

FLEX

MODERNE WISKUNDE

A


$$W = \frac{L}{1 + (L-1) \cdot g^t}$$



Noordhoff

Dit boek is van jou:

NAAM

KLAS

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo A deel 4

Serieoverzicht Tweede Fase

	havo		vwo		
klas 4	A 1	B 1	AC 1		B 1
	A 2	B 2	AC 2		B 2
klas 5	A 3	B 3			
			A 3	C 3	B 3
klas 6			A 4	C 4	B 4

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleenen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 22

© 2022 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u [her]gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to [re]use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89199-2

© Noordhoff Uitgevers bv

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo A deel 4

Jeroen van den Boom

Bert Boon

Ferdi Doddema

Wim Doekes

Colin Roll

Geertrui Schaberg

Ron Sinkeldam

Carolijn Tacken

Noordhoff

18 Periodieke functies 6

- Voorkennis 8
- 18.1 Sinusfunctie 10
- 18.2 Amplitude en periode 14
- 18.3 Verschuiven 18
- 18.4 Sinusoïden 22
- 18.5 Formules opstellen bij sinusoïden 26
- 18.6 Gemengde opdrachten 30
 - Onderzoeksopdrachten 31
 - Samenvatting 32
 - Test jezelf 36
 - Extra oefening 38

Vaardigheden 9 40
 Machtsformules 42
 Formules herleiden 43
 Differentiëren 44
 Exponentiële en logaritmische
 formules herleiden 45
 Periodieke functies 47

19 Functies bewerken 48

- Voorkennis 50
- 19.1 Grafieken verschuiven 52
- 19.2 Herschalen 56
- 19.3 Somfuncties en verschilfuncties 60
- 19.4 Productfuncties en quotiëntfuncties 64
- 19.5 Redeneren met formules 68
- 19.6 Gemengde opdrachten 72
 - Onderzoeksopdrachten 73
 - Samenvatting 74
 - Test jezelf 78
 - Extra oefening 80

20 Differentiëren 82

- Voorkennis 84
- 20.1 Productregel 86
- 20.2 Quotiëntregel 90
- 20.3 Hellinggrafiek 94
- 20.4 Redeneren met de afgeleide 98
- 20.5 Gemengde opdrachten 102
 - Onderzoeksopdrachten 103
 - Samenvatting 104
 - Test jezelf 108
 - Extra oefening 110

Vaardigheden 10 112
 Rijen 114
 Formules herleiden 115
 Sinusoïden 116
 Systematisch tellen 118

21 Exponentiële en logaritmische functies 120

- Voorkennis 122
- 21.1 Formules herleiden 124
- 21.2 Het getal e 128
- 21.3 Exponentiële functies differentiëren 132
- 21.4 Logaritmische functies differentiëren 136
- 21.5 Logaritmische schalen 140
- 21.6 Gemengde opdrachten 144
 - Onderzoeksopdrachten 145
 - Samenvatting 146
 - Test jezelf 150
 - Extra oefening 152

22 Afsluiting formules en verbanden 154

- Voorkennis 156
- 22.1 Lineaire verbanden 158
- 22.2 Evenredig en omgekeerd evenredig 162
- 22.3 Formules opstellen 166
- 22.4 Redeneren met formules 170
 - Gemengde opdrachten 174
 - Onderzoeksoopdrachten 175
 - Samenvatting 176
 - Test jezelf 180
- Vaardigheden 11** 182
 - Logaritmische en exponentiële formules 184
 - Differentiëren 185
 - Rijen 187
 - Systematisch tellen 188

Examenvorbereiding 190

- Rekenen 192
- Functies en grafieken 197
- Lineaire en gebroken functies 208
- Machtsfuncties en kwadratische functies en wortelfuncties 216
- Exponentiële en logaritmische functies 222
- Periodieke functies 234
- Veranderingen en afgeleide functies 239
- Rijen 246
- Combinatoriek 251
- Hints bij de examenopdrachten 256
- Formuleblad 260
- Examenwerkwoorden 261

Extra 262

- Meer oefenen 264
- Oefenproefwerken 272

Moderne Wiskunde

vwo A deel 4

Trefwoorden 282

Periodieke functies 18

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In klas 3 heb je kennis gemaakt met periodieke grafieken en heb je gezien wat de evenwichtsstand, de amplitude en de periode zijn.

Je hebt geleerd wat de sinus is en hoe je die kunt gebruiken bij het berekenen van hoeken.

In dit hoofdstuk leer je dat je met de sinus ook periodieke verschijnselen kunt beschrijven. Daarbij gebruik je de sinusfunctie. Je leert wat de belangrijkste eigenschappen van deze functie zijn en welk gevolg het verschuiven of vermenigvuldigen van de grafiek heeft op het functievoorschrift.

In de hoofdstukken hierna zullen de periodieke grafieken nog af en toe terugkomen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken*
- *Logisch redeneren en bewijzen*
- *Formules manipuleren*

opdracht 38

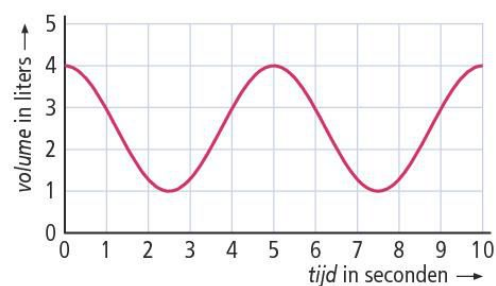
opdracht 23

opdracht 26



- V1** Een persoon ligt in bed en heeft een rustige en regelmatige ademhaling. Bij het inademen neemt de hoeveelheid lucht in de longen toe. Bij het uitademen neemt deze hoeveelheid weer af. In de grafiek zie je hoe de hoeveelheid lucht in de longen in de loop van de tijd varieert.

- Hoeveel seconden duurt een ademhaling?
- Hoeveel lucht zit er minimaal en maximaal in de longen?
- Hoeveel lucht zit er gemiddeld in de longen? En hoe groot is de maximale afwijking ten opzichte van dit gemiddelde?



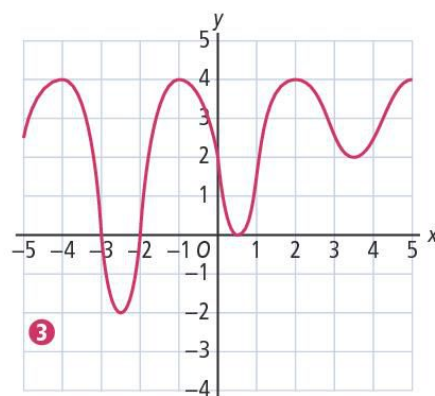
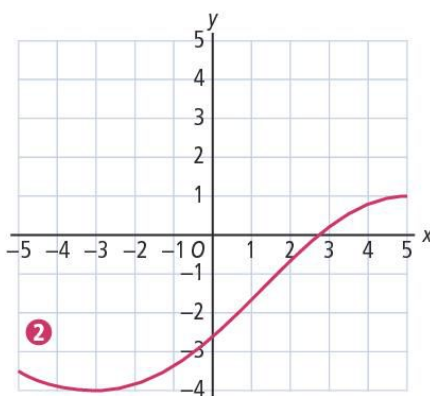
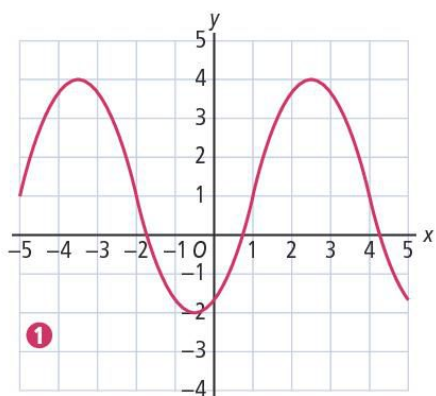
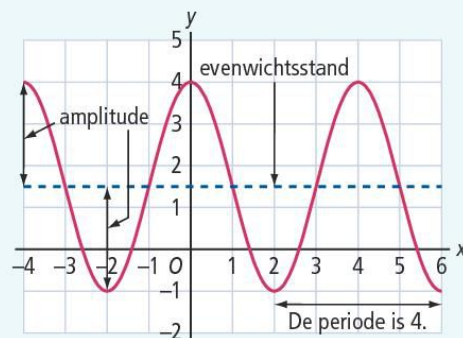
Theorie

Verschijselen die zichzelf steeds herhalen, heten **periodieke verschijnselen**. De bijbehorende grafieken heten **periodieke grafieken**.

De **evenwichtsstand** is de gemiddelde hoogte van de grafiek. De **amplitude** is de grootste afwijking van de grafiek ten opzichte van de evenwichtsstand.

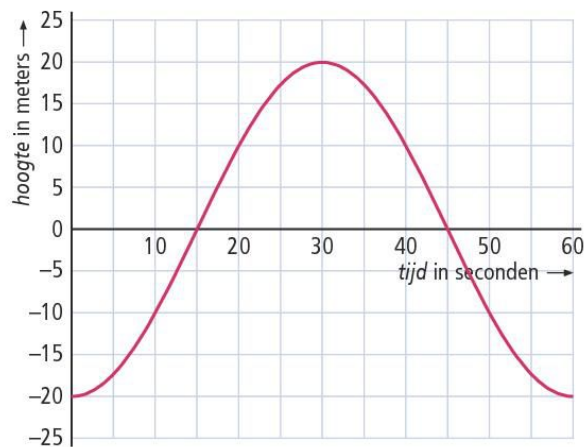
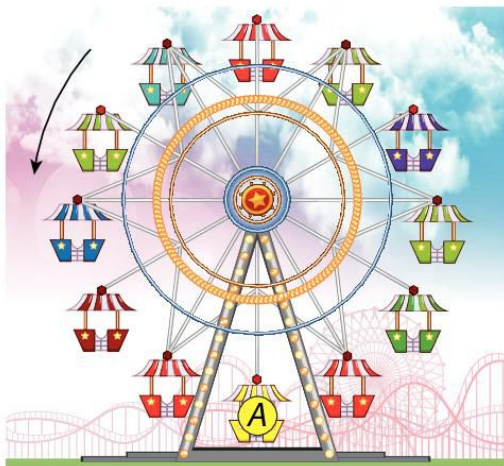
De **periode** is de kleinste afstand waarover je een periodieke grafiek horizontaal kunt verschuiven zodat hij weer samenvalt met zichzelf.

De evenwichtsstand is $1\frac{1}{2}$ en de amplitude is $2\frac{1}{2}$.



- V2**
- De grafieken 1 en 2 hierboven zijn deel van een periodieke grafiek. Geef van beide grafieken de evenwichtsstand, de amplitude en de periode.
 - Waarom is grafiek 3 niet periodiek?

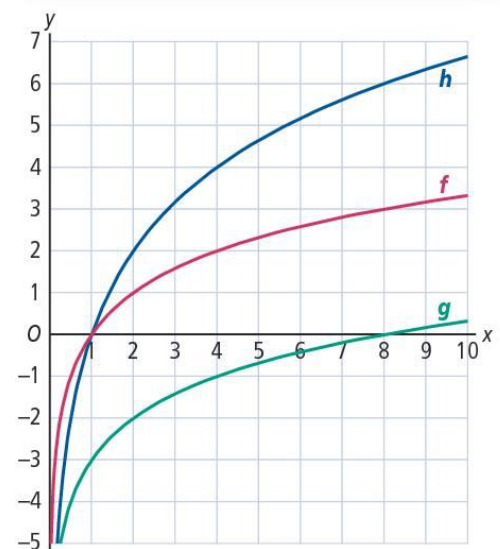
- V3** Schets één periode van een periodieke grafiek met evenwichtsstand 7, amplitude 5 en periode 10.



- V4** Op volle snelheid draait dit reuzenrad in een minuut steeds precies één keer rond.
In het plaatje is punt *A* het ophangpunt van de onderste cabine.
- Na hoeveel seconden is punt *A* voor het eerst op de hoogte van de as van het reuzenrad? En hoeveel seconden later weer?
 - Ook zie je een periode van de grafiek die hoort bij de hoogte van punt *A* ten opzichte van de as van het rad. Hoe groot is de straal van het rad?
 - Hoe hoog is punt *A* na 80 seconden?
 - Noem vijf tijdstippen waarop punt *A* zich 10 meter onder de as bevindt.
 - Bereken welke afstand punt *A* in een minuut aflegt.

De omtrek van een cirkel met straal r is gelijk aan $2 \cdot \pi \cdot r$.

- V5** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(x)$.
- De grafiek van g is ontstaan door de grafiek van f omlaag te verschuiven. Leg uit dat bij de grafiek van g het functievoorschrift $g(x) = {}^2\log(x) - 3$ hoort.
 - Hoe kun je zien dat de grafiek van h is ontstaan door de grafiek van f te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met factor 2?
 - Stel het functievoorschrift van h op.
 - De grafiek van functie f wordt 6 omhoog verschoven. Stel het functievoorschrift $j(x)$ van de beeldgrafiek op.
 - Gebruik de grafiek van f om in het assenstelsel de grafieken van de functies $k(x) = -2 \cdot {}^2\log(x)$ en $l(x) = {}^2\log(x) + 4$ te tekenen.



Je leert

- wat de sinusfunctie is en hoe de bijbehorende grafiek eruitziet

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3—4—05—6—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—4—5—6—7—U1

De London Eye is een reuzenrad naast de rivier de Theems in Londen, gebouwd in 1999. Lange tijd was dit het grootste reuzenrad ter wereld. Het is 135 meter hoog en een rondgang duurt 30 minuten. Neem aan dat het instappunt op nul meter hoog ligt.

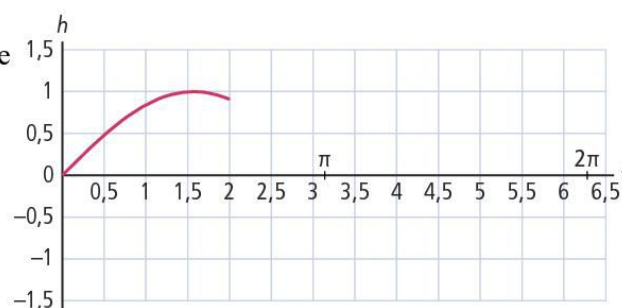
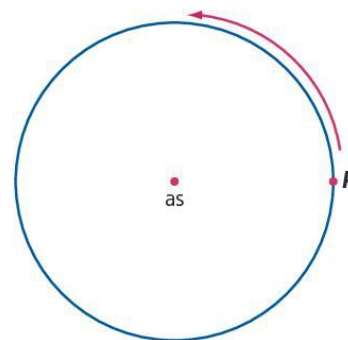
- Twaalf minuten na het instappen ben je op een hoogte van 122 meter.

Na hoeveel minuten ben je voor het eerst weer op een hoogte van 122 meter?



- 1** Een wiel met een straal van een meter draait rond met een constante snelheid. Een punt op de rand van het wiel heeft een snelheid van een meter per seconde. Op tijdstip $t = 0$ bevindt punt P op de rand zich op gelijke hoogte met de as van het wiel zoals in de figuur.

- Leg uit dat de omtrek van het wiel 2π meter is.
- Punt P draait in 2π seconden precies één keer rond. Waar bevindt punt P zich na π seconden?
- Na hoeveel seconden bevindt P zich op het laagste punt? Geef je antwoord uitgedrukt in π en geef vervolgens een antwoord afgerond op twee decimalen.
- Er is een begin gemaakt met het tekenen van een grafiek waarin de hoogte h van punt P ten opzichte van de as van het wiel is uitgezet tegen de tijd t in seconden. Maak de grafiek af op het gegeven interval.
- Na $\frac{1}{2}\pi$ seconden is P op het hoogste punt. Na hoeveel seconden is P opnieuw op het hoogste punt?



- 2** Stel je rekenmachine in op radialen. Neem de x van 0 tot 2π en de y van -1 tot 1 en plot de grafiek van $y = \sin(x)$. Vergelijk je plot met de getekende grafiek uit opdracht 1.

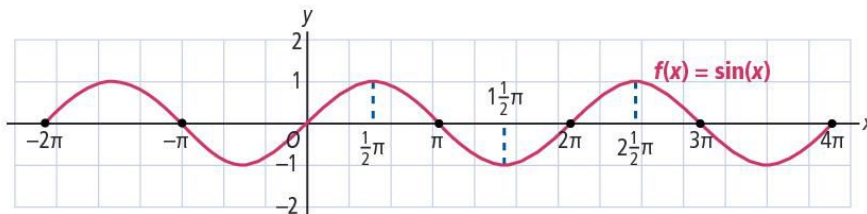
Theorie

Als een punt P met een snelheid van 1 meter per seconde over een cirkel met straal 1 meter beweegt, dan kun je de hoogte van het punt na t seconden berekenen met $\sin(t)$.

De functie $f(x) = \sin(x)$ heet de **sinusfunctie**.

Voor de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x)$ geldt:

- De evenwichtsstand is 0.
- De amplitude is 1.
- De periode is 2π .
- In het punt $(0, 0)$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand.
- De verticale lijnen door de toppen zijn assen van symmetrie van de grafiek.



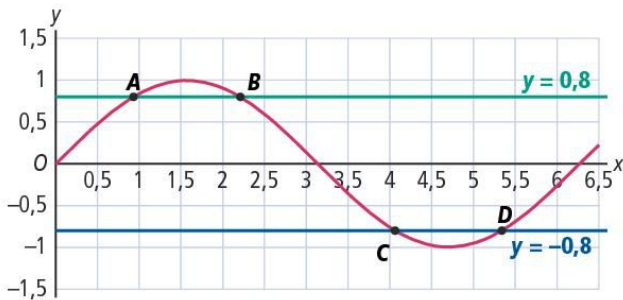
- 3** De grafiek hierboven hoort bij de functie $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[-2\pi, 4\pi]$.
- a** Hoeveel perioden zie je in de grafiek?
 - b** In welke punten gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand?
 - c** Geef een interval waarop de grafiek van f toenemend dalend is.
 - d** Geef twee intervallen waarop de grafiek van f afnemend stijgend is.
 - e** Geef de coördinaten van zes punten waar de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[-2\pi, 4\pi]$ een top heeft.
- 4**
- a** In het punt $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ heeft de functie $f(x) = \sin(x)$ een maximum.
Leg uit dat de functie f ook in de punten $(2\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(4\frac{1}{2}\pi, 1)$ een maximum heeft.
 - b** Geef de coördinaten van nog drie punten waar de functie $f(x) = \sin(x)$ een maximum heeft.
 - c** Geef de coördinaten van drie punten waar f een minimum heeft.
 - d** Geef de coördinaten van vier punten waar de grafiek van f de x -as snijdt.
 - e** Waarom zal de grafiek f de x -as ook snijden in $(23\pi, 0)$?

Ondersteunende route → maak opdracht 05

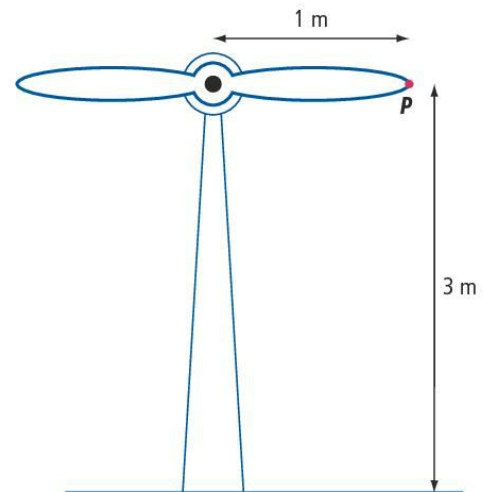
- 5** Leg met behulp van de eigenschappen van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ uit of de volgende punten wel of niet op deze grafiek liggen.

- a** $(7\pi, 1)$ **d** $(-11\pi, 0)$
b $(119\pi, 0)$ **e** $(-8\frac{1}{2}\pi, -1)$
c $(5\frac{1}{2}\pi, 1)$ **f** $(236\frac{1}{2}\pi, 1)$

- 6** De grafiek van $f(x) = \sin(x)$ snijdt de lijn $y = 0,8$ in de punten A en B en de lijn $y = -0,8$ in de punten C en D .

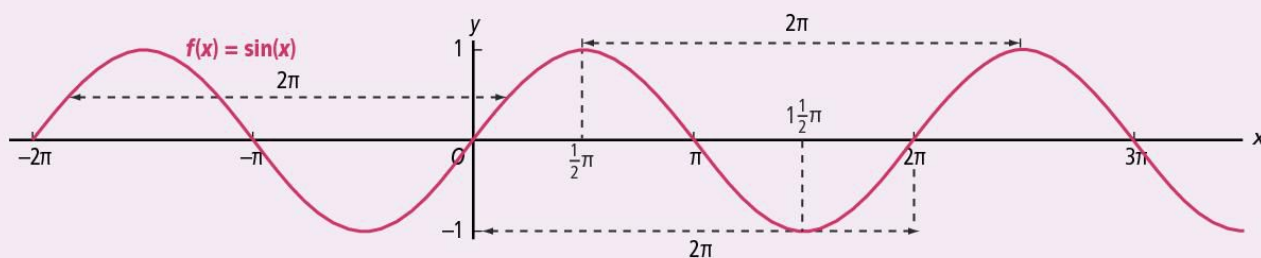


- a** Ga na dat $(0,93; 0,80)$ de coördinaten zijn van punt A .
b Leg uit dat de x -coördinaat van punt B gelijk is aan $\pi - 0,93 \approx 2,21$.
c Gebruik de symmetrie van de grafiek van f om de coördinaten van snijpunten C en D te berekenen.
- 7** De wieken van de windmolen zijn één meter lang. De windmolen draait tegen de klok in. Een omwenteling duurt vier seconden. De stand op de tekening komt overeen met het tijdstip $t = 0$.
- a** Geef drie tijdstippen waarop punt P de grootste hoogte bereikt.
b Teken op het interval $[0, 8]$ een grafiek van de hoogte van het rode punt ten opzichte van de as van de windmolen.
c De as van de windmolen bevindt zich op 3 meter hoogte. Hoe hoog is punt P op het tijdstip $t = 1$?
d Wat is de hoogte van de punt P bij $t = 3$.
e Hoe hoog is punt P op het tijdstip $t = 10$?



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten



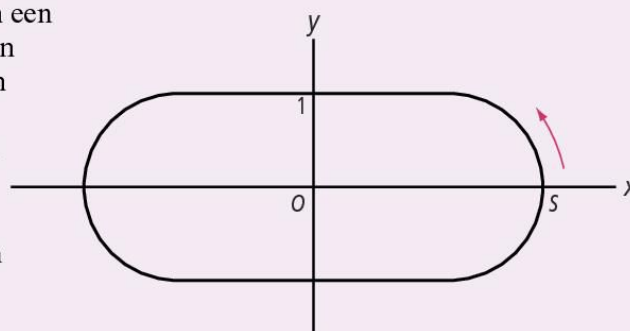
- 05**
- Op de grafiek van f ligt het punt $(\frac{1}{2}\pi, 1)$.
De periode van de grafiek is 2π .
Leg met behulp van de eigenschappen van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ uit dat de punten $(2\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(4\frac{1}{2}\pi, 1)$ ook op de grafiek van f liggen.
 - Leg uit dat het punt $(5\frac{1}{2}\pi, -1)$ op de grafiek van f ligt.
 - In het punt $(0, 0)$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand.
Geef nog drie punten waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
 - Geef drie punten waar de grafiek dalend door de evenwichtsstand gaat.

Ga na of de volgende punten op de grafiek van f liggen.

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| e $A(12\frac{1}{2}\pi, 1)$ | h $D(-3\pi, 0)$ |
| f $B(-8\frac{1}{2}\pi, 1)$ | i $E(-4\frac{1}{2}\pi, -1)$ |
| g $C(8\pi, 1)$ | j $F(23\frac{1}{2}\pi, -1)$ |

Uitdagende opdrachten

- U1**
- In de tekening staat een vereenvoudigd model van een atletiekbaan, geplaatst in een assenstelsel. De baan bestaat uit twee halve cirkels met straal 1 meter en twee rechte stukken met lengte π meter. Een punt beweegt met een constante snelheid van 1 meter per seconde over de baan. Op $t = 0$ bevindt het punt zich in S . De y -coördinaat van het punt S wordt beschreven door het functievoorschrift $h(t)$ met t de tijd in seconden.



- Wat zijn de coördinaten van punt S ?
- Hoeveel keer doorloopt het punt deze baan in één uur?
- Teken de grafiek van h voor één omloop.

18.2 Amplitude en periode

Je leert

- hoe je een functievoorschrift aanpast als de amplitude van de grafiek verandert
- hoe je een functievoorschrift aanpast als de periode van de grafiek verandert

Leerroutes

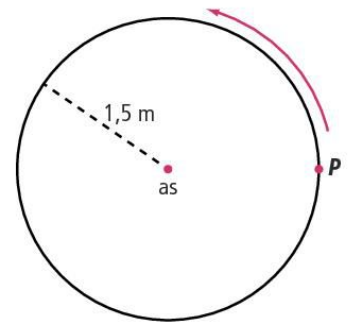
- ondersteunend: 8—9—10—11—12—13—014—14—15—16
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14—15—16—17
- uitdagend: 8—9—10—11—12—13—14—15—17—U2

De grote wijzer van de klok van de Big Ben is 4,3 meter lang. De kleine wijzer is 2,8 meter lang. Boris maakt twee grafieken. In de eerste grafiek geeft hij de hoogte van het puntje van de grote wijzer ten opzichte van het draaipunt weer. In de tweede grafiek geeft hij de hoogte van het puntje van de kleine wijzer ten opzichte van het draaipunt weer. Op de horizontale as staat de tijd tussen 0 en 24 uur.

- Waarin verschillen deze grafieken?



- 8 Het wiel heeft een straal van 1,5 meter en draait in 2π seconde precies één keer rond. Op tijdstip $t = 0$ bevindt punt P zich op gelijke hoogte met de as van het wiel. Schets een periode van de bijbehorende tijd-hoogte grafiek.



- 9 a Plot op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ de grafiek van $g(x) = a \cdot \sin(x)$ voor $a = 3$, $a = -5$ en $a = 0,5$.
 b Welk van de kenmerken evenwichtsstand, amplitude en periode verandert als je a verschillende waarden geeft?
 c Welk effect heeft een negatieve waarde van het getal a op de grafiek?

Theorie

De grafiek van de functie $h(x) = a \cdot \sin(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een **vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as** met factor a . Door deze vermenigvuldiging verandert de amplitude van de grafiek. De grafiek wordt verticaal uitgerekt als $a > 1$ of $a < -1$ en in elkaar gedrukt als $-1 < a < 1$.

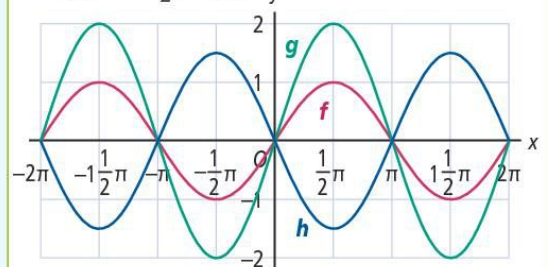
Als het getal a negatief is, dan wordt de grafiek bovendien in de x -as gespiegeld.

De amplitude van de grafiek van $h(x) = a \cdot \sin(x)$ is gelijk aan a als a positief is en gelijk aan $-a$ als a negatief is.

Voorbeeld

Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 2\sin(x)$ en

$$h(x) = -1\frac{1}{2}\sin(x).$$



De amplitude van g is gelijk aan 2 en de amplitude van h is $1\frac{1}{2}$.

10 Geef de amplitude van de grafieken van de functies.

- H** **a** $f(x) = 4 \cdot \sin(x)$ **c** $h(x) = \frac{2}{3} \cdot \sin(x)$
b $g(x) = 1,8 \cdot \sin(x)$ **d** $i(x) = -8,3 \cdot \sin(x)$

11 Gegeven zijn de functies $f(x) = 5 \sin(x)$ en $g(x) = -5 \sin(x)$.
 Geef voor beide functies de coördinaten van de toppen van de grafieken op het interval $[0, 2\pi]$.

- 12** **a** Plot op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ de grafiek van $g(x) = \sin(bx)$ voor $b = 2$, $b = 3$ en $b = 0,5$.
 Welk van de kenmerken evenwichtsstand, amplitude en periode verandert als je b verschillende waarden geeft?
b Voor welke positieve waarden van b is de periode kleiner dan 2π ? En voor welke positieve waarden van b is de periode groter dan 2π ?
c Vul de tabel in.
d Welk verband bestaat er tussen b en de periode van $g(x) = \sin(bx)$?

b	0,5	1	3	π	2π
periode	...	...	...	...	...

Theorie

De grafiek van de functie $h(x) = \sin(bx)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een **vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as**. Door deze vermenigvuldiging verandert de periode van de grafiek.

De grafiek wordt in horizontale richting uitgerekt als $0 < b < 1$ en in elkaar gedrukt als $b > 1$.

Als het getal b negatief is, dan wordt de grafiek bovendien in de y-as gespiegeld.

Voor positieve waarden van b is het verband tussen b en de

$$\text{periode: } b = \frac{2\pi}{\text{periode}} \text{ ofwel de periode} = \frac{2\pi}{b}$$

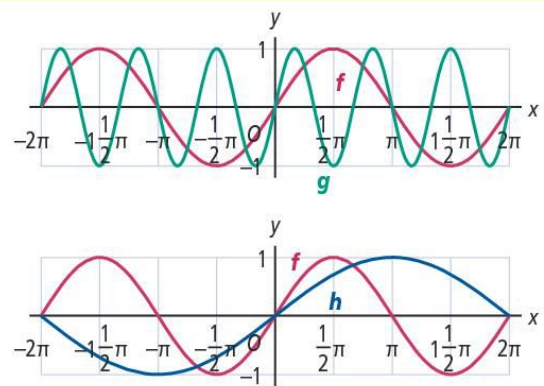
Voorbeeld

Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = \sin(x)$,

$g(x) = \sin(3x)$ en $h(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.

De periode van g is $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

De periode van h is $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.



18.2 Amplitude en periode

13 Bereken de periode van de grafieken van de functies.

- a $f(x) = \sin(0,25x)$ c $f(x) = \sin\left(\frac{1}{5}x\right)$
 b $f(x) = \sin(5x)$ d $f(x) = \sin(4\pi x)$

Ondersteunende route → maak opdracht 014

14 Bereken van de grafieken van de functies de amplitude en de periode.

H

- a $f(x) = 13 \sin(3x)$ c $f(x) = -20 \sin(\pi x)$
 b $f(x) = -0,6 \sin(0,6x)$ d $f(x) = \frac{1}{10} \sin(0,3\pi x)$

15 a De grafiek van $f(x) = a \cdot \sin(bx)$ heeft amplitude 6 en periode 3.

Schets de grafiek van functie f .

- b Geef het functievoorschrift $f(x)$.
 c Schets de grafiek van de functie $g(x) = -2 \sin(\pi x)$.

16 De getijdenbeweging in een kustplaats wordt bij benadering beschreven door de functie $h(t) = 1,85 \sin(0,506t)$.

H

Hierbij is h de waterhoogte in meters boven NAP en t is de tijd in uren met $t = 0$ het tijdstip 0.00 uur.

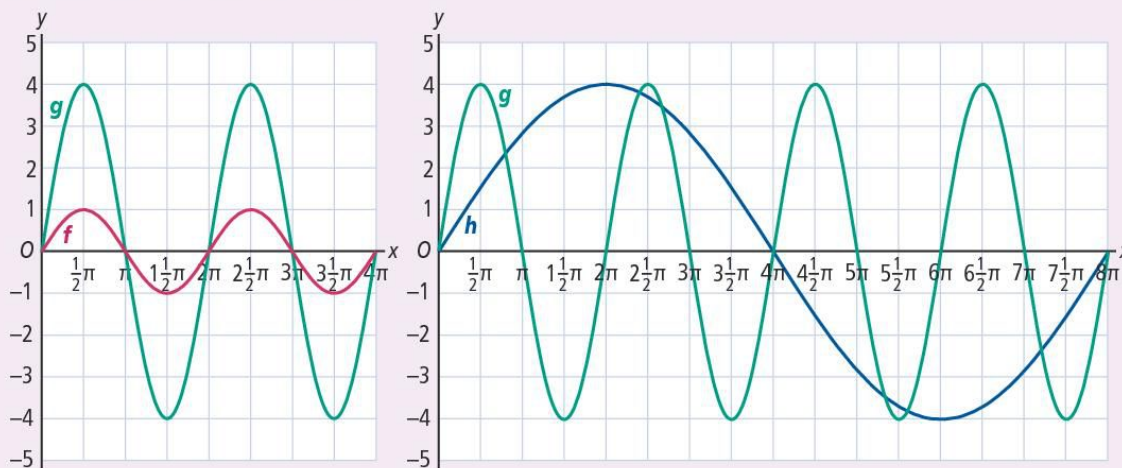
- a Hoeveel uren verstrijken er tussen twee opeenvolgende hoogwaterstanden? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.
 b Plot en schets de grafiek van h en bereken gedurende hoeveel tijd per periode de waterstand hoger dan 1,20 meter boven NAP is.
 c Geef twee tijdstippen waarop de waterhoogte het snelst afneemt.
 d Op een andere plaats is het verschil tussen hoogwater en laagwater gelijk aan 4,3 meter waarbij de tijdstippen waarop deze optreden gelijk zijn aan die bij opdracht a. Stel het functievoorschrift op dat hier bij past.

17 Je ziet een foto van een waterrad. De straal van het rad is 0,9 meter en het draait rond met een snelheid van één omwenteling per 8 seconden. Op tijdstip $t = 0$ is het punt A op de hoogte van de as en beweegt het omhoog. Bereken de hoogte van punt A na 4,5 seconden.

Uitdagende route → maak opdracht U2



Ondersteunende opdrachten



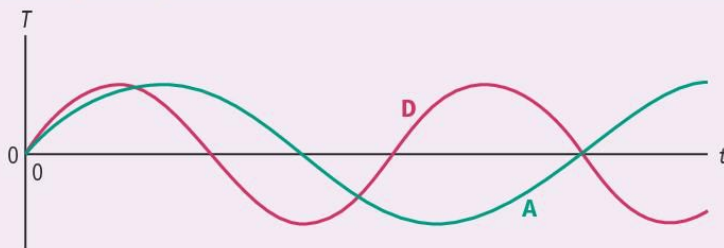
014 In het linker assenstelsel zie je de grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = a \cdot \sin(x)$.

- Hoe groot is de amplitude van de grafiek van g ?
- Welke waarde heeft a in het functievoorschrift van g ?
- In het rechter assenstelsel zie je de grafieken van $g(x) = a \cdot \sin(x)$ en $h(x) = a \cdot \sin(bx)$.
Hoe groot is de periode van de grafiek van h ?

d Vul in: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{\dots} = \dots$

- e** Geef het functievoorschrift van h .

Uitdagende opdrachten



U2 Toonhoogte wordt bepaald door het aantal trillingen per seconde. Van toon A is de frequentie 440 Hz (440 trillingen per seconde). Je kunt bij toon A een formule van de vorm $T_A = \sin(bt)$ opstellen.

- Welke waarde heeft b in de formule T_A ?
- De frequentie bij toon D is 1,5 keer zo groot als bij toon A.
Stel een formule bij toon D.
- Bij de trilling van een gitaarsnaar hoort de formule $T_{\text{gitaar}} = \sin(1750t)$.
Bereken de frequentie en de periode van deze trilling.

Je leert

- hoe je een functievoorschrift aanpast als de evenwichtsstand van de grafiek verandert
- hoe je een functievoorschrift aanpast als het beginpunt van de grafiek verandert

Leerroutes

- ondersteunend: 18—19—20—21—022—22—23—024—25
- doorlopend: 18—19—20—21—22—23—24—25—26
- uitdagend: 18—19—20—22—23—24—25—26—U3

Yoji maakt bij een reuzenrad twee grafieken. Hij tekent een grafiek van de hoogte van het bakje ten opzichte van de as van het reuzenrad en een grafiek van de hoogte van het bakje ten opzichte van de grond.

- Wat is het verschil tussen de twee grafieken van Yoji?



- 18** a Plot op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ de grafiek van $g(x) = d + \sin(x)$ voor $d = 3$ en voor $d = -5$.
- b Welk van de kenmerken evenwichtsstand, amplitude en periode verandert bij verschillende waarden van d ?

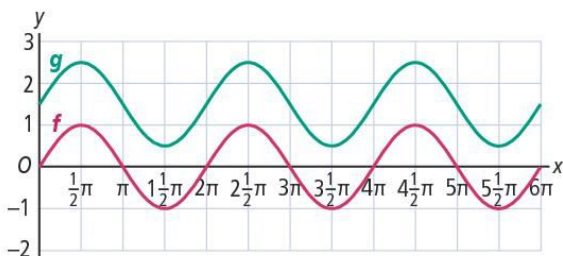
Theorie

De grafiek van de functie $g(x) = d + \sin(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een **verticale verschuiving** van d eenheden omhoog.

De evenwichtsstand van de functie g is d .

Voorbeeld

Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = \sin(x)$ en g . Stel het functievoorschrift van g op.

**Oplossing**

De grafiek van g is ontstaan door de grafiek van f $1\frac{1}{2}$ eenheden omhoog te verschuiven.

De evenwichtsstand van g is $1\frac{1}{2}$.

Het functievoorschrift van g is

$$g(x) = 1\frac{1}{2} + \sin(x).$$

- 19 Geef bij de functies $g(x) = \sin(x) - 5,7$ en $h(x) = 4,5 + \sin(x)$ de evenwichtsstand.
- 20 a Plot op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ de grafiek van $h(x) = \sin(x - c)$ voor $c = \frac{1}{2}\pi$, $c = 3$ en $c = -1$.
Geef bij de verschillende waarden van c de coördinaten van de punten waar de grafiek stijgend de x -as snijdt.
- b Welk effect heeft het variëren van de waarde van c op de grafiek van h ?

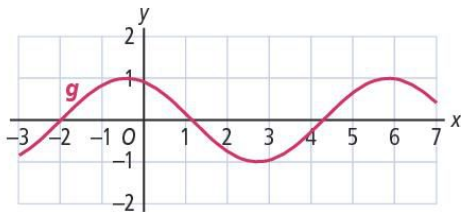
Theorie

De grafiek van de functie $h(x) = \sin(x - c)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een **horizontale verschuiving** van c eenheden naar rechts.

In het punt $(c, 0)$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand, zo'n punt heet een **beginpunt** van de grafiek.

Voorbeeld

De grafiek van functie g is ontstaan door een horizontale verschuiving van de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x)$.
Stel het functievoorschrift van g op.



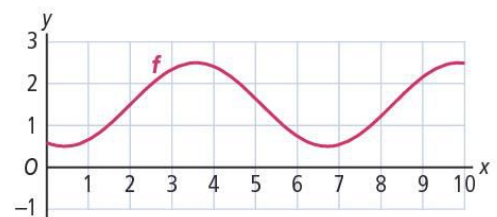
Oplossing

De grafiek van g gaat in het punt $(-2, 0)$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $c = -2$.
Het functievoorschrift van g is $g(x) = \sin(x - (-2))$ ofwel $g(x) = \sin(x + 2)$.

- 21 a Hoe groot is de periode van de grafiek in het voorbeeld?
b Leg uit dat de grafiek in het voorbeeld ook bij $x = -2 + 2\pi \approx 4,28$ stijgend door de evenwichtsstand gaat.

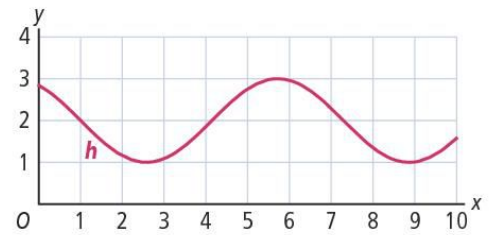
Ondersteunende route → maak opdracht 022

- 22 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x - c) + d$.
- Teken in het assenstelsel de evenwichtsstand van de grafiek van f .
 - Welke waarde heeft d in het functievoorschrift van f ?
 - Geef in de figuur de punten aan waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
 - Welke coördinaten heeft het beginpunt dat het dichtst bij de y -as ligt?
 - Stel het functievoorschrift van f op.



18.3 Verschuiven

- 23** Gegeven is de grafiek van de functie $h(x) = 2 - \sin(x - 1)$. De grafiek snijdt de evenwichtsstand in het punt $(1, 2)$.
- Hoe kun je aan het functievoorschrift van h zien dat de grafiek in het punt $(1, 2)$ niet stijgend, maar dalend door de evenwichtsstand gaat?
 - Hoe groot is de periode van de grafiek van h ?
 - Geef de coördinaten van een punt waarin de grafiek van h stijgend door de evenwichtsstand gaat.



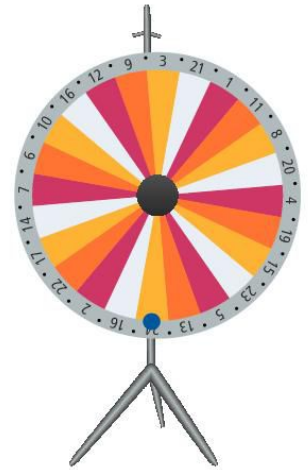
Ondersteunende route → maak opdracht 024

- 24** Geef bij de functies de evenwichtsstand en de coördinaten van een drietal punten waarin de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

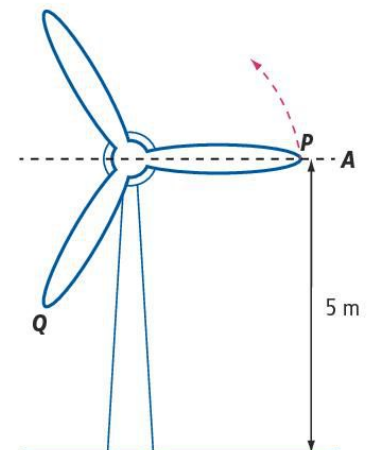
H

- $g(x) = 5 + \sin(x + 3)$
- $g(x) = -4 + \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$
- $g(x) = 5 - \sin(x - 0,3)$
- $g(x) = -4,75 + 4\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$

- 25** Het rad van fortuin draait tegen de wijzers van de klok in. De hoogte van het blauwe punt op de rand van het rad wordt gegeven door $h = 1,5 + \sin\left(t - \frac{1}{2}\pi\right)$. Hierin is t de tijd in seconden en h de hoogte in meters ten opzichte van de grond.
- In welke positie bevindt het blauwe punt zich op tijdstip $t = 0$?
 - Leg uit dat de maximale hoogte van het blauwe punt gelijk is aan 2,5 meter.
 - Leg uit dat na ongeveer 3,14 seconden het hoogste punt bereikt wordt.
 - Geef de minimale hoogte van het blauwe punt en alle tijdstippen waarop deze hoogte op het tijdsinterval $[0, 10]$ bereikt wordt.

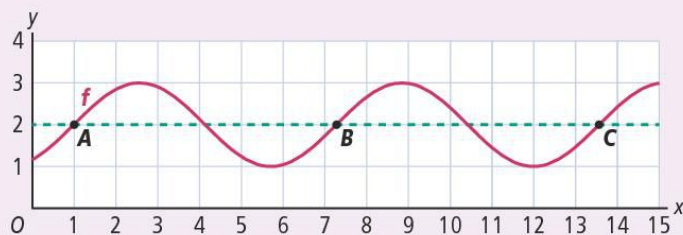


- 26** De wieken van de windmolen zijn 2 meter lang. Het middelpunt ligt 5 meter boven de grond. De wieken draaien in 3 seconden rond. Op $t = 0$ bevindt punt P zich in de getekende positie.
- Leg uit dat de formule $h = 2\sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + 5$ het verband geeft tussen de hoogte h in meters van het punt P ten opzichte van de grond en de tijd t in seconden.
 - Leg uit dat punt Q op het tijdstip $t = 1$ stijgend door de evenwichtsstand gaat.
 - Stel een formule op die het verband geeft tussen de hoogte in meters van het punt Q ten opzichte van de grond en de tijd in seconden.



Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten



022 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x - 1) + 2$.

- In de grafiek is de evenwichtsstand getekend.
Hoe zie je de evenwichtsstand terug in het functievoorschrift?
- De grafiek gaat in het punt $A(1, 2)$ stijgend door de evenwichtsstand.
Hoe zie je de coördinaten van dit punt terug in het functievoorschrift?
- De x -coördinaat van punt B is $1 + 2\pi \approx 7,28$.
Leg dit uit.
- Welke coördinaten heeft punt C ?

024 Gegeven is de functie $f(x) = -4 + \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

- Geef de evenwichtsstand van de grafiek van f .
- Leg uit dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat in het punt $\left(-\frac{1}{2}\pi, -4\right)$.
- Hoe groot is de periode van de grafiek van f ?
- Geef de coördinaten van het volgende punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
- Geef nog twee punten waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Geef bij de volgende functies de evenwichtsstand en de coördinaten van een drietal punten waarin de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

- | | |
|---|---------------------------------------|
| f $g(x) = 1 + \sin(x + \pi)$ | h $g(x) = 5 + \sin(x + 1,3)$ |
| g $g(x) = 2 + \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ | i $g(x) = -4,75 + \sin(x + 2)$ |

Uitdagende opdrachten

U3 Een periodieke grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand in het punt $\left(\frac{1}{3}\pi, 2\right)$.

