^t}{(1,3 + 62 \cdot 0,68^t)^2}$$

d Maak een plot van de grafiek van de afgeleide $\frac{dG}{dt}$.

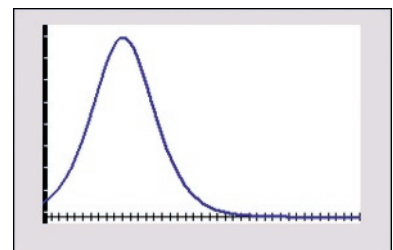
$$\text{Invoer: } y_1 = \frac{45431 \cdot 0,68^x}{(1,3 + 62 \cdot 0,68^x)^2}$$

$$\text{Venster: } 0 \leq x \leq 40, -5 \leq y \leq 150$$

De grafiek stijgt eerst, dus neemt het gewicht steeds sneller toe.

Vervolgens daalt de grafiek dus de toename neemt af.

De grafiek nadert naar 0 dus het gewicht verandert op den duur niet meer.



22 Afsluiting formules en verbanden

- 26 a** Als t steeds groter wordt dan nadert $(0,55)^t$ naar nul.

$$1 + 399 \cdot (0,55)^t \text{ nadert naar } 1 \text{ en } \frac{400}{1 + 399 \cdot (0,55)^t} \text{ nadert naar } \frac{400}{1} = 400.$$

De grenswaarde is 400 cm.

- b** Als $c > 0$ dan is $e^c > e^0 = 1$.

Dat betekent dat als t toeneemt dat dan $e^{c \cdot t}$ ook toeneemt.

Als t toeneemt, neemt $1 + 86 \cdot e^{c \cdot t}$ toe.

De noemer van de breuk wordt steeds groter. De teller is constant, dus G nadert naar 0.

De grenswaarde is hier dus 0.

- c** Als $c < 0$ dan is $0 < e^c < 1$. Als t toeneemt nadert $e^{c \cdot t} = (e^c)^t$ naar 0.

$$4 + 86 \cdot e^{c \cdot t} \text{ nadert dan naar } 4 \text{ en } G \text{ nadert naar } \frac{540}{4 + 0} = 135.$$

De grenswaarde bij $c < 0$ is 135.

- X7 a** De formule C_1 is het quotiënt van $T = 16t$ en $N = 190t^2 + 160$.

$$T' = 16 \text{ en } N' = 380t$$

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{16(190t^2 + 160) - 16t \cdot 380t}{(190t^2 + 160)^2} = \frac{-340t^2 + 2560}{(190t^2 + 160)^2}$$

De concentratie is maximaal als $\frac{dC_1}{dt} = 0$ ofwel $-340t^2 + 2560 = 0$.

$$340t^2 = 2560$$

$$t = \sqrt{\frac{2560}{340}} = 2,743\dots$$

$$2,743\dots \text{ uur is } 2,743\dots \times 60 \approx 165.$$

Dus na 165 minuten is de concentratie maximaal.

- b** $t = 0$ geeft $C_1 = \frac{16 \cdot 0}{190 \cdot 0^2 + 160} = 0$ en $C_2 = 0,13(e^0 - e^0) = 0,13 \times 0 = 0$.

- c** Invoer: $y = \frac{16 \cdot x}{190 \cdot x^2 + 160}$ en $y_2 = 0,13(e^{-0,65t} - e^{-3,9t})$

Venster: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 0,1$

Optie: snijden

Dit geeft $x = 2,05\dots$

$$2,05\dots \text{ uur is } 2,05\dots \times 60 \approx 123.$$

Na 123 minuten ofwel 2 uur en 3 minuten is de concentratie bij beide formules gelijk.

- d** formule C_1 :

Bij een toename van t neemt de noemer van de breuk sneller toe dan de teller van de breuk. De breuk nadert naar de waarde nul.

formule C_2 :

Bij toename van t naderen $e^{-0,65t}$ en $e^{-3,9t}$ beide naar nul.

0,13 wordt dus vermenigvuldigd met nul.

De waarde van $0,13(e^{-0,65t} - e^{-3,9t})$ nadert naar de waarde nul.