Stel een bijbehorend functievoorschrift op van de vorm $f(x) = d + \sin(x + c)$. Leg je antwoord uit.

Je leert

- wat een sinusoid is
- hoe je de kenmerken van een sinusoid uit de formule afleidt

Leerroutes

- ondersteunend: 27—028—29—30—031—32
- doorlopend: 27—28—29—30—31—32
- uitdagend: 27—29—30—31—32—U4

De waterhoogte in een haven kan voor een bepaalde dag beschreven worden met de formule $H = 3,2 + 1,8 \sin(0,5t - 2,8)$. Hierin is H de hoogte in meters en t de tijd in uren met $t = 0$ om 0.00 uur.

- Welke gegevens over de waterhoogte kun je afleiden uit deze formule?



- 27**
- a** Gegeven is de functie $g(x) = 3 \sin(2(x - 1)) + 4$. Geef de amplitude, de evenwichtsstand en de periode.
- b** Geef de coördinaten van een punt waarin de grafiek van g stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Theorie

Periodieke grafieken met een formule van de vorm $y = d + a \sin(b(x - c))$ noem je **sinusoiden**.

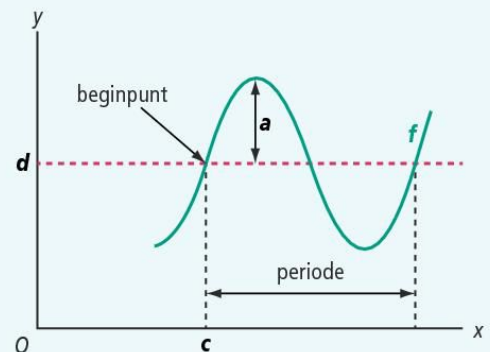
De betekenis van de getallen a , b , c en d voor de grafiek is:

- De amplitude is a als $a > 0$ en de amplitude is $-a$ als $a < 0$.
- De evenwichtsstand is d .
- Met b bereken je de periode.

Voor het verband tussen b (met $b > 0$) en de periode geldt:

$$b = \frac{2\pi}{\text{periode}} \text{ of } \text{periode} = \frac{2\pi}{b}$$

- Een punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat, noem je een beginpunt. Een beginpunt is bijvoorbeeld het punt (c, d) (als $a > 0$).

**Voorbeeld**

Gegeven is de formule $y = -8 + 6 \sin(\frac{1}{2}(x + 4))$.

Bepaal van de bijbehorende sinusoid de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

Oplossing

$d = -8$, de evenwichtsstand is -8 .

$a = 6$, de amplitude is 6 .

$b = \frac{1}{2}$, de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

$c = -4$, een beginpunt is $(-4, -8)$.

Ondersteunende route → maak opdracht 028

28**H**

Bepaal van de sinusoiden bij de formules de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

a $y = 2 + 4 \sin\left(\frac{1}{2}(x - 3)\right)$

b $y = 3 + 2 \sin\left(4\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\right)$

c $y = -200 + 125 \sin(0,1\pi x)$

d $y = \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{3}\pi\left(x - \frac{1}{8}\pi\right)\right)$

29

Gegeven is de functie $f(x) = -3 - 2 \sin(x - 4)$.

- a** Leg uit waarom het punt $(4, -3)$ geen beginpunt is van de grafiek van f .
- b** Geef de coördinaten van een beginpunt van de grafiek van f .
- c** Plot de grafiek van $g(x) = 5 - 8 \sin(x + 2)$ en bereken de coördinaten van het beginpunt op het interval $[0, 2\pi]$.
- d** Verklaar je antwoord van opdracht c met behulp van het functievoorschrift $g(x)$.

30

De waterhoogte op het wad kan op een bepaalde dag beschreven worden met de functie $W(t) = 0,7 + 0,65 \cdot \sin(0,5t)$ met W in meters en t in uren.

In deze formule komt $t = 0$ overeen met het tijdstip 0.00 uur.

- a** Wat is de maximale waterhoogte op die dag?
- b** Hoe groot is de periode van de grafiek van W ?
- c** Leg uit dat het water op het tijdstip 3.08 uur de hoogste stand heeft bereikt.
- d** Op welk tijdstip bereikt het water opnieuw de hoogste stand?
- e** Bereken met behulp van de periode op welke tijdstippen het water die dag het laagste punt bereikt.
- f** Plot de grafiek van de waterhoogte voor deze dag en controleer hiermee je antwoord van opdracht e.



Theorie

De y -coördinaten van de toppen van de sinusoiden met formule $y = d + a \sin(b(x - c))$ kun je bepalen met behulp van de evenwichtsstand en de amplitude. De toppen liggen vanwege de symmetrie halverwege twee opeenvolgende snijpunten met de evenwichtsstand.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van twee opeenvolgende toppen van de sinusoiden bij de formule $y = 15 + 20\sin(\frac{1}{3}\pi(x - 2))$.

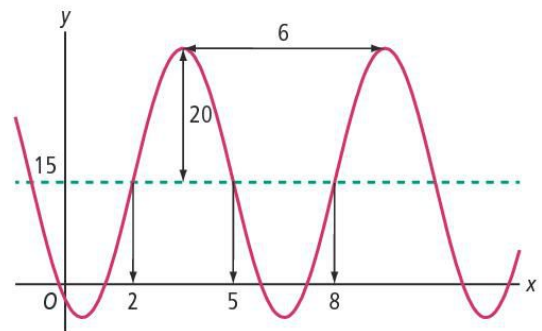
Oplossing

De evenwichtsstand is 15 en de amplitude is 20, dus het maximum is gelijk aan $15 + 20 = 35$ en het minimum is gelijk aan $15 - 20 = -5$.

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$ en een beginpunt is $(2, 15)$.

De twee hierop volgende snijpunten met de evenwichtsstand zijn dus $(5, 15)$ en $(8, 15)$.

De toppen zitten halverwege deze drie punten en zijn dus $(3\frac{1}{2}, 35)$ en $(6\frac{1}{2}, -5)$.

**Ondersteunende route → maak opdracht 031**

- 31** Bereken de coördinaten van twee opeenvolgende toppen van de bijbehorende sinusoiden.

H

- a** $y = 3 \sin(2x) - 2$ **c** $y = -42 + 28 \sin(0,2\pi(x + 3))$
b $y = 6 + 8 \sin(\pi x)$ **d** $y = 3,2 - 1,3 \sin(\pi x + \pi)$

- 32** De daglengte is de tijdsduur tussen zonsopkomst en zonsondergang. Voor Madrid kan het verband tussen de daglengte D en het aantal dagen na 1 januari van een jaar benaderd worden met de formule $D = 12 + 2,7 \sin(0,0172(t - 80))$. Hierin is t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 januari en D de daglengte in uren.

H

- a** Leg aan de hand van de formule uit dat de periode een jaar is.
b Geef de maximale en minimale daglengte en de data waarop deze worden bereikt.
c Bereken de daglengte op 1 mei.
d Hoeveel dagen per jaar is de daglengte minder dan 10 uren?
e Stel de formule van de daglengte op als de tijd na 1 januari niet in dagen maar in weken wordt gemeten.

Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

028

- a Gegeven is de functie $h(x) = 4 + 3 \sin(2(x - 1))$.
Het functievoorschrift heeft de vorm
 $h(x) = d + a \sin(b(x - c))$.
Vul het blaadje in.
- b Gegeven is de functie $k(x) = 3 \sin(5x) - 2$.
Welke waarden hebben a , b , c en d bij de functie k ?
- c Geef de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt van de grafiek van k .

Bepaal van de grafiek van elk van deze functies de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

- d $m(x) = 4 \sin(\pi(x + 2)) + 7$ f $p(x) = -50 + 60 \sin(1,5\pi x)$
e $n(x) = -5 + \sin\left(2\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)\right)$ g $q(x) = 5\frac{1}{2} \sin(4(x - 2)) - 3$

●	$h(x) = d + a \cdot \sin(b(x - c))$
●	$h(x) = 4 + 3 \sin(2(x - 1))$
●	$d = \dots$, de evenwichtsstand is ...
●	$a = \dots$, de amplitude is ...
●	$b = \dots$, de periode is $\frac{2\pi}{\dots} = \dots$
●	$c = \dots$, de coördinaten van een beginpunt zijn $(\dots, \dots)$

031

- Gegeven is de functie $f(x) = 3 \sin(0,5\pi x) + 2$.
- a Geef de coördinaten van een punt waar de grafiek van f stijgend door de evenwichtsstand gaat.
- b Geef de evenwichtsstand, de amplitude en de periode van de grafiek van f .
- c Leg uit dat de functie f een maximum heeft bij $x = 1$.
- d Leg uit dat $(1, 5)$ de coördinaten zijn van de top bij $x = 1$.
- e Bij welke waarde van x heeft de functie f een minimum?
- f Welke waarde heeft het minimum?

Bereken de coördinaten van twee opeenvolgende toppen van de sinusoiden bij de formules.

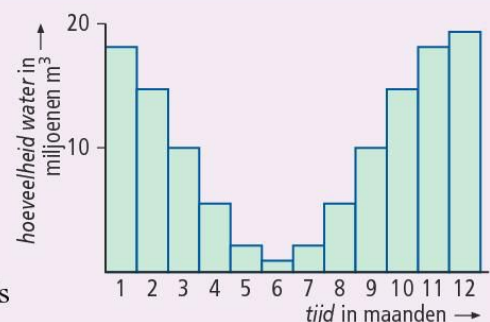
- g $y = 2 \sin(3x) - 4$ i $y = 2 + 17 \sin(\pi(x + 3))$
h $y = 15 + 6 \sin(2(x + 4))$ j $y = 38 - 20 \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$

●	$f(x) = 3 \cdot \sin(0,5\pi x) + 2$
●	evenwichtsstand: ...
●	amplitude: ...
●	periode: $\frac{2\pi}{0,5\pi} = \dots$

Uitdagende opdrachten

U4

De hoeveelheid regenwater die jaarlijks per maand in een gebied rond een bepaald dorp valt, is gedurende een groot aantal jaren gemeten. In een staafdiagram is de gemiddelde hoeveelheid regen per maand weergegeven. De gemiddelde hoeveelheid regen per maand kan benaderd worden met de formule $r = 10 + 9 \sin\left(\frac{1}{6}\pi(t + 3)\right)$. Hierin is r de hoeveelheid water in miljoenen m^3 en t de tijd in maanden, waarbij de maand januari overeenkomt met $t = 1$. Niet ver van dit dorp is een stuwmeer aangelegd. Van het regenwater uit het gebied rond het dorp bereikt 40% het meer één maand later. Stel een formule op voor de hoeveelheid regenwater s die het stuwmeer maandelijks bereikt.



18.5 Formules opstellen bij sinusoiden

Je leert

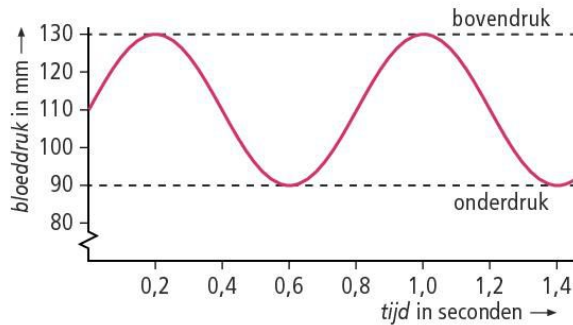
- hoe je een formule opstelt bij een sinusoiden

Leerroutes

- ondersteunend: 33—34—035—35—036—37
- doorlopend: 33—34—35—36—37—38
- uitdagend: 34—35—36—37—38—U5

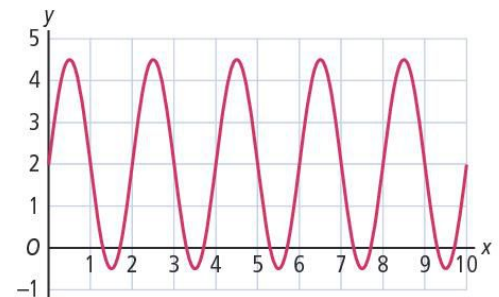
In de grafiek zie je hoe de bloeddruk van een persoon verandert tussen twee hartslagen.

- Welke gegevens kun je uit de grafiek aflezen?



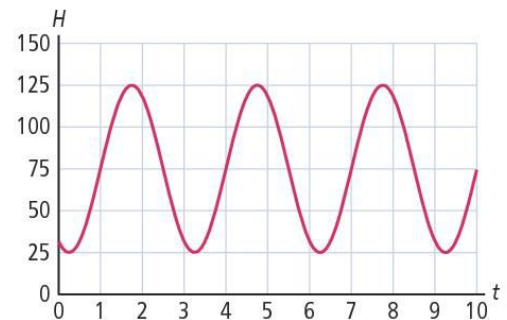
- 33** De grafiek hoort bij een formule van de vorm $y = d + a \sin(b(x - c))$.

- Hoe groot is de evenwichtsstand van de sinusoiden?
- En hoe groot is de amplitude?
- Geef de waarden van a en d .
- Laat met een berekening zien dat $b = \pi$.
- Hoe kun je aan de grafiek zien dat $c = 0$?
- Stel een formule bij de grafiek op.



- 34** De sinusoiden geeft het verband weer tussen de hoogte H in meters van het uiteinde van een rotorblad van een windturbine en de tijd t in seconden. De formule bij de sinusoiden is van de vorm $H = d + a \sin(b(t - c))$.

- Lees uit de grafiek het maximum en het minimum af.
- Hoe groot is de evenwichtsstand d ?
- Hoe groot is de amplitude a ?
- Lees de periode af en bereken hiermee de waarde van b .
- Geef de coördinaten van een beginpunt.
- Stel een formule bij deze sinusoiden op.



Aanpak

Hoe stel je een formule van de vorm $y = d + a \sin(b(x - c))$ op bij een sinusoïde?

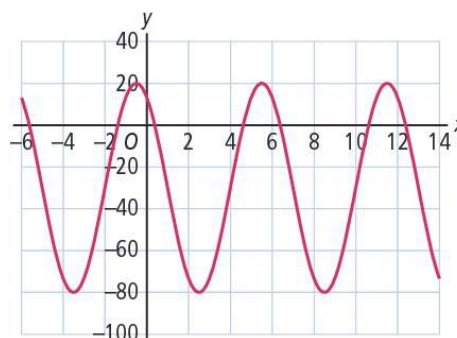
- 1 Lees het maximum en het minimum af.
- 2 Bereken de evenwichtsstand d en de amplitude a .
- 3 Lees de periode af en bereken b met $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- 4 Lees een beginpunt van de sinusoïde af, de x -coördinaat hiervan is gelijk aan c .
- 5 Schrijf de formule op.

Voorbeeld

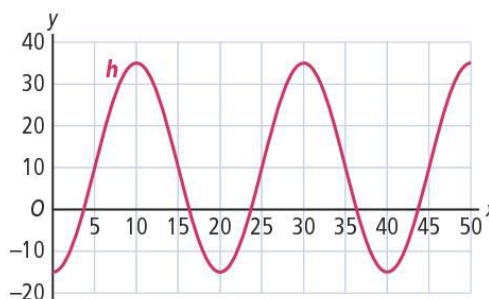
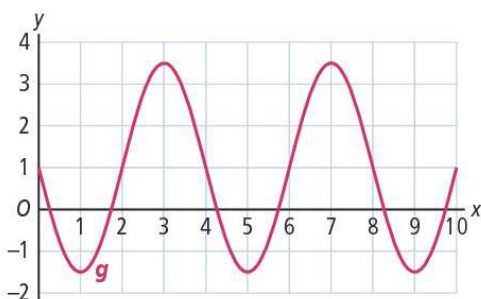
Stel een formule op bij de sinusoïde.

Oplossing

- 1 Het maximum is 20 en het minimum is -80 .
- 2 De evenwichtsstand is $d = (20 + (-80)) : 2 = -30$.
De amplitude a is het verschil tussen het maximum en de waarde van d , dus $a = 20 - (-30) = 50$.
- 3 De grafiek gaat bij $x = -2$ en $x = 4$ stijgend door de evenwichtsstand. De periode is 6, dus $b = \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$.
- 4 Een beginpunt is $(-2, -30)$. Dus $c = -2$.
- 5 Een formule is $y = -30 + 50\sin(\frac{1}{3}\pi(x + 2))$.



Ondersteunende route → maak opdracht 035



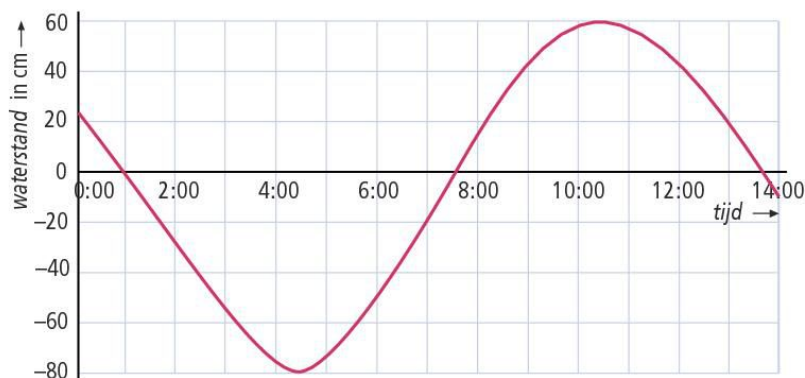
- 35** Gegeven zijn de sinusoiden bij de functies g en h .
H Stel bij beide grafieken een functievoorschrift op.

Ondersteunende route → maak opdracht 036

- 36** Stel een formule op bij de volgende sinusoiden.
- a De periode is 16, een beginpunt is $(4, -12)$ en het maximum is 18.
 - b Een beginpunt is $(0, 6)$ en het dichtstbijzijnde laagste punt is $(3, 2)$.
 - c Twee opeenvolgende toppen zijn $(5, 210)$ en $(17, -100)$.

18.5 Formules opstellen bij sinusoiden

37



hoog- en laagwater

04.10	LW	-78 cm
10.14	HW	58 cm

Gegeven is de getijdenkromme van 5 mei 2003 van het K13A Platform dat voor de Nederlandse kust is gelegen. In de tabel staat een aantal gegevens.

De waterstand kan redelijk goed beschreven worden door de formule $H = a + b \sin(c(t - d))$. Hierin is H de waterhoogte ten opzichte van het Normaal Amsterdams Peil (NAP) in cm en t de tijd in uren met $t = 0$ om 0.00 uur op 5 mei 2003.

- Geef met behulp van de gegevens uit de tabel en de grafiek, een benadering van de waarden van a , b , c en d en stel de bijbehorende formule op.
- Tussen 0.00 uur en 8.00 uur is de waterstand gedurende een aantal minuten meer dan 60 cm onder NAP. Onderzoek met de formule van opdracht a hoeveel minuten dit het geval is en ga na hoeveel dit aantal verschilt met de grafiek.



38

Boven een houtopslag ligt een zogeheten golfplaat.

De voorkant van de plaat die je op de foto ziet, is in werkelijkheid 98 cm breed en het hoogteverschil tussen het hoogste en laagste punt van een golf is 4,2 cm.

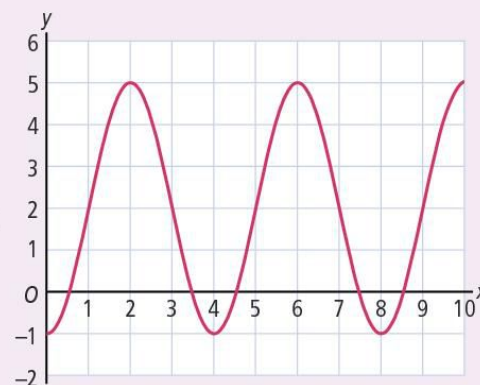
Breng een denkbeeldig assenstelsel aan met de y -as aan het begin van de golfplaat links en de x -as als evenwichtsstand van het golfpatroon. Dit golfpatroon heeft een vorm die overeenkomt met een sinusoid.

Stel een formule op bij deze sinusoid.

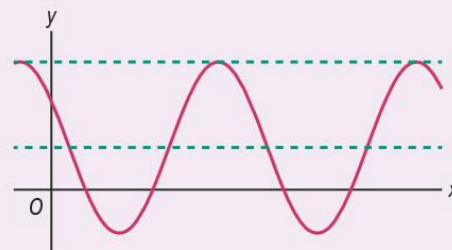
Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

- 035** In deze opdracht ga je een functievoorschrift van de vorm $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$ opstellen bij de sinusoïde.
- Lees in de grafiek het maximum en het minimum af.
 - Bereken de evenwichtsstand d .
 - Bereken de amplitude a .
 - Lees de periode af in de grafiek en bereken hiermee b .
 - Lees de horizontale verschuiving af door te kijken in welk punt de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Welke waarde heeft c dus?
 - Stel het functievoorschrift $f(x)$ op.



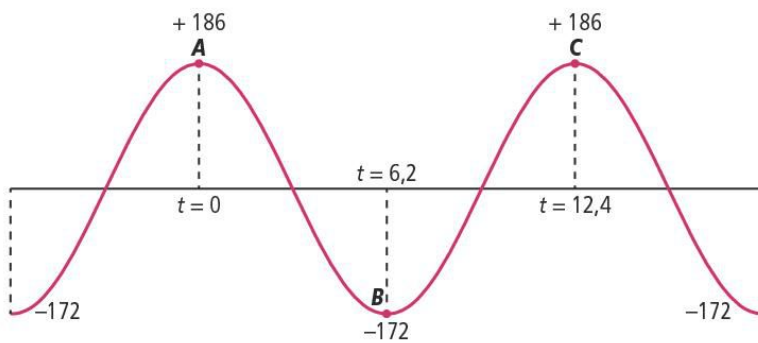
- 036** Van de sinusoïde bij de formule $y = d + a \sin(b(x - c))$ is gegeven:
- de periode is 5,
 - een beginpunt is $(3, 2)$,
 - het maximum is 6.
- Zet in de schets de gegevens van deze sinusoïde.
 - Leg uit dat de evenwichtsstand gelijk is aan 2 is en de amplitude gelijk aan 4.
 - Bereken b .
 - Stel een formule op bij de sinusoïde.
 - Van een andere sinusoïde is een beginpunt $(-1, 2)$ en het dichtstbijzijnde hoogste punt is $(4, 3)$.
Maak een schets van deze sinusoïde en stel de formule op.
 - Stel een formule op van een sinusoïde met twee opeenvolgende toppen $(3, 10)$ en $(7, -6)$.

**Uitdagende opdrachten**

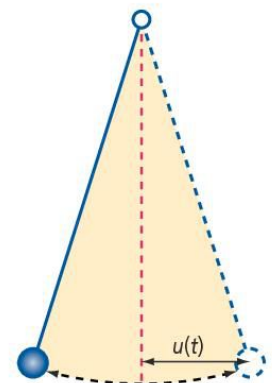
- U5** Als het uiteinde van de grote wijzer van de klok op de foto op zijn laagste punt zit, is hij 2,8 meter boven de grond. Op zijn hoogste punt is dat 3,6 meter. De kleine wijzer heeft een lengte die gelijk is aan de helft van de grote.
- Als je de hoogte van de uiteinden van de wijzers van de klok ten opzichte van de grond, uitzet tegen de tijd in uren, ontstaan twee sinusoïden.
- Stel formules op bij deze twee sinusoïden. Neem hierbij het tijdstip $t = 0$ op 0.00 uur.
 - Hoe vaak passeert de grote wijzer de kleine wijzer gedurende een etmaal?



18.6 Gemengde opdrachten

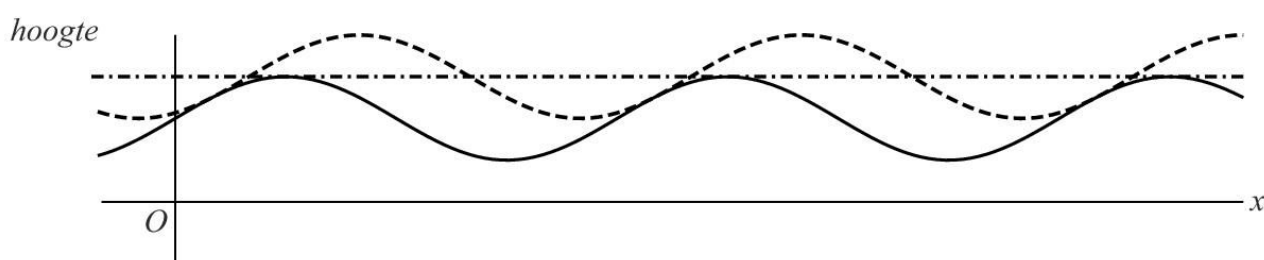


- 39** Van een Nederlandse kustplaats is de gemiddelde getijkromme getekend. Deze kromme is gebaseerd op gegevens over zowel de dagelijkse tijdstippen voor hoogwater en laagwater als de hoogten (in centimeters) ten opzichte NAP. De tijd is in uren. Stel een formule op die bij de getijkromme past. Druk de hoogte h in cm uit in de tijd t in uren.
- 40** Een formule die bij benadering de hoeveelheid lucht in de longen weergeeft tijdens het hardlopen, is $V = 2,3 + 1,2 \sin(1,1\pi t)$. Hierin is V de hoeveelheid lucht in de longen in liters en t de tijd in seconden.
- Hoelang duurt één ademhaling?
 - Hoeveel lucht zit er maximaal in de longen? Geef drie tijdstippen waarop dat het geval is.
 - Bereken gedurende hoeveel tijd per ademhaling er minder dan 2 liter lucht in de longen zit.
- 41** Stel een formule op van de volgende sinusoiden.
- De periode is 5, een beginpunt is $(3, 1)$ en het maximum is 7.
 - Twee opeenvolgende toppen zijn $(2, 10)$ en $(2\frac{1}{2}, -4)$.
- 42** Aan een lange staaldraad is een gewichtje bevestigd. Dit gewichtje slingerd naar links en rechts. De uitwijking ten opzichte van een verticale lijn wordt gegeven door de functie $u(t) = 8 \sin(\frac{2}{3}\pi t)$.
- Hierbij is u de uitwijking in cm en t de tijd in seconden.
- Hoelang duurt één periode?
 - Op welke tijdstippen gedurende de eerste zes seconden geldt $u(t) = 3$?
 - Bereken hoeveel procent van de tijd de uitwijking ten opzichte van de verticale lijn meer dan 6 cm is.





- 43** Langs het Zandpad in Utrecht staat een hek dat bestaat uit twee sinusoïden die elkaar raken. In de figuur zijn de twee sinusoïden in het hek schematisch weergegeven.



De formule die bij de onderste sinusoïde hoort, luidt

$$S_{\text{onderste}} = 100 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right).$$

Hierbij is S_{onderste} de hoogte in

centimeters en x de afstand tot het beginpunt op de evenwichtsstand in meters. De toppen van de onderste sinusoïde liggen op de evenwichtsstand van de bovenste sinusoïde. De amplitudes van beide sinusoïden zijn gelijk.

Verder is gegeven dat de twee sinusoïden elkaar bij $x = \frac{1}{2}$ en ook bij $x = 6\frac{1}{2}$ raken.

Stel de formule bij de bovenste sinusoïde op en licht toe hoe je je antwoord gevonden hebt.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2019, tijdvak 1)

Theorie

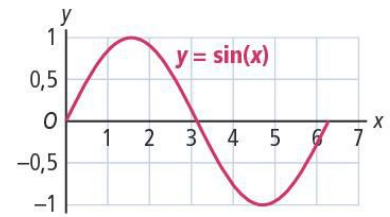
Sinusfunctie, sinusoïde, evenwichtsstand, amplitude en periode

Als een punt P met een snelheid van 1 meter per seconde over een cirkel met straal 1 meter beweegt, dan kun je de hoogte van het punt na t seconden berekenen met $\sin(t)$.

De functie $f(x) = \sin(x)$ heet de sinusfunctie. De grafiek van $f(x) = \sin(x)$ heet een sinusoïde.

Voor de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x)$ geldt:

- De evenwichtsstand is 0.
- De amplitude is 1.
- De periode is 2π .
- In het punt $(0, 0)$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand.
- De verticale lijnen door de toppen zijn assen van symmetrie van de grafiek.



- S1** Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.
- In welke punten daalt de grafiek van f op het interval $[2\pi, 6\pi]$ het snelst?
 - Geef de coördinaten van de toppen van de grafiek van f op het interval $[2\pi, 6\pi]$.

Vaardigheid

Je kunt een functievoorschrift aanpassen als de amplitude van de grafiek verandert.

De grafiek van de functie $h(x) = a \cdot \sin(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor a .

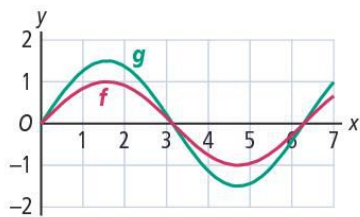
De grafiek wordt verticaal uitgerekt als $a > 1$ of $a < -1$ en in elkaar gedrukt als $-1 < a < 1$.

Als het getal a negatief is, dan wordt de grafiek bovendien in de x -as gespiegeld.

De amplitude van de grafiek van de functie $h(x) = a \cdot \sin(x)$ is gelijk aan a als a positief is en gelijk aan $-a$ als a negatief is.

Voorbeeld

Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en van functie g .



De amplitude van g is 1,5.
Het functievoorschrift is $g(x) = 1,5 \sin(x)$.

- S2** De grafiek van functie h ontstaat door spiegeling in de x -as van de grafiek van de functie g uit het voorbeeld.
Stel het functievoorschrift van h op.
- S3** Geef de amplitude van grafieken van de functies $f(x) = 12 \sin(x)$ en $g(x) = -0,8 \sin(x)$.

Vaardigheid

Je kunt een functievoorschrift aanpassen als de periode van de grafiek verandert.

De grafiek van de functie $h(x) = \sin(bx)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as. De grafiek wordt in horizontale richting uitgerekt als $0 < b < 1$ en in elkaar gedrukt als $b > 1$.

Als het getal b negatief is, dan wordt de grafiek bovendien in de y -as gespiegeld.

Voor positieve waarden van b is het verband tussen b en de periode: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$ ofwel de periode $= \frac{2\pi}{b}$

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies

$$f(x) = \sin(0,5\pi x) \text{ en } g(x) = \sin(6x).$$

Bereken de periode van de grafieken van f en g .

Oplossing

$$f: b = 0,5\pi, \text{ de periode is } \frac{2\pi}{0,5\pi} = 4.$$

$$g: b = 6, \text{ de periode is } \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi.$$

S4 Geef van de grafieken bij de formules de periode.

a $H = \sin(0,25t)$

b $T = \sin(2\pi p)$

c $R = \sin(0,2\pi x)$

Vaardigheid

Je kunt een functievoorschrift aanpassen als de evenwichtsstand van de grafiek verandert.

De grafiek van de functie $g(x) = d + \sin(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een verticale verschuiving van d eenheden omhoog.

De evenwichtsstand is d .

Voorbeeld

De grafiek van $f(x) = \sin(x)$ wordt 12 eenheden omlaag verschoven.

Stel het functievoorschrift $g(x)$ op bij de beeldgrafiek.

Oplossing

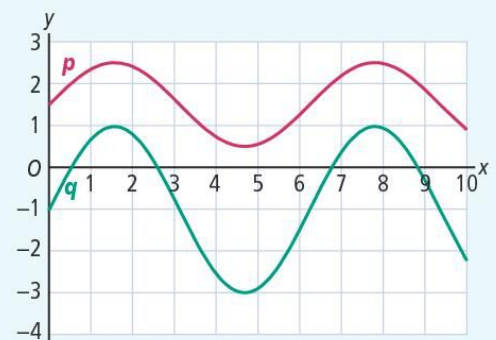
De evenwichtsstand wordt -12 .

Het functievoorschrift is $g(x) = -12 + \sin(x)$.

S5 De grafieken van de functies p en q zijn ontstaan door een verticale verschuiving en een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$

a Geef van beide grafieken de amplitude en de evenwichtsstand.

b Stel de functievoorschriften $p(x)$ en $q(x)$ op.



S6 **a** De grafiek van de functie h ontstaat door de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ 6 eenheden omhoog te verschuiven.

Stel het functievoorschrift $h(x)$ op.

b Gegeven is de functie $k(x) = \sin(x) - 7$.

Hoe ontstaat de grafiek van k uit die van f ?

Samenvatting

Vaardigheid

Je kunt een functievoorschrift aanpassen als het beginpunt van de grafiek verandert.

De grafiek van de functie $h(x) = \sin(x - c)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een horizontale verschuiving van c eenheden naar rechts.

In het punt $(c, 0)$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand.

Voorbeeld

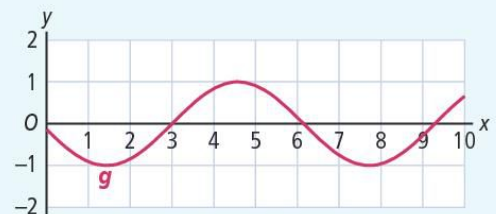
De grafiek van h ontstaat door de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ 3 eenheden naar links te verschuiven.

Stel het functievoorschrift van h op.

Oplossing

3 naar links betekent $c = -3$. Het functievoorschrift is $h(x) = \sin(x + 3)$.

- S7**
- Gegeven is de grafiek van de functie g .
Stel het functievoorschrift $g(x)$ op.
 - Geef de coördinaten van een punt waar de grafiek van $T = \sin(p + 0,5)$ stijgend door de evenwichtsstand gaat.



Vaardigheid

Je kunt kenmerken van een sinusoid uit het functievoorschrift afleiden.

Periodieke grafieken met een formule van de vorm $y = d + a \sin(b(x - c))$ noem je sinusoiden.

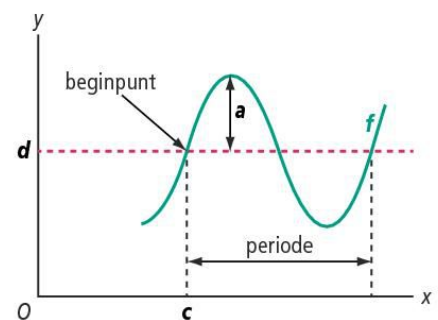
De betekenis van de getallen a , b , c en d voor de grafiek is:

- De amplitude is a als $a > 0$ en de amplitude is $-a$ als $a < 0$.
- De evenwichtsstand d .
- Met b bereken je de periode.

Voor het verband tussen b (met $b > 0$) en de periode geldt:

$$b = \frac{2\pi}{\text{periode}} \text{ of } \text{periode} = \frac{2\pi}{b}$$

- Een punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat, noem je een beginpunt. Een beginpunt is bijvoorbeeld het punt (c, d) (als $a > 0$).



Voorbeeld

Bereken de coördinaten van twee opeenvolgende toppen van de sinusoid $y = 5\sin(\frac{1}{2}\pi(x - 1)) - 2$.

Oplossing

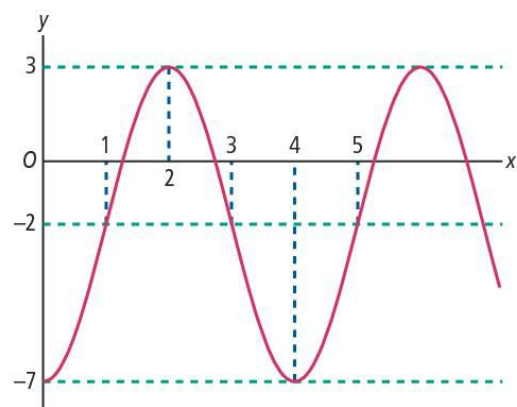
De evenwichtsstand is -2 en de amplitude is 5 .

Het maximum is 3 , het minimum is -7 .

De periode is 4 en een beginpunt is $(1, -2)$.

Twee hierop volgende snijpunten met de evenwichtsstand zijn dus $(3, -2)$ en $(5, -2)$.

De toppen zitten halverwege deze drie punten en zijn dus $(2, 3)$ en $(4, -7)$.



- S8** a Geef de evenwichtsstand, de amplitude en de periode van de grafieken van de functies $f(x) = 3 + 5\sin\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)\right)$ en $g(x) = -3\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) + 10$.
- b Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van $g(x) = -3\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) + 10$ op het interval $[0, 12]$.

Vaardigheid

Je kunt een formule opstellen bij een sinusöide.

- 1 Lees het maximum en het minimum af.
- 2 Bereken hiermee de evenwichtsstand d en de amplitude a .
- 3 Lees de periode af en bereken b met $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- 4 Lees een beginpunt van de sinusöide af, de x -coördinaat hiervan is gelijk aan c .
- 5 Schrijf de formule op.

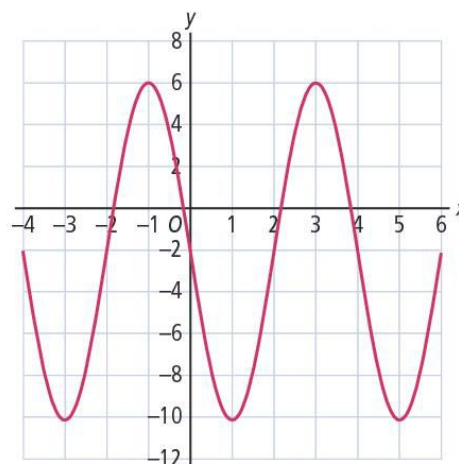
Voorbeeld

Stel een formule op bij de gegeven sinusöide.

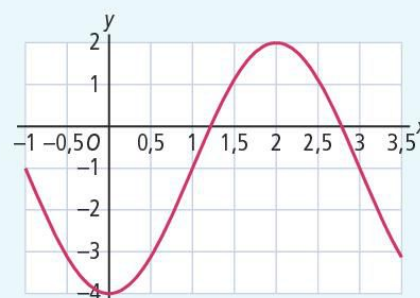
Oplossing

De formule is van de vorm $y = d + a \sin(b(x - c))$.

- 1 Het maximum is 6 en het minimum is -10.
- 2 De evenwichtsstand is $d = \frac{6 - 10}{2} = -2$ en de amplitude $a = 6 - (-2) = 8$.
- 3 De periode is 4, dus $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.
- 4 De grafiek gaat bij $x = -2$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $c = -2$.
- 5 Een formule is $y = -2 + 8\sin\left(\frac{1}{2}\pi(x + 2)\right)$.



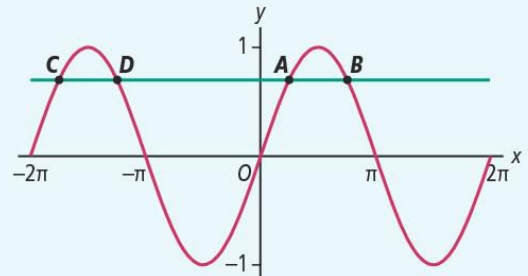
- S9** a De grafiek hoort bij functie f .
Stel het functievoorschrift op van f .
- b De grafiek van de functie g is een sinusöide met periode 12 en evenwichtsstand -2. Het punt $(5, 4)$ is een top van de grafiek van g .
Stel het functievoorschrift $g(x)$ op.



T1 Bepaal van de sinusoiden de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

- a $y = -3 + 7 \sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)\right)$
- b $y = 7 - 3 \sin(4(x + 4))$
- c $y = -0,23 + 0,65 \sin(0,4\pi x)$

T2 De grafiek van $y = \sin(x)$ en de lijn $y = 0,7$ snijden elkaar op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ in de punten A , B , C en D . Het punt A heeft x -coördinaat $0,78$. Geef met behulp van de eigenschappen van de grafiek van $y = \sin(x)$ de x -coördinaten van de punten B , C en D .

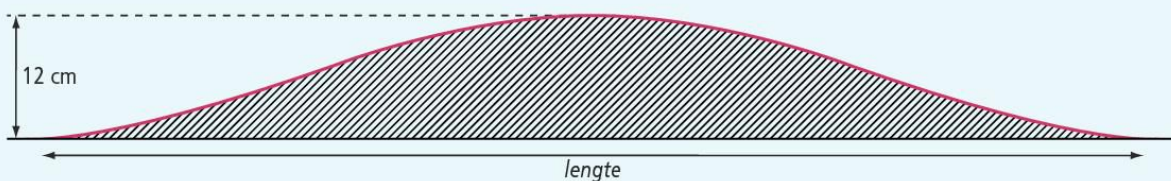


T3 De hoeveelheid lucht in de longen is bij regelmatige ademhaling een periodiek verschijnsel. Een model hiervoor is $H = 1,2 + 0,7 \sin(1,25t)$ met t in seconden en H in liters.

- a Hoe groot is de periode? Geef je antwoord in hele seconden.
- b Hoeveel lucht blijft er bij het uitademen in de longen minimaal achter?
- c Na het leveren van een inspanning is de ademfrequentie 1,5 keer zo hoog en de maximale longinhoud 2,4 liter geworden. De minimale longinhoud is gelijk gebleven. Stel een formule op die hierbij past.

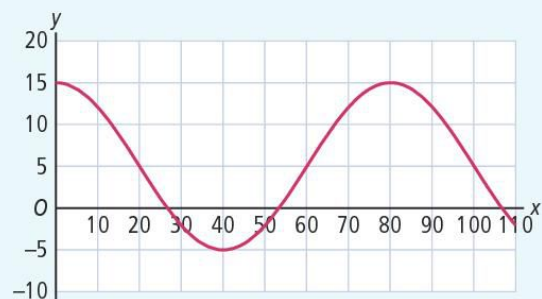
T4 Het zijaanzicht van een verkeersdrempel heeft de vorm van een sinusoid. Hierbij is de volgende formule opgesteld:

$h = 0,06 + 0,06 \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 1)\right)$. Hierin is h de hoogte en x de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meters.

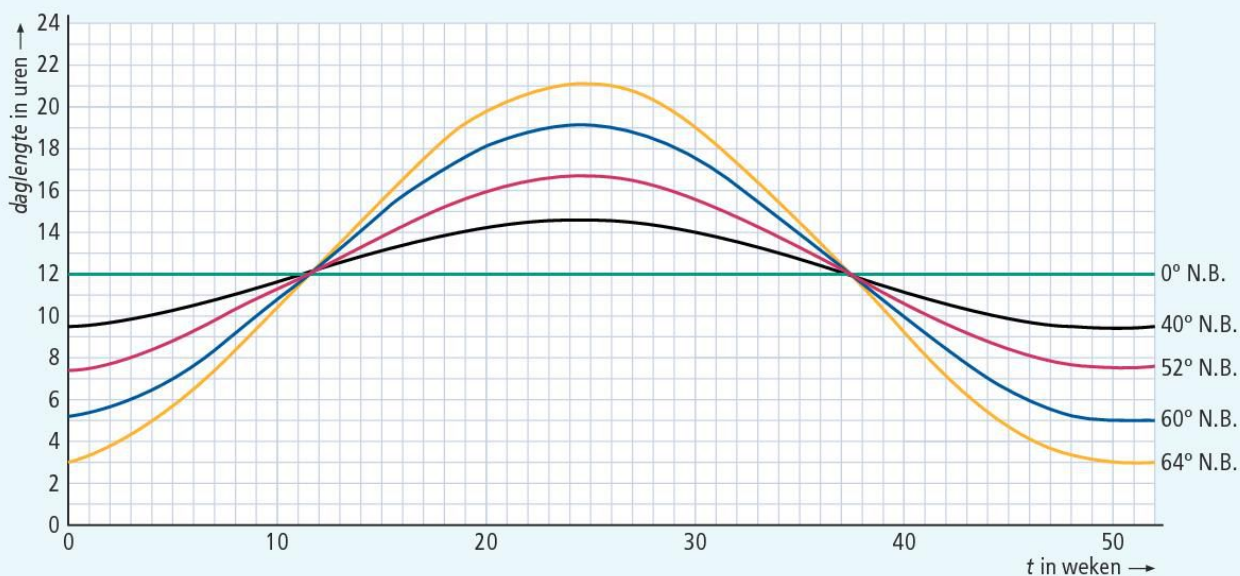


- a Bereken hoeveel meter de lengte van deze drempel is.
- b De helling van de drempel is niet overal even groot. Hoeveel meter van het begin van de drempel ligt het eerste punt waar de drempel een maximale helling heeft?

- T5**
- Bereken de evenwichtsstand, de amplitude en de periode van de sinusoiden.
 - Stel een formule op bij de sinusoiden.



- T6**
- In de figuur is de daglengte weergegeven voor de evenaar en voor vier plaatsen op het noordelijk halfrond. Op de horizontale as is de tijd t in weken uitgezet met $t = 0$ op 1 januari en op de verticale as de daglengte d in uren.



- Wat is de maximale daglengte op 60° NB en wanneer wordt deze bereikt?
- Voor welke waarden van t is de daglengte voor alle breedtegraden gelijk? Welke bijzondere dagen zijn dat?
- Uitgaande van 52 weken in een jaar kun je de daglengte d benaderen met de formule $d = 12 + a \cdot \sin(0,1208 \cdot t)$ met t het aantal weken na 21 maart.
Op welke dag neemt de daglengte het sterkst toe?
- Leg uit dat uit de formule volgt dat de periode 1 jaar is.
- Amersfoort ligt op 52° NB.
Welke waarde van a geldt voor Amersfoort?
- Bereken voor Amersfoort bij welke waarden van t geldt dat $d = 16$.
Wat is de praktische betekenis van het antwoord?
- Stel de formule op voor de daglengte bij een plaats op 64° NB met t de tijd in dagen en $t = 0$ op 1 januari.

Je kunt een functievoorschrift aanpassen als de amplitude verandert.

- E1** Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.
 Stel een functievoorschrift op van de beeldgrafiek na
a een vermenigvuldiging van 4 ten opzichte van de x -as.
b een vermenigvuldiging van -3 ten opzichte van de x -as.

Je kunt het functievoorschrift opstellen als de periode verandert.

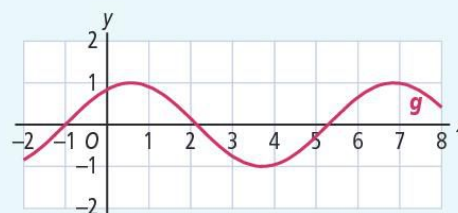
- E2** **a** Gegeven is het functievoorschrift $f(x) = \sin(bx)$.
 Hoe groot is b bij een periode van $0,2\pi$? En bij een periode van 8?
b Geef de periode van de grafiek van $g(x) = \sin(1,5x)$ en van de grafiek van $h(x) = \sin(\pi x)$.

Je kunt een functievoorschrift aanpassen als de evenwichtsstand van de grafiek verandert.

- E3** **a** De grafiek van de functie g ontstaat door de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ 3,4 eenheden omlaag te verschuiven.
 Stel het functievoorschrift $g(x)$ op.
b Gegeven is de functie $h(x) = 8 + \sin(x)$.
 Hoe ontstaat de grafiek van h uit die van f ?

Je kunt een functievoorschrift aanpassen als het beginpunt van de grafiek verandert.

- E4** **a** Gegeven is de grafiek van de functie g .
 Stel het functievoorschrift $g(x)$ op.
b In welk punt gaat de grafiek van $K = \sin(t - 2,5)$ stijgend door de evenwichtsstand?

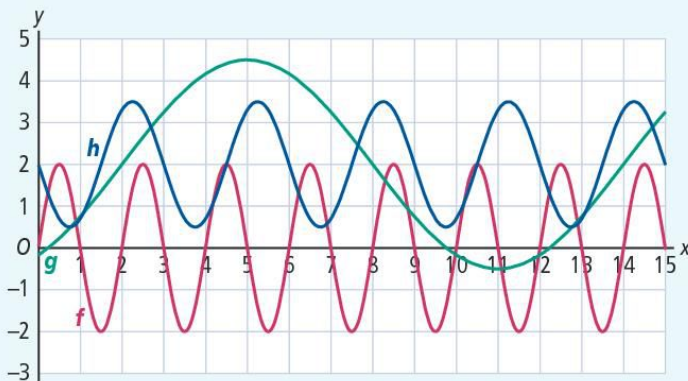


Je kunt kenmerken van een sinusoid uit de formule afleiden.

- E5** Geef de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt van de grafieken bij de volgende functies.
a $g(x) = -3 + 2 \sin(x - 5)$
b $g(x) = 7 + 3 \sin\left(\frac{1}{2}(x + 2)\right)$
c $g(x) = 8 + 5 \sin(3\pi(x - 1))$
d $g(x) = -2,7 - 1,6 \sin(x + 5)$

Je kunt een formule opstellen bij een sinusöide.

E6 Gegeven zijn de grafieken van f , g en h .



- Stel de functievoorschriften $f(x)$ en $g(x)$ op.
- De grafiek van h wordt 2 naar links en 1,5 omhoog verschoven. Stel een formule op bij de beeldgrafiek.

E7 De productie van voedsel is afhankelijk van de lengte van het groeiseizoen. Onder het groeiseizoen wordt verstaan het aantal dagen per jaar dat de gemiddelde dagtemperatuur hoger is dan een bepaalde temperatuur. Voor veel gewassen in Nederland is die temperatuur 6°C .

De gemiddelde dagtemperatuur T gedurende een jaar in ons land wordt benaderd door de formule $T = 9,5 - 7,5 \sin\left(\frac{1}{6}\pi(x + 3)\right)$.

Hierin is x de tijd in maanden na 1 januari.

- Plot en schets de grafiek van T voor één jaar.
- Hoelang is het groeiseizoen?
- Een bepaald gewas heeft wat meer warmte nodig. De gemiddelde dagtemperatuur moet nu boven 8°C liggen. Hoeveel dagen korter is het groeiseizoen voor dit gewas?

E8 Iemand zit in een reuzenrad dat met een constante snelheid draait. Zijn hoogte ten opzichte van de grond wordt gegeven door de formule $H = 13 + 12 \sin(4\pi(t - 0,125))$.

Hierin is H de hoogte in meters en t de tijd in minuten.

- In hoeveel seconden draait het rad precies één keer rond?
- Op welke hoogte stapt de persoon in?
- Hoe hoog komt de persoon maximaal?
- Bereken op welke hoogte de persoon zich 10 seconden na het instappen bevindt.
- Stel een formule op als de tijd niet in minuten maar in seconden wordt gegeven.

E9 Bij een sinusöide hoort de formule $y = 9 + 5 \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\left(x - \frac{2}{3}\right)\right)$.

Beredeneer wat de coördinaten zijn van de toppen op het interval $[0, 2]$.

Discriminatie: ja of nee?

In 1972 spande een groep vrouwen een proces aan tegen een fabriek in Texas die apparaten voor airconditioning produceert. Deze fabriek nam alleen nieuwe personeelsleden in dienst die langer waren dan 170,0 cm. De vrouwen waren bij hun sollicitatie afgewezen omdat ze niet aan deze eis voldeden. De advocaat van de vrouwen benadrukte het discriminerende karakter van deze voorwaarde door te stellen dat 91,0% van alle Amerikaanse vrouwen tussen de 18 en 65 jaar niet lang genoeg was om aangenomen te kunnen worden. Dit percentage ontleende hij aan een onderzoek van het Amerikaanse ministerie van volksgezondheid waaruit bleek dat de lengte van de vrouwen normaal verdeeld was met $\mu = 160,4$ cm.

Je kunt berekenen dat de bijbehorende standaardafwijking $\sigma \approx 7,2$ cm is.

De vertegenwoordiger van de fabriek bij het proces noemde het percentage van 91 sterk overdreven. Het door de tegenpartij aangehaalde onderzoek stamde uit 1948. De gemiddelde lengte was volgens hem in de periode 1948-1972 flink toegenomen. Hij ondersteunde zijn betoog met het resultaat van een recent onderzoek. In een aselechte steekproef van 1000 vrouwen tussen 18 en 65 jaar werd in 1972 bij 117 vrouwen een lengte gemeten van meer dan 172,6 cm.

Waar komt die 172,6 vandaan?

De groep Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar die langer zijn dan 170,0 cm noem je V . Voor de mediaan m van de lengte van de vrouwen van V geldt dat 50% van de vrouwen uit V langer is dan m . Dan is 4,5% procent van de totale groep vrouwen uit het onderzoek van 1948 langer dan m . Uitgaande van $\mu = 160,4$ cm en $\sigma = 7,2$ cm vind je dan met de normale verdeling $m \approx 172,6$.

De advocaat van de vrouwen gaf toe dat het door hem aangehaalde onderzoek wat verouderd was en de gemiddelde lengte van de vrouwen waarschijnlijk wel was toegenomen. Hij bleef echter benadrukken dat ook in 1972 nog steeds een grote meerderheid van de Amerikaanse vrouwen op grond van hun lengte door het bedrijf zou worden afgewezen. Kreeg hij gelijk?

Opdracht

- Neem aan dat de standaardafwijking ongewijzigd is, dus $\sigma = 7,2$ cm.
Ga na dat de gemiddelde lengte van de Amerikaanse vrouw volgens het onderzoek uit 1972 gelijk is aan $\mu = 164$ cm.
- Bereken het percentage Amerikaanse vrouwen in de genoemde leeftijdsgroep dat in 1972 niet lang genoeg was voor een functie bij de fabriek.



Functies bewerken 19

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

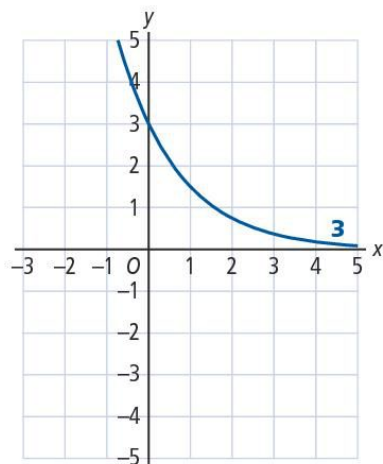
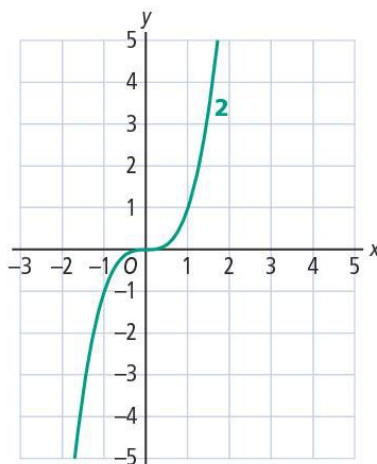
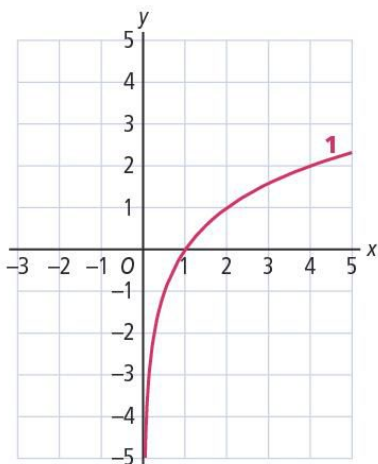
Je hebt in eerdere hoofdstukken veel gewerkt met functies en hun bijbehorende grafieken.

In dit hoofdstuk herhaal je hoe functievoorschriften veranderen als je de bijbehorende grafieken verschuift, of als je de eenheden van de bijbehorende variabelen verandert. Je leert ook wat somfuncties, verschilfuncties, productfuncties en quotiëntfuncties zijn. Als laatste ga je aan de hand van een formule beredeneren hoe de bijbehorende grafiek stijgt of daalt.

In hoofdstuk 20 ga je leren hoe je productfuncties en quotiëntfuncties differentieert.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- | | |
|---|-------------|
| • <i>Formules manipuleren</i> | opdracht 11 |
| • <i>Modelleren en algebraïseren</i> | opdracht 22 |
| • <i>Probleem oplossen en analytisch denken</i> | opdracht 37 |



- V1** Gegeven zijn drie grafieken op het interval $[-3, 5]$ en de vier functies $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = {}^2\log(x)$, $h(x) = x^2$ en $i(x) = x^3$. Geef bij elke grafiek aan welke functie erbij hoort.

Theorie

Je bent verschillende soorten functies tegengekomen.

lineaire functie: $f(x) = ax + b$

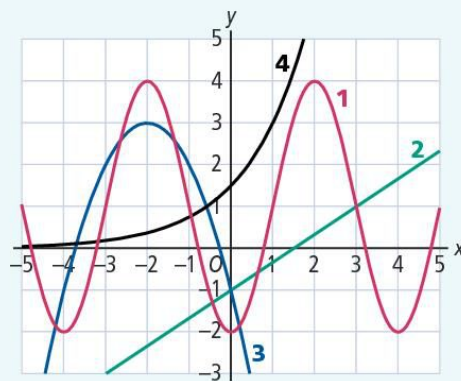
kwadratische functie: $f(x) = ax^2 + bx + c$

machtsfunctie: $f(x) = a \cdot x^n$

sinusfunctie: $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$

exponentiële functie: $f(x) = b \cdot g^x$ met $g > 0$ en $g \neq 1$

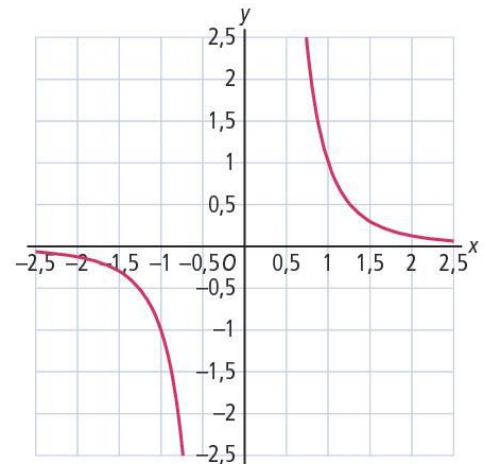
logaritmische functie: $f(x) = {}^g\log(x)$ met $g > 0$ en $g \neq 1$



- V2** In de figuur naast de theorie zie je vier grafieken, elk horend bij een van de genoemde functies.
- Hoe zie je dat grafiek 1 bij een sinusfunctie hoort?
 - Van welke twee functies uit de theorie zie je geen grafiek in de figuur?
 - Geef bij elk van de grafieken 2, 3 en 4 aan van welke soort functie het een grafiek is.

- V3** Gegeven zijn de functies $f(x) = g^x$ en $h(x) = {}^g\log(x)$.
- Kies $g = 3$ en schets de grafieken van f en h in één assenstelsel.
 - Kies $g = \frac{1}{3}$ en schets in een nieuw assenstelsel weer de grafieken van f en h .
 - Voor welke waarden van g zijn de grafieken van f en h stijgend? En voor welke waarden van g zijn de grafieken dalend?

- V4** Gegeven is de machtsfunctie $f(x) = a \cdot x^n$.
- Neem $a = 1$. Plot en schets de grafiek van f voor $n = 5$ en voor $n = -2$ en geef van beide functies aan of hun grafiek toenemend of afnemend stijgend of dalend is.
 - Voor $a = 1$ is een grafiek van f getekend. Deze grafiek gaat door het punt $P(2, \frac{1}{8})$. Welke waarde van n hoort bij deze grafiek?
 - Geef de coördinaten van het punt waar de grafiek van f bij $a = 1$ voor elke waarde van n doorheen gaat.
 - De grafiek van f gaat door de punten $(1, 4)$ en $(3, 36)$. Welke waarde van a volgt uit het gegeven dat de grafiek door het punt $A(1, 4)$ gaat?
 - Bereken voor de grafiek van opdracht d de bijbehorende waarde van n .



- V5** Schrijf zonder haakjes.
- $f(x) = x(3 + 2x) - 5(x - 6)$
 - $g(x) = -3x^4(8x^3 - 7x^6)$
 - $h(x) = (9 - 4x^3)(x + 5)$
 - $i(x) = 5x^4\left(4x + \frac{8}{x^3}\right)$

- V6** Substitueer formule B in formule A en schrijf je antwoord zo eenvoudig mogelijk.
- A: $y = 13 - 4u$ en B: $u = 2x - 3$
 - A: $y = 6 \cdot 9^u$ en B: $u = \frac{1}{2}x$
 - A: $y = u^2$ en B: $u = 2x + 1$
 - A: $y = \frac{12u}{4 - 3u}$ en B: $u = \frac{1}{3}x - 2$

Je leert

- hoe je na een verschuiving het functievoorschrift opstelt van de beeldgrafiek

Leerroutes

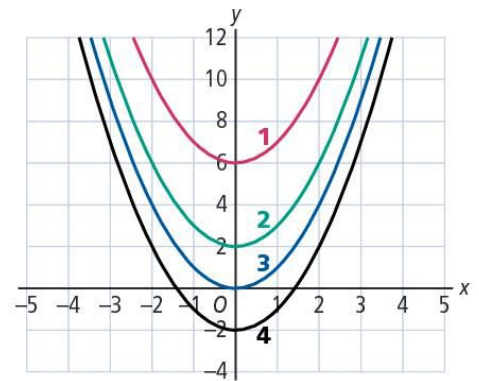
- ondersteunend: 1—2—03—3—4—5—6
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—3—4—5—6—7—U1

In het assenstelsel zijn de grafieken bij twee prijs-afzetfuncties getekend. Grafiek 2 is ontstaan door een verschuiving van grafiek 1.

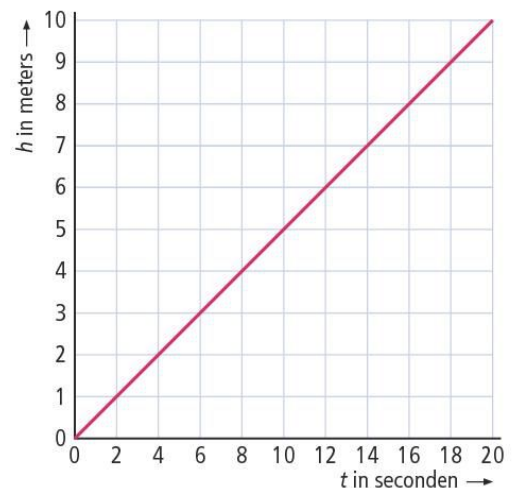
- Welke twee verschuivingen kunnen hierbij horen?



- Gegeven zijn de functies $s(x) = x^2$ en $v(x) = x^2 + 6$. In een assenstelsel zijn vier grafieken getekend.
 - Welke van de grafieken hoort bij functie s ? En welke grafiek bij functie v ?
 - Beschrijf hoe de grafiek van v ontstaat uit de grafiek van s .
 - Hoe zijn de twee overgebleven grafieken ontstaan uit de grafiek van s ?
 - Stel bij beide overgebleven grafieken een functievoorschrift op.
 - Gegeven is het functievoorschrift $f(x) = x^2 + a$. De top van de grafiek van f is het punt $(0, 12)$. Welke waarde heeft a in deze functie?



- Harold neemt een roltrap naar boven. De roltrap is 10 meter hoog. In de grafiek kun je aflezen op welke hoogte Harold zich na t seconden bevindt met $t = 0$ het moment dat Harold op de roltrap stapt.
 - Na hoeveel seconden staat Harold bovenaan de roltrap?
 - Stel een formule op waarmee je kunt berekenen op welke hoogte h in meters Harold zich na t seconden bevindt.
 - Elize stapt vier seconden na Harold op de roltrap. Teken in hetzelfde assenstelsel de grafiek die bij de hoogte hoort waarop Elize zich bevindt.
 - Bij de grafiek van Elize past een formule van de vorm $h = p \cdot (t - q)$. Hoe groot is de waarde van p ? En van q ?



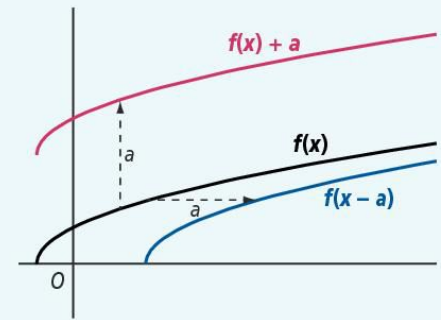
Theorie

Een grafiek kun je verschuiven. De grafiek die hierdoor ontstaat heet de **beeldgrafiek**.

Als je de grafiek van f met a eenheden omhoog verschuift, geldt voor de functie g van de beeldgrafiek $g(x) = f(x) + a$.

Als je de grafiek van f met a eenheden naar rechts verschuift, geldt voor de functie h van de beeldgrafiek $h(x) = f(x - a)$.

Een verschuiving heet ook wel een **translatie**.

**Voorbeeld 1**

De grafiek van de functie $p(x) = {}^3\log(2x)$ wordt 4 naar rechts en 5 omhoog verschoven. Geef het functievoorschrift $q(x)$ van de beeldgrafiek.

Oplossing

Om de grafiek 4 naar rechts te verschuiven, vervang je x door $x - 4$. Om de grafiek 5 omhoog te verschuiven, tel je 5 bij de functiewaarden op.

Je krijgt dan $q(x) = {}^3\log(2(x - 4)) + 5$,

ofwel $q(x) = {}^3\log(2x - 8) + 5$.

Voorbeeld 2

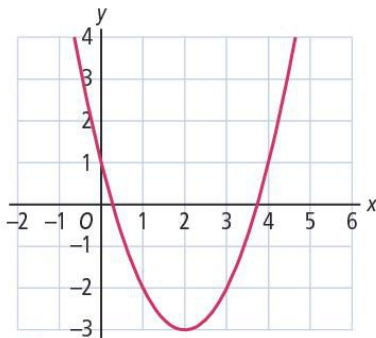
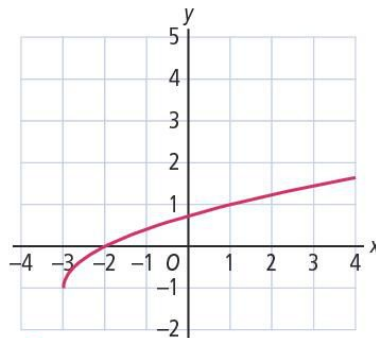
De grafiek van functie g ontstaat door een translatie van 2 naar links en een translatie van 7 omlaag toe te passen op de grafiek van de functie $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Geef het functievoorschrift $g(x)$ van de beeldgrafiek.

Oplossing

Om de grafiek 2 naar links te verschuiven, vervang je x door $x - 2$, dus $x + 2$. Om de grafiek 7 omlaag te verschuiven, trek je 7 van de functiewaarden af.

Je krijgt dan $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 7$.

Ondersteunende route → maak opdracht 03**1****2****3****H**

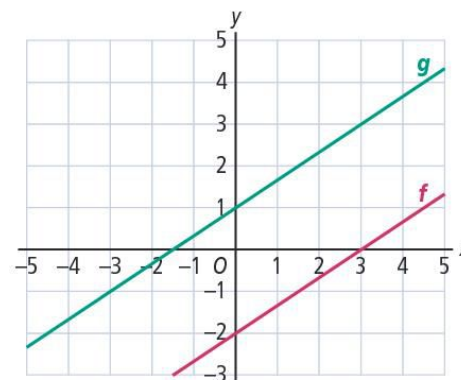
- a Grafiek 1 is ontstaan door een horizontale en een verticale translatie toe te passen op de grafiek van $f(x) = x^2$. Welke twee translaties zijn dat?
- b Stel een functievoorschrift op bij grafiek 1.
- c Grafiek 2 is ontstaan door een horizontale en een verticale translatie toe te passen op de grafiek van $g(x) = \sqrt{x}$. Welke twee translaties zijn dat?
- d Stel een functievoorschrift op bij grafiek 2.

19.1 Grafieken verschuiven

- 4** **a** Gegeven is de functie $m(x) = -7 + 0,5^{x+6}$.
H Door welke twee translaties is de grafiek van m ontstaan uit de grafiek van de functie $f(x) = 0,5^x$?
- b** Gegeven is de functie $k(x) = 25 + {}^2\log(4x - 20)$.
 De grafiek van k is door twee translaties ontstaan uit de grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(4x)$. Jan denkt dat een van deze translaties een horizontale translatie van 20 naar rechts is.
 Leg uit waarom Jan ongelijk heeft.
- c** Door welke twee translaties is de grafiek van k ontstaan uit de grafiek van f ?

- 5** Gegeven is een sinusöide met formule $y = 4 + 11 \sin(2x - 4)$.
H **a** Er wordt een translatie van 3 omlaag en een translatie van 5 naar links toegepast op de sinusöide.
 Stel een formule op bij de beeldgrafiek.
- b** Op de oorspronkelijke sinusöide worden twee andere translaties toegepast. Daardoor ontstaat een sinusöide met formule $y = 9 + 11 \sin(2x - 6)$.
 Welke twee translaties zijn nu toegepast?

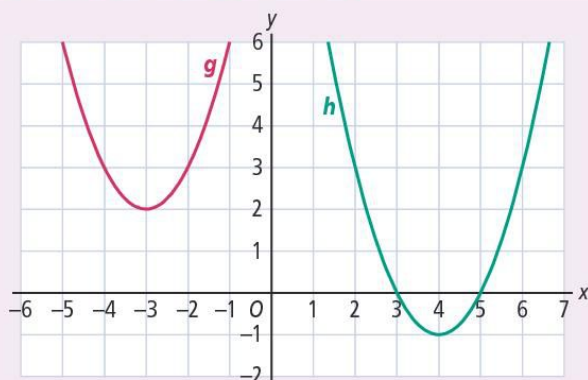
- 6** Gegeven zijn de grafieken van de functies f en g .
- a** Stel een functievoorschrift op van f .
- b** Je kunt de grafiek van g zien als een verticale verschuiving van de grafiek van f .
 Welke verticale verschuiving?
- c** Geef het functievoorschrift $g(x)$.
- d** Je kunt de grafiek van g ook zien als een horizontale verschuiving van de grafiek van f .
 Welke horizontale verschuiving?
- e** Geef met behulp van deze horizontale verschuiving het functievoorschrift $g(x)$.
- f** Laat zien dat het functievoorschrift dat je gevonden hebt bij opdracht e hetzelfde is als het functievoorschrift bij opdracht c.



- 7** De lijn k met vergelijking $y = 2x - 3$ wordt 5 naar links verschoven. De beeldgrafiek van k kun je ook krijgen door op lijn k een verticale verschuiving toe te passen.
 Onderzoek hoe groot die verschuiving dan is.

Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten



03 Gegeven zijn de grafieken van de functies g en h . De grafieken zijn beide ontstaan door de grafiek van $f(x) = x^2$ één keer horizontaal en één keer verticaal te verschuiven.

- Welke coördinaten heeft de top van de grafiek van $f(x) = x^2$?
- Hoeveel is de top van grafiek van g naar links verschoven ten opzichte van de grafiek van f ?
- Hoeveel is de top van grafiek van g omhoog verschoven ten opzichte van de grafiek van f ?
- Op het blaadje is een begin gemaakt met het opstellen van het functievoorschrift van g . Vul het blaadje verder in.
- Stel op dezelfde manier een functievoorschrift op van h .

●					
●					
●					
●					
●					
●					
●					

Om de grafiek ... naar links te verschuiven, vervang je x door $x - \dots$, ofwel $x + \dots$

Om de grafiek ... omhoog te verschuiven, tel je ... bij de functiewaarden op. Je krijgt dan $g(x) = (x + \dots)^2 + \dots$

Uitdagende opdrachten

U1 Op de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ wordt een horizontale en een verticale translatie toegepast zodat de beeldgrafiek door het punt $(7, 1)$ gaat. Bij de beeldgrafiek hoort een functievoorschrift van de vorm $g(x) = q + \sqrt{x - p}$. Er zijn meerdere mogelijkheden voor de bijbehorende waarden van p en q .

- Welke waarde van q hoort bij $p = 3$?
- Welke waarde van p hoort bij $q = -2$?
- Voor welke waarden van q kun je geen waarde van p berekenen?

Je leert

- hoe je een formule aanpast als je de eenheid van variabelen herschaalt

Leerroutes

- ondersteunend: 8—9—010—10—11—12
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 8—10—11—12—13—U2

De temperatuur in een mijn kun je berekenen met de formule $T = 18 + 2d$. Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en d de diepte van de mijn in honderden meters. Thijs wil een formule maken waarbij de diepte niet in honderden meters maar in meters wordt uitgedrukt.

- Welke formule krijgt Thijs: $T = 18 + 200d$,
 $T = 18 + 20d$, $T = 18 + 0,2d$,
 $T = 18 + 0,02d$ of $T = 18 + 0,002d$?



- 8 Een nieuwe trein wordt getest. Een onderdeel van de test is dat de trein met een constante snelheid op een lang stuk spoor rijdt. Bij deze test hoort de formule $s = 40t$. Hierin is s de afstand die de trein heeft afgelegd in meters en t de tijd in seconden.

- Hoeveel meter legt de trein af per seconde?
- In plaats van de afstand s uit te drukken in meters, kun je de afstand ook uitdrukken in kilometers. De afstand in kilometers is dan S .
Hoeveel kilometer legt de trein af per seconde?
- Vul in: als $s = 1$, dan is $S = \dots$. Hieruit volgt $S = \dots \cdot s$.
- Schrijf deze laatste formule als $S = \dots \cdot t$ door de formule $s = 40t$ hierin in te vullen.
- In plaats van de tijd t uit te drukken in seconden, kun je de tijd ook uitdrukken in minuten. De tijd in minuten is dan T .
Leg uit dat $t = 60 \cdot T$.
- Druk S uit in T en bereken daarmee hoeveel kilometer de trein heeft afgelegd na 10 minuten.

**Theorie**

Herschalen betekent dat je de eenheid van een of meer variabelen in een formule verandert. Je moet de formule aanpassen op de veranderde eenheid van de variabele.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $s = 6t^2 + 10$ met s de afstand in meters en t de tijd in uren.
Stel een formule op die de afstand c in centimeters uitdrukt in de tijd t in uren.

Oplossing

Omdat 1 meter gelijk is aan 100 cm, is
 $c = 100 \cdot s$.
 Dit geeft $c = 100 \cdot (6t^2 + 10)$ ofwel
 $c = 600t^2 + 1000$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $g = 4t + 7$ met de tijd t in uren en het gewicht g in grammen.
Stel een formule op die het gewicht g in grammen uitdrukt in de tijd d in dagen.

Oplossing

Omdat 1 uur gelijk is aan $\frac{1}{24}$ dag, is
 $d = \frac{1}{24} \cdot t$ ofwel $t = 24 \cdot d$
 $t = 24 \cdot d$ invullen geeft
 $g = 4 \cdot (24 \cdot d) + 7$ ofwel $g = 96d + 7$.

- 9 Met behulp van de oorspronkelijke formule van voorbeeld 1 kun je narekenen dat $s = 106$ als $t = 4$.
Ga na dat de nieuwe formule $c = 600t^2 + 1000$ hiermee in overeenstemming is.

Ondersteunende route → maak opdracht 010

- 10 Een lift in een hoog gebouw gaat met een constante snelheid in drie minuten omhoog van een hoogte van 120 meter naar een hoogte van 270 meter.
- Laat zien dat je de hoogte h in meters waarop de lift zich bevindt na t minuten, kunt berekenen met de formule $h = 50t + 120$.
 - Noem H de hoogte in decameters (1 decameter is 10 meter). Vul in.
 $H = \dots \cdot h$. Dit geeft $H = \dots \cdot (50t + 120)$.
 - Schrijf de formule voor H zo kort mogelijk.
 - Je gaat de formule voor H herschrijven waarbij je de tijd T in seconden uitdrukt. Vul in.
 $T = \dots \cdot t$ ofwel $t = \dots \cdot T$.
 - Gebruik je antwoord van opdracht d om een formule op te stellen waarmee je de hoogte H in decameters kunt berekenen na T seconden.
 - De hoogste buitenlift ter wereld staat in China. In ongeveer 1 minuut en 30 seconden ga je met een constante snelheid van 0 meter hoogte naar 300 meter hoogte.
Stel een formule op waarmee je de hoogte h in meters kunt berekenen waarop deze lift zich na t minuten bevindt.
 - Stel een formule op waarmee je de hoogte k in kilometers kunt berekenen na s seconden.



19.2 Herschalen

- 11** **H**
- a** Gegeven is de formule $P = 3a^2 - 4$. Hierin is P het gewicht in pond (1 pond is 500 gram) en a de lengte in dm. Stel de formule op die het gewicht K in kg uitdrukt in de lengte a in dm.
 - b** Gegeven is de formule $T = 3 + 5 \sin(\pi(m - 1))$. Hierin is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en m de tijd in maanden. Stel een formule op waarbij T wordt uitgedrukt in de tijd j in jaren.
 - c** Gegeven is de formule $O = 2\sqrt{5x + 10}$. Hierin is O de oppervlakte in cm^2 . Je weet dat $1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$. Stel een formule op waarbij de oppervlakte A wordt uitgedrukt in m^2 .
- 12** **H**
- Een batterij van een smartphone die stand-by staat, ontladst bij benadering volgens de formule $V = 3,31 + \frac{21}{t - 148}$ met $t \leq 140$. Hierin is de spanning V in Volt en is t de tijd in uur.
- a** Bereken de spanning van een volle batterij.
 - b** Bereken hoelang het duurt tot de spanning is afgenomen tot 1 Volt.
 - c** Stel een formule op als de tijd s in minuten wordt gegeven en de spanning W in mV (1 volt = 1000 mV).
- 13**
- Bij luchtballon A neemt de hoeveelheid draaggas af volgens de formule $A = 1000 \cdot 0,995^t$, met t in dagen en A in m^3 .
- a** Ballon B verliest zijn draaggas twee keer zo snel als ballon A en heeft op tijdstip $t = 0$ ook 1000 m^3 draaggas. Bereken na hoeveel dagen de hoeveelheid draaggas in ballon B evenveel is als die in ballon A na vier dagen.
 - b** Leg uit dat de formule bij de hoeveelheid draaggas bij ballon B gelijk is aan $B = 1000 \cdot 0,995^{2t}$.
 - c** Ballon C verliest zijn draaggas drie keer zo langzaam als ballon A. Stel een formule op bij ballon C.
 - d** Stel een formule op bij ballon A waarbij de hoeveelheid draaggas uitgedrukt is in w , de tijd in weken.

Uitdagende route → maak opdracht U2



Ondersteunende opdrachten

010 Een zwembad wordt gevuld met water. De waterhoogte h in dm na t uren kan worden berekend met de formule $h = 6t + 1$. Je gaat eerst een formule maken waarin de waterhoogte H in meters wordt uitgedrukt. Je gaat uiteindelijk een formule maken die de waterhoogte H in meters uitdrukt in de tijd T in minuten.

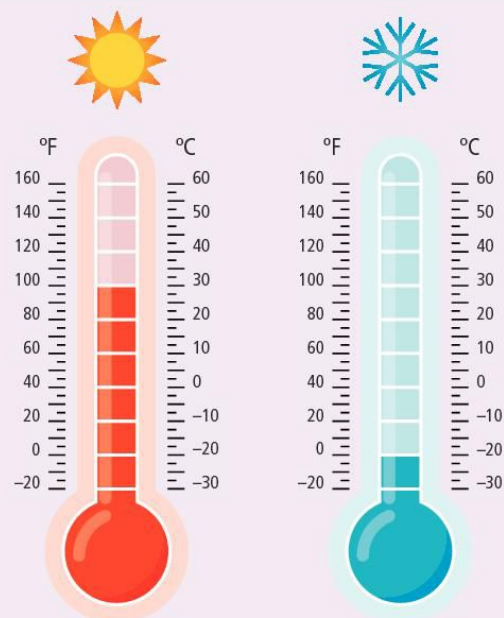
- Op het bovenste blaadje worden bij stap 1 de variabelen die gebruikt worden voor de waterhoogte opgeschreven.
Vul de ontbrekende eenheden bij stap 1 in.
- Vul het ontbrekende getal bij stap 2 in.
- Vul in: als $h = 1$ dan is $H = \dots$
- Gebruik je antwoord van opdracht c om stap 3 in te vullen.
- Leg uit wat er bij stap 4 is gebeurd en laat zien dat je de formule $H = 0,6t + 0,1$ krijgt.
- Je kunt ook een formule maken waarin H in de tijd T in minuten wordt uitgedrukt.
Vul op het onderste blaadje de ontbrekende eenheden in.
- Vul het ontbrekende getal bij stap 2 in.
- Gebruik je antwoord van opdracht g om stap 3 in te vullen.
- Vul het ontbrekende getal bij stap 4 in en schrijf je formule zo kort mogelijk.

•	h is de waterhoogte in ...	1
•	H is de waterhoogte in ...	
•	1 dm is gelijk aan ... m	2
•	Daarom is $H = \dots \cdot h$.	3
•	Dit geeft $H = \dots \cdot (6t + 1)$.	4

•	t is de tijd in ...	1
•	T is de tijd in ...	
•	1 uur is ... minuten	2
•	$T = \dots \cdot t$, dus $t = \dots \cdot T$	3
•	Dit geeft $H = 0,6 \cdot \dots + 0,1$.	4

Uitdagende opdrachten

U2 In Amerika geven ze de temperatuur niet in graden Celsius maar in graden Fahrenheit. Je kunt de temperatuur C in graden Celsius berekenen met de formule $C = \frac{5}{9}F - 17\frac{7}{9}$. Hierin is F de temperatuur in graden Fahrenheit. Tijdens een experiment wordt de temperatuur in een ruimte nauwkeurig geregeld. De temperatuur in de ruimte in graden Celsius kan worden berekend met de formule $C = 0,005m - 10$. Hierin is m de tijd in minuten sinds het begin van het experiment. Stel een formule op voor de temperatuur in de ruimte waarbij de temperatuur F in graden Fahrenheit is gegeven en de tijd u in uren.



19.3 Somfuncties en verschilfuncties

Je leert

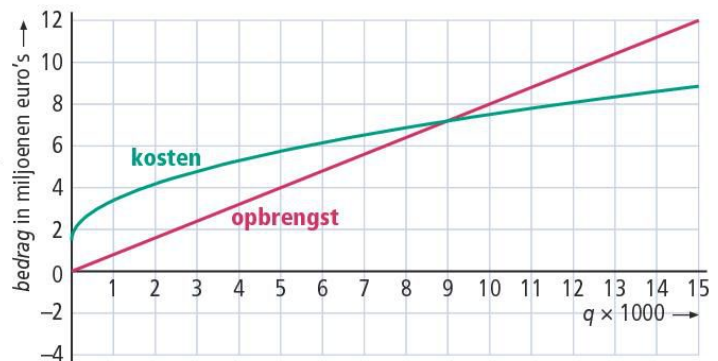
- wat een somfunctie en wat een verschilfunctie is

Leerroutes

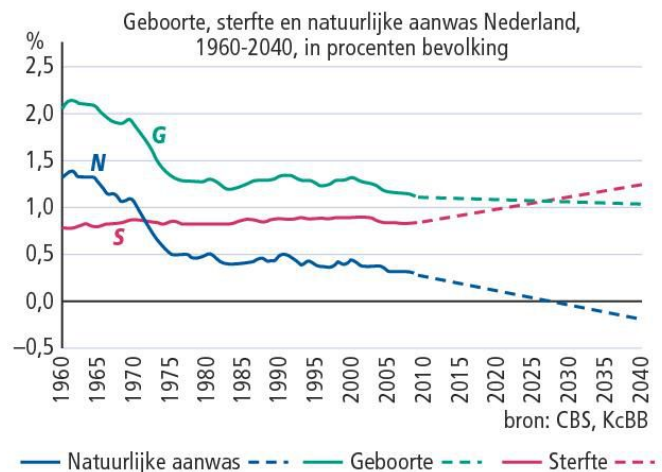
- ondersteunend: 14—015—16—17—18—19
- doorlopend: 14—15—16—17—18—19
- uitdagend: 14—15—17—18—19—U3

Firma Prozi verkoopt racefietsen. In het assenstelsel zijn twee grafieken getekend; één bij de opbrengst en één bij de kosten voor een aantal verkochte racefietsen.

- Teken een grafiek waarmee Prozi het verband kan zien tussen het aantal racefietsen dat het verkoopt en de winst dat er daarbij gemaakt wordt.



- 14** In 2010 is een grafiek gemaakt bij de geboortecijfers, sterftecijfers en natuurlijke aanwas van de bevolking van Nederland.
- Leg uit dat geldt $N = G - S$.
 - Beschrijf hoe je de grafiek van N kunt tekenen als je die van G en S al hebt.
 - Leg uit welke betekenis het snijpunt van de rode en de blauwe grafiek heeft.
 - Wat betekent het dat de grafiek van N op den duur onder de nullijn lijkt te komen?
 - Vanaf 2010, het jaar waarin deze grafiek werd gepresenteerd, zijn de grafieken gestippeld. Bij de stippellijn van S hoort de formule $S = 0,85 + 0,0071t$ en bij die van G hoort de formule $G = 1,1 - 0,0017t$. In deze formules zijn S en G in procenten van de bevolking en is t het aantal jaren na 2010. Stel een formule op bij het gestippelde deel van de grafiek van N .



Theorie

Het functievoorschrift van de **somfunctie** s van twee functies f en g ontstaat door de functievoorschriften van f en g op te tellen. De somfunctie s is $s(x) = f(x) + g(x)$. De bijbehorende grafiek heet de **somgrafiek**. De **verschilfunctie** v is $v(x) = f(x) - g(x)$. De grafiek hierbij heet de **verschilgrafiek**.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de functies $f(x) = 12x^3 - 7x^2$ en $g(x) = 4x^4 - 15x^3 + 6x^2$.

Het functievoorschrift van de somfunctie

$s = f + g$ is

$$s(x) = (12x^3 - 7x^2) + (4x^4 - 15x^3 + 6x^2).$$

$$s(x) = 4x^4 - 3x^3 - x^2$$

Voorbeeld 2

Gegeven zijn de functies $f(t) = 3t - 6$ en $g(t) = 2 + 4t - t^2$.

Het functievoorschrift van de verschilfunctie

$$v = f - g \text{ is } v(t) = (3t - 6) - (2 + 4t - t^2).$$

$$v(t) = 3t - 6 - 2 - 4t + t^2$$

$$v(t) = t^2 - t - 8$$

Ondersteunende route → maak opdracht 015

- 15** Stel de somformule $s = h + k$ en de verschilformule $v = h - k$ op. Vereenvoudig je antwoord.

H

a $h = 3m^2 - 4m + 9$ en $k = 7 + 10m$

b $h = 2 + 6p - \frac{3}{p}$ en $k = 3 - 5p + \frac{2}{p}$

c $h = \frac{2}{3}a(a - 1)$ en $k = (\frac{1}{2}a - 2)(2a + 5)$

d $h = t^2 - \frac{4}{t^2}$ en $k = \frac{2}{t^3} - 0,7t^2$

- 16** Bij de verkoop van een bepaald product geldt voor de totale opbrengst TO in duizenden euro's de formule $TO = 30q - \frac{1}{2}q^2$, waarbij q het aantal verkochte producten in duizendtallen is. De totale kosten in euro's zijn $TK = 54 + q^2$. Voor de totale winst TW in euro's die gemaakt wordt, geldt $TW = TO - TK$.

H

- a** Stel een formule op voor de totale winst, uitgedrukt in q .
b Teken in één assenstelsel de grafieken van TO , TK en TW .
c Er wordt alleen winst gemaakt als $TW > 0$.
 Geef in je assenstelsel aan wanneer er winst gemaakt wordt.
d Bereken bij welke waarden van q dit het geval is.
e Bereken de maximale winst. Bij hoeveel verkochte producten wordt deze bereikt?



19.3 Somfuncties en verschilfuncties

- 17** Bij de productie van een bepaald artikel geldt de kostenfunctie $TK(q) = -0,295q^2 + 28q + 463$ en de opbrengstfunctie

$$TO(q) = -\frac{1}{9}q^3 + 273q.$$

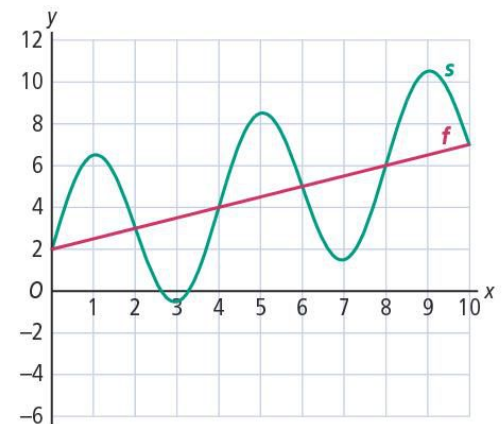
In deze functies is q het aantal per week geproduceerde artikelen in duizendtallen en zijn TK en TO in euro's.

- De winst TW wordt gegeven door $TW(q) = TO(q) - TK(q)$. Bereken met behulp van differentiëren bij welk aantal geproduceerde artikelen er sprake is van maximale winst.
- Hoeveel is de maximale winst?

- 18** Gegeven zijn de functies $f(x) = x + 1$ en $g(x) = 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$. Voor de somfunctie s geldt $s(x) = f(x) + g(x)$. De bijbehorende somgrafiek is een grafiek die slingert om de lijn met vergelijking $y = x + 1$.

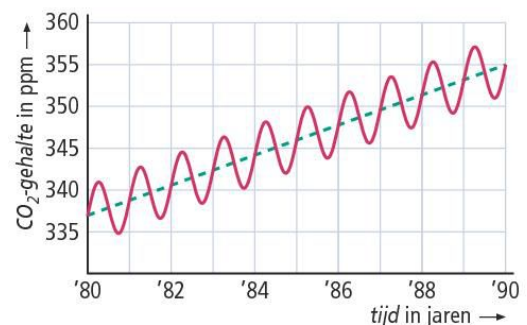
De grafieken van f en s zijn in één assenstelsel getekend.

- Hoe groot is de periode van g ?
- Teken de grafiek van g in hetzelfde assenstelsel.
- Waarom is de grafiek van s niet periodiek?
- Hoe groot is de maximale afwijking van de grafiek van s ten opzichte van die van f ?



- 19** Gegeven is een grafiek van het CO_2 -gehalte op het noordelijk halfrond in de jaren 80 van de vorige eeuw. In deze grafiek geeft de stippellijn de trend aan die de stijging van het CO_2 -gehalte weergeeft. De stippellijn wordt beschreven door de formule $T = mt + n$ waarbij t de tijd is in jaren. Neem $t = 0$ op 1 januari 1980.

- Geef met behulp van de figuur een benadering van m en n .
- Hoe groot is de maximale uitwijking ten opzichte van de stippellijn?
- De vorm van de schommeling ten opzichte van de stippellijn is te benaderen met de formule $S = a\sin(bt)$. Geef een benadering van de waarden van a en b .
- De gegeven grafiek is een somgrafiek waarbij een formule van de vorm $C = T + S$ hoort. Stel dat het CO_2 -gehalte blijft toenemen volgens dit wiskundig model. Bereken in welke maand van welk jaar de concentratie volgens dit model voor het eerst hoger dan 375 ppm was.