Bij beide formules gaat de concentratie dus na verloop van tijd naar nul.

22.5 Gemengde opdrachten

- 27 a** De grafiek van A gaat door het punt $(0, 10)$.
 $t = 0$ en $A = 10$ invullen in de formule geeft

$$10 = \frac{c}{1 + k \cdot 1,2^0}$$

$$10 = \frac{c}{1 + k \cdot 1}$$

$$c = 10(1 + k)$$

- b** $t = 2$ en $A = 8$ invullen in de formule geeft

$$8 = \frac{c}{1 + k \cdot 1,2^2}$$

$$c = 8(1 + 1,44k)$$

- c** Uit de antwoorden van opdracht a en b volgt

$$8(1 + 1,44k) = 10(1 + k)$$

$$1,52k = 2$$

$$k = 1\frac{6}{19} \text{ en } c = 10\left(1 + 1\frac{6}{19}\right) = 23\frac{3}{19}$$

$$k \approx 1,32 \text{ en } c \approx 23,16$$

- d** Het functievoorschrift is dan $A = \frac{23\frac{3}{19}}{1 + 1\frac{6}{19} \cdot 1,2^t}$ of $A = \frac{440}{19 + 25 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^t}$

Als t toeneemt dan neemt $\left(\frac{6}{5}\right)^t$ toe en $19 + 25 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^t$ neemt dan ook toe.
 c wordt gedeeld door een steeds groter getal, dus A neemt af.

De grafiek van A is dus een dalende grafiek.

- e** De constante c wordt gedeeld door een steeds groter getal.
 De grenswaarde van A is dus 0.

- 28 a** $K = \frac{15,48p + 10,92}{2,4} - 0,25p + 3,11 - 0,12(2 - 3p)$

$$K = \frac{15,48}{2,4}p + \frac{10,92}{2,4} - 0,25p + 3,11 - 0,24 + 0,36p$$

$$K = 6,45p + 4,55 - 0,25p + 3,11 - 0,24 + 0,36p$$

$$K = 6,45p - 0,25p + 0,36p + 4,55 + 3,11 - 0,24$$

$$K = 6,56 \cdot p + 7,42$$

Het verband is dus lineair.

- b** $3p = 5G - 6$

$$5G = 3p + 6 \text{ ofwel } G = 0,6p + 1,2$$

$$K = G \text{ dus } 6,56p + 7,42 = 0,6p + 1,2$$

$$5,96p = -6,22$$

$$p = -7,36 : 6,96 = -1\frac{13}{298}$$

- 29 a** De grafiek van de formule $V = a \cdot G^p$ is een rechte lijn met op de horizontale as G^p en op de verticale as de variabele V .
- b** $V = 362,5$ en $G^p = 2,9$ invullen in de formule $V = a \cdot G^p$ geeft $362,5 = a \cdot 2,9$
 dus $a = 362,5 : 2,9 = 125$.
- c** $31^p = 2,9$ dus $p = {}^{31}\log(2,9) \approx 0,31$
 $38,5^p = 3,1$ dus $p = {}^{38,5}\log(3,1) \approx 0,29$
 $47,1^p = 3,3$ dus $p = {}^{47,1}\log(3,3) \approx 0,31$
 $56,9^p = 3,5$ dus $p = {}^{56,9}\log(3,5) \approx 0,31$
 De waarde van p is dus ongeveer 0,31.

22 Afsluiting formules en verbanden

- d Volgens de gegevens in de grafiek wegen de chimpansees tussen de

$$2,9^{0,31} \approx 31 \text{ kg en } 3,5^{0,31} \approx 57 \text{ kg.}$$

Als de schedel van een chimpansee is geldt de vergelijking $450 = 125 \cdot G^{0,31}$

$$\text{dus } G_{\text{chimpansee}} = \left(\frac{450}{125}\right)^{\frac{1}{0,31}} \approx 39,1.$$

De schedel is waarschijnlijk van een chimpansee.