Een CO_2 -gehalte van 340 ppm ('parts per million') geeft aan dat er één deel CO_2 is op een totaal van een miljoen atmosfereerden.

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

015 Gegeven zijn de formules A: $h = 4m^2 + 9m - 13$ en B: $k = -10m + 17$.

- a** Je kunt de somformule s opstellen door de formules A en B bij elkaar op te tellen. Je krijgt dan $s = h + k$.
Op het blaadje is een begin gemaakt met het opstellen van de somformule s .
Vul stap 2 verder in.
- b** In stap 3 wordt de formule zo kort mogelijk geschreven door gelijksoortige termen samen te nemen.
Schrijf de somformule s zo kort mogelijk.
- c** Je kunt de verschilformule v opstellen door de formule B van A af te trekken. Je krijgt $v = h - k$.
Op het blaadje is een begin gemaakt met het opstellen van de verschilformule v .
Waarom staan er in stap 2 haakjes om de formules?
- d** Vul stap 2 verder in.
- e** In stap 3 zijn de haakjes weggewerkt. Er staat een min voor het tweede stel haakjes, dus worden alle termen tussen deze haakjes met -1 vermenigvuldigd.
Vul stap 3 verder in en herleid je antwoord.

●	$s = h + k$						1
●	$s = 4m^2 + 9m - 13 + \dots$						2
●	$s = \dots m^2 - \dots + \dots$						3
●							

●	$v = h - k$						1
●	$v = (4m^2 + 9m - 13) - (\dots)$						2
●	$v = 4m^2 + 9m - 13 + \dots$						3
●	$v = \dots m^2 + \dots m - \dots$						4

Stel de somformule $s = h + k$ en de verschilformule $v = h - k$ op. Vereenvoudig deze formules zoveel mogelijk.

f $h = 8m^2 - 12m - 7$ en $k = 14 - 3m$

g $h = 5 - 3q + \frac{9}{q}$ en $k = 12 + 4q - \frac{7}{q}$

Uitdagende opdrachten

- U3** Veroorzakers van verkeersongevallen waar de politie aan te pas komt, kun je in twee groepen verdelen: de groep personen onder 25 jaar en de groep van personen van 25 jaar en ouder. Elk jaar wordt bepaald hoeveel procent van de verkeersongevallen door elk van deze twee groepen wordt veroorzaakt. De percentages van de afgelopen 15 jaar kun je in een assenstelsel verwerken tot twee grafieken: grafiek O die past bij de percentages van de groep personen onder 25 jaar en grafiek B die past bij de percentages van de groep personen van 25 jaar en ouder.
Beschrijf hoe de somgrafiek eruitziet.

19.4 Productfuncties en quotiëntfuncties

Je leert

- hoe je de nulpunten van een productfunctie berekent
- hoe je de nulpunten en de grenswaarde van een quotiëntfunctie berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 20—021—22—23—024—25
- doorlopend: 20—21—22—23—24—25
- uitdagend: 20—21—23—24—25—U4

Een foto wordt in een passe-partout opgehangen. Een passe-partout is een lijst waarbij overal om de foto een witte rand van 3 cm breed zit. De foto is l cm lang en b cm breed.

- Geef een formule waarmee je de oppervlakte van de gehele lijst kunt berekenen.



- 20** De winst w in euro's die een fruithandelaar maakt per verkocht netje mandarijnen hangt af van de prijs volgens de formule $w = 0,6p - 0,9$. Het aantal netjes mandarijnen a dat hij op een dag verkoopt hangt ook af van de prijs volgens de formule $a = 188 - 30p$. In beide formules is p de prijs van een netje mandarijnen in euro's.

- Bereken het aantal netjes mandarijnen dat hij op een dag verkoopt bij een prijs van € 1,90 per netje.
- Bereken hoeveel euro winst hij dan maakt.
- Leg uit dat je de totale winst TW die de fruithandelaar op een dag maakt aan de verkoop van netjes mandarijnen, kunt berekenen met de formule $TW = (188 - 30p)(0,6p - 0,9)$.
- De fruithandelaar maakt geen winst of verlies als $TW = 0$. Bij welke prijzen per netje is dit het geval?

Theorie

Een functie van de vorm $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ heet een **productfunctie**.

De nulpunten van een productfunctie bereken je door op te lossen: $f(x) = 0$ of $g(x) = 0$. Dit is een toepassing van de regel: uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$.

Voorbeeld

Bereken van de productfunctie

$$p(x) = (4x - 18) \cdot (4 - \sqrt{x})$$

de waarden van x waarvoor $p(x) = 0$.

Oplossing

$$p(x) = 0 \text{ als } 4x - 18 = 0 \text{ of } 4 - \sqrt{x} = 0$$

Hieruit volgt $4x = 18$ of $\sqrt{x} = 4$.

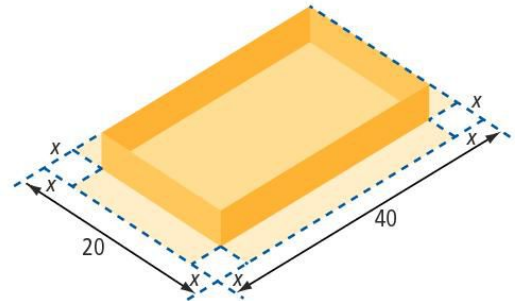
$$\text{Dus } x = 4\frac{1}{2} \text{ of } x = 16.$$

Ondersteunende route → maak opdracht 021

- 21** Bereken de waarden van x waarvoor $f(x) = 0$.
- H** **a** $f(x) = (2x - 5) \cdot \left(7 + 3\frac{1}{2}x\right)$ **c** $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (6x - 40)$
b $f(x) = (2x + 23) \cdot (2^x - 8)$ **d** $f(x) = x^3(1 - \sqrt{x})$
- 22** Van een stuk karton van 20 cm bij 40 cm worden in de hoeken vierkantjes van x cm bij x cm afgeknipt. Van het overgebleven deel wordt een doosje gevouwen.
- a** Leg uit dat $0 < x < 10$.
b Leg uit waarom de inhoud I in cm^3 van zo'n doosje berekend kan worden met de formule $I = x(20 - 2x)(40 - 2x)$.
c Bereken met je rekenmachine de waarde van x waarbij de inhoud maximaal is. Rond af op twee decimalen.
- 23** Van een artikel hangt de opbrengst O in euro's samen met het aantal verkochte exemplaren q volgens de formule

$$O = \frac{20\,000q}{q + 500}$$

- a** Waarom heeft de formule hier geen betekenis voor $q < 0$?
b Bij welke waarde van q is de opbrengst gelijk aan nul?
c Bereken bij welke waarde van q de opbrengst gelijk is aan 10 000 euro.
d Maak op je rekenmachine een tabel met stapgrootte 10 000 en onderzoek hiermee naar welke waarde de opbrengst nadert bij een steeds groter wordend aantal verkochte exemplaren.
e Schets nu voor $q \geq 0$ de grafiek die bij deze formule hoort.
f Hoe volgt je antwoord op opdracht d uit de grafiek?



Theorie

Een functie van de vorm $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heet een

quotiëntfunctie.

Bij grote waarden van x kunnen de functiewaarden steeds dichter naderen tot een grenswaarde.

Bij de waarde van x waar de grafiek van de functie $q(x)$ de x -as snijdt, geldt $q(x) = 0$. Deze vergelijking los je op door $t(x) = 0$ op te lossen. Dit is een toepassing van de regel:

uit $\frac{A}{B} = 0$ volgt $A = 0$ en $B \neq 0$.

Voorbeeld

Onderzoek of de formule $B = \frac{20q - 150}{4q + 3}$ een grenswaarde heeft en bereken voor welke waarde van q geldt dat $B = 0$.

Oplossing

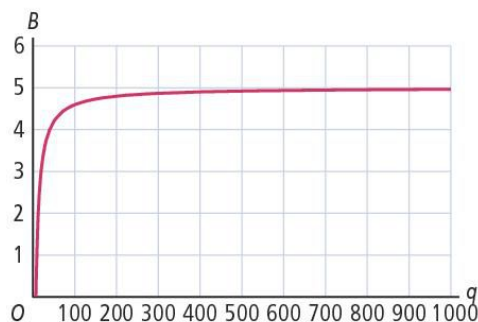
Maak op je rekenmachine een tabel.

q	10	100	1000	10 000
B	1,16	4,59	4,96	5,00

De grenswaarde is dus 5.

$B = 0$ als $20q - 150 = 0$.

Hieruit volgt $q = 7,5$.



Ondersteunende route → maak opdracht 024

- 24** Onderzoek hoe groot de grenswaarde is en bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as.

a $M = \frac{4t}{t-1}$

c $M = \frac{100b - 25}{2b + 4}$

b $M = \frac{2p + 5}{p}$

d $M = \frac{3m + 200}{0,1m^2 + 2}$

- 25** Een schaatsenfabriek heeft een nieuw type klapschaats ontwikkeld. De gemiddelde productiekosten per paar schaatsen hangen af van het geproduceerde aantal q .

Met de formule $GK = \frac{200q + 12000}{2q}$ kun je de gemiddelde productiekosten in euro's per paar schaatsen berekenen.

- Voor welke waarde van q geldt $GK = 0$? Waarom is deze waarde van q niet van belang voor de producent?
- Onderzoek hoe groot de grenswaarde is van de gemiddelde kosten.
- Stel een formule op voor de totale kosten in euro's bij een geproduceerd aantal q .

Uitdagende route → maak opdracht U4



Ondersteunende opdrachten

021

Gegeven is de functie $f(x) = (4x - 3)(2,5x + 10)$.

- a Van welke functies is f de productfunctie?
- b Je gaat de waarden van x berekenen waarvoor $f(x) = 0$.
Waarom weet je dat $4x - 3 = 0$ of $2,5x + 10 = 0$?
- c Los de twee vergelijkingen van opdracht b op.
- d Los de vergelijking $f(x) = 0$ op door gebruik te maken van de optie snijpunten op je rekenmachine en laat zien dat je dezelfde antwoorden krijgt als opdracht c.

Bereken de waarden van x waarvoor $f(x) = 0$.

- e $f(x) = (3x - 15) \cdot (2 + 6x)$
- f $f(x) = (2x + 1) \cdot (2^x - 16)$
- g $f(x) = x^2 \cdot (4x - 30)$
- h $f(x) = x^3(2 - \sqrt{x})$

024

Gegeven is de formule $B = \frac{8x - 4}{1 + 2x}$

Je gaat eerst onderzoeken wat de grenswaarde is.

- a Vul de tabel verder in.
- b Waarom weet je nu dat de grenswaarde 4 is?
- c Plot een grafiek bij de formule.
- d Om de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as te berekenen, los je $B = 0$ op.
Waarom hoeft je alleen de vergelijking $8x - 4 = 0$ op te lossen? Los deze vergelijking op.
- e Vul in: de gevraagde coördinaten zijn $(\dots, 0)$.

x	10	100	1000	10000
B	3,62	...	...	...

Onderzoek wat de grenswaarde is en bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as.

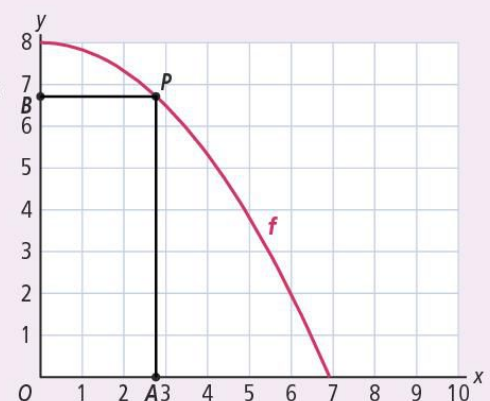
- f $C = \frac{3q}{2 + q}$
- g $C = \frac{18 - 2r}{r}$
- h $C = \frac{24s - 6}{14 - 2s}$
- i $C = \frac{5d + 160}{0,2d^2 + 5}$

Uitdagende opdrachten

U4

Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 8 - \frac{1}{6}x^2$ op het interval $[0, 7]$.Het punt P ligt op de grafiek van f en de punten A en B liggen op de assen zodat vierhoek $OAPB$ een rechthoek is.

- a De oppervlakte van rechthoek $OAPB$ hangt af van de ligging van punt P met x -coördinaat p .
Leg uit dat je de oppervlakte kunt berekenen met de formule $A = p \cdot \left(8 - \frac{1}{6}p^2\right)$.
- b Bereken de maximale oppervlakte van rechthoek $OAPB$.



19.5 Redeneren met formules

Je leert

- hoe je met een formule beredeneert of de grafiek stijgt of daalt en hoe groot de grenswaarde is

Leerroutes

- ondersteunend: 26—027—28—29—30—31—32
- doorlopend: 26—27—28—29—30—31—32
- uitdagend: 26—27—29—30—31—32—U5

Het aantal kakkerlakken A in een verlaten schuur

voldoet aan de formule $A = 14000 - \frac{13500}{2t + 5}$

Hierin is t de tijd in weken.

- Neemt het aantal kakkerlakken toe of af?
- Wat gebeurt er op den duur met het aantal kakkerlakken?



- 26** De temperatuur van melk stijgt als de melk uit de koelkast wordt gehaald. Met de formule $T = 20 - 16 \cdot 0,75^t$ kun je de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ van de melk berekenen. Hierin is t de tijd in uren vanaf het moment dat de melk uit de koelkast is gehaald.

- Welke temperatuur heeft de melk op het moment dat het uit de koelkast wordt gehaald?
- Vul de tabel in.
- Leg uit dat de uitkomsten van $16 \cdot 0,75^t$ op den duur naderen naar nul.
- Naar welke waarde nadert de temperatuur op den duur?

t	$0,75^t$	$16 \cdot 0,75^t$	$20 - 16 \cdot 0,75^t$
0	...	...	...
5	...	...	...
10	...	...	...

Theorie

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd, kun je beredeneren hoe de uitkomst van een formule verandert. Je kunt daarbij onder andere gebruikmaken van de volgende eigenschappen.

- g^t neemt toe als $g > 1$ en t groter wordt.
- g^t neemt af als $g < 1$ en t groter wordt.
- Bij een vaste positieve waarde van c en $n > 0$ neemt $\frac{c}{n}$ af als n groter wordt.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $K = 35 + \frac{100}{t+1}$

Beredeneer of de waarde van K toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt en naar welke grenswaarde K nadert.

Oplossing

Bij $t = 0$ is $K = 35 + \frac{100}{0+1} = 135$.

Als t steeds groter wordt, dan neemt $t+1$ toe.

100 wordt gedeeld door een steeds groter wordend getal en daardoor daalt

$\frac{100}{t+1}$ naar 0.

De waarde van K zal dan dalen naar $35 + 0 = 35$. De waarde van K neemt af en de grenswaarde is 35.

Ondersteunende route → maak opdracht 027

- 27** Beredeneer of de waarde van P toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt en naar welke grenswaarde P nadert.

H

a $P = \frac{2}{7 + 2t} - 11$

c $P = 3 + \frac{2}{2t^3 + 5}$

b $P = 4 - 0,85^t$

d $P = 7 + 2 \cdot 0,45^t$

- 28** Gegeven is de formule $K = 3 + \frac{5}{1 + 0,7^t}$

- a** Volgens Bart nadert de waarde van K bij grote waarden van t naar 3.

Laat met een tabel zien dat Bart ongelijk heeft.

- b** Beredeneer dat de waarde van K nadert naar 8.

- c** Beredeneer hoe groot de grenswaarde is bij de formule

$$w = 14 - \frac{3}{2 - 0,9^t}$$

- d** Onderzoek welke waarde de formule $r = \frac{16 - 2^x}{32 + 2^x}$ nadert bij grote waarden van x .

- 29** Bij een gemeente komen elk weekend tientallen telefoontjes binnen van mensen die geluidsoverlast ervaren van bezoekers van een uitgaansgelegenheid. Samen met de eigenaar van deze gelegenheid en de politie wordt een project gestart om door middel van een voorlichtingscampagne en het uitdelen van boetes de bezoekers te bewegen buiten het gebouw minder lawaai te maken. Op grond van de resultaten van de eerste weken na de start van het project stelt een onderzoeker de formule $A = 5 \cdot (2,2 + 5,8 \cdot 0,72^t)$ op.

Hierin is A het aantal telefonische klachten in het weekend en t de tijd in weken na de start van het project.

- a** Bereken de waarde van A bij de start van het project.
b Bij de start van het project is de doelstelling geformuleerd dat er op den duur hoogstens tien telefonische klachten per weekend binnen komen.

Wordt deze doelstelling gehaald?

19.5 Redeneren met formules

- 30** De hoogte van de bovenkant van een klimplant boven de grond kan worden berekend met de formule $H = \frac{320}{1 + 9^{-0,08t+2}}$ met H de hoogte van de klimplant in cm en t de tijd sinds het begin van de meting in weken.

- Na hoeveel dagen is de hoogste punt van de klimplant al een meter boven de grond?
- Hoe hoog komt de bovenkant van de klimplant maximaal boven de grond?



- 31** De snelheid van een voetgangersstroom in een gang hangt onder andere af van de loopruimte die per voetganger beschikbaar is. Voor een bepaalde gang geldt bij benadering de

$$\text{formule } V = \frac{80M - 30}{M + 0,04}$$

Hierin is V de snelheid van de voetgangersstroom in meters per minuut en M het aantal beschikbare m^2 per voetganger.

- Neemt de waarde van V toe of af als de waarde van M toeneemt?
- Bij hoeveel m^2 per voetganger komt de voetgangersstroom tot stilstand?
- Tot welke snelheid nadert V als elke voetganger een onbeperkte bewegingsruimte heeft?
- Stel een formule op met de snelheid S in meters per seconde.

- 32** Indoorbanen, bijvoorbeeld bij atletiek, bestaan uit twee rechte stukken en twee bochten. De bochten zijn twee even grote halve cirkels.

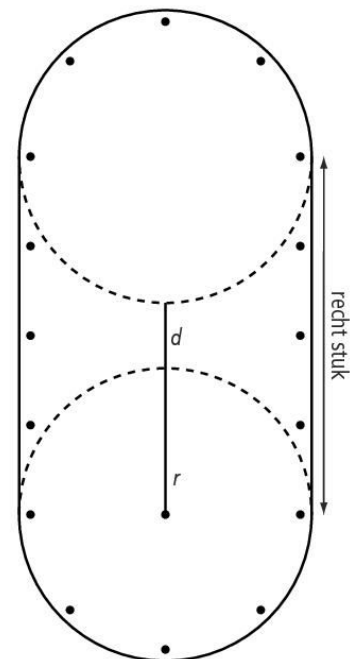
De lengte van zo'n atletiekbaan wordt bepaald door de straal r van de uitgezette cirkels en de afstand d tussen de cirkels met r en d in meter. De cirkels overlappen elkaar niet.

De verhouding tussen de totale lengte van de rechte stukken en de totale lengte van de bochten in de baan is erg belangrijk.

Deze verhouding V is afhankelijk van de straal r van de cirkels en de afstand d tussen de cirkels. Er geldt: $V = \frac{2r + d}{3,14 \cdot r}$

- Laat met een berekening zien dat bij een straal van 21,5 meter en een afstand van 2 meter tussen de cirkels, deze verhouding ongeveer $\frac{2}{3}$ is.
- Leg uit dat de waarde van V altijd groter is dan 0,6369.
- Als de verhouding V gelijk is aan $\frac{3}{4}$ dan geldt voor het verband tussen r en d een formule van de vorm $r = c \cdot d$. Bereken de waarde van c .

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2012-pilot, tijdvak 2)



Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

027 Gegeven is de formule $A = 12 + \frac{1}{p+1}$

- a Vul de tabel in.
 b Wat gebeurt er met de waarde van $p+1$ als p steeds groter wordt?
 c Naar welke waarde nadert $\frac{1}{p+1}$ als p steeds groter wordt?
 d Neemt de waarde van A toe of af als p steeds groter wordt?
 e Welke grenswaarde heeft de formule $A = 12 + \frac{1}{p+1}$?
 f Gegeven is de formule $y = 15 - 6 \cdot 0,8^x$.
 Vul het blaadje in.

p	$p+1$	$\frac{1}{p+1}$
0	...	...
10	...	...
100	...	...
1000	...	...

☐	Bij $x=0$ is $y = 15 - 6 \cdot 0,8^0 = \dots$
☐	Als x steeds groter wordt, nadert $0,8^x$ naar ...
☐	want $0,8 < 1$.
☐	$6 \cdot 0,8^x$ nadert dan ook naar ...
☐	De waarde van y zal dan naderen naar $y = 15 - \dots = \dots$

- g Neemt de waarde van y toe of af als x steeds groter wordt?
 h Welke grenswaarde heeft de formule $y = 15 - 6 \cdot 0,8^x$?

Beredeneer of de waarde van N toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt en naar welke grenswaarde N nadert.

i $N = \frac{24}{3+t}$

k $N = 38 - \frac{80}{4+6t^2}$

j $N = 14 - 2 \cdot 0,85^t$

l $N = 17 + 7 \cdot 0,45^t$

Uitdagende opdrachten

U5 Het verband tussen twee variabelen B en m voldoet aan de formule $B^2 - 1 = \frac{84m - 60}{16m}$ waarbij B en m beide groter zijn dan 0.

Onderzoek hoe groot de grenswaarde is van B als m steeds groter wordt.

19.6 Gemengde opdrachten

- 33** In 1961 werd de eerste computerchip ontwikkeld, een elektronische schakeling die bestaat uit transistoren. Deze eerste chip bestond uit vier transistoren. Het aantal transistoren per chip is sindsdien per twee jaar ongeveer verdubbeld.
- Leg uit dat hierbij de formule $A = 4 \cdot 2^{0,5t}$ past. Hierin is A het aantal transistoren en t het aantal jaren na 1961.
 - Bereken hoeveel transistoren een chip in 2015 volgens deze formule bevat.
 - Bereken hoeveel jaar nodig is om het aantal transistoren 1000 keer zo groot te maken.
 - Stel een formule op als het aantal transistoren wordt gegeven in miljarden en de tijd in weken. Ga hierbij uit van 52 weken per jaar.

De formule uit opdracht 33a staat bekend onder de naam 'de wet van Moore'. Genoemd naar Gordon Moore die in 1961 betrokken was bij de ontwikkeling van de eerste chip. Hij deed in 1965 de voorspelling dat het aantal transistoren per chip ongeveer elke twee jaar verdubbeld zou zijn.

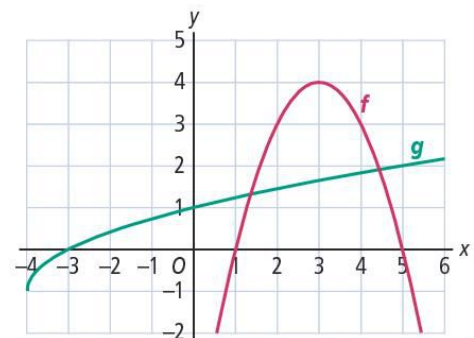
- 34** Het aantal zonnepanelen dat op een veld van 5000 m^2 kan worden geplaatst, is afhankelijk van de oppervlakte x in m^2 per paneel. De prijs van een paneel is ook afhankelijk van de oppervlakte x . Voor het aantal zonnepanelen q geldt de formule $q = 5000 \cdot x^{-1}$. Voor de prijs p van een zonnepaneel in honderden euro's geldt $p = 250 + 30x^2$.
- Stel een formule op voor de totale kosten TK in honderden euro's van de zonnepanelen, uitgedrukt in x .
 - Bereken met behulp van de afgeleide van TK bij hoeveel zonnepanelen de totale kosten minimaal zijn.
 - Hoe groot zijn de minimale totale kosten? Rond je antwoord af op duizendtallen.



- 35** Gegeven is de productfunctie $f(x) = 2^{-0,1x} \cdot 10 \sin(\pi x)$.
- Plot de grafiek van f op het interval $[0, 20]$.
 - Leg met behulp van het functievoorschrift van f uit waarom de grafiek van f slingert om de x -as met een steeds kleiner wordende uitwijking.
 - Onderzoek wat de kleinste waarde is van x waarbij een top een afstand heeft tot de x -as die kleiner is dan $0,1$.
 - Verander het functievoorschrift zodat de grafiek om de x -as slingert met een steeds groter wordende uitwijking.

- 36** De grafieken van f en g zijn door twee verschuivingen uit de grafieken van $h(x) = -x^2$ en $i(x) = \sqrt{x}$ ontstaan.

- Stel een functievoorschrift op van f .
- Stel een functievoorschrift op van g .





- 37** In de jaren vijftig deed de Amerikaan D.L. Gerlough onderzoek naar de voetgangersveiligheid van wegen. Als er veel verkeer over een weg gaat, is er voor voetgangers weinig gelegenheid om veilig over te steken. Daarom stelde Gerlough de zogenaamde ‘veilige norm’ op. Een weg voldoet aan deze veilige norm wanneer er zich gemiddeld elke minuut een gelegenheid voordoet om veilig over te steken. Dat lukt alleen als het aantal auto’s dat per uur passeert onder een maximum blijft. Dit maximum geven we hier aan met $N_{\max}$ en is afhankelijk van de breedte van de weg.

Gerlough kwam tot de volgende formule:

$$N_{\max} = \frac{8289,3}{B}(1,778 - \log(B))$$

In deze formule is B de breedte van de weg in meters.

Vanzelfsprekend is deze formule een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model kunnen we enig inzicht krijgen in de veiligheid bij de aanleg van wegen.

Bij een brede weg duurt het oversteken langer dan bij een smalle weg. Voor wegen die voldoen aan de veilige norm betekent dit dat er bij een brede weg per uur minder auto’s mogen passeren dan bij een smalle weg. De grafiek van $N_{\max}$ moet dus dalend zijn. De formule voor $N_{\max}$ moet hiermee in overeenstemming zijn.

- Leg uit hoe je uitsluitend aan de hand van de formule voor $N_{\max}$ -dus zonder gebruik te maken van je rekenmachine- kunt beredeneren dat hier sprake is van een dalende functie.
- Een weg die voldoet aan de veilige norm wordt 0,50 meter breder gemaakt. Volgens de formule neemt $N_{\max}$ daardoor met 126 af.

Onderzoek hoe breed de weg oorspronkelijk was. Geef je antwoord in decimeters nauwkeurig.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2005, tijdvak 1)

Samenvatting

Theorie

Somfunctie, somgrafiek, verschilfunctie, verschilgrafiek

Het functievoorschrift van de somfunctie s van twee functies f en g ontstaat door de functievoorschriften van f en g op te tellen. De somfunctie s is $s(x) = f(x) + g(x)$.

De bijbehorende grafiek heet de somgrafiek.

De verschilfunctie v is $v(x) = f(x) - g(x)$.

De grafiek hierbij heet de verschilgrafiek.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 2x + 3$ en $g(x) = 7x - 5$.

Het functievoorschrift van de somfunctie

$s(x) = f(x) + g(x)$ is

$$s(x) = (x^2 - 2x + 3) + (7x - 5).$$

$$s(x) = x^2 + 5x - 2$$

Voorbeeld 2

Gegeven zijn de functies $f(t) = {}^5\log(t) - 2t^2$ en $g(t) = {}^5\log(t) - 4 - 3t^2$.

Het functievoorschrift van de verschilfunctie

$v(t) = f(t) - g(t)$ is

$$v(t) = ({}^5\log(t) - 2t^2) - ({}^5\log(t) - 4 - 3t^2).$$

$$v(t) = {}^5\log(t) - 2t^2 - {}^5\log(t) + 4 + 3t^2$$

$$v(t) = t^2 + 4$$

S1 Stel de functievoorschriften op van de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$ en de verschilfunctie $v(x) = f(x) - g(x)$.

a $f(x) = 6x^3 + 11x^2 - 5$ en $g(x) = 20x^2 - 7x^3 + 8$

b $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{18}{x^2}$ en $g(x) = 3\sqrt{x} - \frac{21}{x^2} + 6$

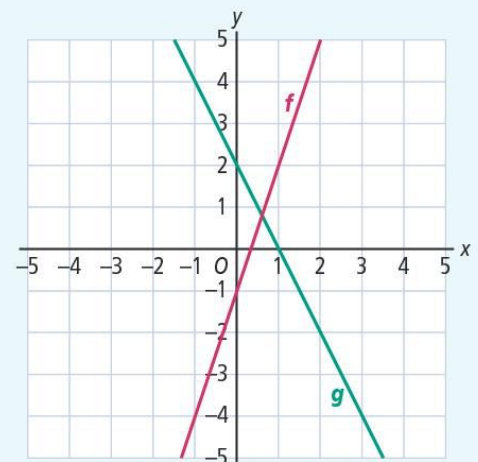
S2 De grafieken van de functies $f(x) = 3x - 1$ en $g(x) = -2x + 2$ zijn in één assenstelsel getekend.

a Stel een functievoorschrift op van de somfunctie

$$s(x) = f(x) + g(x).$$

b Stel een functievoorschrift op van de verschilfunctie

$$v(x) = f(x) - g(x).$$



Vaardigheid

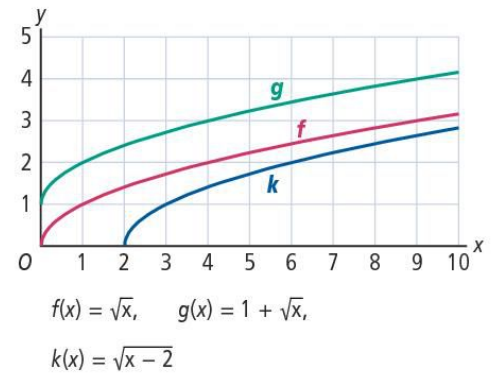
Je kunt na een verschuiving het functievoorschrift opstellen van de beeldgrafiek.

Een grafiek kun je verschuiven. De grafiek die hierdoor ontstaat heet de beeldgrafiek.

Als je de grafiek van f met a eenheden omhoog verschuift, geldt voor de functie g van de beeldgrafiek: $g(x) = f(x) + a$.

Als je de grafiek van f met a eenheden naar rechts verschuift, geldt voor de functie h van de beeldgrafiek: $h(x) = f(x - a)$.

Een verschuiving heet ook wel een translatie.

**Voorbeeld**

De grafiek van de functie $a(x) = \sqrt{2x}$ wordt 7 naar links en 8 omhoog verschoven. Stel het functievoorschrift $b(x)$ op van de beeldgrafiek.

Oplossing

Om de grafiek 7 naar links te verschuiven, vervang je x door $x - 7$, dus door $x + 7$. Om de grafiek 8 omhoog te verschuiven, tel je 8 bij de functiewaarden op.

$$b(x) = 8 + \sqrt{2(x + 7)} \text{ ofwel } b(x) = 8 + \sqrt{2x + 14}$$

- S3**
- a** De grafiek van de functie $f(x) = {}^5\log(x)$ wordt 2 naar links en 6 omlaag verschoven. Geef het functievoorschrift $g(x)$ van de beeldgrafiek.
 - b** Gegeven is de functie $j(x) = (x - 3)^2 + 5$. Hoe ontstaat de grafiek van j uit de grafiek van de functie $k(x) = x^2$?

Vaardigheid

Je kunt een formule aanpassen als je de eenheid van variabelen herschaalt.

Herschalen betekent dat je de eenheid van een of meer variabelen in een formule verandert. Je moet de formule aanpassen op de veranderde eenheid van de variabele.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $l = 6t + 10$ met de tijd t in dagen en de lengte l in mm. Stel een formule op die de lengte L in cm uitdrukt in de tijd t in dagen.

Oplossing

Omdat 1 mm gelijk is aan 0,1 cm, is $L = 0,1 \cdot l$. Dit geeft $L = 0,1 \cdot (6t + 10)$ ofwel $L = 0,6t + 1$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $c = 0,2t + 3$ met de temperatuur c in $^{\circ}\text{C}$ en de tijd t in minuten. Stel een formule op die de temperatuur c in $^{\circ}\text{C}$ uitdrukt in de tijd u in uren.

Oplossing

Omdat 1 minuut gelijk is aan $\frac{1}{60}$ uur, is $u = \frac{1}{60} \cdot t$ ofwel $t = 60 \cdot u$. Dit geeft $c = 0,2 \cdot (60 \cdot u) + 3$ ofwel $c = 12u + 3$.

Samenvatting

- S4** De formule $G = 0,5h^2 + 3$ hoort bij het gewicht van kaarsen met G het gewicht in gram en h de hoogte van de kaars in dm. Stel de formule op die het gewicht K in kg uitdrukt in de hoogte H in cm.

Vaardigheid

Je kunt de nulpunten van een productfunctie berekenen.

Een functie van de vorm $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ heet een productfunctie.

De nulpunten van een productfunctie $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ bereken je door op te lossen: $f(x) = 0$ of $g(x) = 0$.

Voorbeeld

Bereken van de productfunctie

$$p(x) = (x^3 + x + 1) \cdot (3 - \sqrt{x})$$

de waarden van x waarvoor $p(x) = 0$.

Oplossing

$$p(x) = 0 \text{ als } x^3 + x + 1 = 0 \text{ of } 3 - \sqrt{x} = 0$$

Deze vergelijkingen met de rekenmachine oplossen geeft

$$x \approx -0,68 \text{ of } x = 9.$$

- S5** Bereken de x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van de functie $p(x) = (5x - 12)(8 - 3x)$ met de x -as.

Vaardigheid

Je kunt de nulpunten en de grenswaarde van een quotiëntfunctie berekenen.

Een functie van de vorm $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heet een quotiëntfunctie.

Bij grote waarden van x kunnen de functiewaarden steeds dichter naderen tot een grenswaarde.

Bij de waarde van x waar de grafiek van de quotiëntfunctie

$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ de x -as snijdt, geldt $q(x) = 0$. Deze vergelijking

los je op door $t(x) = 0$ op te lossen.

Voorbeeld 1

Onderzoek of de waarden van $D = \frac{18a - 13}{6a + 2}$ een grenswaarde hebben.

Oplossing

Maak op je rekenmachine een tabel.

a	10	100	1000	10 000
D	2,694	2,968	2,997	3,000

De grenswaarde is 3.

Voorbeeld 2

Bereken van de quotiëntfunctie $q(x) = \frac{2x^3 - x - 4}{4x + 3}$

de waarde van x waarvoor $q(x) = 0$.

Oplossing

$$q(x) = 0 \text{ als } 2x^3 - x - 4 = 0$$

Deze vergelijking met de rekenmachine oplossen geeft $x \approx 1,39$.

S6 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{7-2x}{4x-5}$ en $g(x) = \frac{x^2-9}{2x-13}$

- a** Onderzoek of $f(x)$ een grenswaarde heeft.
- b** Bereken de x -coördinaten van de snijpunten met de x -as van de grafiek van g .

Vaardigheid

Je kunt met een formule beredeneren of de grafiek stijgt of daalt en hoe groot de grenswaarde is.

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd, kun je beredeneren hoe de uitkomst van een formule verandert. Je kunt daarbij onder andere gebruikmaken van de volgende eigenschappen.

- g^t neemt toe als $g > 1$ en t groter wordt.
- g^t neemt af als $g < 1$ en t groter wordt.
- Bij een vaste positieve waarde van c en $n > 0$ neemt $\frac{c}{n}$ af als n groter wordt.

Soms kun je bij een quotiëntfunctie met redeneren een eventuele grenswaarde bepalen.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $w = \frac{80}{4+m^2} - 16$.

Beredeneer of de waarde van w toeneemt of afneemt als m steeds groter wordt en naar welke grenswaarde w nadert.

Oplossing

Bij $m = 0$ is $w = \frac{80}{4+0^2} - 16 = 4$.

Als m steeds groter wordt, dan neemt m^2 toe. Daardoor neemt $4 + m^2$ ook toe.

80 wordt gedeeld door een steeds groter wordend getal en daardoor daalt $\frac{80}{4+m^2}$ naar 0.

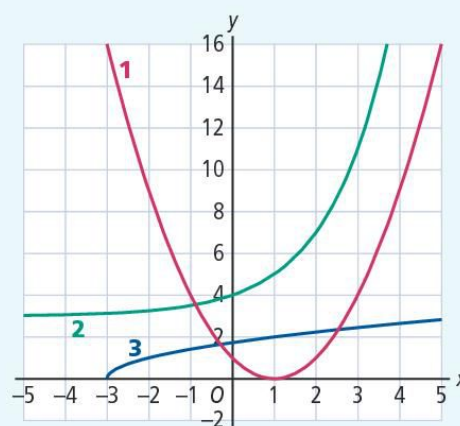
De waarde van w daalt dan naar $0 - 16 = -16$.

De waarde van w neemt af en de grenswaarde is -16 .

S7 Gegeven is de formule $a = 8 - \frac{108}{c^3 + 9}$

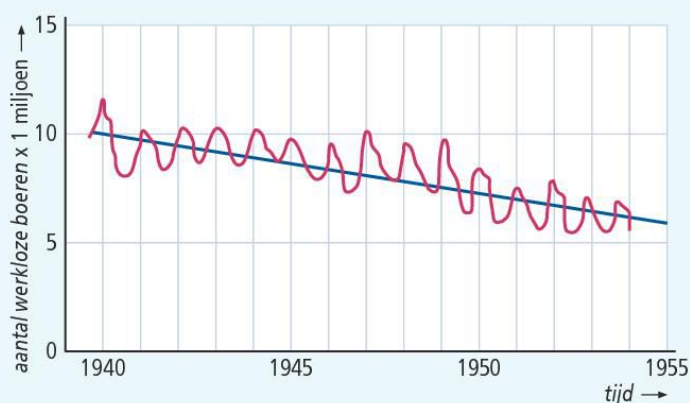
Beredeneer of de waarde van a toeneemt of afneemt als c steeds groter wordt en naar welke grenswaarde a nadert.

- T1**
- a** Grafiek 1 is door een verschuiving ontstaan uit de grafiek van de functie $f(x) = x^2$.
Stel het functievoorschrift op bij grafiek 1.
 - b** Grafiek 2 is door een verschuiving ontstaan uit de grafiek van de functie $f(x) = 2^x$.
Stel het functievoorschrift op bij grafiek 2.
 - c** Grafiek 3 is door een verschuiving ontstaan uit de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$.
Stel het functievoorschrift op bij grafiek 3.
 - d** De grafiek van de functie $f(x) = 2 + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$ wordt twee naar links en drie omlaag verschoven.
Gaat de beeldgrafiek door het punt $(1, -5)$? Licht je antwoord toe.



- T2**
- Gegeven zijn de functies $f(x) = (x^2 - 1)(2x + 3)$ en $g(x) = 3x^2 - 2x$.
- a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
 - b** Stel de functievoorschriften op van de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$ en de verschilfunctie $v(x) = f(x) - g(x)$. Schrijf beide functievoorschriften zonder haakjes.
 - c** Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de horizontale as.

- T3**
- De werkloosheid onder de Amerikaanse boerenbevolking voor de periode 1940-1955 is in beeld gebracht. De werkloosheid lijkt om een rechte lijn te schommelen. Deze lijn heet de trendlijn en deze is eveneens getekend.



- a** Een formule van de vorm $N = a \cdot t + b + \sin(ct)$ benadert het verloop van de werkloosheid redelijk, waarbij t het aantal jaren na 1940 is en N het aantal werkloze boeren in miljoenen.
Leg uit dat $a \approx -0,27$, $b = 10$ en $c = 2\pi$.
- b** Stel een formule op voor het aantal werkloze boeren A in duizendtallen en de tijd m in maanden.

T4 De kostprijs van een product hangt mede af van het aantal producten dat geproduceerd wordt. Als andere factoren buiten beschouwing worden gelaten, geldt voor de kostprijs P per product in euro's en het aantal producten q bij benadering de formule $P = \frac{38q + 157}{6q + 18}$

- Bereken tot welke grenswaarde de kostprijs nadert als het aantal producten erg groot wordt.
- Door verbeteringen in het productieproces geldt een andere formule voor de kostprijs, namelijk $K = 5\frac{1}{3} + \frac{33}{6q + 21}$

Beredeneer hoe groot de grenswaarde bij deze formule is.

- Leg aan de hand van de formule uit waarom de grafiek van K de horizontale as niet snijdt.
- Stel een formule op voor de totale productiecosten TK in euro's, uitgedrukt in q .
- Leg uit dat TK geen grenswaarde heeft.



T5 De grafiek beschrijft het verband tussen de gemiddelde lengte en de leeftijd van jongetjes van nul tot tien jaar. Een formule die hierbij past is $L = a + b\sqrt{x}$ waarbij L de gemiddelde lengte in cm is en x de leeftijd in jaren.

- Onderzoek hoe groot de waarden van a en b zijn. Licht je antwoorden toe.
- Omdat iemand vooral geïnteresseerd is in dit verband in de eerste maanden na de geboorte wordt de leeftijd s gegeven in maanden.

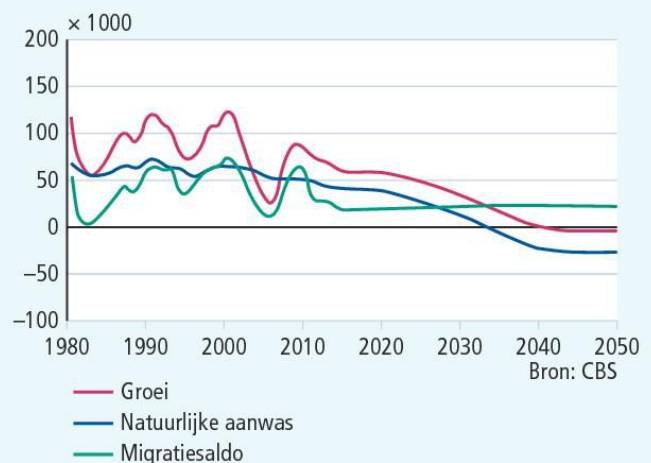
Stel een formule op die L uitdrukt in s .

(Ontleend aan de syllabus vwo wiskunde A 2018)



T6 De grafieken gaan over de groei van de Nederlandse bevolking.

- Welke grafiek is een somgrafiek?
- Hoe kun je zien dat er tussen 2000 en 2010 een fout in de grafieken zit?
- De grafiek voor de groei kun je tussen 2010 en 2040 benaderen met een trendlijn. Stel een formule op voor deze trendlijn.
- Hoe groot is de groei volgens deze trendlijn in 2050?



Je kunt na een verschuiving het functievoorschrift opstellen van de beeldgrafiek.

- E1** Gegeven is de functie $P(m) = 4 + {}^2\log(m - 9)$.
- Door welke verschuivingen ontstaat de grafiek van P uit die van de functie $f(m) = {}^2\log(m)$?
 - De grafiek van P wordt 5 naar links verschoven. Stel een functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.

Je kunt een formule aanpassen als je de eenheid van variabelen herschaalt.

- E2** Gegeven is de formule $K = 3,8(V^2 + 7V)$, met het gewicht K in kilogrammen en het volume V in dm^3 .
De formule wordt veranderd zodat het gewicht O in ons (1 ons = 100 gram) en het volume v in m^3 wordt gegeven.
Stel een nieuwe formule op die het gewicht O uitdrukt in het volume v .

Je kunt nulpunten van een productfunctie berekenen.

- E3** Gegeven zijn de productfuncties $f(x) = (5x - 9) \cdot (2 - 0,5x^2)$ en $g(x) = (x - 4) \cdot \log(2x - 1)$.
- Plot en schets de grafiek van f .
 - Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met beide assen.
 - Maak de opdrachten a en b ook voor functie g .

Je kunt de nulpunten en de grenswaarde van een quotiëntfunctie berekenen.

- E4** Gegeven zijn de quotiëntfuncties $f(x) = \frac{4x + 1}{2 - 3x}$ en $g(x) = \frac{x^2 - 4}{3 - 8x}$
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de horizontale as.
 - Onderzoek of de waarden van $f(x)$ een grenswaarde hebben.
 - Maak de opdrachten a en b ook voor functie g .

Je kunt met een formule beredeneren of de grafiek stijgt of daalt en hoe groot de grenswaarde is.

- E5** Beredeneer of de waarde van z toeneemt of afneemt als n steeds groter wordt en naar welke grenswaarde z nadert.

a $z = \frac{3}{n+2} - 1$

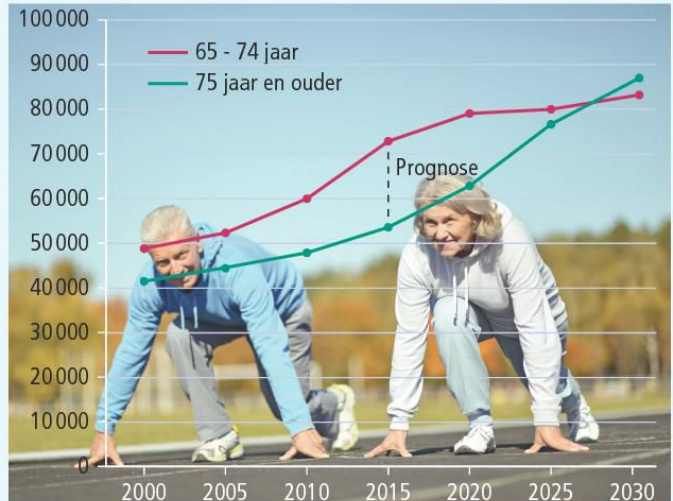
c $z = 4 - \frac{6}{4n+5}$

b $z = 5 + 2 \cdot 0,9^n$

d $z = \frac{4}{\sqrt{n+9}} + 10$

- E6** In de grafieken zie je de ontwikkeling van het aantal inwoners in Friesland van 65 jaar en ouder.
- Geef de betekenis van de somgrafiek van beide grafieken.
 - Het aantal vrouwelijke inwoners f in een dorp in Friesland, t jaar na 2018 kan worden berekend met de formule $f = 820 + 22t$. Het verschil tussen het aantal vrouwelijke inwoners in het dorp en het aantal mannelijke inwoners kan worden berekend met de formule $v = 3t - 14$. Stel een formule op waarmee je het aantal mannelijke inwoners m kunt berekenen.
 - Stel ook een formule op waarmee je het totaal aantal inwoners van het dorp T kunt berekenen.

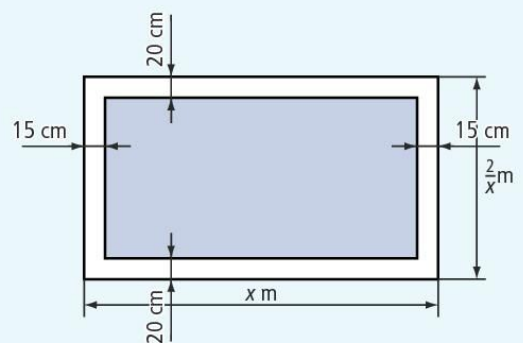
Ontwikkeling aantal Friese senioren 2000-2015 en prognose tot 2030



- E7** In een land wordt jaarlijks 5 miljoen ton afval verwerkt. Men wil vanaf 2010 deze hoeveelheid verminderen tot 1,75 miljoen ton in het jaar 2030. Een rekenmodel dat gebruikt wordt, is de formule $A = 1,5 + \frac{490}{93t + 140}$. Hierbij is A het aantal miljoenen ton afval per jaar en t is de tijd in jaren met $t = 0$ in 2010.
- Beredeneer of de hoeveelheid afval volgens het model jaarlijks afneemt of jaarlijks toeneemt.
 - Ga met de formule na of het beoogde doel bereikt wordt.

- E8** Een poster heeft een oppervlakte van 2 m^2 . Aan de boven- en onderkant komen onbedrukte randen van 20 cm, terwijl aan de linker- en rechterzijkant onbedrukte randen van 15 cm moeten komen. Stel de breedte in meters van de poster gelijk aan x .

- Leg uit dat de hoogte van de poster gelijk is aan $\frac{2}{x}$ meter.
- Leg uit dat de oppervlakte A in m^2 van het bedrukte gedeelte berekend kan worden met de productfunctie $A = (x - 0,3) \cdot \left(\frac{2}{x} - 0,4\right)$.
- Plot en schets de grafiek van A .
- Welk deel van de grafiek is in deze situatie realistisch? Bereken welke waarden van x bij dit deel horen.
- Bereken de maximale oppervlakte in m^2 van het bedrukte deel van de poster.



Differentiëren 20

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 8 en hoofdstuk 16 heb je geleerd hoe je machtsfuncties differentieert en kettingfuncties differentieert.

In dit hoofdstuk leer je functies differentiëren die het product of het quotiënt zijn van twee functies die je al kunt differentiëren.

De technieken die je in dit hoofdstuk leert, heb je in hoofdstuk 21 nodig bij het differentiëren van exponentiële functies en logaritmische functies.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- | | |
|---|-------------|
| • <i>Probleem oplossen en analytisch denken</i> | opdracht 7 |
| • <i>Formules manipuleren</i> | opdracht 9 |
| • <i>Logisch redeneren en bewijzen</i> | opdracht 19 |

V1 Schrijf de functies in de vorm $f(x) = c \cdot x^a$.

a $f(x) = \frac{4}{x^3}$

d $f(x) = (3x^{-2})^3$

b $f(x) = \frac{3}{x^2} \cdot \sqrt{x}$

e $f(x) = \frac{5}{15x^4}$

c $f(x) = (-2x)^4$

f $f(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot \sqrt[5]{32x}$

Theorie

De helling van de grafiek van f in een punt A is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in punt A . Je kunt deze helling berekenen door:

- een raaklijn in het punt A aan de grafiek te tekenen en daarvan de richtingscoëfficiënt te bepalen.
- de waarde van de afgeleide functie in punt A te berekenen.

Het opstellen van de formule van een afgeleide functie heet **differentiëren**. De afgeleide van $y = f(x) = c \cdot x^a$ is $f'(x) = c \cdot a \cdot x^{a-1}$ voor elke waarde van $a \neq 0$. Een andere notatie voor de afgeleide is $\frac{dy}{dx} = c \cdot a \cdot x^{a-1}$.

Voorbeeld

Bereken de helling van de grafiek van $K = 2\frac{1}{2}t^2 \sqrt{t}$ in het punt $A(4, 80)$.

Oplossing

$$K = 2\frac{1}{2}t^2 \cdot t^{\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}t^{2\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dK}{dt} = 6\frac{1}{4}t^{1\frac{1}{2}}, \text{ ofwel } \frac{dK}{dt} = 6\frac{1}{4}t\sqrt{t}$$

De helling van de grafiek in het punt A is

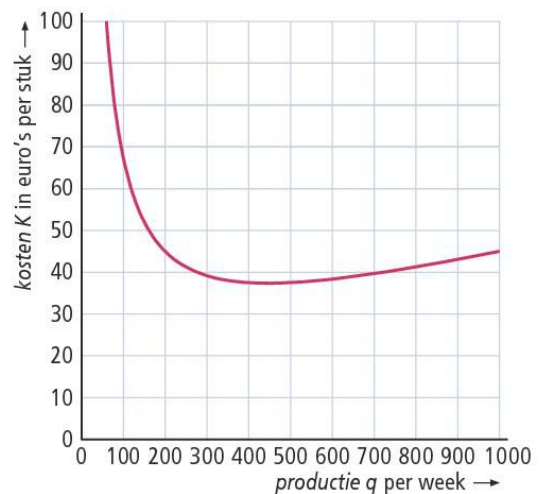
$$\frac{dK}{dt} = 6\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \sqrt{4} = 50.$$

V2 In de grafiek kun je aflezen hoe de kosten per ledlamp afhangen van de grootte van de productie.

- a Gebruik een raaklijn om de helling van de grafiek in het punt $(200, 45)$ te schatten.
- b Het verband tussen de kosten K in euro's per stuk en de productie q per week wordt gegeven door de formule

$$K = 0,025q + 15 + \frac{5000}{q}$$

Bereken met behulp van differentiëren de helling van de grafiek in het punt $(200, 45)$.



V3 Differentieer.

a $g(x) = -3x^{0,7} \cdot 2x^{1,3}$

d $A = 5\sqrt{p} \cdot \sqrt[4]{p^3}$

b $r(t) = \frac{25t^5}{2t^{1,5}}$

e $h(d) = \frac{4}{3\sqrt[3]{d}} - d^2\sqrt{d}$

c $TK = q^{-0,5} + \frac{15}{3q^2}$

f $p(q) = 5(2q^{0,8})^4 + 6q$

Theorie

Een **kettingfunctie** is een functie die is samengesteld uit meerdere functies. Een voorbeeld van een kettingfunctie is de functie $f(x) = 8(9x^2 - 3)^3$. Deze functie is samengesteld uit de schakels $y = 8u^3$ en $u = 9x^2 - 3$. Je vindt de afgeleide van een kettingfunctie door de afgeleiden van de afzonderlijke schakels met elkaar te vermenigvuldigen.

In formulevorm: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Deze manier om de afgeleide te vinden, heet de **kettingregel**.

Voorbeeld 1

Differentieer $k(x) = (-3x + 5)^4$.

Oplossing

De schakels zijn $y = u^4$ en $u = -3x + 5$.

$$\frac{dy}{du} = 4u^3 \text{ en } \frac{du}{dx} = -3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot -3 = -12u^3$$

$$k'(x) = -12(-3x + 5)^3$$

Voorbeeld 2

Differentieer $l(t) = 80\sqrt{10 - 2t^2}$.

Oplossing

De schakels zijn $y = 80\sqrt{u} = 80u^{\frac{1}{2}}$

en $u = 10 - 2t^2$.

$$\frac{dy}{du} = 40u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dt} = -4t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 40u^{-\frac{1}{2}} \cdot -4t$$

$$\frac{dy}{dt} = -160t \cdot u^{-\frac{1}{2}}$$

$$l'(t) = -160t(10 - 2t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{ofwel } l'(t) = \frac{-160t}{\sqrt{10 - 2t^2}}$$

Voorbeeld 3

Differentieer $m(r) = \frac{1}{5r + 9}$

Oplossing

De schakels zijn $y = \frac{1}{u} = u^{-1}$ en $u = 5r + 9$.

$$\frac{dy}{du} = -u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dr} = 5$$

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dr} = -u^{-2} \cdot 5 = -5 \cdot u^{-2}$$

$$m'(r) = -5(5r + 9)^{-2}$$

$$\text{ofwel } m'(r) = \frac{-5}{(5r + 9)^2}$$

V4 Differentieer.

a $f(x) = (10x - 2)^5$

d $Q(p) = \frac{3}{(p^2 - p)^2}$

b $w(x) = 7(3 - x)^{0,6}$

e $g(f) = 3((25f + 6)^{0,8})^5$

c $A(s) = \sqrt{5s^3 - 10}$

f $h(t) = (3t - 1)\sqrt{3t - 1}$

Je leert

- hoe je een productfunctie differentieert

Leerroutes

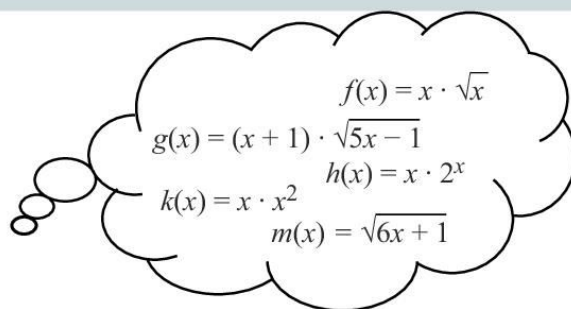
- ondersteunend: 1—03—4—5—06—6—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—3—4—6—7—U1

Gegeven zijn de functies $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$,

$$g(x) = (x+1) \cdot \sqrt{5x-1}, h(x) = x \cdot 2^x,$$

$$k(x) = x \cdot x^2 \text{ en } m(x) = \sqrt{6x+1}.$$

- Leg uit welke van de functies je kunt differentiëren en welke niet.



- 1 Gegeven is de functie $p(x) = x^2(1-x)$. Met een rekenmachine zijn voor een aantal waarden van x de waarden van $p(x)$ en $p'(x)$ berekend, zie de tabel.

- a Willem berekent de afgeleide $p'(x)$ als volgt: de afgeleide van x^2 is $2x$ en die van $(1-x)$ is -1 , dus $p'(x) = 2x \cdot -1 = -2x$.

Ga met behulp van de tabel na dat de afgeleide niet juist is.

- b Bereken $p'(x)$ door in het functievoorschrift van p eerst de haakjes weg te werken.
- c Ga na dat je met de afgeleide voor alle waarden van x in de tabel de juiste waarde van de afgeleide vindt.

x	$p(x)$	$p'(x)$
-3	36	-33
0	0	0
1	0	-1
2	-4	-8
5	-100	-65

- 2 Gegeven is de rechthoek met lengte $l(t)$, breedte $b(t)$ en oppervlakte $O(t) = l(t) \cdot b(t)$. Als l toeneemt met Δl en b met Δb , dan is het product $(l + \Delta l)(b + \Delta b)$ de oppervlakte van de rechthoek met zijden $l + \Delta l$ en $b + \Delta b$.

- a De oppervlakte O van de rechthoek neemt toe met ΔO . Controleer met de figuur dat $\Delta O = \Delta l \cdot b + l \cdot \Delta b + \Delta l \cdot \Delta b$.

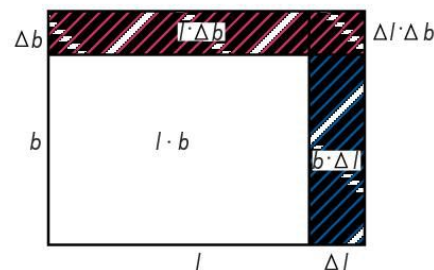
- b Als Δt heel klein is, dan zijn Δl en Δb ook heel klein. Leg uit dat dan geldt $\Delta O \approx \Delta l \cdot b + l \cdot \Delta b$.

- c Na delen door Δt is $\frac{\Delta O}{\Delta t} = \frac{\Delta l}{\Delta t} \cdot b + \frac{\Delta b}{\Delta t} \cdot l$.

Als Δt heel klein is, dan nadert $\frac{\Delta O}{\Delta t}$ tot $\frac{dO}{dt}$

Ga na dat daaruit volgt: $\frac{dO}{dt} = \frac{dl}{dt} \cdot b + l \cdot \frac{db}{dt}$, oftewel

$$O'(t) = l'(t) \cdot b(t) + l(t) \cdot b'(t).$$



Theorie

Een functie van de vorm $p(x) = g(x) \cdot h(x)$ heet een **productfunctie**.

Een productfunctie differentieer je met de **productregel**
 $p'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$.

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = (2 - x^2)(1 + 4x + x^3)$.

Oplossing

De functie $f(x)$ is de productfunctie van $g(x) = 2 - x^2$ en $h(x) = 1 + 4x + x^3$.

De afgeleiden zijn $g'(x) = -2x$ en $h'(x) = 4 + 3x^2$.

Met de productregel vind je:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = -2x \cdot (1 + 4x + x^3) + (2 - x^2) \cdot (4 + 3x^2)$$

$$f'(x) = -2x - 8x^2 - 2x^4 + 8 + 6x^2 - 4x^2 - 3x^4$$

$$f'(x) = -5x^4 - 6x^2 - 2x + 8$$

Ondersteunende route → maak opdracht 03**3** Differentieer met de productregel.

- H** **a** $f(x) = x^3(x^2 - 1)$ **c** $l(q) = (2q - 7)(3 - 5q^2)$
b $p(x) = (x^2 - 3x)(2x + 5)$ **d** $s(t) = 5(t + 3)(10t - 9)$

4 Gegeven is de functie $f(x) = (3x + 5)^2$.

Je gaat in deze opdracht op drie manieren laten zien dat

$$f'(x) = 18x + 30.$$

- a** Werk in $f(x)$ de haakjes weg en differentieer $f(x)$.
b Differentieer $f(x)$ met behulp van de kettingregel.
c Je kunt de functie f schrijven als $f(x) = (3x + 5)(3x + 5)$.
 Differentieer $f(x)$ met de productregel.

5 De functie $f(x) = 4x(5x - 10)^3$ is het product van $g(x) = 4x$ en $h(x) = (5x - 10)^3$.

- a** Laat met de kettingregel zien dat $h'(x) = 15(5x - 10)^2$.
b Differentieer $f(x)$ met de productregel.

Bij het differentiëren van een productfunctie $p(x) = g(x) \cdot h(x)$ gebruik je de productregel. Voor het differentiëren van g of van h heb je soms de kettingregel nodig.

Voorbeeld

Bereken de afgeleide van $f(x) = 4x^2(5x + 8)^6$.

Oplossing

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ met $g(x) = 4x^2$ en $h(x) = (5x + 8)^6$.

De afgeleide van h bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = (5x + 8)^6 = u^6$ en $u = 5x + 8$.

$$\frac{dy}{du} = 6u^5 \text{ en } \frac{du}{dx} = 5 \text{ dus } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 6u^5 \cdot 5 = 30u^5$$

$$h'(x) = 30(5x + 8)^5$$

Met de productregel $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$ vind je:

$$f'(x) = 8x(5x + 8)^6 + 4x^2 \cdot 30(5x + 8)^5$$

$$f'(x) = 8x(5x + 8)^6 + 120x^2(5x + 8)^5$$

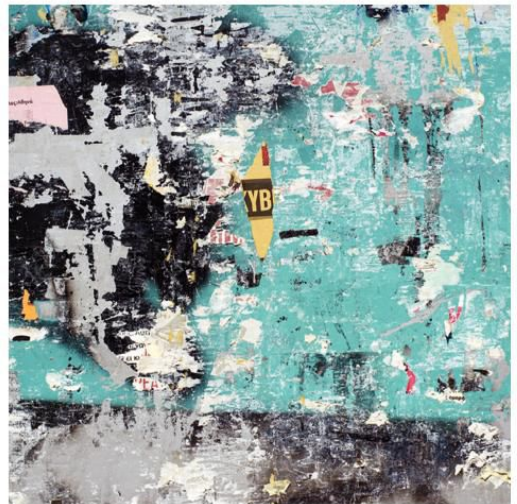
Ondersteunende route → maak opdracht O6

6 Differentieer.

- | | | |
|----------|---|--|
| H | a $r(s) = s^2(3s - 5)^3$ | d $l(d) = (2d + 5)(4 - d)^2$ |
| | b $N(t) = 3t(4t + 1)^5$ | e $k(b) = \left(\frac{1}{2}b + 1\right)^4 \cdot 2b^3$ |
| | c $P(n) = 2n^3 \cdot \sqrt{3 + n}$ | f $f(x) = (2x + 1)\sqrt{4 - x}$ |

7 Een actiegroep wil posters laten drukken om 100 m² te kunnen beplakken. Voor het aantal te drukken posters q geldt de formule $q = 100x^{-1}$. In deze formule is x de oppervlakte per poster in m². De prijs p in euro's per poster is ook afhankelijk van de oppervlakte x in m². Voor het verband tussen p en x geldt de formule $p = 10 + 5x^2$.

- Hoeveel kost het drukken van de posters als de oppervlakte per poster 1 m² is? En bij een oppervlakte van 4 m²?
- Stel een formule op voor de totale kosten in euro's van het drukwerk TK uitgedrukt in x .
- Bereken met behulp van de afgeleide van TK bij welke oppervlakte per poster de totale kosten minimaal zijn.
- Hoe groot zijn de totale kosten als deze minimaal zijn en hoeveel posters worden er dan gedrukt?



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

03

Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren van de productfunctie

$$f(x) = 2x^5(50 + 4x).$$

- Leg uit wat er in stap 1 en stap 2 is gebeurd.
- Wat moet er op de puntjes staan in stap 3?
- Maak de berekening af door de haakjes weg te werken en te herleiden.

Differentieer met de productregel.

- $f(x) = 2x^2(8 - x^2)$
- $s(t) = -4(8 - t)(9 + t)$
- $l(q) = (q + 60)(8 - q^3)$
- $p(x) = (6x - 5)(2 - x^3)$

•	$f(x) = 2x^5 \cdot (50 + 4x)$	
•	$g(x) = 2x^5$ en $h(x) = 50 + 4x$	1
•	$g'(x) = 10x^4$ en $h'(x) = 4$	2
•	$f'(x) = 10x^4 \cdot (\dots) + 2x^5 \cdot \dots$	3

06

De functie $f(x) = 8x^3\sqrt{6x + 10}$ is het product van de functies

$$g(x) = 8x^3 \text{ en } h(x) = \sqrt{6x + 10}.$$

- Bepaal $g'(x)$.
- Leg uit dat h een kettingfunctie is.
- Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren van $h(x)$.

•	De schakels zijn $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = \dots$	
•	$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$ en $\frac{du}{dx} = \dots$	
•	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot \dots = \dots$	
•	$h'(x) = \dots$	

Maak deze berekening af.

- Differentieer $f(x)$ met de productregel:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x).$$

Uitdagende opdrachten

U1

De afgeleide van de functie $u(x) = 3x\sqrt{6x + 5}$ is de functie

$$u'(x) = \frac{ax + b}{\sqrt{6x + 5}}$$

Bereken de waarden van a en b .

Je leert

- hoe je een quotiëntfunctie differentieert

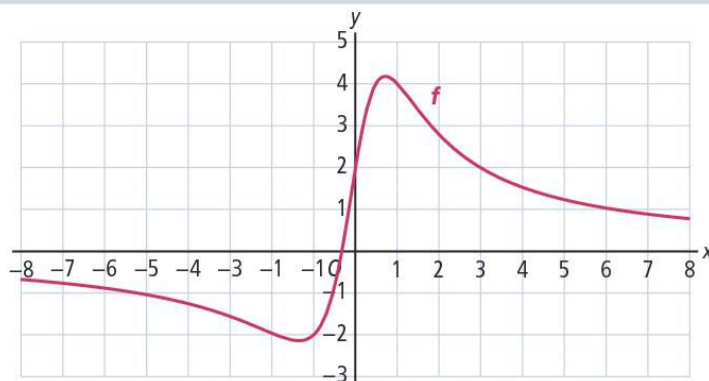
Leerroutes

- ondersteunend: 8—9—011—11—12—13—14
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14
- uitdagend: 8—9—10—12—13—14—U2

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{6x+2}{x^2+1}$

Er zijn punten op de grafiek van f waarin de helling gelijk is aan 1.

- Hoe kun je deze punten vinden?



8 Gegeven de functie $f(x) = \frac{4x+3}{2x+7}$ voor $x > 0$.

a Schets de grafiek van f .

b Mary differentieert de functie f als volgt:

De afgeleide van $4x+3$ is 4, de afgeleide van $2x+7$ is 2,

$$\text{dus } f'(x) = \frac{4}{2} = 2.$$

Leg met behulp van de grafiek van f uit waarom deze afgeleide niet goed kan zijn.

9 De functie uit opdracht 8 kun je ook schrijven als de productfunctie $f(x) = (4x+3) \cdot (2x+7)^{-1}$.

a Leg uit dat je voor het differentiëren van $f(x)$ de productregel en de kettingregel nodig hebt.

b Op het blaadje wordt $f(x)$ gedifferentieerd.

De functie $f(x)$ is de productfunctie van	
$g(x) = 4x+3$ en $h(x) = (2x+7)^{-1}$	
$g'(x) = 4$	1
$h(x) = (2x+7)^{-1} = u^{-1}$ en $u = 2x+7$	2
$h'(x) = -u^{-2} \cdot 2 = -2(2x+7)^{-2}$	3
$f'(x) = 4 \cdot (2x+7)^{-1} + (4x+3) \cdot -2(2x+7)^{-2}$	4

Leg uit wat er in elke stap is gebeurd.

c Leg uit dat $f'(x) = \frac{4}{2x+7} + \frac{-2(4x+3)}{(2x+7)^2}$

d Laat door herleiding zien dat $f'(x) = \frac{22}{(2x+7)^2}$

10 Een quotiëntfunctie heeft de vorm $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$

Je kunt $f(x)$ schrijven als $f(x) = t(x) \cdot (n(x))^{-1}$.

a Laat met de kettingregel zien dat de afgeleide van

$$(n(x))^{-1} \text{ gelijk is aan } -1 \cdot (n(x))^{-2} \cdot n'(x).$$

b Laat met de productregel zien dat

$$f'(x) = t'(x) \cdot (n(x))^{-1} - t(x) \cdot (n(x))^{-2} \cdot n'(x).$$

c Herleid het resultaat van opdracht b tot

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

Theorie

Een functie van de vorm $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heet een

quotiëntfunctie.

Een quotiëntfunctie differentieer je met de **quotiëntregel**:

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

Gebruik haakjes waar dat nodig is. De teller werk je zo ver mogelijk uit, het kwadraat in de noemer hoeft je in het algemeen niet uit te werken.

Voorbeeld 1

$$\text{Differentieer } f(x) = \frac{3x - 2}{x^2 + 1}$$

Oplossing

De functie f is het quotiënt van $t(x) = 3x - 2$ en $n(x) = x^2 + 1$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = 3$ en $n'(x) = 2x$

Met de quotiëntregel vind je:

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (x^2 + 1) - (3x - 2) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{ofwel } f'(x) = \frac{-3x^2 + 4x + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

Voorbeeld 2

$$\text{Gegeven is de functie } g(x) = \frac{6x}{4x^2 - 10}$$

Bereken $g'(1)$.

Oplossing

De functie g is het quotiënt van $t(x) = 6x$ en $n(x) = 4x^2 - 10$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = 6$ en $n'(x) = 8x$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$g'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$g'(x) = \frac{6 \cdot (4x^2 - 10) - 6x \cdot 8x}{(4x^2 - 10)^2}$$

$$\text{ofwel } g'(x) = \frac{-24x^2 - 60}{(4x^2 - 10)^2}$$

$$g'(1) = \frac{-24 \cdot 1^2 - 60}{(4 \cdot 1^2 - 10)^2} = -2\frac{1}{3}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 011

- 11** Differentieer de functie $f(x) = \frac{5x + 6}{2 - x^2}$ en toon aan dat

H $f'(x) = \frac{5x^2 + 12x + 10}{(2 - x^2)^2}$

- 12** Differentieer.

H **a** $A = \frac{6p - 2p^2}{p + 15}$ **c** $R = \frac{(4s + 5)^3}{s}$

b $L = \frac{1}{u + 3}$ **d** $W = \frac{c}{\sqrt{2 - c}}$

- 13** Gegeven de formule $N = \frac{3t^2 - 5}{9}$

- a** Bepaal $\frac{dN}{dt}$ met de quotiëntregel.

- b** Leg uit dat je de formule $N = \frac{3t^2 - 5}{9}$ ook kunt schrijven als $N = \frac{1}{3}t^2 - \frac{5}{9}$ en differentieer deze formule.

- c** Welke manier om de formule N te differentiëren heeft je voorkeur? Leg je antwoord uit.

- d** Differentieer $N = \frac{3t(t + 4)}{2t}$

- 14** Een patiënt krijgt een geneesmiddel toegediend door een injectie in een spier. De concentratie van dit geneesmiddel in het bloed bereikt na enige tijd een maximum en neemt daarna geleidelijk af. Deze concentratie C in mg/liter voldoet aan de formule $C = \frac{8t}{t^2 + 4}$ met t in uren en $0 \leq t \leq 24$.

- a** Bereken met behulp van de afgeleide na hoeveel tijd de concentratie in het bloed maximaal is.
- b** Hoe groot is de snelheid waarmee het geneesmiddel in het bloed wordt opgenomen op het moment van injecteren?
- c** En hoe groot is de snelheid van afbraak na vijf uur?
- d** Na hoeveel uur moet er een tweede injectie worden gegeven om te zorgen dat de concentratie ten minste 1 mg/liter blijft?



Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

011 Gegeven is de quotiëntfunctie $f(x) = \frac{13x^2}{x+6}$

- a** Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren van f met behulp van de quotiëntregel.

	Het functievoorschrift $f(x)$ is het quotiënt van	
	$t(x) = 13x^2$ en $n(x) = x + 6$.	
	De afgeleiden zijn $t'(x) = \dots$ en $n'(x) = \dots$	1
	$f'(x) = \frac{\dots \cdot n(x) - \dots \cdot n'(x)}{(\dots)^2}$	2
	$f'(x) = \frac{\dots \cdot (x+6) - 13x^2 \cdot \dots}{(x+6)^2}$	3

Vul de afgeleiden in stap 1 in.

- b** Vul in stap 2 de quotiëntregel verder in.
c In stap 3 wordt de quotiëntregel toegepast.
 Waarom zijn er in de teller haakjes geplaatst om $x + 6$?
d Maak de berekening af en laat door herleiden zien dat

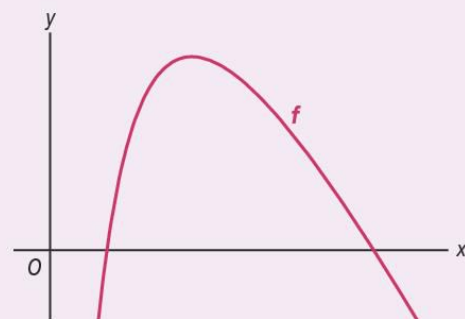
$$f'(x) = \frac{13x^2 + 156x}{(x+6)^2}$$

Uitdagende opdrachten

U2 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{-x^2 + 21x - 56}{x-1}$ voor $x > 1$.

Je ziet een schets van de grafiek van f .

- a** Differentieer de functie $f(x)$ en toon aan dat je de afgeleide kunt herleiden tot $f'(x) = -1 + \frac{36}{(x-1)^2}$
b Bereken $f'(8)$ en leg met behulp van je antwoord uit of de x -coördinaat van de top van de getekende grafiek van f kleiner of groter dan 8 is.



Je leert

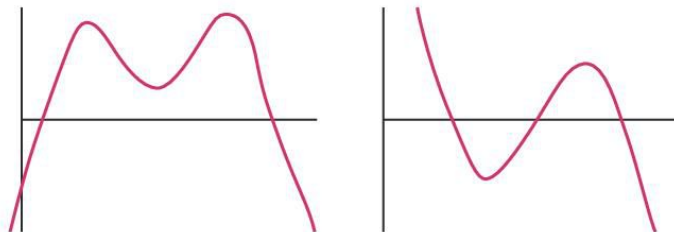
- hoe je met de grafiek van de afgeleide f' uitspraken kunt doen over de grafiek van de functie f

Leerroutes

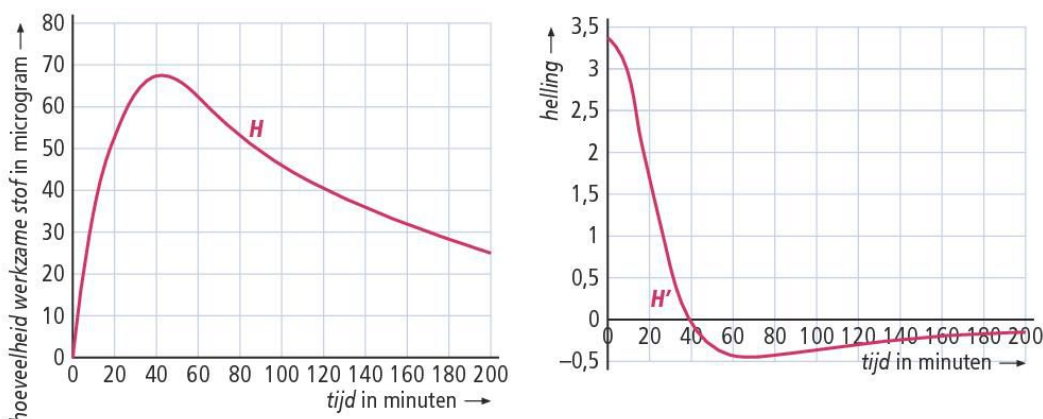
- ondersteunend: 15—16—017—18—19—20
- doorlopend: 15—16—17—18—19—20
- uitdagend: 15—17—18—19—20—U3

Maaïke heeft de grafieken van f en van f' geschetst.

- Welke grafiek is de grafiek van f en welke van f' ? Of valt dit niet uit de schetsen op te maken?

**15**

De hoeveelheid werkzame stof in een geneesmiddel wordt door het bloed opgenomen. Tegelijkertijd begint ook de afbraak van het werkzame middel. Het verband tussen de hoeveelheid werkzame stof $H(t)$ in microgram en de tijd t in minuten met $t = 0$ het moment van inname, kun je beschrijven met een functievoorschrift. Zowel de grafiek van H als van H' zijn gegeven.

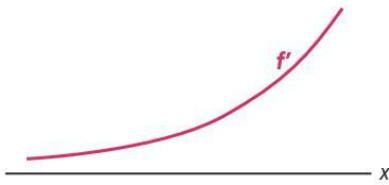


- Ga met de grafiek van H na dat de hoeveelheid werkzame stof na 40 minuten maximaal is.
- Hoe kun je in de grafiek van H' zien dat de hoeveelheid werkzame stof na 40 minuten maximaal is?
- Van 0 tot 40 minuten neemt de hoeveelheid werkzame stof toe en na 40 minuten neemt deze hoeveelheid weer af. Hoe kun je dit zien in de grafiek van H' ?
- Is de grafiek van H na 70 minuten toenemend of afnemend dalend? Hoe kun je dit in de grafiek van H' zien?

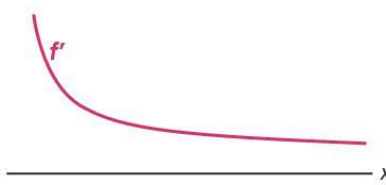
Theorie

De grafiek van de afgeleide heet de **hellinggrafiek**. Met behulp van de hellinggrafiek van een functie kun je een beeld krijgen van het verloop van de grafiek van deze functie.

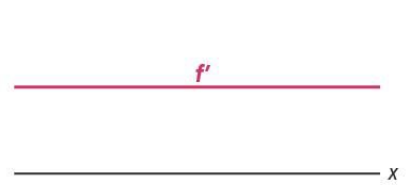
- Als de hellinggrafiek boven de x -as ligt, dan stijgt de grafiek van de functie. Als de hellinggrafiek onder de x -as ligt, dan daalt de grafiek van de functie.
- Als de hellinggrafiek de x -as nadert, dan heb je te maken met een afnemende stijging of daling.
- Als de hellinggrafiek van de x -as weggaat, dan heb je te maken met een toenemende stijging of daling.
- Als de hellinggrafiek de x -as snijdt, dan heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn, bijvoorbeeld in een top.

Voorbeeld 1

De hellinggrafiek ligt boven de x -as, dus de grafiek van f is stijgend.
De hellinggrafiek gaat weg van de x -as, dus de grafiek van f is toenemend stijgend.

Voorbeeld 2

De hellinggrafiek ligt boven de x -as, dus de grafiek van f is stijgend.
De hellinggrafiek nadert de x -as, dus de grafiek van f is afnemend stijgend.

Voorbeeld 3

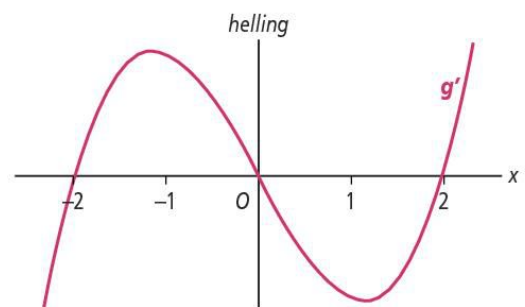
De hellinggrafiek ligt boven de x -as, dus de grafiek van f is stijgend.
De hellinggrafiek is horizontaal, dus de grafiek van f is constant stijgend, oftewel een rechte lijn.

- 16** In de voorbeelden zie je grafieken van f' als de grafiek van f toenemend stijgend, afnemend stijgend en constant stijgend is. Schets grafieken van f' als de grafiek van f toenemend dalend, afnemend dalend en constant dalend is.

Ondersteunende route → maak opdracht 017

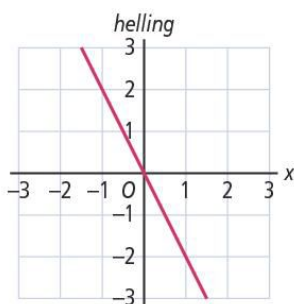
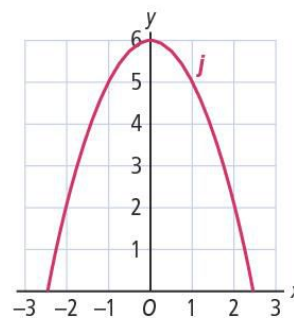
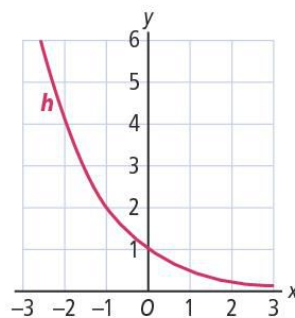
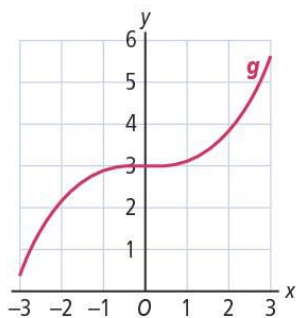
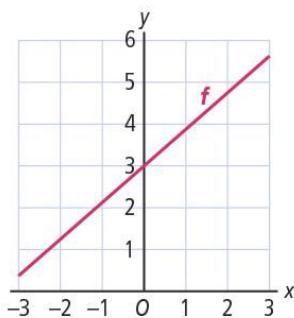
- 17** Je ziet een schets van de grafiek van g' .

- H**
- Leg uit dat de grafiek van g voor $x < -2$ afnemend dalend is.
 - Hoe kun je aan de grafiek van g' zien dat de grafiek van g een horizontale raaklijn heeft voor $x = -2$?
 - Heeft g een minimum, een maximum of geen van beide voor $x = -2$?
 - Schets de grafiek van g .

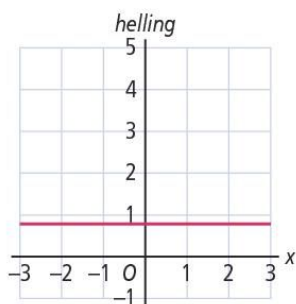


- 18** Je ziet de grafieken van de functies f , g , h en j en vier hellinggrafieken. Elk van de hellinggrafieken hoort bij één van de grafieken.

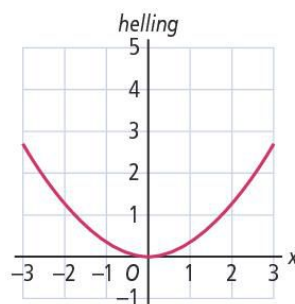
H



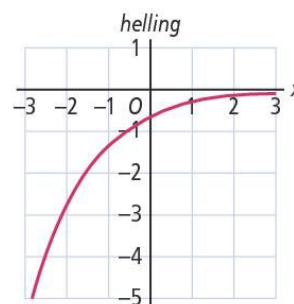
A



B



C



D

Bereken welke hellinggrafiek bij welke functie hoort.

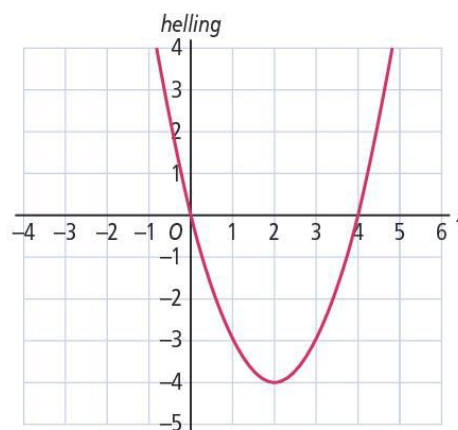
- 19** Voor een bedrijf waar plastics worden geproduceerd, gebruikt men de volgende formule voor het berekenen van de jaarlijkse kosten: $K = 25000 \cdot P^{0.62}$. In deze formule stelt K de kosten in dollars voor en P de productie in tonnen per jaar.

- Bepaal $\frac{dK}{dP}$ en schets de hellinggrafiek van K .
- Bereken met de hellinggrafiek dat de kosten bij een lage productie veel sneller toenemen dan bij een hoge productie.

- 20** Je ziet de hellinggrafiek van de functie f . Iemand doet een aantal uitspraken over de functie f . Ga bij elke uitspraak na of deze waar is, niet waar is of dat je dat niet de hellinggrafiek kunt opmaken. Licht je antwoord steeds toe.

- De functie f heeft een minimum bij $x = 2$.
- De functie f heeft één nulpunt.
- De grafiek van f heeft een top bij $x = 0$ en bij $x = 4$.
- De grafiek van f is een parabool.
- De grafiek daalt het snelst bij $x = 2$.

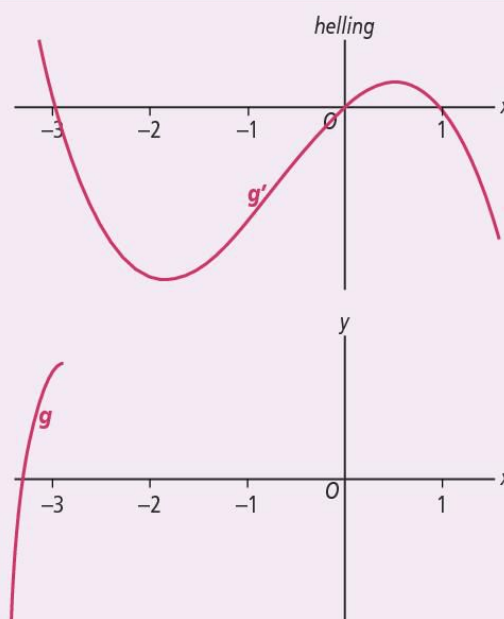
Uitdagende route → maak opdracht U3



Ondersteunende opdrachten

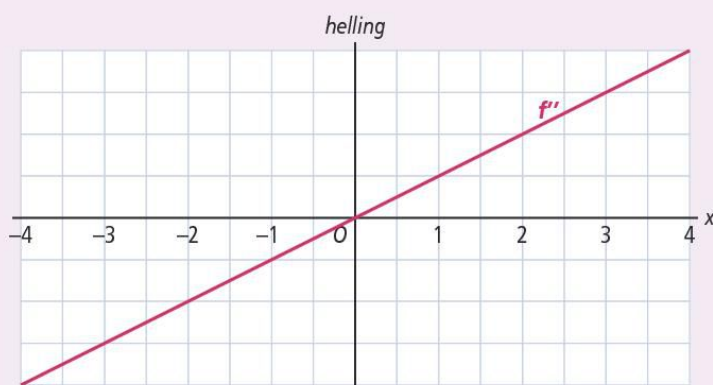
017 Gegeven is een schets van de grafiek van g' .

- Op het interval $x < -3$ ligt de grafiek van g' boven de x -as.
Is de grafiek van g stijgend of dalend voor $x < -3$?
- Op het interval $x < -3$ nadert de grafiek van g' de x -as.
Leg uit dat de grafiek van g op dit interval afnemend stijgend is.
- Leg uit dat de grafiek van g in $x = -3$ overgaat van stijgen in dalen.
- Heeft de functie g een minimum of een maximum bij $x = -3$?
- Hoe kun je zien dat de grafiek van g tussen $x = -3$ en $x = -2$ toenemend dalend is?
- Vul in.
Tussen $x = -2$ en $x = 0$ is de grafiek van g ... dalend.
- Er is een begin gemaakt met een mogelijke schets van de grafiek van g .
Maak de schets af.



Uitdagende opdrachten

U3 De grafiek van f' is de hellinggrafiek van f . De grafiek van f'' is de hellinggrafiek van de hellinggrafiek van f . Je ziet de grafiek van f'' .



Maak een mogelijke schets van de grafiek van f .

20.4 Redeneren met de afgeleide

Je leert

- hoe je met de afgeleide f' beredeneert hoe de grafiek van f stijgt of daalt

Leerroutes

- ondersteunend: 21—022—23—24—25—26
- doorlopend: 21—22—23—24—25—26
- uitdagend: 21—23—24—25—26—U4

In een gebied nam het aantal sprinkhanen N vanaf 1 juli 2020 snel toe. Een bioloog heeft een formule voor N opgesteld. Hij beweert dat de

afgeleide gelijk is aan $\frac{dN}{dt} = \frac{-6420 \cdot 0,8^t}{(1 + 6 \cdot 0,8^t)^2}$ met

t de tijd in dagen en $t = 0$ op 1 juli 2020.

- Waarom kan deze afgeleide niet juist zijn?



21 Voor $x > 0$ is gegeven de functie $h(x) = \frac{5-x}{x+3}$

H

- Laat zien dat $h'(x) = \frac{-8}{(x+3)^2}$
- Leg uit dat de waarde van $(x+3)^2$ altijd positief is en steeds groter wordt als x toeneemt.
- Waarom is de waarde van $h'(x)$ altijd negatief?
- Leg uit dat de grafiek van $h'(x)$ altijd onder de x -as ligt en steeds dichterbij de x -as komt als x toeneemt.
- Hoe volgt uit opdracht d dat de grafiek van h afnemend dalend is voor $x > 0$?

Theorie

Met behulp van de afgeleide van een functie kun je beredeneren hoe het verloop van de grafiek van de functie is. Daarbij moet je beredeneren of de afgeleide positief, negatief of nul is en of de afgeleide toeneemt of afneemt.

Voorbeeld

Voor $x > 0$ is gegeven is de functie $f(x) = 6x^{0,67}$. Beredeneer met behulp van de afgeleide dat de grafiek van f afnemend stijgend is.

Oplossing

$$f'(x) = 0,67 \cdot 6x^{-0,33} = 4,02 x^{-0,33} \text{ ofwel } f'(x) = \frac{4,02}{x^{0,33}}$$

Als $x > 0$, dan is $f'(x)$ positief voor elke waarde van x , want de teller en de noemer zijn beide positief en het quotiënt van twee positieve getallen is altijd positief. Hieruit volgt dat de grafiek van f stijgend is. Als x toeneemt, dan neemt $x^{0,33}$ ook toe. 4,02 wordt gedeeld door een steeds groter getal, dus $\frac{4,02}{x^{0,33}}$ nadert naar 0.

De grafiek van f is afnemend stijgend.

Ondersteunende route → maak opdracht 022

22

- a** Voor $x > 0$ is gegeven de functie $f(x) = 1250x^{-0,35}$.

H

Beredeneer met behulp van de afgeleide dat de grafiek van f afnemend dalend is.

- b** Voor $x > 0$ is gegeven de functie $g(x) = \frac{-6}{x^{12}}$

Beredeneer met behulp van de afgeleide op welke manier de grafiek van g stijgt of daalt.