Onderzoekopdrachten

- 30** Het kunstwerk heeft $3200 : 60 = 53\frac{1}{3}$ periode.
 Een periode is dus $100 : 53\frac{1}{3} = 1,875$ meter = 187,5 cm.
 De evenwichtsstand is $(17 + 70) : 2 = 43,5$.
 De amplitude is $70 - 43,5 = 26,5$.
 Een formule bij het kunstwerk is $K = 43,5 + 26,5 \sin\left(\frac{2\pi}{187,5}x\right)$.
 Floortje zit op hoogte 50 cm dus hierbij hoort de vergelijking
 $43,5 + 26,5 \sin\left(\frac{2\pi}{187,5}x\right) = 50$.
 Invoer: $y_1 = 43,5 + 26,5 \sin\left(\frac{2\pi}{187,5}x\right)$ en $y_2 = 50$
 Venster: $0 \leq x \leq 200$, $0 \leq y \leq 75$
 De oplossingen zijn $x = 86,354\dots$ en $x = 194,895\dots$
 De plank van Floortje is $194,895\dots - 86,354\dots \approx 108,5$ cm lang.
 De plank van Floortje is langer dan die van Annemarie.
 Dus Annemarie komt lager dan Floortje te zitten.
- 31** Als t steeds groter wordt is de grenswaarde van $A = \frac{c}{1 + d \cdot 0,4^t}$ gelijk aan c .
 In de grafiek zie je dat de grenswaarde gelijk is aan 700, dus $c = 700$.
 In de grafiek is af te lezen dat bij $t = 0$ is $A = \frac{700}{1 + d} = 50$.
 $1 + d = 700 : 50 = 14$ dus $d = 13$.

Samenvatting

- S1 a** $0,2x + 5y = 3(y - 4)$
 $0,2x + 5y = 3y - 12$
 $2y = -0,2x - 12$
 $y = -0,1x - 6$
- b** $\frac{x}{2y} + 3 = 10$
 $\frac{x}{2y} = 7$
 $14y = x$
 $y = \frac{1}{14}x$
- c** $8 - 3x - \frac{1}{4}y = 0$
 $-\frac{1}{4}y = 3x - 8$
 $y = -12x + 32$
- d** $2(4x - 3 + y) = 5 + 3(x - 2)$
 $8x - 6 + 2y = 5 + 3x - 10$
 $2y = -5x + 1$
 $y = -2\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

- S2** Het produceren van 50 kopjes extra kost €213,- - €189,- = €24,-.
 Het produceren van 200 kopjes extra kost $4 \times €24,- = €96,-$.
 Het produceren van 300 kopjes kost dus €213,- + €96,- = €309,-.

- S3** Het verband in tabel A is omgekeerd evenredig want $90 \times 1,2 = 108$ en $36 \times 3 = 108$.

$$108 : 72 = 1,5; 108 : 6 = 18 \text{ en } 108 : 54 = 2$$

x	1,2	1,5	3	6	54
y	90	72	36	18	2

Een formule bij de tabel is $x \cdot y = 108$ ofwel $y = \frac{108}{x}$

Het verband in tabel B is omgekeerd evenredig want $2 \times 20 = 120$ en $30 \times 4 = 120$.

$$120 : 1 = 120; 120 : 6 = 20 \text{ en } 120 : 80 = 1,5$$

n	1	2	6	30	80
k	120	60	20	4	1,5

Een formule bij de tabel is $n \cdot k = 120$ ofwel $k = \frac{120}{n}$

Het verband in tabel C is evenredig want $27 : 3 = 9$ en $72 : 8 = 9$.

$$6 \times 9 = 54; 12 \times 9 = 108$$

p	3	6	8	12
q	27	54	72	108

Een formule bij de tabel is $q = 9p$.

- S4 a** De toename is $\frac{210\,000 - 175\,000}{15} \approx 2333$ per jaar.

$$175\,000 + 5 \times 2333 = 186\,665$$

In 2010 had Almere naar schatting ongeveer 187 000 inwoners.

- b** $210\,000 + 6 \times 2333 = 223\,998$.

In 2026 heeft Almere naar schatting ongeveer 224 000 inwoners.

- S5 a** Omdat de vorm van het verband tussen T en A gegeven is, is het voor het bepalen van de waarde van p voldoende om de gegevens van één planeet te gebruiken, bijvoorbeeld die van Neptunus invullen in $T = 0,2 \cdot A^p$ geeft $60150 = 0,2 \cdot 4497^p$

$$4497^p = 300750$$

$$p = {}^{4497}\log(300750) \approx 1,5$$

- b** De aarde draait in ongeveer 365 dagen om de zon. Dus voor de aarde is $T = 365$ en er geldt $365 = 0,2 \cdot A^{1,5}$.

$$A^{1,5} = 1825$$

$$A = (1825)^{\frac{1}{1,5}} \approx 149,3$$

De afstand van de aarde tot de zon is ongeveer 149 miljoen km.

- c** $T(2A) = 0,2 \cdot (2A)^{1,5} = 2^{1,5} (0,2 \cdot A^{1,5}) = 2^{1,5} \cdot T(A)$

Dit betekent dat als A twee keer zo groot wordt, dat T dan $2^{1,5} \approx 2,83$ keer zo groot wordt.

- S6 a** Als x steeds groter wordt, wordt de noemer $2x + 1$ ook steeds groter.

Van de breuk $\frac{20}{2x+1}$ is de teller constant en de noemer wordt steeds groter.

De waarde van $\frac{20}{2x+1}$ nadert dan naar nul.

De waarde van $\frac{20}{2x+1} - 3,2$ nadert naar de grenswaarde $0 - 3,2 = -3,2$.

22 Afsluiting formules en verbanden

- b** Als de waarde van t toeneemt, nadert de waarde van $0,85^t$ naar nul.
 $12 \cdot 0,85^t$ nadert op den duur dan ook naar nul.
 De noemer van de breuk nadert dan naar $45 - 0 = 45$.
 En $K = \frac{9}{45 - 12 \cdot 0,85^t}$ nadert dan naar de grenswaarde $\frac{9}{45} = 0,2$.

- S7 a** Als k steeds groter wordt, wordt de noemer van de breuk steeds groter.
 3 wordt gedeeld door een steeds groter getal.
 Dus A nadert naar de grenswaarde nul.

- b** Schrijf de formule als $A = 3 \cdot (2k + 1)^{-2}$.
 A is een kettingformule met $y = 3u^{-2}$ en $u = 2k + 1$.

$$\frac{dy}{du} = -6u^{-3} \text{ en } \frac{du}{dk} = 2$$

$$\frac{dA}{dk} = 2 \cdot -6u^{-3} = -12u^{-3}$$

$$\frac{dA}{dk} = -12(2k + 1)^{-3}$$

$$\frac{dA}{dk} = \frac{-12}{(2k + 1)^3}$$

- c** Bij $k > 0$ is noemer positief en de teller negatief, dus de uitkomst van de breuk negatief. De afgeleide is negatief, wat betekent dat de grafiek van A een dalende grafiek is.
 Als k steeds groter wordt, nadert de afgeleide de grenswaarde nul.
 De grafiek van A is daarom afnemend dalend.

Test jezelf

- T1** Het gemiddelde gewicht bij een leeftijd van precies 2 jaar is volgens de grafiek ongeveer 11,6 kg.
 Het gemiddelde gewicht horend bij precies 5 jaar is ongeveer 18,2 kg.
 Per jaar is de toename van het gemiddelde gewicht $\frac{18,2 - 11,6}{3} = 2,2$ kg.
 Voor de leeftijd van precies 6 jaar is het gemiddelde gewicht bij benadering $18,2 + 2,2 = 20,4$ kg.
 Voor kinderen van 6 jaar (dus tussen 6 en 7 jaar) is het gemiddelde gewicht $18,2 + 1,5 \times 2,2 = 21,5$ kg.
- T2 a** De overlevingstijd neemt niet lineair toe. Bij het toenemen van de watertemperatuur neemt de overlevingstijd steeds sneller toe.
- b** Tussen $T = 5$ en $T = 20$ is de groeifactor van de overlevingstijd $4 : 0,5 = 8$.
 De groeifactor bij een toename van 1°C is $8^{\frac{1}{15}} = 1,1487\dots$
 Bij 17°C is de overlevingstijd $2,0 \cdot 1,1487\dots^2 \approx 2,6$ uur.
- T3 a** Maarten heeft er dus $\frac{36}{45} \cdot 60 = 48$ minuten over gedaan.
- b** Als de gemiddelde snelheid v twee keer zo groot dan is de benodigde tijd twee keer zo klein.
 Algemener: Als de gemiddelde snelheid v k keer zo groot dan is de benodigde tijd t , k keer zo klein.
 Bij dit verband hoort de formule $v = \frac{36}{t}$ of $t = \frac{36}{v}$ of $v \cdot t = 36$.