23

Het aantal reigers in een natuurgebied is van 1960 tot 2020 behoorlijk toegenomen. Biologen hebben een model opgesteld waarmee de aantallen reigers berekend kunnen worden:

$R = 0,0007(1,5t + 5)^3 + 124,9$. In deze formule is R het aantal reigers en t de tijd in jaren met $t = 0$ het jaar 1960.

Het aantal reigers groeide in de eerste jaren vrij langzaam. Pas na enige tijd namen de aantallen snel toe.

- a** Stel de afgeleide $\frac{dR}{dt}$ op en beredeneer met de formule van de afgeleide dat er na 1960 sprake is geweest van een toenemende stijging.

- b** In hetzelfde natuurgebied is ook onderzocht hoeveel kikkers er leefden. De aantallen kikkers kunnen berekend worden met de formule $K = 4500 - \frac{1}{20}(t + 30)^2$. Ook in deze formule is t de tijd in jaren met $t = 0$ het jaar 1960.

Beredeneer met een schets van de grafiek van $\frac{dK}{dt}$ op welke manier de aantallen kikkers toenamen of afnamen tussen 1960 en 2020.



20.4 Redeneren met de afgeleide

- 24** Als het druk is in een tunnel, lopen de voetgangers langzaam. De loopsnelheid hangt af van de ruimte die er per persoon beschikbaar is. Onderzoekers hebben vastgesteld dat de loopsnelheid V in meters per minuut kan worden berekend met de formule $V = 87 - \frac{26}{R}$

In deze formule is R het aantal beschikbare vierkante meters per voetganger.

- Beredeneer aan de hand van de formule van V dat mensen sneller lopen als er weinig mensen in de tunnel zijn.
- Beredeneer dit ook aan de hand van de formule van $\frac{dV}{dR}$

- 25** De zevenkamp is een atletiekwedstrijd bij vrouwen. De prestaties per onderdeel worden omgerekend naar punten. De punten bij de 200 meter hardlopen worden berekend met de formule $P = 4,99087(42,5 - t)^{1,81}$ met t de tijd in seconden. De aantallen punten worden naar beneden afgerond op gehele.

- Hoeveel punten krijgt een atlete als ze de 200 meter in een tijd van 23,49 seconden aflegt?
- Beredeneer met behulp van de afgeleide $\frac{dP}{dt}$ op welke manier de grafiek van P stijgt of daalt. Neem de tijd t tussen 0 en 42,5 seconden.
- Vier atletes lopen de 200 meter in respectievelijk 24, 25, 34 en 35 seconden. Het verschil in puntenaantal is bij de twee snelste lopers groter dan bij de twee langzaamste lopers. Beredeneer dit met behulp van de hellinggrafiek.

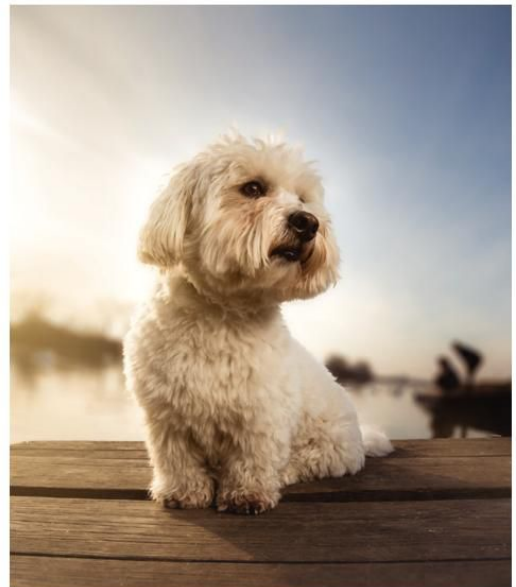
- 26** Een veelgehoorde bewering is dat het hart van zoogdieren gedurende hun leven ongeveer een miljard keer slaat. Je gaat dat in deze opdracht onderzoeken. Een zeker hondenras heeft een gemiddelde hartslag van 125 slagen per minuut. Met behulp van de bewering kan je de gemiddelde levensduur van dit ras berekenen.

- Bereken de gemiddelde levensduur van dit hondenras.
- Naar aanleiding van deze bewering kan een formule voor het verband tussen de hartslag en de levensverwachting opgesteld worden: $H = \frac{1900}{L}$

Hierin is L de levensverwachting in jaren en H de hartslag in slagen per minuut.

Toon aan dat deze formule uit de bewering volgt.

- Stel de formule van de afgeleide van H op en beredeneer aan de hand van deze formule dat H afnemend dalend is. (Ontleend aan examen vwo wiskunde A pilot 2017, tijdvak 1)



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

022

Voor $x > 0$ is gegeven de functie $f(x) = 32x^{1,2}$.

- a Laat zien dat $f'(x) = 38,4x^{0,2}$.
- b Waarom is $f'(x)$ positief voor $x > 0$?
- c Is de grafiek van f stijgend of dalend voor $x > 0$?
- d Vul de tabel in.

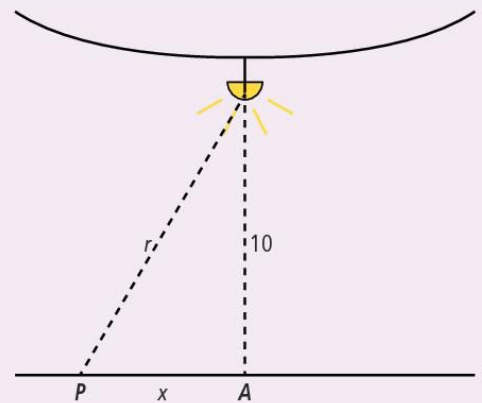
x	0	100	200	300	400	500
$f'(x)$	...	...	...	...	...	...

- e Neemt de afgeleide toe of af als x toeneemt?
- f Hoe kun je dit aan het functievoorschrift $f'(x)$ zien?
- g Beredeneer met behulp van de afgeleide dat de grafiek van f toenemend stijgend is.
- h Beredeneer met de afgeleide op welke manier de grafiek van $g(x) = \frac{-4}{x^2}$ stijgt of daalt als $x > 0$.

Uitdagende opdrachten

U4

Een belangrijke eis die aan wegverlichting gesteld wordt, is dat er overal voldoende licht is langs de te verlichten weg. Om aan te geven hoe licht het op een bepaalde plaats is, gebruikt men het begrip 'verlichtingssterkte', gemeten in lux. Voor het berekenen van de verlichtingssterkte bij één lamp gebruikt men het volgende model. Uitgangspunt is een lamp die op 10 meter hoog boven een wegdek hangt en waarvan het licht zich in alle richtingen naar beneden kan verspreiden. In een punt P op het wegdek met afstand r meter tot de lamp geldt $S = 100\,000 \cdot r^{-3}$. In deze formule is S de verlichtingssterkte in lux in het punt P . Punt A bevindt zich recht onder de lamp en x is de afstand in meters tussen punt A en punt P .



- a Toon aan dat $S = \frac{100\,000}{(x^2 + 100)\sqrt{x^2 + 100}}$
- b De grafiek van S is eerst toenemend dalend, maar vanaf een bepaalde waarde van x afnemend dalend.
Bereken met behulp van de afgeleide $\frac{dS}{dx}$ deze waarde van x .

20.5 Gemengde opdrachten

27 Differentieer de functies.

a $f(t) = t \cdot \sqrt{4t} \cdot \sqrt[3]{t}$

b $T(q) = 7q^2 + \frac{q}{2q^2 + 3}$

c $l(n) = \sqrt{2n-1} \cdot (3n+2)$

d $Z(a) = (2a + \sqrt{9a})^2$

28 Een tuinder heeft een waterreservoir om bij gebrek aan regenwater de planten water te kunnen geven. Voor een bepaalde periode kun je de inhoud van het reservoir berekenen

met de formule $I = \frac{120}{(0,05t + 1)^2}$, waarbij I de inhoud van het reservoir is in m^3 en t de tijd in dagen.

- a** Hoe kun je aan de formule zien dat de inhoud afneemt?
- b** Beredeneer met een schets van de hellinggrafiek dat de inhoud van het reservoir steeds langzamer afneemt.
- c** Beredeneer ook met behulp van de formule van de afgeleide dat de inhoud van het reservoir steeds langzamer afneemt.

29 Het aantal auto's dat per minuut een bepaald punt passeert hangt af van de snelheid van de auto's. Daarbij wordt rekening gehouden met de afstand die de auto's onderling moeten houden. Omdat er bij een hogere snelheid een langere remweg is, moeten auto's bij hogere snelheid een grotere afstand houden. Het aantal auto's A dat per minuut een bepaald punt passeert, kun je berekenen met behulp van

$$A = \frac{1680v}{400 + v^2}$$

Hierin is v de snelheid in km per uur.

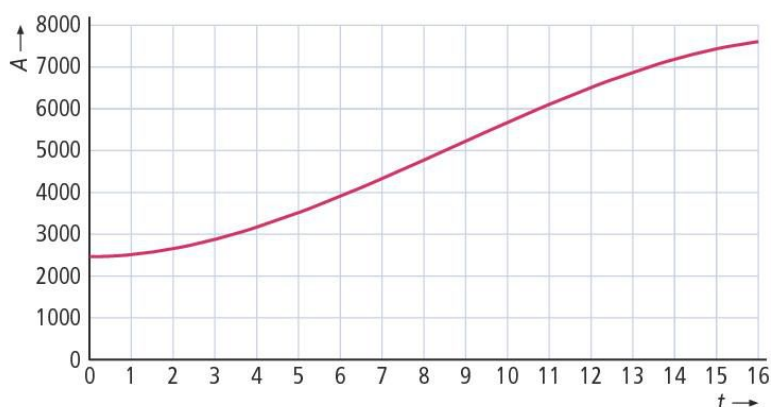
- a** Er passeert een file. Alle auto's rijden met een snelheid van 40 km per uur. Ze houden precies de onderlinge afstand die nodig is. De file duurt 15 minuten. Hoeveel auto's passeren er in die tijd?
- b** Stel de formule op van de afgeleide van A en bereken daarmee bij welke snelheid het aantal passerende auto's per minuut zo groot mogelijk is.
- c** Hoeveel auto's passeren in dat geval per minuut?



- 30** Bert zwemt in een rivier 500 meter tegen de stroom in en vervolgens dezelfde afstand weer terug.
De snelheid van Bert ten opzichte van het water is 1,5 meter per seconde.
De stroomsnelheid van de rivier is v meter per seconde.
- Toon aan dat de tijd die Bert nodig heeft om heen en weer te zwemmen gelijk is aan $\frac{500}{1,5 - v} + \frac{500}{1,5 + v}$ seconden.
 - Onderzoek met behulp van differentiëren of Bert het snelst heen en terug is bij stilstaand water.



- 31** Biologen hebben een schatting gemaakt van het aantal everzwijnen in een natuurgebied. Daarbij is het volgende wiskundige model gemaakt: $A = -2t^3 + 52t^2 + 2t + 2474$. In deze formule is A het aantal everzwijnen en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2021. Men neemt aan dat dit model zeker tot het jaar 2037 een goede voorspelling geeft. Je ziet de grafiek van A voor $0 \leq t \leq 16$.



- Volgens het model neemt in sommige jaren het aantal everzwijnen sneller toe dan het gemiddelde, en in andere jaren minder snel.
Bepaal met behulp van de grafiek in welke jaren dit aantal sneller toeneemt dan de gemiddelde toename per jaar. Leg je antwoord uit.
- Onderzoek met behulp van differentiëren in welk jaar de grafiek van A overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

Samenvatting

Vaardigheid

Je kunt een productfunctie differentiëren.

Een functie van de vorm $p(x) = g(x) \cdot h(x)$ heet een productfunctie.

Een productfunctie differentiëer je met de productregel

$$p'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x).$$

Voor het differentiëren van g of van h heb je soms de kettingregel nodig.

Voorbeeld

Stel de afgeleide op van $f(x) = (-4x + 5)^6(8 - 3x)$.

Oplossing

De functie f is het product van $g(x) = (-4x + 5)^6$ en

$$h(x) = 8 - 3x.$$

De afgeleide van g bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = (-4x + 5)^6 = u^6$ en $u = -4x + 5$.

$$\frac{dy}{du} = 6u^5 \text{ en } \frac{du}{dx} = -4 \text{ dus } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 6u^5 \cdot -4 = -24u^5$$

$$g'(x) = -24(-4x + 5)^5 \text{ en } h'(x) = -3$$

Met de productregel $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$ vind je:

$$f'(x) = -24(-4x + 5)^5 \cdot (8 - 3x) + (-4x + 5)^6 \cdot -3$$

$$f'(x) = -24(-4x + 5)^5 (8 - 3x) - 3(-4x + 5)^6$$

S1 Differentieer.

a $f(x) = (x^3 + 2x - 6)(8 - 10x - 5x^2)$

b $g(x) = -6x(5x + 90)^{11} + 56$

c $h(x) = 3x(x - 8)^2$

Vaardigheid**Je kunt een quotiëntfunctie differentiëren.**

Een functie van de vorm $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heet een quotiëntfunctie.

Een quotiëntfunctie differentiëer je met de quotiëntregel:

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

Gebruik haakjes waar dat nodig is. De teller werk je zo ver mogelijk uit, het kwadraat in de noemer hoeft je in het algemeen niet uit te werken.

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = \frac{4x^3}{8x - 3x^2}$

Oplossing

De functie f is het quotiënt van $t(x) = 4x^3$ en $n(x) = 8x - 3x^2$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = 12x^2$ en $n'(x) = 8 - 6x$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x^2 \cdot (8x - 3x^2) - 4x^3 \cdot (8 - 6x)}{(8x - 3x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{96x^3 - 36x^4 - 32x^3 + 24x^4}{(8x - 3x^2)^2}$$

$$\text{ofwel } f'(x) = \frac{64x^3 - 12x^4}{(8x - 3x^2)^2}$$

S2 Differentieer.

a $f(x) = \frac{5x}{6 - x}$

b $g(x) = \frac{(5 + 3x)^2}{4x}$

c $h(x) = \frac{-5}{(3x + 8)^2}$

d $i(x) = 16 + 3 \cdot \frac{18x}{3x^3 - 2x}$

Vaardigheid

Je kunt met de grafiek van de afgeleide f' uitspraken doen over de grafiek van de functie f .

De grafiek van de afgeleide heet de hellinggrafiek. Met behulp van de hellinggrafiek van een functie kun je een beeld krijgen van het verloop van de grafiek van deze functie.

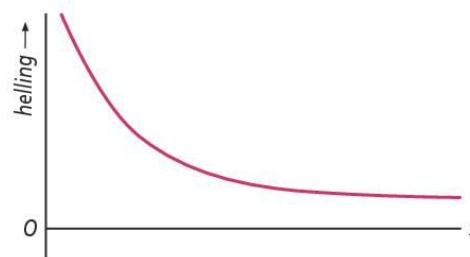
- Als de hellinggrafiek boven de x -as ligt, dan stijgt de grafiek van de functie. Als de hellinggrafiek onder de x -as ligt, dan daalt de grafiek van de functie.
- Als de hellinggrafiek de x -as nadert, dan heb je te maken met een afnemende stijging of daling.
- Als de hellinggrafiek van de x -as weggaat, dan heb je te maken met een toenemende stijging of daling.
- Als de hellinggrafiek de x -as snijdt, dan heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn, bijvoorbeeld in een top.

Voorbeeld

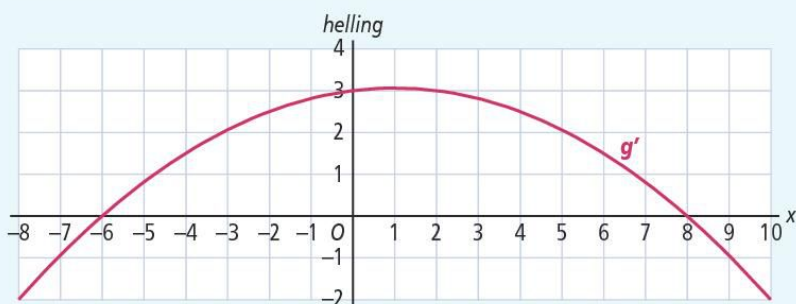
Je ziet een schets van de hellinggrafiek bij de functie f .
 Beredeneer dat de grafiek van f afnemend stijgend is.

Oplossing

De hellinggrafiek ligt boven de x -as, dus de grafiek van f is stijgend. De hellinggrafiek nadert de x -as, dus de grafiek van f is afnemend stijgend.



S3 Je ziet de hellinggrafiek bij de functie g .



- Leg uit dat de grafiek van g een top heeft bij $x = -6$. Hoort deze top bij een maximum of een minimum van g ?
- Beredeneer voor elk van de intervallen op welke manier de grafiek van g stijgt of daalt:

A: $\langle \leftarrow, -6 \rangle$	C: $\langle 1, 8 \rangle$
B: $\langle -6, 1 \rangle$	D: $\langle 8, \rightarrow \rangle$
- Schets een mogelijke grafiek van g .

Vaardigheid**Je kunt redeneren met de afgeleide.**

Met behulp van de afgeleide van een functie kun je beredeneren hoe het verloop van de grafiek van de functie is. Daarbij moet je beredeneren of de afgeleide positief, negatief of nul is en of de afgeleide toeneemt of afneemt.

Voorbeeld

Voor $x > 0$ is gegeven de

$$\text{functie } f(x) = \frac{15}{x^3}$$

Beredeneer met behulp van de afgeleide dat de grafiek van f afnemend dalend is.

Oplossing

$$f(x) = 15x^{-3} \text{ en } f'(x) = -45x^{-4} = \frac{-45}{x^4}$$

Als $x > 0$, dan is $x^4 > 0$. De teller is negatief, dus $f'(x)$ is negatief, want het quotiënt van een negatief en positief getal is altijd negatief. Hieruit volgt dat de grafiek van f dalend is.

Als x toeneemt, dan neemt x^4 ook toe. -45 wordt gedeeld door een steeds groter getal, dus $\frac{-45}{x^4}$ nadert naar 0.

Hieruit volgt dat de grafiek van f afnemend dalend is.

- S4** De Afsluitdijk is 32 kilometer lang. Ron fietst de Afsluitdijk regelmatig op en neer en meestal waait het. Veronderstel dat hij altijd wind mee heeft op de heenweg en wind tegen op de terugweg. Met de formule $T = \frac{1536}{576 - w^2}$ kun je zijn totale reistijd T in uren berekenen voor elke windsnelheid w in km per uur met $0 \leq w < 24$. Beredeneer met de afgeleide van T of de grafiek van T toenemend of afnemend stijgt.



T1 Differentieer.

- a** $f(x) = (2x + 3)(x^2 + 2x)$ **d** $j(x) = (x^3 + x)(3x - 5)$
b $g(x) = 2x^2(4 - 5x)^3$ **e** $k(x) = (x - 1) \cdot \sqrt{2x + 8}$
c $h(x) = \frac{x^3 - 2x}{1 + x}$ **f** $l(x) = \frac{3}{\sqrt{3x + 5}}$

T2 De waterhoogte in een waterton wordt beschreven door de formule $H = \sqrt{-2t^2 + 210t + 900}$ met H de waterhoogte in cm en t de tijd in dagen.

- a** Bereken na hoeveel dagen de waterton leeg is.
b Stel de formule op van $\frac{dH}{dt}$
c Beredeneer met behulp van $\frac{dH}{dt}$ dat de grafiek van H stijgt voor $0 \leq t \leq 52\frac{1}{2}$.
d Na hoeveel dagen is de waterhoogte maximaal? Geef ook de maximale waterhoogte.

T3 Bij het verteren van voedsel spelen colibacteriën een belangrijke rol. Zij komen voor in de darmen. In laboratoria wordt veel onderzoek gedaan naar de groei van populaties van colibacteriën. Daarbij gebruikt men een kweekvloeistof waarmee men de omstandigheden zoals die in de darmen voorkomen, zoveel mogelijk nabootst.

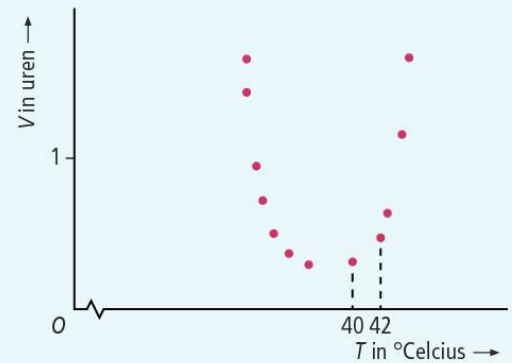
Bij constante temperatuur blijken deze populaties exponentieel te groeien. Men meet de verdubbelingstijd V , dat is de tijd in uren die het experiment moet duren om twee keer zoveel bacteriën te krijgen. Uit waarnemingen blijkt dat V afhangt van de ingestelde temperatuur T in graden Celsius. In de figuur staat het resultaat van de waarnemingen.

- a** Is de groei van de populatie bij 42°C sterker dan de groei bij 40°C ? Licht je antwoord toe met behulp van de figuur.
b Binnen het temperatuurgebied waarin de waarnemingen zijn gedaan, blijkt men het verband tussen T en V redelijk te kunnen benaderen met de formule $V = \frac{16,9}{-T^2 + 75T - 1350}$

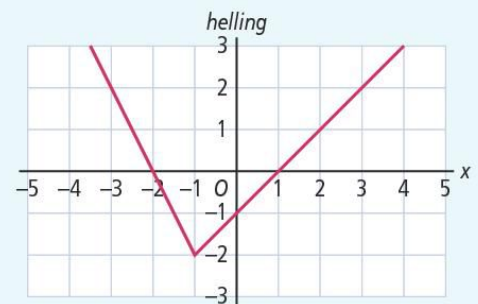
Stel de formule op van $\frac{dV}{dT}$

- c** Bereken met behulp van $\frac{dV}{dT}$ bij welke temperatuur de groei volgens de formule het sterkst is.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 1994, tijdvak 1)



- T4** Gegeven is de hellinggrafiek van de functie f .
- Leg uit dat de grafiek van f afnemend stijgend is op het interval $\langle \leftarrow, -2 \rangle$.
 - Op welk interval is de grafiek van afnemend dalend? Leg je antwoord uit.
 - Hoeveel toppen heeft de grafiek van f ? Geef van iedere top de bijbehorende x -coördinaat en leg uit of deze top bij een maximum of bij een minimum van f hoort.
 - Schets een mogelijke grafiek van f .



- T5** Voor basisscholen bestaat een opheffingsnorm. Als het aantal leerlingen op een school onder de opheffingsnorm zakt, dan moet de school worden opgeheven. De opheffingsnorm is gebaseerd op de leerlingendichtheid d , dat is het aantal basisschoolleerlingen per km^2 grond in de gemeente. De opheffingsnorm N kan worden berekend met de formule

$$N = \frac{0,6d}{0,15 + 0,0027d}$$

- In de tabel staan de gegevens uit 2020 van de gemeenten Appingedam en Delfzijl. Bereken voor beide gemeenten de opheffingsnorm.
- Op 1 januari 2021 fuseerden de gemeente Appingedam, Delfzijl en Loppersum tot één gemeente waardoor de opheffingsnorm veranderde. Voor welke gemeente heeft dit nadelige gevolgen voor de opheffingsnorm?
- Stel de formule op van de afgeleide van N .
- Beredeneer aan de hand van de afgeleide van N dat de grafiek van N afnemend stijgend is.
- Een politicus beweert het volgende:
De gemeenten met een grote leerlingendichtheid zijn bevoordeeld. Als de norm niet gehaald wordt, kunnen een paar extra leerlingen de school redden, maar in gemeenten met een geringe leerlingendichtheid kan dat de situatie nog ongunstiger maken.
Ben je het met deze uitspraak eens? Leg je antwoord uit.

	grond- oppervlakte in km^2	aantal basisschool- leerlingen
Appingedam	24	1027
Delfzijl	133	1668
Loppersum	111	710



Je kunt een productfunctie differentiëren.

E1 Differentieer.

a $f(x) = (8 - 3x + 2x^4)(1 + x + 7x^2)$

b $g(x) = x\sqrt{5-x}$

c $h(x) = (3x - 4) \cdot (7 - 2x)^2$

d $j(x) = (5 + \sqrt{x}) \cdot (3 - 6x)^{10}$

e $k(x) = 5x^2\sqrt{x-1}$

f $l(x) = (x + 3) \cdot (x - 3)^2$

Je kunt een quotiëntfunctie differentiëren.

E2 Stel een formule op voor $\frac{dy}{dx}$

a $y = \frac{4-x}{2x+1}$

d $y = \frac{100x-110}{x^2}$

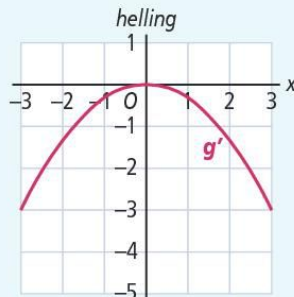
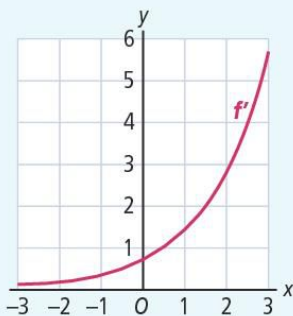
b $y = \frac{6x}{8x+10}$

e $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

c $y = \frac{17}{-x^2+5x}$

f $y = \frac{5x^4-7x}{3x+2}$

Je kunt met de grafiek van de afgeleide f' uitspraken doen over de grafiek van de functie f .



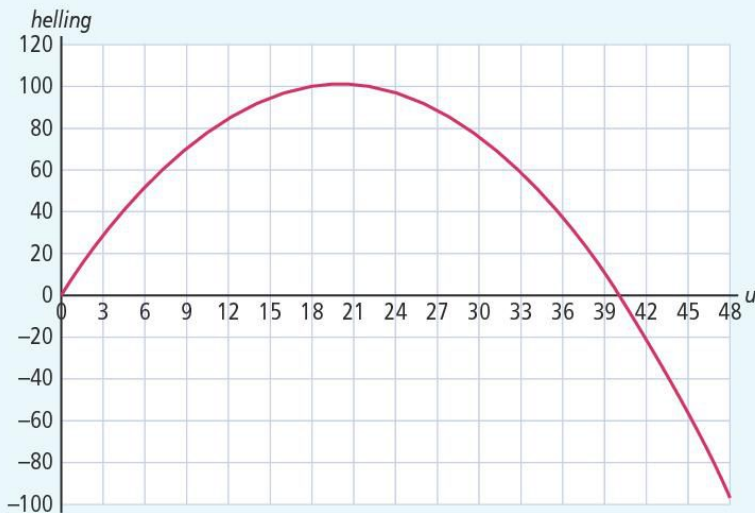
E3 Je ziet de hellinggrafieken van de functies f en g .

- Leg uit dat de grafiek van f toenemend stijgend is.
- Van welke soort stijgen of dalen is er bij de grafiek van g sprake op het interval $\langle \leftarrow, 0 \rangle$? Leg je antwoord uit.
- Heeft de grafiek van g een top? Leg je antwoord uit.
- Schets de grafiek van g .

Je kunt redeneren met de afgeleide.

- E4** Een schoonmaakbedrijf berekent voor het schoonmaken van een vloer de prijs per m^2 met de formule $G = \frac{75}{x-5} + 15,8$. Hierin is G de prijs in euro's per m^2 en x het aantal m^2 vloeroppervlak. De minimale grootte van een vloer is 10 m^2 . Toon met behulp van differentiëren aan dat de prijs per m^2 steeds minder sterk daalt bij toenemende grootte van een vloeroppervlak.

- E5** Voor een bedrijf is een winstfunctie W voor de winst in euro's per maand opgesteld. De winst is afhankelijk van het uurtarief u in euro's. Je ziet de hellinggrafiek van W .



- a** Op welk interval neemt de winst W toe?
b Bij welke waarde van u is de winst maximaal?
 Leg je antwoord uit.
c Bij welke waarde van u gaat de grafiek van W over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend?
- E6** Gegeven is de winstfunctie $W(q) = \frac{180q}{(0,5q + 1)^2}$ met W in honderden euro's en q is het aantal verkocht exemplaren in honderdtallen.
- a** Schets de grafiek van W .
b Bereken $W'(q)$.
c Bereken $W'(4)$. Welke betekenis heeft de uitkomst?
d Voor welke waarde van q is de winst maximaal?
e Bereken de maximale winst.

Fileproblemen

Files kunnen door verschillende omstandigheden ontstaan. Wegwerkzaamheden, een ongeluk of de drukte na afloop van een voetbalwedstrijd kunnen bijvoorbeeld de oorzaak zijn van het ontstaan van een file.

De laatste jaren zijn door de overheid maatregelen genomen om het aantal files en de lengte ervan terug te brengen.

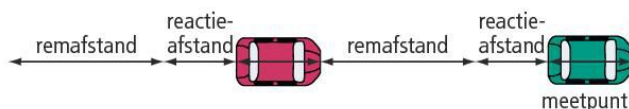
De automobilist die in een file terecht komt, wil er zo snel mogelijk weer uit komen.

Ook de verkeerspolitie wil dat een file zo snel mogelijk weer oplost. Zij wil dat bereiken door de maximumsnelheid aan te passen, zodat een vlotte doorstroming op gang wordt gehouden. De maximumsnelheid wordt aangegeven met borden boven de weg en hangt af van het aantal auto's dat per minuut een meetpunt passeert.



Om een model te maken met formules voor de doorstroming gebruik je de volgende aannames:

- Alle auto's rijden met dezelfde snelheid V in km per uur.
- De onderlinge afstand A in meters tussen alle auto's is gelijk aan de stopafstand S in meters.
- Alle auto's zijn gemiddeld 4 meter lang.
- De remafstand W in meters is $0,0075 V^2$.
- De reactietijd is 0,3 seconde.
- De reactieafstand in meters is de afstand afgelegd tijdens de reactietijd.



Opdracht

De doorstroming D is het aantal auto's dat per minuut een meetpunt passeert. De genoemde aannames leiden tot twee formules.

- a Laat zien dat formule 1 volgt uit de aannames.
- b Laat zien dat je formule 1 kunt herleiden tot formule 2.
- c Bereken met differentiëren bij welke snelheid de doorstroming maximaal is.
- d Hoeveel auto's passeren in dat geval per minuut een meetpunt?
- e Is de gevonden oplossing realistisch?
Zo niet, welke van de aannames is volgens jou het minst realistisch?
- f Neem aan dat de auto's gemiddeld niet 4 m maar 6 m lang zijn.
Wordt de maximale doorstroming dan groter of kleiner?

$$D = \frac{\text{snelheid in meters per minuut}}{4 + \text{reactieafstand} + \text{remafstand}} \quad 1$$

$$D = \frac{1000V}{240 + 5V + 0,4V^2} \quad 2$$

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

Je hebt in eerdere hoofdstukken geleerd wat exponentiële en logaritmische functies zijn.

In dit hoofdstuk herhaal je hoe je een exponentiële formule herleidt tot een logaritmische formule en leer je hoe je een logaritmische formule herleidt tot een exponentiële formule.

Ook leer je hoe je exponentiële en logaritmische functies differentieert. Daarbij wordt een nieuw getal geïntroduceerd: het getal van Euler. Als laatste herhaal je wat een logaritmische schaalverdeling is en hoe je hiermee werkt.

Na dit hoofdstuk weet je alles wat je over exponentiële en logaritmische functies moet weten voor het centraal examen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

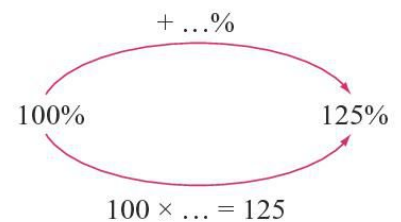
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 17
- *Formules manipuleren* opdracht 36
- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 38



- V1** In de tabel staat voor een aantal jaren hoeveel konijnen er op 1 januari in een duingebied waren.
- Laat zien dat het aantal konijnen bij benadering exponentieel toeneemt.
 - Geef de groeifactor per jaar in twee decimalen nauwkeurig.
 - Met hoeveel procent neemt het aantal konijnen per jaar toe?
 - Bij de tabel hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$. Hierbij is N het aantal konijnen en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2017. Geef de waarden van b en g .
 - Neem aan dat de toename op dezelfde manier doorgaat. Hoeveel konijnen zullen er dan zijn op 1 januari 2030?

jaartal	aantal konijnen
2017	164
2018	184
2019	206
2020	230
2021	258

- V2**
- Vul in de figuur op de puntjes de juiste getallen in.
 - Welke procentuele afname hoort er bij de groeifactor 0,91?
 - Welke groeifactor hoort er bij een toename van 40,5%?
 - Welke groeifactor hoort er bij een afname van 1,7%?

**Theorie**

Bij een **exponentieel groeiproces** $N = b \cdot g^t$ wordt de hoeveelheid N per tijdseenheid steeds met dezelfde factor vermenigvuldigd. Deze factor heet de **groeifactor** g . De hoeveelheid op tijdstip $t = 0$ is de **beginhoeveelheid** b .

Als g de groeifactor per tijdseenheid is, dan is de groeifactor per n tijdseenheden g^n . De groeifactor voor een n -de deel van de tijdseenheid is $g^{\frac{1}{n}}$.

Voorbeeld

De groeifactor per week is 0,75. Bereken de groeifactor per vier weken en per dag.

Oplossing

De groeifactor per vier weken is $0,75^4 \approx 0,3164$.

De groeifactor per dag is $0,75^{\frac{1}{7}} \approx 0,9597$.

- V3** Een hoeveelheid neemt elk kwartaal toe met 14%.
- Hoe groot is de groeifactor per kwartaal?
 - Bereken de groeifactor per jaar, per halfjaar en per maand.
 - Geef ook de bijbehorende groeipercentsages.
- V4** Een patiënt krijgt 100 mg geneesmiddel toegediend door inspuiting in het bloed. Het lichaam breekt het geneesmiddel af. De nog aanwezige hoeveelheid neemt exponentieel af. Na vier dagen is er nog 37 mg aanwezig.
- Bereken de groeifactor per dag in twee decimalen nauwkeurig.
 - Stel een formule op voor het verband tussen de aanwezige hoeveelheid geneesmiddel N in mg en de tijd t in dagen.
 - Bereken na hoeveel dagen er nog 10 mg van het geneesmiddel in het lichaam aanwezig is.

- V5**
- a** Vul in: ${}^2\log(8) = 3$, want $8 = 2^{\dots}$.
 - b** Vul in: ${}^2\log(16) = \dots$, want $\dots = \dots^{\dots}$.
 - c** Leg uit waarom het getal ${}^2\log(10)$ geen geheel getal is.
 - d** Bereken ${}^2\log(10)$ met je rekenmachine en rond het antwoord af op twee decimalen.

Theorie

De **logaritme** van a met grondtal g noteer je als ${}^g\log(a)$.

De basisregel voor logaritmen luidt als volgt:

Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$ en omgekeerd uit $t = {}^g\log(a)$ volgt $g^t = a$.

Hierbij is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

Bij het rekenen met logaritmen geldt:

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

$${}^g\log(a) = \frac{{}^n\log(a)}{{}^n\log(g)}$$

Hierbij is $a > 0$, $b > 0$, $g > 0$, $g \neq 1$, $n > 0$ en $n \neq 1$.

Voorbeeld

Schrijf als één logaritme

$$3 \cdot {}^5\log(2) + {}^5\log(4) - {}^5\log(16).$$

Oplossing

$$3 \cdot {}^5\log(2) + {}^5\log(4) - {}^5\log(16) =$$

$${}^5\log(2^3) + {}^5\log(4) - {}^5\log(16) =$$

$${}^5\log(8) + {}^5\log(4) - {}^5\log(16) =$$

$${}^5\log(8 \times 4) - {}^5\log(16) =$$

$${}^5\log(32) - {}^5\log(16) =$$

$${}^5\log\left(\frac{32}{16}\right) = {}^5\log(2)$$

- V6** Schrijf als één logaritme.

- a** ${}^3\log(10) + {}^3\log(7)$
- b** $4 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(2)$
- c** $2 \cdot {}^7\log(a) - {}^7\log(5)$
- d** ${}^5\log(b) + 3 \cdot {}^5\log(2)$
- e** ${}^3\log(15) - \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(25)$
- f** $3 \cdot \log(x) + \log(5x)$

- V7** **a** Bereken ${}^2\log(2^1)$, ${}^2\log(2^2)$, ${}^2\log(2^3)$ en ${}^2\log(2^{10})$.

- b** Vul in: ${}^g\log(g^a) = \dots$

- c** Ab schrijft $3 + {}^5\log(2)$ op het blaadje als één logaritme. In de stap 1 gebruikt hij de eigenschap van opdracht b om het getal 3 als logaritme met grondtal 5 te schrijven. Waarom kiest hij voor grondtal 5?

- d** Maak de berekening op het blaadje af.

- e** Schrijf als één logaritme.

A $2 + {}^3\log(8)$

B $5 + 4 \cdot {}^2\log(x)$

●	$3 + {}^5\log(2) =$				
●	${}^5\log(5^3) + {}^5\log(2) =$				1
●	${}^5\log(\dots) + {}^5\log(2) =$				2
●	$\dots$				3

Je leert

- hoe je een exponentiële formule herleidt tot een logaritmische formule
- hoe je een logaritmische formule herleidt tot een exponentiële formule

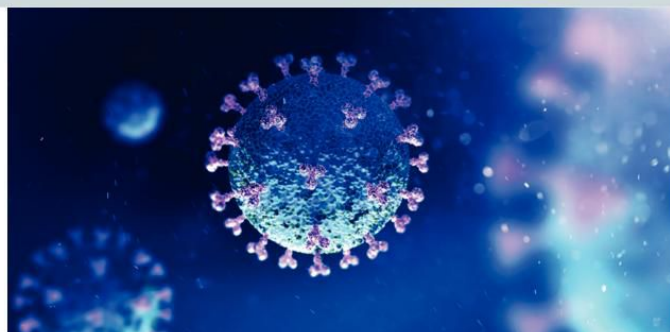
Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—03—4—5—06—7—8—9
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8—9
- uitdagend: 1—2—3—5—6—7—8—9—U1

In een stad is sprake van een griep epidemie. Het aantal dagen voordat N inwoners besmet zijn, kun je berekenen met de formule $t = {}^{1,13}\log(0,017N)$.

Hierbij is t de tijd in dagen met $t = 0$ op het moment dat de epidemie uitbreekt.

- Voor welke vragen is deze formule goed te gebruiken?



- De oplossing van de vergelijking $2^t = 5$ is $t = {}^2\log(5)$. Bereken ${}^2\log(5)$ in twee decimalen nauwkeurig.
 - Los de volgende vergelijkingen op. Schrijf de oplossing met een logaritme en rond daarna af op twee decimalen.

A $4^t = 12$	C $0,65^{2t} = 3$
B $3 \cdot 1,2^t = 21$	D $3,8 \cdot 2,5^t - 1 = 18$

- Op het blaadje wordt de formule $y = 2^x + 6$ herschreven zodat x wordt uitgedrukt in y .
 - Wat is er in stap 1 en stap 2 gebeurd?
 - Maak de berekening op het blaadje af.
 - Herleid $A = 0,5 \cdot 3^q$ zodat q wordt uitgedrukt in A .

	$y = 2^x + 6$				
	$2^x + 6 = y$				1
	$2^x = y - 6$				2
	$x = \dots \log(\dots)$				3

Theorie

Een exponentiële formule kun je herleiden tot een logaritmische formule.

Je gebruikt de regel: Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $N = 3 + 0,8^t$.
Druk t uit in N .

Oplossing

$3 + 0,8^t = N$	links en rechts verwisseld
$0,8^t = N - 3$	links en rechts $- 3$
$t = {}^{0,8}\log(N - 3)$	$g^t = a$ geeft $t = {}^g\log(a)$

Ondersteunende route → maak opdracht O6

6 Druk q uit in p .

- H**
- | | |
|-------------------------------------|--|
| a $p = {}^4\log(q)$ | d $p = 4 - 2 \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{2}q\right)$ |
| b $p = {}^{0,8}\log(q) - 9$ | e $p = \log(3q + 2)$ |
| c $p = 5 \cdot {}^3\log(2q)$ | f ${}^2\log(pq) = 1$ |

7 **a** Schrijf in de formule $y = 2 + {}^3\log(x + 5)$ het getal 2 als logaritme met grondtal 3 en herleid de formule vervolgens tot de vorm $y = {}^3\log(px + q)$.

b Herleid $y = -2 + {}^2\log(10 - x)$ tot de vorm $y = {}^2\log(px + q)$.

8 Bij een chemisch proces kun je de concentratie C van de stof die bij dit proces ontstaat, berekenen met de formule $C = 500 - 500 \cdot 0,96^t$. Hierbij is C de concentratie in mol per dm^3 en t de tijd in minuten met $t = 0$ het moment waarop het chemische proces begint. Een mol is een maat voor het aantal deeltjes.

- a** Bereken met hoeveel mol per dm^3 de concentratie in de eerste tien minuten toeneemt.
- b** De concentratie nadert op den duur een grenswaarde. Beredeneer hoe groot de grenswaarde is.
- c** Druk t uit in C .
- d** Bereken na hoeveel minuten de concentratie 250 mol per dm^3 is.

9 De volumeknop van een versterker heeft 19 standen: stand 0 tot en met stand 18. In stand 0 geeft de versterker geen geluid. In stand 18 is het geluidsniveau maximaal. Er geldt de volgende formule: $P = a \cdot \log(x + 1)$. Hierin is x de stand van de volumeknop, P het percentage van het maximale geluidsniveau en a een constante.

- a** Uit de gegevens kun je afleiden dat $a \approx 78$. Bereken a in drie decimalen nauwkeurig.
- b** Je kunt $P = 78 \cdot \log(x + 1)$ herleiden tot $x = 10^{n \cdot P} - m$. Bereken n en m . Rond zo nodig af op drie decimalen.



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

03

Gegeven is de formule $N = 3 \cdot 0,5^t + 2$.Op het blaadje wordt deze formule herleid zodat t wordt uitgedrukt in N .

- a In stap 1 zijn de linkerkant en de rechterkant verwisseld.
Leg uit wat er in stap 2 en 3 is gebeurd.
- b Gebruik in stap 4 de regel 'uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$ ' om de berekening af te maken.

Druk t uit in N .

- c $N = 6 \cdot 9^t$ f $N = 0,5 \cdot 5^{t-3}$
- d $N = \frac{1}{4} \cdot 0,81^t$ g $N = 2 \cdot 10^{3t} - 4$
- e $N = 7 + 9 \cdot 2^t$ h $8N = \frac{1}{3} \cdot 0,1^t$

	$N = 3 \cdot 0,5^t + 2$	
	$3 \cdot 0,5^t + 2 = N$	1
	$3 \cdot 0,5^t = N - 2$	2
	$0,5^t = \frac{N-2}{3}$	3
	$t = \dots \log(\dots)$	4

06

Gegeven is de formule $q = {}^4\log(10p) + 7$.Op het blaadje wordt deze formule herleid zodat p wordt uitgedrukt in q .

- a In stap 1 zijn de linkerkant en de rechterkant verwisseld.
Wat is er in stap 2 gebeurd?
- b Gebruik in stap 3 de regel 'uit $t = {}^g\log(a)$ volgt $g^t = a$ ' om de ontbrekende getallen in te vullen.
- c Maak de berekening op het blaadje af.

Druk q uit in p .

- d $p = {}^2\log(q)$ g $p = 1 - {}^5\log(2q)$
- e $p = {}^{0,2}\log(q) + 6$ h $p = \log\left(\frac{1}{5}q\right)$
- f $p = 3 \cdot {}^8\log(4q)$ i ${}^2\log(p + q) = 1$

	$q = {}^4\log(10p) + 7$	
	${}^4\log(10p) + 7 = q$	1
	${}^4\log(10p) = q - 7$	2
	$10p = \dots$	3
	$p = \dots$	4

Uitdagende opdrachten

U1

Tussen de variabelen R en S bestaat het volgende verband:

$${}^2\log(R) = 4,45 - 2,31S.$$

Deze formule kun je herleiden tot de vorm $R = b \cdot g^S$.Bereken de waarden van b en g in twee decimalen nauwkeurig.

21.2 Het getal e

Je leert

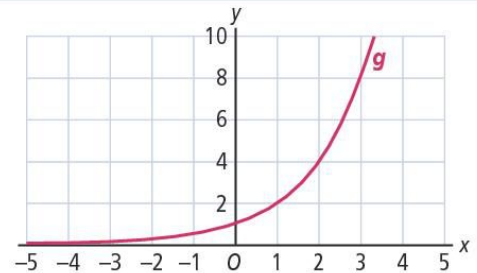
- wat het getal e is
- hoe je exponentiële functies met grondtal e differentieert

Leerroutes

- ondersteunend: 10—11—12—013—14—15—16
- doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16
- uitdagend: 10—11—13—14—15—16—U2

Gegeven is de grafiek van $g(x) = 2^x$. Anne zegt: ‘De afgeleide van $g(x) = 2^x$ is $g'(x) = x \cdot 2^{x-1}$ ’.

- Hoe heeft Anne deze afgeleide berekend?
- Waarom kan deze afgeleide niet kloppen?