- c De snelheid is $\frac{2}{3}$ keer zo groot, de tijd wordt dan dus $\frac{2}{3}$ keer zo klein ofwel $\frac{3}{2}$ keer zo groot.
Nico heeft 1,5 keer zo veel tijd nodig als Maarten.

T4 a Invullen van de gegevens van Daan en zijn fiets in de formule geeft

$$190 = (k \cdot 9,2^2 + 4) \cdot 9,2$$

$$k \cdot 9,2^2 + 4 = \frac{190}{9,2}$$

$$k \cdot 9,2^2 = \frac{190}{9,2} - 4$$

$$k = \left(\frac{190}{9,2} - 4 \right) : 9,2^2 \approx 0,2$$

- b De formule is $P = (k \cdot v^2 + 4) \cdot v$. De vraag is dus: Als de snelheid hetzelfde is maar k kleiner, wat is dan te zeggen over het te leveren vermogen P ?

Als k kleiner is met dezelfde v , dan is $k \cdot v^2$ en ook $k \cdot v^2 + 4$ kleiner.

Hetzelfde geldt voor $P = (k \cdot v^2 + 4) \cdot v$.

Je kunt dus met een kleinere k -waarde met minder vermogen dezelfde snelheid bereiken.

- c Hierbij hoort de vergelijking $250 = (0,2 \cdot v^2 + 4) \cdot v$

Invoer: $y_1 = (0,2x^2 + 4)x$ en $y_2 = 250$

Venster: $0 \leq x \leq 20$, $0 \leq y \leq 300$

Optie: snijden

Dit geeft als oplossing $x = 10,154\dots$

Zijn snelheid is $\frac{3600}{1000} \times 10,154\dots \approx 36,6$ km per uur.

- d De nieuwe k -waarde wordt $k = 0,75 \times 0,2 = 0,15$.

Invoer: $y_1 = (0,15x^2 + 4)x$ en $y_2 = 250$

Venster: $0 \leq x \leq 20$, $0 \leq y \leq 300$

Optie: snijden

Dit geeft als oplossing $x = 11,107\dots$

Zijn maximaal haalbare snelheid is met $\frac{11,107\dots - 10,154\dots}{10,154\dots} \times 100\% \approx 9,4\%$ toegenomen.

T5 a De eerste 4 punten liggen op een rechte lijn, die bovendien door de oorsprong gaat. Dus is er sprake van evenredigheid tussen E en L voor de waarden van L van 0 tot 100.

- b Neem het vierde punt. Dit heeft bij benadering coördinaten (100, 47).

De richtingscoëfficiënt van een lijn door de oorsprong en (100, 47) is 0,47.

Dus de formule is $E = 0,47 \cdot L$.

- c $E(100) = 64 \cdot (1 - 0,6^{0,02 \cdot 100}) = 64 \cdot (1 - 0,6^2) = 40,96$.

De waarde van E behorende bij $L = 100$ is 47.

De geschatte waarde 40,96 wijkt daar $\frac{47 - 40,96}{47} \times 100\% \approx 12,9\%$ van af.

- d Als L steeds groter wordt dan nadert $0,6^{0,02L}$ naar nul.

En nadert $1 - 0,6^{0,02L}$ naar 1.

Dus $64(1 - 0,6^{0,02L})$ nadert naar de grenswaarde $64 \times 1 = 64$.

Het aantal larven met een eitje is dus maximaal 64.