- 10** In de tabel zie je de waarde van $f(x) = 2^x$ voor een aantal waarden van x .

- De functiewaarden nemen exponentieel toe. Hoe groot is de groeifactor? En de beginwaarde?
- Maak op je rekenmachine een tabel van de hellingen van de grafiek van f . Gebruik deze om de tabel verder in te vullen.
- Ga na dat de waarden van $f'(x)$ ook exponentieel toenemen.
- Hoe groot is de groeifactor van f' ? En de beginwaarde? Rond af op twee decimalen.
- Geef een functievoorschrift van de afgeleide functie f' .
- Maak ook voor de functie $g(x) = 3^x$ een tabel van de hellingen en laat zien dat geldt $g'(x) \approx 1,10 \cdot 3^x$.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	1	...
1	2	...
2	4	...
3	8	...
4	16	...

- 11** a Gebruik je rekenmachine om de tabel in te vullen.

functie f	afgeleide f'
$f(x) = 2^x$	$f'(x) \approx 0,69 \cdot 2^x$
$f(x) = 2,5^x$	...
$f(x) = 3^x$	$f'(x) \approx 1,10 \cdot 3^x$
$f(x) = 4^x$	...

- Er is een getal a waarvoor geldt dat de afgeleide van $f(x) = a^x$ gelijk is aan $f'(x) = 1 \cdot a^x$. Leg uit dat uit de tabel volgt dat de waarde van a tussen 2,5 en 3 ligt.

Theorie

Als $f(x) = a^x$, dan is $f'(x) = \text{constante} \cdot a^x$

Er is één waarde van a waarvoor de constante gelijk is aan 1.

Deze waarde heet het **getal van Euler**. Je noteert dit getal als e .

Het getal e is bij benadering gelijk aan 2,72.

De afgeleide van $f(x) = e^x$ is dus $f'(x) = e^x$.

Op je rekenmachine zit een aparte toets voor e .

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $y = 2 \cdot e^x + 4$.

Bereken $\frac{dy}{dx}$

Oplossing

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot e^x + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot e^x$$

Voorbeeld 2

Differentieer $g(t) = e^{5t+6}$.

Oplossing

Met de kettingregel:

$$y = e^u \text{ en } u = 5t + 6$$

$$\frac{dy}{du} = e^u \text{ en } \frac{du}{dt} = 5$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = e^u \cdot 5 = 5 \cdot e^u$$

$$g'(t) = 5 \cdot e^{5t+6}$$

Voorbeeld 3

Bereken de afgeleide van

$$A(q) = q^2 \cdot e^q.$$

Oplossing

De functie A is het product van

$$g(q) = q^2 \text{ en } h(q) = e^q.$$

$$g'(q) = 2q \text{ en } h'(q) = e^q$$

Met de productregel:

$$A'(q) = g'(q) \cdot h(q) + g(q) \cdot h'(q)$$

$$A'(q) = 2q \cdot e^q + q^2 \cdot e^q$$

12 Differentieer.

a $f(x) = 4 \cdot e^x$

c $h(x) = 3 - e^x$

b $g(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x - 12$

d $k(x) = 0,2 \cdot e^x + e$

Ondersteunende route → maak opdracht 013

13 Differentieer.

H

a $f(x) = e^{3x+5}$

d $l(d) = 15 \cdot e^{-2d} + 1$

b $g(t) = e^{-t}$

e $B(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot e^x$

c $p(q) = 2 \cdot e^{4q-7}$

f $W(p) = -7p \cdot e^{8p+1}$

14 Een satelliet gebruikt voor de energievoorziening onder andere

H

een radioactieve brandstof. Het vermogen P van de brandstof neemt af volgens de formule $P = 40 \cdot e^{-0,006t}$. Hierbij is

P in watt en t in dagen.

a Bereken de groeifactor per dag.

b Na hoeveel dagen is het vermogen gehalveerd?

c Stel een formule op van $\frac{dP}{dt}$

d Bereken de snelheid waarmee het vermogen na honderd dagen afneemt.

21.2 Het getal e

- 15** Als een geneesmiddel met een infuus wordt toegediend, dan neemt de concentratie van het middel in het bloed langzaam toe. Voor een bepaalde patiënt geldt voor de concentratie de formule $C = 2 - 2 \cdot e^{-0,1t}$. Hierbij is C de concentratie in mg per liter en t de tijd in uren met $t = 0$ op het moment dat het infuus wordt gestart.
- Bereken de concentratie twee uur nadat het infuus wordt gestart.
 - Bereken ook met welke snelheid de concentratie na twee uur toeneemt.
 - Laat zien dat je de formule kunt herleiden tot $t = -10 \cdot \log\left(1 - \frac{1}{2}C\right)$.
 - Het middel is pas werkzaam als de concentratie hoger dan 0,5 mg per liter is. Bereken hoelang het duurt voordat het middel werkzaam is. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.
- 16** In een natuurgebied neemt het aantal bevers al jaren toe. Een bioloog heeft de volgende formule opgesteld voor het aantal bevers in het gebied: $B = \frac{1200}{1 + 0,5 \cdot e^{-0,04t}}$. Hierin is B het aantal bevers en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2017.
- Bereken met hoeveel procent het aantal bevers in het natuurgebied is toegenomen tussen 1 januari 2017 en 1 januari 2020.
 - Het aantal bevers nadert op den duur een grenswaarde. Leg uit dat de noemer $1 + 0,5 \cdot e^{-0,04t}$ voor grote waarden van t naar 1 nadert.
 - Beredeneer hoe groot de grenswaarde is.
 - Toon aan dat de afgeleide van B gelijk is aan $\frac{dB}{dt} = \frac{24 \cdot e^{-0,04t}}{(1 + 0,5 \cdot e^{-0,04t})^2}$.
 - Bereken hoe groot de groeisnelheid van het aantal bevers was op 1 juli 2020.
 - Beredeneer met behulp van de formule van de afgeleide dat de grafiek van B stijgt.



Uitdagende route → maak opdracht U2

a De functie f is een kettingfunctie.

b Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren van $f(x)$.

$$y = e^u \text{ en } u = \dots$$
$$\frac{dy}{du} = e^u \text{ en } \frac{du}{dx} = \dots$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \dots$$
$$f'(x) = \dots \cdot e^{\dots}$$

c De functie $k(x) = 3x \cdot e^x$ is het product van $g(x) = 3x$ en $h(x) = e^x$. Om deze functie te differentiëren, heb je de productregel nodig. Op het blaadje is hiermee een begin gemaakt.

$$g(x) = 3x \text{ en } g'(x) = \dots$$
$$h(x) = e^x \text{ en } h'(x) = \dots$$
$$k'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$
$$k'(x) = \dots \cdot \dots + \dots \cdot \dots$$

Differentieer de volgende functies.

d $f(x) = e^{2x-1}$

g $s(d) = 10 \cdot e^{-7d+4}$

e $h(t) = 3 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$

h
$$A(x) = x^4 \cdot e^x$$

f $q(p) = 0,5 \cdot e^{p+10}$

i $W(q) = 6q \cdot e^{2+3q}$

Uitdagende opdrachten

U2 a Gegeven is de functie $f(x) = e^x + x^e + e + x$.

Laat met behulp van differentiëren zien dat de helling van de grafiek van f in het punt met $x = 0$ gelijk is aan 2.

b Voor de functie $g(x) = e^x$ geldt dat de afgeleide gelijk is aan de functie zelf.

Geef nog drie functies die deze eigenschap hebben.

21.3 Exponentiële functies differentiëren

Je leert

- wat de natuurlijke logaritme is
- hoe je exponentiële functies differentieert

Leerroutes

- ondersteunend: 17—18—019—19—20—21
- doorlopend: 17—18—19—20—21—22
- uitdagend: 17—18—19—21—22—U3

Een fietsband is een beetje poreus waardoor er langzaam lucht uit de band ontsnapt.

Het aantal liter lucht V in de band kun je

berekenen met de formule $V(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

Freek beweert dat de afgeleide gelijk is aan

$$V'(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

- Waarom kan dit niet kloppen?



- 17** In opdracht 10 heb je met behulp van een tabel met hellingen laten zien dat de afgeleide van $f(x) = 2^x$ gelijk is aan $f'(x) \approx 0,69 \cdot 2^x$. In deze opdracht ga je dit nog eens aantonen, maar nu met behulp van rekenregels.

- Differentieer de functies $h(x) = e^{5x}$ en $k(x) = e^{\frac{1}{3}x}$.
- Leg uit dat de afgeleide van $f(x) = e^{ax}$ gelijk is aan $f'(x) = a \cdot e^{ax}$.
- Je kunt $f(x) = 2^x$ schrijven als $f(x) = e^{ax}$.
Op het blaadje zie je hoe je de waarde van a bepaalt.

●	$e^{ax} = 2^x$								
●	$(e^a)^x = 2^x$					1			
●	$e^a = 2$					2			
●	$a = \ln(2)$					3			

Leg uit wat er in stap 1, 2 en 3 is gebeurd.

- Laat zien dat uit opdracht c volgt dat je $f(x) = 2^x$ kunt schrijven als $f(x) \approx e^{0,69 \cdot x}$.
- Hoe volgt uit opdracht b dat $f'(x) \approx 0,69 \cdot 2^x$?
- Bereken op dezelfde manier de afgeleide van $g(x) = 3^x$.

Theorie

Als $f(x) = a^x$ dan is $f'(x) = {}^e\log(a) \cdot a^x$.

Voor ${}^e\log(a)$ wordt meestal de notatie $\ln(a)$ gebruikt.

$\ln(a)$ heet de **natuurlijke logaritme** van a .

Voor de afgeleide van een exponentiële functie geldt dus:

Als $f(x) = a^x$ dan is $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$.

Op je rekenmachine zit een aparte toets voor $\ln$.

Voorbeeld 1

Gegeven $y = 3 \cdot 8^x$.

Bereken $\frac{dy}{dx}$

Oplossing

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot \ln(8) \cdot 8^x$$

$$\text{ofwel } \frac{dy}{dx} \approx 6,24 \cdot 8^x$$

Voorbeeld 2

Differentieer $P(t) = 0,2^{7t-1}$.

Oplossing

Met de kettingregel:

$$y = 0,2^u \text{ en } u = 7t - 1$$

$$\frac{dy}{du} = \ln(0,2) \cdot 0,2^u \text{ en } \frac{du}{dt} = 7$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \ln(0,2) \cdot 0,2^u \cdot 7$$

$$P'(t) = 7 \cdot \ln(0,2) \cdot 0,2^{7t-1}$$

$$\text{ofwel } P'(t) \approx -11,3 \cdot 0,2^{7t-1}$$

18 Differentieer.

a $f(x) = 4^x$

c $h(x) = 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b $g(x) = 300 \cdot 1,75^x$

d $k(x) = 10 + 6 \cdot 0,8^x$

Ondersteunende route → maak opdracht 019

19 Differentieer.

H **a** $r(s) = 10^{2s-2}$

d $W(n) = 5 - 1,3 \cdot 4^{n+1}$

b $h(t) = 9 \cdot 7^{\frac{1}{2}t}$

e $N(p) = 8 \cdot e^{-0,64p}$

c $k(b) = 45 \cdot 3^{4b+6}$

f $f(x) = x^5 - 5^x$

20 Het aantal inwoners van een stad groeit met 1,8% per jaar.

H Op 1 januari 2021 waren er 120 000 inwoners in de stad.

a Stel een formule op waarmee je het aantal inwoners in de stad N kunt berekenen. Neem t voor de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2021.

b Bereken wanneer het aantal inwoners gelijk zal zijn aan 150 000 en met hoeveel inwoners per jaar het inwoneraantal op dat moment zal veranderen.



21.3 Exponentiële functies differentiëren

- 21** Een geit heeft verontreinigd voer gegeten. De gifstoffen in het voer verlaten zijn lichaam via de melk. Een dierenarts meet dagelijks de concentratie gif in de melk. Voor de concentratie C in mg per liter geldt $C = 2t \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$. Hierbij is t de tijd in dagen na het eten van het verontreinigde voer.

- Bereken de concentratie na een dag.
- Bereken met behulp van differentiëren wanneer de concentratie gif in de melk maximaal is.
- Hoe groot is de maximale concentratie gif?



- 22** De batterij van Anna's telefoon is bijna leeg. Ze legt de telefoon aan de oplader. Ieder kwartier kijkt ze hoeveel procent de batterij is opgeladen. Na anderhalf uur haalt ze de telefoon van de oplader. De batterij is dan voor 94% opgeladen, zie de tabel.

- In de derde kolom van de tabel staat het verschil van het percentage ten opzichte van 100%. Laat zien dat dit verschil bij benadering exponentieel afneemt.
- Hoe groot is de groeifactor per kwartier die bij deze exponentiële afname hoort? Rond af op twee decimalen.
- Bereken de groeifactor per minuut in drie decimalen nauwkeurig.
- Bij de tabel heeft Anna een formule opgesteld van de vorm $P = 100 - b \cdot g^t$. Hierin is t de tijd in minuten en P het percentage. Leg uit dat er moet gelden dat $b = 95$.
- Stel een formule voor P op.
- Bereken na hoeveel minuten de batterij voor de helft is opgeladen.
- Stel een formule op van $\frac{dP}{dt}$
- Hoe kun je aan de formule van de afgeleide zien dat het percentage steeds langzamer toeneemt?

<i>tijd t in minuten</i>	<i>percentage P</i>	<i>verschil</i>
0	5	95
15	39	61
30	61	39
45	75	25
60	84	...
75	90	...
90	94	...

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

- 019** Je gaat de functie $f(x) = 4,5 \cdot 2^{3x+1}$ differentiëren.
- De functie f is een kettingfunctie.
Vul in: de schakels zijn $y = 4,5 \cdot 2^u$ en $u = \dots$
 - Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren van $f(x)$.

$y = 4,5 \cdot 2^u$ en $u = \dots$
 $\frac{dy}{du} = 4,5 \cdot \ln(2) \cdot 2^u$ en $\frac{du}{dx} = \dots$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4,5 \cdot \ln(2) \cdot 2^u \cdot \dots$
 $f'(x) = \dots \cdot \ln(2) \cdot 2^{\dots}$

Maak de berekening op het blaadje af.

- Bereken $\ln(2)$ met je rekenmachine en ga na dat je de afgeleide kunt schrijven als $f'(x) \approx 9,36 \cdot 2^{3x+1}$.

Uitdagende opdrachten

- U3** In een experiment met fruitvliegjes kan het aantal vliegjes N in een afgesloten ruimte worden benaderd met de formule

$$N = \frac{1000}{1 + 9 \cdot 0,9^t}$$

In deze formule is t het aantal dagen vanaf het begin van het experiment.

Het aantal vliegjes nadert op den duur naar een grenswaarde.

Op het moment dat het aantal vliegjes gelijk is aan de helft van de grenswaarde, neemt het aantal vliegjes in de afgesloten ruimte het snelst toe.

Laat dit met een berekening zien.



21.4 Logaritmische functies differentiëren

Je leert

- hoe je logaritmische functies differentiateert

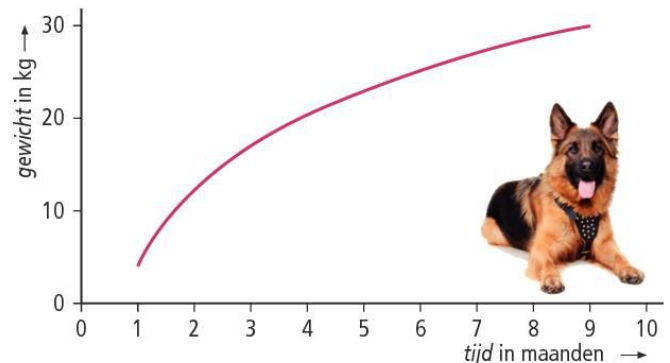
Leerroutes

- ondersteunend: 23—024—25—26—027—27—28
- doorlopend: 23—24—25—26—27—28—29
- uitdagend: 23—24—25—26—27—29—U4

Gegeven is een groeicurve van een Duitse herder van de eerste tot en met de negende maand na de geboorte. Bij de curve past de logaritmische formule $g = 27,6 \cdot \log(t) + 3,3$.

Hierbij is g het gewicht in kilogrammen en t de tijd in maanden na de geboorte.

- Hoe ziet de hellinggrafiek van deze groeicurve eruit?



23 Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x)$.

- Plot en schets de grafiek van f .
- Maak op je rekenmachine een tabel van de hellingen van de grafiek van f . Gebruik deze om de tabel verder in te vullen.
- Laat zien dat de waarde van $x \cdot f'(x)$ voor iedere x hetzelfde is. Welke waarde is dat?
- Hoe volgt uit opdracht c dat $f'(x) = \frac{1}{x}$?

x	0,5	1	2	5	10
$f'(x)$	...	...	...	...	...

Theorie

De afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$

Voorbeeld 1

Differentieer $f(x) = \ln(3x + 1)$.

Oplossing

Met de kettingregel:

$$y = \ln(u) \text{ en } u = 3x + 1$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \text{ en } \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 3 = \frac{3}{u}$$

$$f'(x) = \frac{3}{3x + 1}$$

Voorbeeld 2

Differentieer $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Oplossing

De functie g is het quotiënt van $t(x) = \ln(x)$ en $n(x) = x$.

$$t'(x) = \frac{1}{x} \text{ en } n'(x) = 1.$$

Met de quotiëntregel vind je:

$$g'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x)}{x^2} \text{ ofwel } g'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 024

24 Differentieer.

- a** $f(x) = 4 \cdot \ln(x) + 7$ **c** $h(x) = 5 \cdot \ln(3x)$
b $g(x) = \ln(2x + 5)$ **d** $k(x) = \ln(-x)$

25 Gegeven is de functie $g(x) = {}^2\log(x)$.

- a** Toon aan dat je ${}^2\log(x)$ kunt schrijven als $\frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(x)$.
b Leg uit dat de afgeleide van g gelijk is aan $g'(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{x}$.
c Bereken op dezelfde manier de afgeleide van $h(x) = {}^3\log(x)$.

$${}^p\log(q) = \frac{{}^q\log(q)}{{}^q\log(p)}$$

Theorie

Voor de afgeleide van een logaritmische functie geldt:

Als $f(x) = {}^g\log(x)$ dan is $f'(x) = \frac{1}{\ln(g) \cdot x}$

Voorbeeld 1Differentieer $f(x) = {}^{0,6}\log(x)$.**Oplossing**

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(0,6) \cdot x}$$

ofwel $f'(x) \approx -\frac{1}{0,51x}$

Voorbeeld 2Bereken de afgeleide van $A = {}^8\log(4p^2 + 9p)$.**Oplossing**

Met de kettingregel:

$$A = {}^8\log(u) \text{ en } u = 4p^2 + 9p$$

$$\frac{dA}{du} = \frac{1}{\ln(8) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{dp} = 8p + 9$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{dA}{du} \cdot \frac{du}{dp} = \frac{1}{\ln(8) \cdot u} \cdot (8p + 9)$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{8p + 9}{\ln(8) \cdot (4p^2 + 9p)} \text{ ofwel}$$

$$\frac{dA}{dp} \approx \frac{8p + 9}{2,08 \cdot (4p^2 + 9p)}$$

26 Differentieer.

- a** $f(x) = {}^5\log(x)$ **d** $l(d) = {}^7\log(d + 1)$
b $g(t) = 9 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(t) + 3$ **e** $A(r) = {}^2\log(3r - 7)$
c $p(q) = \log(q) + q$ **f** $B(s) = {}^{0,1}\log(2s)$

21.4 Logaritmische functies differentiëren

Ondersteunende route → maak opdracht 027

27

Bereken $\frac{dA}{dp}$

H

a $A = 5 + {}^{1,06}\log(2p - 6)$

d $A = {}^3\log(p - 4p^3)$

b $A = 4 \cdot \log\left(\frac{1}{2}p\right) + 3p$

e $A = p \cdot \ln(12p + 7)$

c $A = \frac{p+2}{\ln(p)}$

f $A = \frac{5}{\ln(2p) + 3}$

28

H

Max laat een speelgoedautootje onafgebroken rijden. Het eerste uur rijdt het autootje met een constante snelheid van 6 kilometer per uur. Daarna neemt de snelheid af doordat de batterij leeg raakt. Het verband tussen de afgelegde afstand s in kilometers en de tijd t in uren wordt voor $t \geq 1$ gegeven door de formule $s = 6 + 13,8 \cdot \log(t)$.

- a Bereken hoeveel kilometer het autootje aflegt tussen $t = 1$ en $t = 2$.
- b Druk t uit in s .
- c Bereken na hoeveel uur het autootje 12,5 kilometer heeft afgelegd.
- d Welke snelheid heeft het autootje na vijf uur?
- e Na hoeveel uur is de snelheid nog maar 1 kilometer per uur?

29

Bij het begin van een brand lopen de temperaturen in de brandhaard heel snel op. Die kun je bij een 'standaardbrand' berekenen met de formule $T = 150 \cdot \ln(8t + 1) + T_0$. Hierbij is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$, t de tijd in minuten na het begin van de brand en T_0 de temperatuur op het tijdstip dat de brand uitbreekt.

- a Laat met een berekening zien dat uit de formule volgt dat de temperatuur op tijdstip $t = 0$ gelijk is aan T_0 .
- b Leg uit dat de temperatuurstijging gelijk is aan $T - T_0 = 150 \cdot \ln(8t + 1)$.
- c Bereken na hoeveel minuten de temperatuurstijging 500 graden Celsius is.
- d Bereken met welke snelheid de temperatuur op dat moment stijgt.
- e Beredeneer met behulp van de formule van de afgeleide dat de temperatuur het snelst stijgt als de brand net is uitgebroken.



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

- 024** Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 \cdot \ln(x) - 7$ en $g(x) = \ln(4x - 7)$.
- Waarom heb je geen kettingregel nodig om $f(x)$ te differentiëren en wel om $g(x)$ te differentiëren?
 - Bereken $f'(x)$.
 - Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren van $g(x)$ met behulp van de kettingregel. Maak de berekening op het blaadje af.

Differentieer de volgende functies.

- d** $g(x) = 3 \cdot \ln(x) - 2$ **f** $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(2x)$
e $f(x) = \ln(6x + 1)$ **g** $k(x) = \ln(x + 1) - 8$

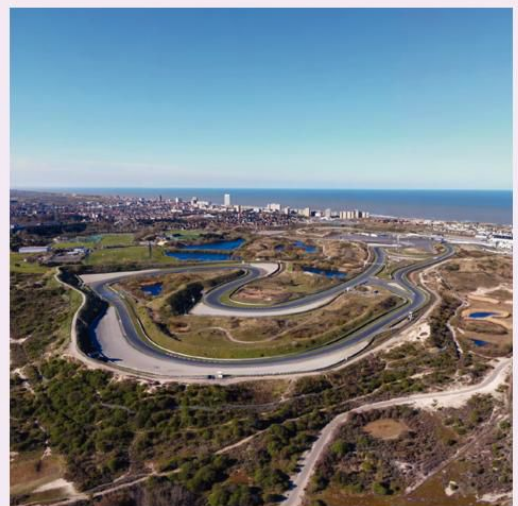
●	$y = \ln(u)$ en $u = \dots$				
●	$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$ en $\frac{du}{dx} = \dots$				
●	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \dots = \dots$				
●	$g'(x) = \dots$				

- 027** Gegeven is de formule $A = \frac{\ln(p)}{2p - 1}$.
 Om de afgeleide van A te bepalen, heb je de quotiëntregel nodig.
- Van welke twee functies is A het quotiënt?
 - Op het blaadje is een begin gemaakt met het berekenen van de afgeleide van A .
 Wat komt er in stap 1 en 2 op de puntjes te staan?
 - In stap 3 wordt de quotiëntregel gegeven.
 Wat komt er op de puntjes te staan?
 - De quotiëntregel wordt toegepast in stap 4.
 Waarom zijn er in de teller haakjes geplaatst om $2p - 1$?
 - Vul het blaadje verder in.

●	$t(p) = \ln(p)$ en $t'(p) = \dots$	1
●	$n(p) = 2p - 1$ en $n'(p) = \dots$	2
●	$\frac{dA}{dp} = \frac{t'(p) \cdot \dots - t(p) \cdot \dots}{(\dots)^2}$	3
●	$\frac{dA}{dp} = \frac{\dots \cdot (2p - 1) - \ln(p) \cdot \dots}{(2p - 1)^2}$	4

Uitdagende opdrachten

- U4** Een autocoureur rijdt een aantal rondes op het circuit van Zandvoort. Voor de afstand s in meters die de coureur heeft afgelegd gedurende de eerste tien seconden van de eerste ronde geldt bij benadering de formule $s = 180 \cdot \log(0,02t^3 + 1)$.
 Hierbij is t de tijd in seconden met $t = 0$ het moment is waarop de coureur vertrekt en $0 \leq t \leq 10$.
- Bereken de gemiddelde snelheid van de autocoureur gedurende de eerste tien seconden.
 - Bereken de snelheid van de autocoureur op tijdstip $t = 2$.
 - In de eerste tien seconden is er een tijdstip waarop de snelheid maximaal is.
 Bereken de waarde van t waarop dit het geval is. Rond af op één decimaal.



21.5 Logaritmische schalen

Je leert

- hoe je een getal op een logaritmische schaalverdeling aangeeft
- hoe je een logaritmische schaalverdeling gebruikt

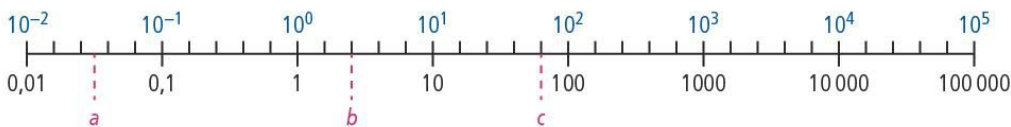
Leerroutes

- ondersteunend: 30—031—32—33—34
- doorlopend: 30—31—32—33—34
- uitdagend: 30—31—33—34—U5

De grafiek geeft het verband weer tussen de luchtdruk p in hectopascal (hPa) en de hoogte h in kilometers boven de zeespiegel.

Volgens Lisa neemt de luchtdruk lineair af.

- Ben jij het met Lisa eens?



30 Gegeven is de getallenlijn.

- Hoe kun je zien dat er een logaritmische schaalverdeling is gebruikt?
- Het getal a ligt precies in het midden tussen 10^{-2} en 10^{-1} , dus a is $10^{-1,5}$.
Bereken a in drie decimalen nauwkeurig.
- Vul in: $b = 10^{\dots}$ en laat zien dat b afgerond op één decimaal gelijk is aan 2,5.
- Bereken de waarde van c .
- Paul wil het getal 3200 op de getallenlijn plaatsen. Hiervoor moet hij het getal als macht van 10 schrijven, dus moet hij de vergelijking $10^t = 3200$ oplossen.
Vul in: $t = \dots \log(\dots) \approx \dots$, dus $3200 = 10^{\dots}$.
- Geef het getal 3200 op de getallenlijn aan.

Aanpak

Hoe geef je een getal a aan op een log-schaal?

- Schrijf de getallen op de log-schaal als machten van 10.
- Schrijf het getal a als macht van 10 door de vergelijking $10^t = a$ op te lossen.
- Geef het getal 10^t aan op de log-schaal.

Voorbeeld

Geef het getal 199 aan op een log-schaal.

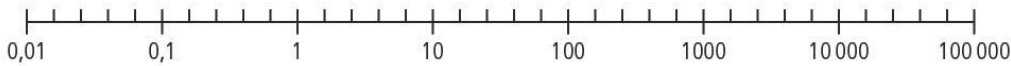
Oplossing

- 10^0 10^1 10^2 $10^{2,3}$ 10^3
 1 10 100 199 1000
- $10^t = 199$ geeft $t = \log(199) \approx 2,3$.
- $10^{2,3}$ ligt tussen 10^2 en 10^3 .

Ondersteunende route → maak opdracht 031

- 31** Geef op de log-schaal de getallen 0,8; 7 en 3000 aan.

H

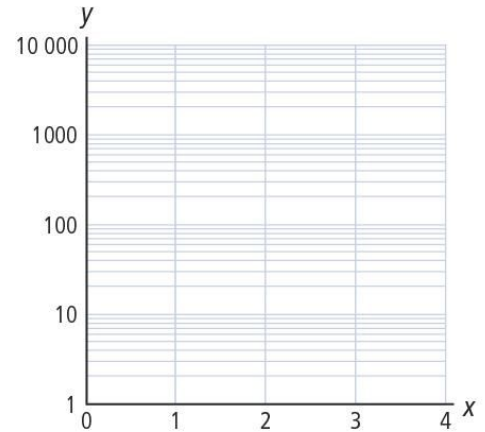


- 32** Gegeven is de exponentiële functie $f(x) = 3 \cdot 10^x$.

a Vul de tabel in.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	...	...	...	...	...

- b** In het assenstelsel is op de verticale as een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Teken de grafiek van f in het assenstelsel.
- c** Welke vorm heeft de grafiek?
- d** Leg uit dat je voor het tekenen van de grafiek van $g(x) = 2000 \cdot 0,5^x$ de coördinaten van slechts twee punten nodig hebt.
- e** Teken de grafiek van g in het assenstelsel.
- f** Teken ook de grafiek van $h(x) = e^x$ in het assenstelsel.

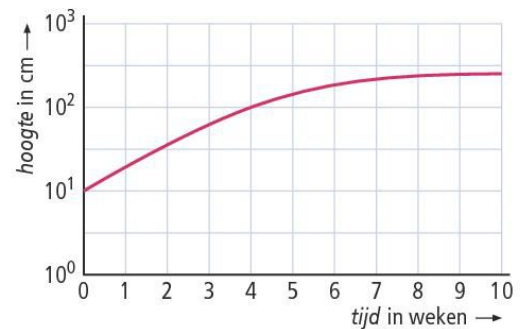


- 33** Gegeven is een grafiek van de gemiddelde hoogte van de zonnebloemen op een veld. Bij de grafiek past de formule

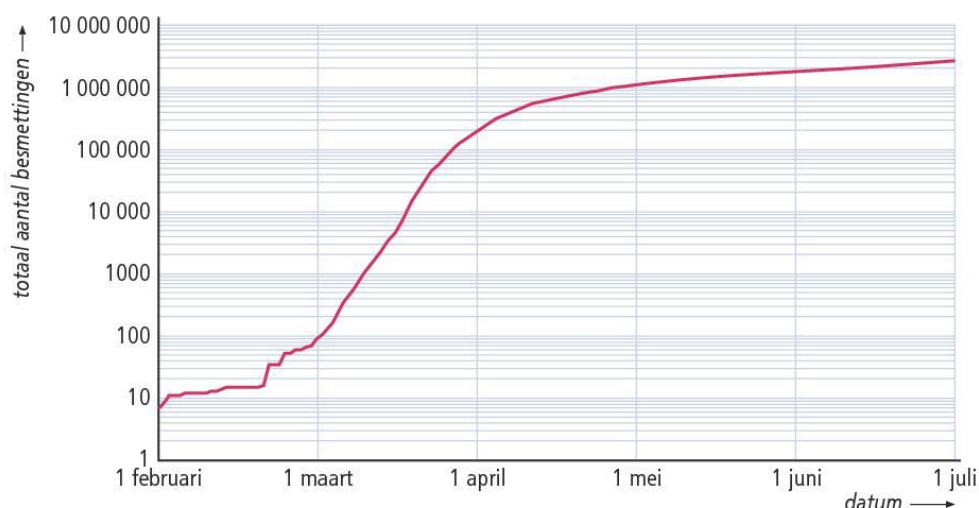
$$H = \frac{256}{1 + 25 \cdot 0,497^t}$$

Hierin is H de hoogte in cm en t de tijd in weken.

- a** Leg uit hoe je kunt zien dat de gemiddelde hoogte van de zonnebloemen in de eerste vier weken bij benadering exponentieel is toegenomen.
- b** Beredeneer met behulp van de formule dat de gemiddelde hoogte van de zonnebloemen maximaal 256 cm is.
- c** Waar kun je dit getal in de figuur terugvinden?
- d** Toon aan dat $\frac{dH}{dt} \approx \frac{4475 \cdot 0,497^t}{(1 + 25 \cdot 0,497^t)^2}$
- e** Na hoeveel weken groeien de zonnebloemen het snelst?
- f** Hoe groot is de maximale groeisnelheid?



21.5 Logaritmische schalen



- 34** In de figuur zie je hoe in de Verenigde Staten het totaal aantal besmettingen met het coronavirus is toegenomen tussen 1 februari 2020 en 1 juli 2020.
- Bram beweert dat de toename van het aantal besmettingen in maart groter was dan in april.
Waarom denkt Bram dit? Ben je het met hem eens?
 - Het aantal besmettingen van 1 maart tot en met 1 april is bij benadering exponentieel toegenomen.
Bereken de verdubbelingstijd van het aantal besmettingen in deze periode.
 - Het aantal besmettingen van 1 mei tot en met 1 juli is ook bij benadering exponentieel toegenomen. Op 1 mei waren er ongeveer 1 070 000 besmettingen en op 1 juli waren dat er 2 630 000.
Bij het totaal aantal besmettingen N in deze periode past een formule van de vorm $N = b \cdot e^{a \cdot t}$. Hierin is t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 mei 2020.
Leg uit dat $b = 1\,070\,000$.
 - Bereken de waarde van a in vijf decimalen nauwkeurig.
 - Bereken met welke snelheid het aantal besmettingen op 1 mei 2020 toenam.

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

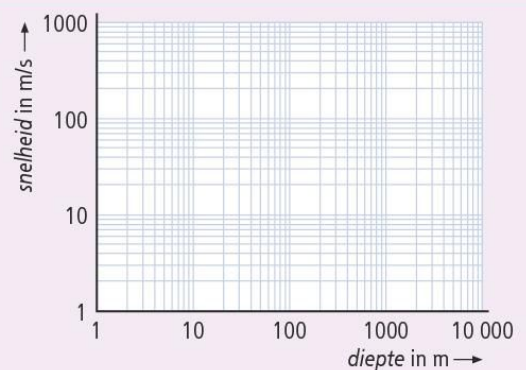


- 031** Op de getallenlijn is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.
- Ga na dat $1 = 10^0$ en schrijf alle andere getallen langs de as als macht van 10.
 - Ga na dat $10^{2,5} \approx 316$.
 - Leg uit dat het getal $10^{2,5}$ op de log-schaal precies tussen 10^2 en 10^3 ligt.
 - Om het getal 500 op de log-schaal aan te geven, moet je 500 schrijven als macht van 10. Hiervoor moet je de vergelijking $10^t = 500$ oplossen.
Vul in: uit $10^t = 500$ volgt $t = \dots \log(\dots) \approx \dots$
 - Leg uit dat het getal 500 tussen 10^2 en 10^3 ligt.
 - Hoe kun je aan de exponent zien dat 500 dichterbij 10^3 dan bij 10^2 ligt?
 - Geef het getal 500 aan op de log-schaal.
 - Geef ook de getallen 0,3; 2 en 80 000 aan op de log-schaal.

Uitdagende opdrachten

- U5** De snelheid van een tsunami hangt af van de diepte van de oceaan. Voor de snelheid v in meters per seconde geldt bij benadering de formule $v = 3 \cdot d^{0,5}$. Hierin is d de diepte van de oceaan in meters.

- In het assenstelsel is op beide assen een logaritmische schaalverdeling gebruikt.
Teken de grafiek van v in het assenstelsel.
- Welke vorm heeft de grafiek?
- Je kunt de formule herleiden tot de vorm $\log(v) = a \cdot \log(d) + b$.
Bereken de waarden van a en b .



21.6 Gemengde opdrachten

35 Druk t uit in N .

a $N = 5 + \frac{1}{4} \cdot 8^{t+2}$

c $N = \ln(12 - t)$

b $N = 3 \cdot \log(2t)$

d $\frac{1}{3}N - 2 \cdot e^{0,1t} = 0$

36 Daglicht wordt door water geabsorbeerd, waardoor de lichtsterke onder water snel afneemt. In een meer met vrij helder water kun je het percentage daglicht berekenen met de formule $P = 100 \cdot 0,75^d$. Hierin is P het percentage daglicht en d de diepte in meters.

a Bereken op welke diepte de hoeveelheid daglicht is gehalveerd.

b Herleid de formule zodat d wordt uitgedrukt in P .

c Een bioloog heeft onderzocht hoeveel algen er in het meer voorkomen. Een formule die past bij het aantal algen A per cm^3 is $A = 60 + 2 \cdot 0,9^{\log(d)}$.

Laat zien dat je deze formule kunt schrijven als $A = 0,9^{\log(0,0018d^2)}$.

d Bereken hoeveel algen per cm^3 er zijn als er nog maar 1% van de hoeveelheid daglicht aanwezig is.



37 Differentieer.

a $f(x) = 2x + 7 \cdot e^{2x+1}$

c $Q(p) = 3 - 6 \cdot \ln(p + 1)$

b $k(t) = 5t^2 \cdot {}^5\log(3t)$

d $W(a) = \frac{3}{7 + 4 \cdot 2^a}$

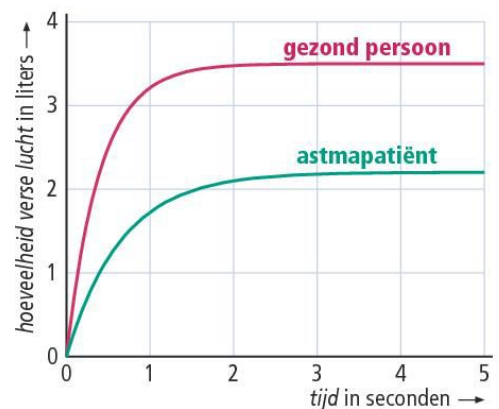
38 Tijdens het inademen neemt de hoeveelheid verse lucht in de longen toe. Voor gezonde mensen wordt bij één keer inademen het volgende model gebruikt: $L = 3,6 \cdot (1 - e^{-2,5t})$. Hierin is L de hoeveelheid verse lucht in liters na t seconden met $0 \leq t \leq 5$.

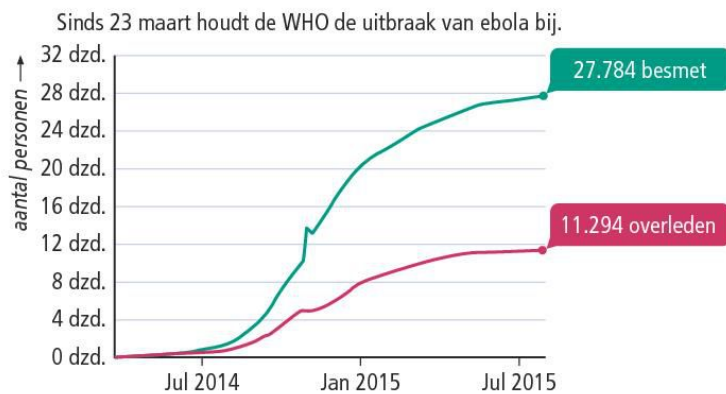
a De maximale hoeveelheid verse lucht in de longen van gezonde mensen is volgens dit model ongeveer 3,6 liter. Bereken na hoeveel seconden 90% van de maximale hoeveelheid verse lucht is ingeademd.

b Bereken met welke snelheid de hoeveelheid verse lucht toeneemt op tijdstip $t = 0$.

c Bij astmapatiënten is de maximale hoeveelheid verse lucht in de longen kleiner en duurt het langer voordat dit maximum wordt bereikt. Voor astmapatiënten wordt het volgende model gebruikt: $L = a \cdot 3,6(1 - e^{-2,5at})$. Hierbij is a een constante tussen 0 en 1 die afhangt van de zwaarte van de astma.

Bereken de waarde van a die hoort bij de grafiek van de astmapatiënt in de figuur.





- 39** In 2014 en 2015 was er een ebola-epidemie in West-Afrika. Deze epidemie heeft veel mensen het leven gekost. Gegeven is een grafiek die door de World Health Organisation is gemaakt. Bij de grafiek van het aantal besmettingen N past een formule van de vorm $N = \frac{a}{1 + c \cdot e^{-bt}}$ met $b > 0$. Hierbij is t het aantal dagen na 1 januari 2014.
- a** Leg uit dat $a = 28\,000$.
 - b** Op 1 januari 2014 waren er 5 besmettingen. Halverwege oktober van datzelfde jaar was het aantal besmettingen toegenomen tot 10 000. Onderzoek welke waarden b en c hebben. Rond b af op drie decimalen.

- 40** De lawaaioverlast die je van een snelweg ondervindt, is afhankelijk van de afstand die je tot de snelweg hebt en ook van de snelheid van het verkeer. De formule die het gemiddelde lawaainiveau van de snelweg benadert is $L = 89,5 - 9,9 \cdot \log(a \cdot v) + 0,16v - 0,03a$. Hierin is a de afstand tot de snelweg in meters en v de gemiddelde snelheid van het verkeer op de snelweg in kilometer per uur.
- a** Neem $v = 80$ kilometer per uur. Laat met behulp van de afgeleide zien dat de lawaaioverlast afneemt als de afstand tot de snelweg groter wordt.
 - b** Een huis staat 100 meter van de snelweg. Onderzoek bij welke gemiddelde snelheid van het verkeer het gemiddelde lawaainiveau bij deze woning minimaal is. (Ontleend aan CE vwo wiskunde A 1995, tijdvak I)



Samenvatting

Vaardigheid

Je kunt een exponentiële formule herleiden tot een logaritmische formule.

Om een exponentiële formule te herleiden tot een logaritmische formule gebruik je de regel:

Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $q = 0,2 \cdot 4^{p-3}$.
Druk p uit in q .

Oplossing

$$0,2 \cdot 4^{p-3} = q$$

$$4^{p-3} = 5q$$

$$p-3 = {}^4\log(5q)$$

$$p = {}^4\log(5q) + 3$$

links en rechts verwisseld

links en rechts $\times 5$

$g^t = a$ geeft $t = {}^g\log(a)$

links en rechts $+ 3$

S1 Druk r uit in s .

a $s = 10^r$

c $s = 5 - 4 \cdot 0,81^r$

b $s = 3 \cdot 1,2^r$

d $s = 9 + e^{-0,25r}$

Vaardigheid

Je kunt een logaritmische formule herleiden tot een exponentiële formule.

Om een logaritmische formule te herleiden tot een exponentiële formule gebruik je de regel:

Uit $t = {}^g\log(a)$ volgt $g^t = a$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $N = 1 + 5 \cdot {}^2\log(t)$.
Druk t uit in N .

Oplossing

$$1 + 5 \cdot {}^2\log(t) = N$$

$$5 \cdot {}^2\log(t) = N - 1$$

$${}^2\log(t) = \frac{N-1}{5}$$

$$t = 2^{\frac{N-1}{5}}$$

$$\text{ofwel } t = 2^{\frac{1}{5}N - \frac{1}{5}}$$

links en rechts verwisseld

links en rechts $- 1$

links en rechts $: 5$

$t = {}^g\log(a)$ geeft $g^t = a$

S2 Druk x uit in y .

a $y = {}^{0,65}\log(x)$

c $y = \log(21 + x)$

b $y = 7 + {}^8\log(0,1x)$

d $y = 2 + \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$

Vaardigheid**Je kunt exponentiële functies met grondtal e differentiëren.**

De afgeleide van $f(x) = e^x$ is $f'(x) = e^x$.

Het getal e heet het getal van Euler en is bij benadering gelijk aan 2,72.

Op je rekenmachine zit een aparte toets voor e .

Voorbeeld

Differentieer $f(t) = 3 \cdot e^{2t+1}$.

Oplossing

Met de kettingregel:

$$y = 3 \cdot e^u \text{ en } u = 2t + 1$$

$$\frac{dy}{du} = 3 \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dt} = 2$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 3 \cdot e^u \cdot 2 = 6 \cdot e^u$$

$$f'(t) = 6 \cdot e^{2t+1}$$

S3 Differentieer.

a $g(t) = 345 + 12 \cdot e^t$

b $A(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{4x-1}$

Vaardigheid**Je kunt exponentiële functies differentiëren.**

De afgeleide van $g(x) = a^x$ is $g'(x) = \ln(a) \cdot a^x$.

$\ln(a)$ (spreek uit: de natuurlijke logaritme van a) is een andere notatie voor $^e\log(a)$.

Op je rekenmachine zit een aparte toets voor $\ln$.

Voorbeeld

Differentieer $g(x) = 8 + 2 \cdot 0,95^x$.

Oplossing

$$g'(x) = 0 + 2 \cdot \ln(0,95) \cdot 0,95^x$$

$$\text{ofwel } g'(x) \approx -0,10 \cdot 0,95^x$$

S4 Differentieer.

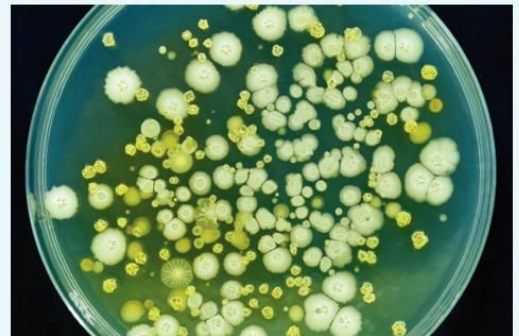
a $f(x) = 4 \cdot 1,6^x - 3$

b $B(t) = 10^{-t} + 10t$

S5 Bij een experiment kan het aantal bacteriën in een kweek worden berekend met de formule $N = 800 \cdot 3^t$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ het moment waarop het experiment begint.

a Bereken $\frac{dN}{dt}$

b Bereken met welke snelheid het aantal bacteriën toeneemt op tijdstip $t = 2$.



Vaardigheid

Je kunt logaritmische functies differentiëren.

De afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$

De afgeleide van $f(x) = {}^g\log(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{\ln(g) \cdot x}$

Voorbeeld 1

Bereken de afgeleide van $P = {}^3\log(5q - 1)$.

Oplossing

Met de kettingregel:

$$P = {}^3\log(u) \text{ en } u = 5q - 1$$

$$\frac{dP}{du} = \frac{1}{\ln(3) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{dq} = 5$$

$$\frac{dP}{dq} = \frac{dP}{du} \cdot \frac{du}{dq} = \frac{1}{\ln(3) \cdot u} \cdot 5 = \frac{5}{\ln(3) \cdot u}$$

$$\frac{dP}{dq} = \frac{5}{\ln(3) \cdot (5q - 1)} \text{ ofwel } \frac{dP}{dq} \approx \frac{5}{1,10 \cdot (5q - 1)}$$

Voorbeeld 2

Differentieer $s(t) = t^2 \cdot \ln(t)$.

Oplossing

De functie s is het product van $g(t) = t^2$ en $h(t) = \ln(t)$.

$$g'(t) = 2t \text{ en } h'(t) = \frac{1}{t}$$

Met de productregel:

$$s'(t) = g'(t) \cdot h(t) + g(t) \cdot h'(t)$$

$$s'(t) = 2t \cdot \ln(t) + t^2 \cdot \frac{1}{t}$$

$$\text{ofwel } s'(t) = 2t \cdot \ln(t) + t$$

S6 Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 2 + 7 \cdot \ln(x)$

c $W(n) = -\frac{1}{2} \cdot \log(1 - 2n)$

b $h(t) = 5t \cdot {}^{0,65}\log(t)$

d $T(q) = \frac{q}{\ln(q)}$

Vaardigheid

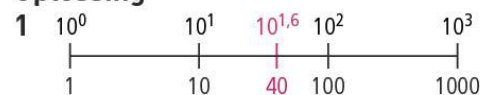
Je kunt een getal op een log-schaal aangeven.

- 1 Schrijf de getallen op de log-schaal als machten van 10.
- 2 Schrijf het getal a als macht van 10 door de vergelijking $10^t = a$ op te lossen.
- 3 Geef het getal 10^t aan op de log-schaal.

Voorbeeld

Geef het getal 40 aan op een log-schaal.

Oplossing



2 $10^t = 40$ geeft $t = \log(40) \approx 1,6$.

3 $10^{1,6}$ ligt tussen 10^1 en 10^2 .

S7 Geef op de log-schaal de getallen 5 en 2000 aan.

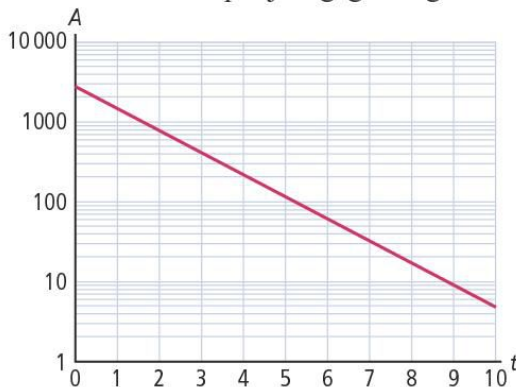


Vaardigheid**Je kunt een logaritmische schaalverdeling gebruiken.**

In een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling is de grafiek bij een exponentieel verband een rechte lijn.

Voorbeeld

Stel een formule op bij de gegeven grafiek.

**Oplossing**

De grafiek is een rechte lijn en op de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.

De grafiek hoort dus bij een exponentieel verband.

Een formule is van de vorm $A = b \cdot g^t$.

De grafiek gaat door de punten (0, 3000) en (10, 5).

De beginwaarde is $b = 3000$.

De groeifactor is $g = \left(\frac{5}{3000}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 0,527$.

Een formule is $A = 3000 \cdot 0,527^t$.

S8 In de grafiek zie je hoe het aantal herten in een natuurgebied in de periode 2015-2020 is toegenomen.

- Hoe kun je zien dat op de verticale as een logaritmische schaalverdeling is gebruikt?
- Bij de grafiek past een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$, waarbij t de tijd in jaren is met $t = 0$ op 1 januari 2015. Leg uit dat $b = 40$.
- Bereken de waarde van g in drie decimalen nauwkeurig.
- Bereken het aantal herten in het natuurgebied op 1 januari 2025 als het aantal herten na 1 januari 2020 op dezelfde manier blijft toenemen.
- Het aantal hazen in het natuurgebied kan berekend worden met de formule $N = 800 \cdot 0,91^t$ met t de tijd in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2015. Teken in het assenstelsel de grafiek die bij het aantal hazen hoort.



T1 Druk t uit in A .

a $A = 6 - 2 \cdot 0,75^t$ **c** $A = 5 \cdot 4^{\log(t)} + 1$

b $A = e^{0,5-3t}$ **d** $\frac{1}{2}A = \ln(t-1) - 8$

T2 Een tank van 200 liter is gevuld met een chemische vloeistof. Deze vloeistof wordt verwijderd door te spoelen met water. Voor het aantal liter chemische vloeistof in de tank V na t minuten spoelen geldt $V = 200 \cdot 0,30^t$.

- a** Met hoeveel procent neemt het aantal liter chemische vloeistof in de tank per minuut af?
- b** Druk t uit in V .
- c** Bereken na hoeveel seconden de helft van de hoeveelheid chemische vloeistof is verwijderd.
- d** Bereken $\frac{dV}{dt}$
- e** Met welke snelheid neemt de aanwezige hoeveelheid chemische vloeistof af na precies één minuut?
- f** Bereken wanneer de afnamesnelheid van de hoeveelheid chemische vloeistof één liter per minuut is. Geef je antwoord in seconden nauwkeurig.



T3 Differentieer.

a $f(x) = 10 - 8 \cdot 0,91^x$ **d** $r(s) = 4 \cdot 2^{\log(\frac{1}{4}s)}$

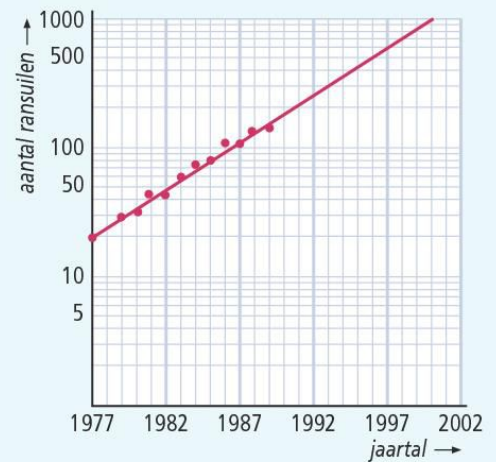
b $g(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{5x-1}$ **e** $U(z) = z^3 \cdot 0,8^{\log(z)}$

c $h(t) = \frac{300}{1 + 12 \cdot e^{-0,28t}}$ **f** $B(x) = \frac{\ln(x)}{x+2}$

T4 Bij de fabricage van een product is de gemiddelde opbrengst per product $GO = 17,5 \cdot \log(2q+1)$ en zijn de gemiddelde kosten per product $GK = 2\sqrt{q}$. In deze formules is q het aantal producten dat in een bepaalde tijd wordt geproduceerd en zijn GO en GK in euro's.

- a** Stel een formule op voor de gemiddelde winst GW .
- b** Bereken met behulp van differentiëren bij welk aantal producten de gemiddelde winst maximaal is.
- c** Hoe groot is de maximale gemiddelde winst?

- T5** Aan het begin van 1977 is in een dorpje in Limburg een kleine groep ransuilen aangetroffen. In de jaren daarna is de groep nauwgezet gevolgd. Uit tellingen bleek dat de populatie in omvang toenam. De tellingen zijn uitgezet in een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling. Door de meetpunten is een zo goed mogelijk passende rechte lijn getekend.
- Stel een formule op waarmee je het aantal ransuilen R kunt berekenen t jaar na het begin van 1977.
 - Hoeveel ransuilen waren er volgens de formule aan het begin van 1990?
 - Aan het begin van de jaren 90 vlakke de groei van het aantal ransuilen iets af, omdat de door de uilen gebruikte broedplaatsen slechts in beperkte mate aanwezig waren. Een model voor het aantal ransuilen vanaf 1990 is $R = 225 - 43 \cdot 0,6^t$. Hierin is R het aantal ransuilen en t het aantal jaren na het begin van 1990. Met hoeveel procent nam het aantal ransuilen volgens het model toe tussen het begin van 1990 en het begin van 1995?
 - Bereken met welke snelheid het aantal ransuilen toenam aan het begin van 1995.
 - Volgens het model bereikt het aantal ransuilen op den duur een grenswaarde. Beredeneer hoe groot deze grenswaarde is.



- T6** In 2019 hebben wetenschappers van de Universiteit van Californië onderzocht hoe je de leeftijd van een hond naar mensenjaren kunt omrekenen. Dit onderzoek heeft de formule $M = 16 \cdot \ln(H) + 31$ opgeleverd. Hierin is M de leeftijd van de hond in mensenjaren en H de echte leeftijd van de hond in jaren.
- Hoe oud is een hond van 10 jaar in mensenjaren volgens de formule?
 - De grafiek van M is afnemend stijgend. Toon dit aan met behulp van de afgeleide van M .
 - Wat betekent het in de praktijk dat de grafiek afnemend stijgend is?
 - Je kunt de formule herleiden tot de vorm $H = a \cdot e^{b \cdot M}$. Bereken de waarden van a en b . Rond zo nodig af op vier decimalen.
 - Bereken de echte leeftijd van een hond als deze 75 mensenjaren oud is. Geef je antwoord in maanden nauwkeurig.



Je kunt een exponentiële formule herleiden tot een logaritmische formule.

E1 Druk x uit in y .

a $y = 8^{x-3}$

c $y = 3 + \frac{1}{2} \cdot 10^x$

b $y = 12 - 4 \cdot 0,72^x$

d $y = 50 \cdot e^{-0,001x}$

Je kunt een logaritmische formule herleiden tot een exponentiële formule.

E2 Druk r uit in s .

a $s = \log(r)$

c $^{0,8}\log(r-s) = 1$

b $s = \frac{2}{3} \cdot {}^7\log(r) - 3$

d $s = 2 \cdot \ln(0,5r - 3)$

Je kunt exponentiële functies met grondtal e differentiëren.

E3 Differentieer.

a $f(x) = 5 + e^x$

c $h(x) = e^{3x+8}$

b $g(x) = \frac{e^x - x}{2}$

d $k(x) = 4x \cdot e^{1-x}$

Je kunt exponentiële functies differentiëren.

E4 Differentieer.

a $f(x) = 7 \cdot 0,8^x$

c $h(x) = 10^{4x+9}$

b $g(x) = 21 - 5 \cdot 0,91^x$

d $k(x) = \frac{3^x}{x^3}$

Je kunt logaritmische functies differentiëren.

E5 Differentieer.

a $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x - 5\right)$

c $h(x) = 6x^2 \cdot {}^5\log(x)$

b $g(x) = \ln(3x) - \ln(2x)$

d $k(x) = \log(x^2 + x + 1)$

Je kunt een getal op een log-schaal aangeven.

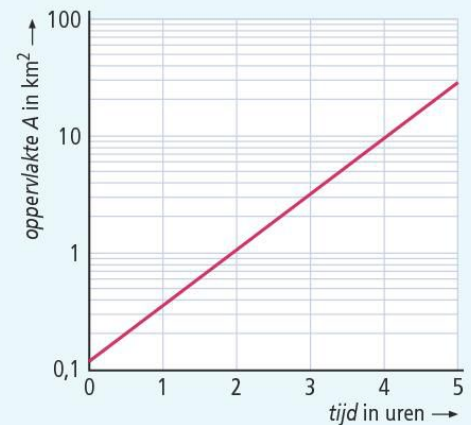
E6 Geef op de log-schaal de getallen 0,5; 20 en 800 aan.



Je kunt een logaritmische schaalverdeling gebruiken.

E7 Bij een aanvaring is een olietanker een groot deel van de lading verloren. Om 10 uur 's morgens ($t = 0$) had de uitgestroomde olie een oppervlakte van $0,12 \text{ km}^2$. In de grafiek zie je hoe de oppervlakte in de uren daarna toenam.

- Bij de grafiek past een formule van de vorm $A = 0,12 \cdot g^t$. Hierbij is A de oppervlakte van de uitgestroomde olie in km^2 en t de tijd in uren.
Bereken de waarde van g . Rond af op één decimaal.
- Bereken op welk tijdstip de oppervlakte 100 km^2 was.
- Met welke snelheid nam de oppervlakte op dat moment toe?



E8 Bij een praktische opdracht doen leerlingen een proef met fruitvliegjes. Het aantal fruitvliegjes neemt in de eerste weken exponentieel toe. Na twee weken zijn er 140 fruitvliegjes en na vijf weken 1065 fruitvliegjes.

- Bij deze gegevens kun je een exponentiële formule opstellen voor het aantal fruitvliegjes F na t weken. Stel deze formule op.
- In een kweekruimte kan het aantal fruitvliegjes niet onbeperkt toenemen. Een ander experiment wordt in een kleinere kweekruimte uitgevoerd. Bij dit experiment geldt

$$\text{bij benadering: } F = \frac{340}{1 + 54 \cdot e^{-0,24t}}$$

Hierin is F het aantal fruitvliegjes en t het aantal dagen na de start van het experiment.

Leg uit welke aantallen fruitvliegjes volgens de formule in de kweekruimte mogelijk zijn.

- Laat zien dat $\frac{dF}{dt} = \frac{4406,4 \cdot e^{-0,24t}}{(1 + 54 \cdot e^{-0,24t})^2}$
- Op de dag dat het aantal fruitvliegjes het snelst toeneemt, wil Gijs ze verdoven om ze te kunnen tellen. Bereken met behulp van de afgeleide hoeveel dagen na de start van het experiment dat het geval is.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2012, tijdvak 2)



Afsluiting formules en verbanden 22

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de afgelopen jaren heb je kennis gemaakt met verschillende soorten functies en formules.

Je hebt geleerd hoe je een functie kunt differentiëren. Met de afgeleide kun je bijvoorbeeld berekenen met welke snelheid iets toeneemt en hoe groeiprocessen verlopen.

In dit hoofdstuk komen de verschillende vaardigheden die je geleerd hebt samen.

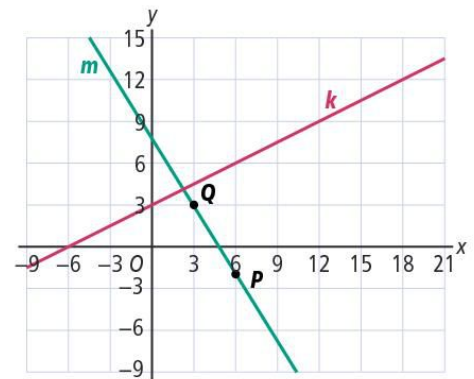
Je zult in dit hoofdstuk geen leerroutes vinden, dus ook geen ondersteunende of uitdagende opdrachten. In plaats daarvan bevat elke paragraaf een bladzijde met opdrachten op examenniveau.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- | | |
|--|-------------|
| • Modelleren en algebraïseren | opdracht 19 |
| • Probleem oplossen en analytisch denken | opdracht 20 |
| • Logisch redeneren en bewijzen | opdracht 25 |

V1 Gegeven is een lijn k met formule $y = \frac{1}{2}x + 3$.

- Hoe zie je de getallen $\frac{1}{2}$ en 3 terug in de grafiek?
- Verder is gegeven een lijn m die door de punten $P(6, -2)$ en $Q(3, 3)$ gaat. De formule die bij lijn m hoort is ook van de vorm $y = a \cdot x + b$.
Laat met een berekening zien dat $a = -\frac{5}{3}$.
- Gebruik de coördinaten van P of Q om aan te tonen dat $b = 8$.



Aanpak

Hoe stel je een formule op voor een lijn door twee gegeven punten?

- Bereken de richtingscoëfficiënt:

$$\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{\text{toename tweede coördinaat}}{\text{toename eerste coördinaat}}$$
- Vul in de algemene formule de richtingscoëfficiënt in.
- Vul in die formule de coördinaten van een van de gegeven punten in en bereken het startgetal.
- Schrijf de formule van de lijn op.

Voorbeeld

Stel een formule op voor de lijn door de punten $A(12, 4)$ en $B(3, 2)$.

Oplossing

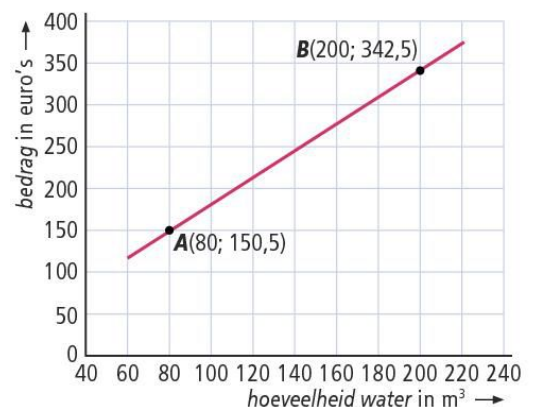
- De richtingscoëfficiënt is $\frac{4 - 2}{12 - 3} = \frac{2}{9}$
- $y = \frac{2}{9}x + b$
- De coördinaten van A invullen geeft:
 $4 = \frac{2}{9} \cdot 12 + b$
 $4 = 2\frac{2}{3} + b$, dus $b = 1\frac{1}{3}$.
- Een formule is $y = \frac{2}{9}x + 1\frac{1}{3}$.

V2 Stel voor elke lijn een formule op.

- Lijn p gaat door $A(8, 1)$ en $B(-2, 6)$.
- Lijn q gaat door $C(-28, 10)$ en $D(20, 46)$.
- Lijn r gaat door $E(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4})$ en $F(\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2})$.

V3 In de grafiek zie je het verband tussen de hoeveelheid water in m^3 die een huishouden verbruikt en de jaarlijkse kosten hiervan in euro's.

- Waarom is hier sprake van een lineair verband?
- Stel een formule op voor het verband tussen het waterverbruik w in m^3 en het te betalen bedrag b in euro's.
- Bij een ander waterbedrijf betaalt gezin Alders voor 129 m^3 een bedrag van €192,25, terwijl gezin Boelens bij dit bedrijf €211,85 betaalt voor 143 m^3 . Ook bij dit bedrijf is het verband tussen het bedrag en de hoeveelheid water lineair.
Stel een formule op waarmee je bij dit waterbedrijf de kosten van het jaarverbruik kunt berekenen.



Theorie

Om erachter te komen of een formule bij een lineair verband hoort, kijk je of je de formule kunt herleiden tot de vorm $y = a \cdot x + b$.

Voorbeeld

Herleid de formule $y = 3(2 - \frac{1}{2}x) + \frac{2x+3}{4}$ tot de vorm $y = a \cdot x + b$.

Oplossing

$$\begin{aligned} y &= 6 - 1\frac{1}{2}x + \frac{2x}{4} + \frac{3}{4} && \text{haakjes weggewerkt en breuk gesplitst} \\ y &= 6 - 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} && \text{vereenvoudigd} \\ y &= -x + 6\frac{3}{4} && \text{gelijksoortige termen samengenomen} \end{aligned}$$

V4 Herleid de formules tot de vorm $y = a \cdot x + b$.

$$\begin{aligned} \text{a } y &= 5(3x - 1) - 3(x + 2) && \text{c } y = x^2 - (x + 3)(x + 7) \\ \text{b } y &= \frac{5x - 7}{30} - \frac{x}{3} - 3x && \text{d } y = (x - 8)(2x - 3) - \frac{6x^2 + 4}{3} \end{aligned}$$

Theorie

Bij het herleiden van machtsformules en exponentiële formules gebruik je vaak de rekenregels voor machten.

$$\begin{aligned} g^a \cdot g^b &= g^{a+b} && (g^a)^b = g^{a \cdot b} \\ \frac{g^a}{g^b} &= g^{a-b} && g^{-a} = \frac{1}{g^a} \\ g^0 &= 1 && g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g} \end{aligned}$$

Voorbeeld

Herleid de formule $y = \frac{5x^{4,2}}{4(x^{1,3})^2}$ tot de vorm $y = c \cdot x^n$.

Oplossing

$$y = \frac{5x^{4,2}}{4(x^{1,3})^2} = \frac{5x^{4,2}}{4x^{2,6}} = 1,25x^{1,6}$$

V5 Gebruik de rekenregels voor machten om de formules te herleiden tot de vorm $y = c \cdot x^n$.

$$\begin{aligned} \text{a } y &= 5x^3 \cdot -2x^{1,3} && \text{c } y = 6\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} \\ \text{b } y &= \frac{4,8x^{3,7}}{3x^{-1,4}} && \text{d } y = x^{1,5} \cdot (2x^{4,2} \cdot x^{-1,8})^2 \end{aligned}$$

V6 Gebruik de rekenregels voor machten om de formules te herleiden tot de vorm $y = b \cdot g^x$.

$$\begin{aligned} \text{a } y &= 7 \cdot 5^{x+1} && \text{c } y = 7 \cdot 2^{-2} \cdot 8^x \cdot 32^{0,2} \\ \text{b } y &= \frac{5 \cdot 2^x}{8 \cdot 0,5^x} && \text{d } y = 6 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3} \cdot 9^x \end{aligned}$$

Rekenregels:

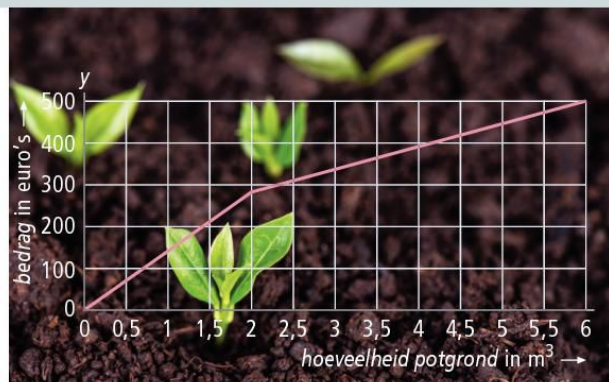
$$(p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^a = \frac{p^a}{q^a}$$

- Je herhaalt**
- wat een lineair verband is
 - hoe je lineair interpoleert en lineair extrapoleert

Een tuincentrum bestelt nieuwe potgrond. In de grafiek kun je zien wat het verband is tussen het aantal m^3 potgrond en het te betalen bedrag in euro's.

- Welke conclusies kun je trekken uit deze grafiek?



x	1	2	3	5	8
y	2	5	8	11	14

A

x	4	5	6	7	10
y	9,5	11	12,5	14	18,5

B

x	1	3	4	6	18
y	36	12	9	6	2

C

- 1 Geef bij elke tabel aan of er sprake kan zijn van een lineair verband tussen de variabelen x en y . Leg uit waarom wel of waarom niet.

Theorie

Bij een **lineair verband** tussen twee variabelen is sprake van een constante toename of constante afname. Een lineair verband kun je op verschillende manieren herkennen.

- De grafiek is een rechte lijn.
- In een tabel is er bij gelijke stappen altijd dezelfde toename.
- Uit de tekst kun je opmaken dat de toename bij gelijke stappen altijd dezelfde is.

Bestaat tussen de variabelen x en y een lineair verband, dan kun je de bijbehorende formule schrijven in de vorm $y = a \cdot x + b$.

Je zegt ook wel dat dit de **vergelijking** is van de bijbehorende rechte lijn.

Hierbij is a de richtingscoëfficiënt en is b het startgetal.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $6p + 4q = 17$.
Leg uit waarom het verband tussen p en q lineair is.

Oplossing

Schrijf de gegeven formule in de vorm $q = a \cdot p + b$.

$$4q = -6p + 17 \quad \text{links en rechts } -6p$$

$$q = -1,5p + 4,25 \quad \text{links en rechts : 4}$$

Dus is het verband lineair.

Als p met 1 toeneemt, neemt q met 1,5 af.

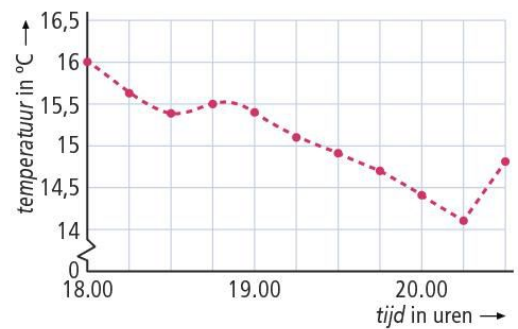
- 2 Herleid de formules tot de vorm $q = a \cdot p + b$.

a $0,1q - p = 13$

b $p = 1\frac{1}{2}q - 16$

c $18 - 3p + 24q = 0$

- 3 Het verband tussen x en y is gegeven door de vergelijking $2x + 8 = 5y - x + 7$.
- Toon aan dat er een lineair verband is tussen x en y .
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij de vergelijkingen $2x + 8 = 5y - x + 7$ en $y = -\frac{1}{2}x + 14\frac{1}{2}$.
 - Toon aan dat de grafieken bij de vergelijkingen $2x + 8 = 5y - x + 7$ en $10y - 6x = 1$ geen snijpunt hebben.
- 4 Elk kwartier is de temperatuur in een schuur gemeten. Het resultaat is verwerkt in een grafiek. Je gaat met de grafiek de temperatuur in de schuur om 19.55 uur schatten.
- Geef de temperatuur om 19.45 uur en om 20.00 uur.
 - Neem aan dat de temperatuur tussen 19.45 en 20.00 uur lineair afnam. Bereken de afname van de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ per minuut.
 - Schat met je antwoord op opdracht c de temperatuur in de schuur om 19.55 uur.
 - Waarom kun je de temperatuur om 18.00 uur en 18.45 uur niet gebruiken om de temperatuur om 18.35 te schatten?



Theorie

Het vinden van een tussenliggende waarde in een grafiek of in een tabel heet **interpoleren**. Het vinden van een verder gelegen waarde in een tabel of in een grafiek heet **extrapoleren**. Je bepaalt de tussenliggende of verder gelegen waarde door het verloop van de grafiek of de tabel zo goed mogelijk te volgen. Als een grafiek bij een tabel op een bepaald gedeelte vrijwel een rechte lijn is, dan kun je een tussenliggende waarde schatten met **lineair interpoleren** en een verder gelegen waarde met **lineair extrapoleren**.

Voorbeeld

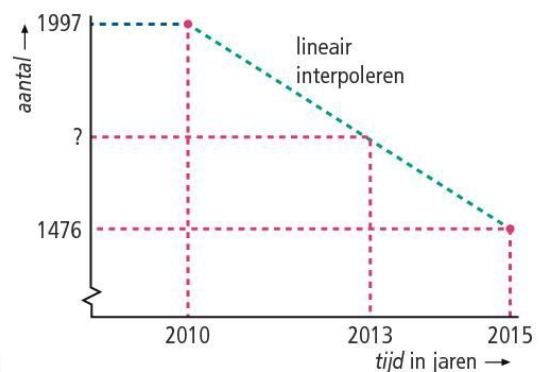
In de grafiek kun je de aantallen aflezen bij de jaren 2010 en 2015. Bereken met lineair interpoleren het aantal in 2013. Bereken met lineair extrapoleren het aantal in 2025.

Oplossing

De afname per jaar is gelijk aan $\frac{1997 - 1476}{5} = 104,2$.

In 2013 is het aantal dus $1997 - 3 \times 104,2 \approx 1684$.

In 2025 zal dit aantal gelijk zijn aan $1476 - 10 \times 104,2 = 434$.



22.1 Lineaire verbanden

- 5 Het aantal eenoudergezinnen is de laatste jaren gestaag toegenomen. In het jaar 2000 waren er ongeveer 385 000 eenoudergezinnen, in het jaar 2020 was dat aantal opgelopen tot circa 590 000.

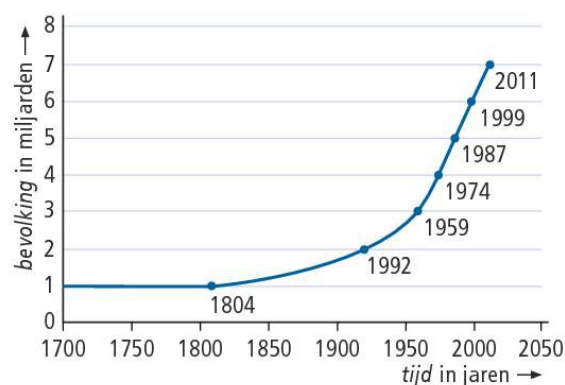
- Bereken met lineair interpoleren het aantal eenoudergezinnen in 2015.
- Bereken met lineair extrapoleren het aantal eenoudergezinnen in 2030.

- 6 Volgens het rapport *Smakelijk weten* van het CBS is het gemiddelde gewicht van een volwassen Nederlandse vrouw in de periode 1981-2011 gestegen van 65 naar 70 kilo. Als je aanneemt dat deze toename gelijkmatig is geweest, dan is er sprake van een lineair verband tussen de variabelen t en G met t de tijd in jaren na 1981 en G het gemiddelde gewicht in kg.

- Stel een formule op voor het verband tussen G en t .
- Bereken in welk jaar het gemiddelde gewicht volgens de formule 66,5 kg was.

- 7 In de grafiek zie je hoe de omvang van de wereldbevolking gegroeid is vanaf 1700.

- Tussen welke jaren was er sprake van een lineaire groei van de wereldbevolking?
- In welk jaar waren er voor het eerst meer dan 5,5 miljard mensen?
- Hoeveel mensen waren er in 1980?
- Stel dat de wereldbevolking op dezelfde manier blijft doorgroeien als tussen 1974 en 2011. Hoeveel mensen zullen er dan zijn in 2030?
- In 2020 waren er ongeveer 7,8 miljard mensen. Is de bevolking in de periode na 2011 sneller of minder snel gegroeid dan in de periode voor 2011?



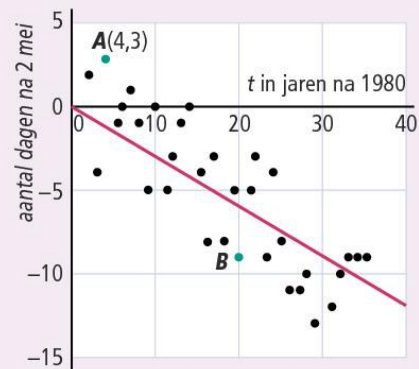
- 8 Waarom kun je bij opdracht 7 met de gegevens van 1804 en 1959 niet de omvang van de wereldbevolking in 1900 schatten met behulp van lineair interpoleren?
- 9 De Vinexwijk Amersfoort-Vathorst heeft op 1 januari 2016 ongeveer 23 duizend bewoners. Met lineair extrapoleren komt de prognose voor het aantal bewoners op 1 januari 2025 op ongeveer 30 duizend. Bereken hoeveel inwoners er waren op 1 januari 2010.

Opdrachten op examenniveau

X1 De gierzwaluw

Een gierzwaluw is een trekvogel. Dat betekent dat deze vogel op een andere plaats overwintert en na de winter terugkeert naar zijn broedgebied. Onderzoekers hebben sinds 1980 in Portland (UK) bijgehouden wat de terugkeerdatum van de gierzwaluw elk jaar was. In 1980 kwam de eerste gierzwaluw op 2 mei terug.

In de grafiek zijn deze gegevens uitgezet. Het punt $(0, 0)$ komt overeen met 2 mei 1980. Het punt $A(4, 3)$ betekent dat de gierzwaluw in 1984 drie dagen later terugkeerde dan in 1980, dus op 5 mei.



- Geef de coördinaten van punt B en de betekenis van deze coördinaten.
- Wat was de vroegste datum waarop een gierzwaluw terug kwam? In welk jaar was dat?
- De rode lijn is een lijn die zo goed mogelijk past bij de gegevens.
Stel een vergelijking op van deze lijn. Gebruik de variabelen t en n .
- Als de terugkomdata zich op dezelfde manier blijven voortzetten, kun je met behulp van de rode lijn een voorspelling doen op welke datum de gierzwaluw in 2030 zal terugkeren.
Bereken die terugkeerdatum.

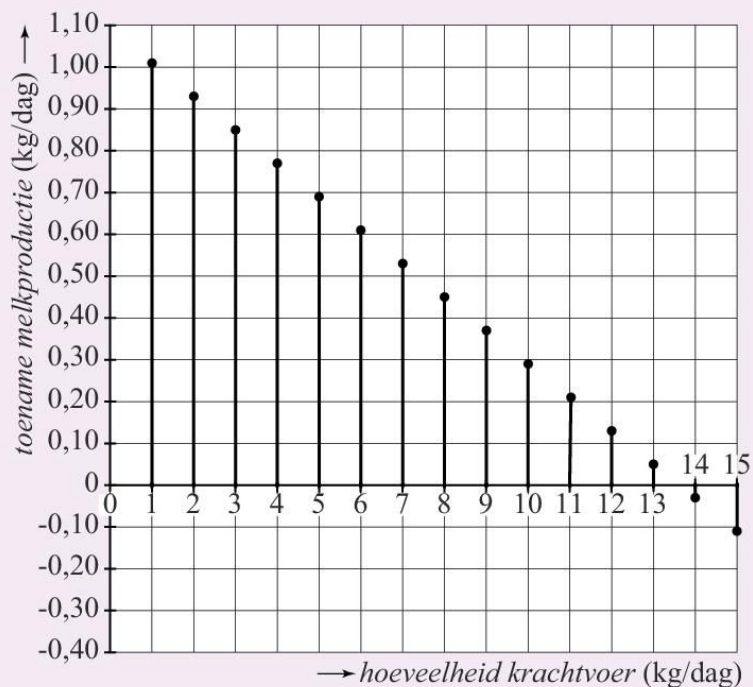
(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2012, tijdvak 1)

X2 Krachtvoer voor melkkoeien

In het toenamediagram kun je zien hoe de toename van de melkproductie van een koe afhangt van de toegediende hoeveelheid krachtvoer.

- Bij welke hoeveelheid krachtvoer is de melkproductie maximaal?
- Bereken met behulp van lineair extrapoleren met hoeveel de melkproductie afneemt ten opzichte van de maximale melkproductie als de hoeveelheid krachtvoer 18 kg per dag is.

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2014, tijdvak 1)



22.2 Evenredig en omgekeerd evenredig

Je herhaalt • wat evenredige en omgekeerd evenredige verbanden zijn

De oppervlakte van de kippenschuur van boer Boris is 250 m^2 . De kippen krijgen 120 gram voer per kip per dag. Er is een verband tussen het aantal kippen en de oppervlakte per kip. Er is ook een verband tussen het aantal kippen en de totale hoeveelheid voer per dag.

- Omschrijf het verschil tussen deze twee verbanden.



- 10** Sander heeft een foto met een breedte van 9 cm en een hoogte van 13 cm . Hij maakt een vergroting met een breedte van 45 cm .
- Hoeveel cm is de hoogte van de vergroting?
 - Als je de breedte acht keer zo groot maakt, hoeveel keer zo groot wordt dan de hoogte?
 - Tussen de breedte b en de hoogte h bestaat een verband dat je kunt beschrijven met een formule van de vorm $h = \dots \cdot b$. Welk getal moet op de puntjes staan?
 - Teken een grafiek bij deze formule.

- 11** De tabel hoort bij rechthoeken met een oppervlakte van 24 cm^2 .

<i>lengte</i> in cm	0,1	0,5	1	...	96
<i>breedte</i> in cm	...	...	24	4	...

- Vul de tabel verder in.
- Wat gebeurt er met de lengte als je de breedte zes keer zo groot maakt?
- Tussen de breedte b en de lengte l bestaat een verband met een formule van de vorm $b \cdot l = \dots$ ofwel $b = \frac{\dots}{l}$. Welk getal moet op de puntjes staan?

Theorie

Twee variabelen heten **recht evenredig** als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

Zijn de variabelen x en y , dan heet y recht evenredig, of

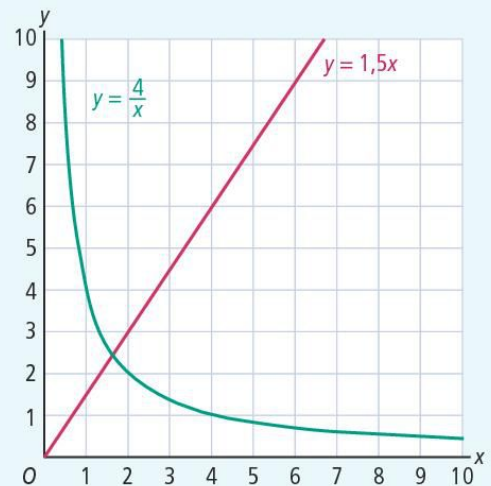
kortweg, **evenredig** met x . Er geldt $\frac{y}{x} = c$, maar ook $y = c \cdot x$.

Je herkent een evenredig verband in een tabel, als van de twee getallen in elke kolom de verhouding hetzelfde is. De grafiek bij een evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong.

Twee variabelen heten **omgekeerd evenredig** als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele k keer zo klein. Zijn de variabelen x en y , dan geldt

$$x \cdot y = c \text{ ofwel } y = \frac{c}{x} \text{ ofwel } x = \frac{c}{y}$$

Je herkent een omgekeerd evenredig verband in een tabel als het product van de variabelen in elke kolom hetzelfde is.

**Voorbeeld 1**

k	1,4	2,2	4,8	6,4
M	2,1	3,3	7,2	9,6

Toon aan dat M en k recht evenredig zijn.

Oplossing

$2,1 : 1,4 = 1,5$; $3,3 : 2,2 = 1,5$; $7,2 : 4,8 = 1,5$ en $9,6 : 6,4 = 1,5$

M en k zijn recht evenredig want er geldt steeds

$$\frac{M}{k} = 1,5 \text{ ofwel } M = 1,5 \cdot k.$$

Voorbeeld 2

W	$\frac{1}{2}$	2	4	10
t	8	2	1	0,4

Toon aan dat W en t omgekeerd evenredig zijn.

Oplossing

$$\frac{1}{2} \times 8 = 4; 2 \times 2 = 4; 4 \times 1 = 4 \text{ en } 10 \times 0,4 = 4$$

W en t zijn omgekeerd evenredig want er geldt steeds

$$W \cdot t = 4 \text{ ofwel } t = \frac{4}{W}$$

- 12 a** Geef bij elke tabel aan of er sprake is van een evenredig verband, een omgekeerd evenredig verband of geen van beide.

p	2	7	12	18
q	11	38,5	66	99

A

u	3	7	8	13
w	1	-11	-14	-29

B

x	5	8	12	24
y	13,2	8,25	5,5	2,75

C

- b** Stel bij elke tabel een formule op.

22.2 Evenredig en omgekeerd evenredig

- 13** Als een wandelaar met een constante snelheid loopt, dan is de staplengte steeds even groot. Uit onderzoek is gebleken dat tussen staplengte en stapfrequentie, het aantal stappen per tijdseenheid, een evenredigheid verband bestaat.

Voor mannen geldt bij benadering $\frac{n}{S} = 140$, waarbij n het aantal stappen per minuut is en S de staplengte in meters.

- Simon wandelt 150 meter in 100 seconden in 187 stappen. Laat met berekeningen zien dat de formule in dit geval klopt.
- Sietse heeft een staplengte van 85 cm. Bereken zijn snelheid in km per uur.
- Laat zien dat voor de snelheid v van een mannelijke wandelaar de volgende formule geldt: $v = 8,4 \cdot S^2$ waarbij v in km per uur is.

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 1995, tijdvak 2)

Bij de formule $v = 8,4 \cdot S^2$ zeg je ook wel dat v evenredig is met het kwadraat van S . Ook kun je bij de formule $A = \frac{6,13}{p^3}$ zeggen dat A omgekeerd evenredig is met p^3 .

- 14** Bij een bepaalde boomsoort is de diameter d van de stam bij benadering omgekeerd evenredig met een macht van de hoogte h . De formule die hierbij hoort is $d = \frac{270}{h^{1,54}}$

Hierbij zijn d en h beide in meters.

- Bereken de hoogte als de diameter 90 cm is.
- Bereken zonder getallenvoorbeeld te gebruiken hoeveel keer zo groot d wordt als h twee keer zo groot wordt.

- 15** Bij een bepaald type windmolen is het geleverde vermogen P in kW evenredig met de derde macht van de windsnelheid v in m/s en eveneens evenredig met het kwadraat van de wieklengte L in m.

Het verband tussen P , v en L wordt gegeven door de formule $P = 0,000197 \cdot v^3 \cdot L^2$.

Een windmolen van dit type levert een vermogen van 1400 kW. De benodigde windsnelheid is dan evenredig met een macht van L .

Druk v uit in L en geef de exponent van de macht van L .



Opdrachten op examenniveau

X3 Vriespunt

Door zout toe te voegen aan water befrist het water bij een lagere temperatuur dan bij 0 °C. Door zout te strooien, smelten sneeuw en ijs bij een temperatuur lager dan 0 °C.

De vriespundaling V is het aantal graden dat het vriespunt van water lager wordt dan 0 °C. Deze waarde van V kan worden

berekend met de formule $V = 3,72 \cdot \frac{D}{58,5 \cdot H}$

Hierin is D de dosering van het zout in grammen per m² en is H de hoeveelheid neerslag (water, sneeuw, hagel) in kg per m² die gevallen is.

- Bij 0,2 kg sneeuw per m² wordt zout gestrooid in een dosering van 15 gram/m².
Laat met behulp van de formule zien dat het vriespunt dan daalt tot beneden -2 °C.
- Bij elke waarde van H is V evenredig met D .
Toon dit aan.
- Men wil een vriespundaling van 4 graden Celsius bereiken.
Bereken hoeveel procent van de hoeveelheid neerslag de dosering moet zijn.

X4 Body Mass Index

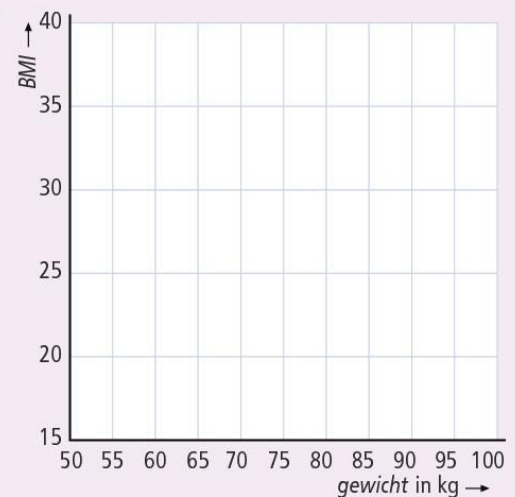
Een veel gebruikte methode voor het bepalen van je eventuele onder- of overgewicht maakt gebruik van de Body Mass Index (BMI). Dit is een maat die afhangt van je gewicht en je lengte.

Het berekenen van je BMI kan met de formule $BMI = \frac{g}{l^2}$

Hierin is g het gewicht in kg en l de lengte in meters.

- Marian is 163 cm lang en heeft een gezond gewicht.
Tussen welke twee waarden ligt het gewicht van Marian?
- Bij een gegeven lengte kun je de formule voor BMI schrijven als $BMI = c \cdot g$.
Bereken c bij $l = 1,7$; bij $l = 1,8$ en bij $l = 1,9$.
- Teken de grafieken bij de formules van opdracht c in één assenstelsel.
- Geef in de figuur van opdracht c bij deze lengten het gezonde gewicht aan.

	BMI
ondergewicht	≤ 20
gezond gewicht	$\langle 20, 25]$
te hoog gewicht	$\langle 25, 30]$
overgewicht	> 30



22.3 Formules opstellen

Je herhaalt • hoe je een formule opstelt bij meerdere meetresultaten

Als brood gaar is, wordt het uit de oven gehaald. De temperatuur van het brood is op dat moment 95°C . Daarna neemt de temperatuur af tot 20°C . De temperatuur van het brood kun je berekenen met de formule $T = a + b \cdot 0,9^t$. In deze formule is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en t de tijd in minuten nadat het brood uit de oven is gehaald.

- Welke waarden hebben a en b in deze formule?



- 16** Een bioloog heeft bij een aantal dieren het skeletgewicht S en het lichaamsgewicht M bepaald, beide in kg. De resultaten staan in de tabel. Hij vraagt zich af of er een verband bestaat tussen S en M en zo ja, of je dit met een formule kunt benaderen.

S	1,0	2,2	2,9	3,6	5,4
M	12,1	24,2	30,8	37,2	53,1

- Leg met behulp van de tabel uit dat tussen S en M geen lineair verband bestaat.
- Laat met berekeningen zien dat er ook geen exponentieel verband bestaat tussen S en M .
- Tussen S en M bestaat een machtsverband dat voldoet aan een formule van de vorm $M = p \cdot S^q$. In de tabel zie je dat bij $S = 1$ geldt $M = 12,1$.
Laat met behulp van deze waarden zien dat hieruit volgt dat $p = 12,1$.
- Waarom kun je met $S = 1$ en $M = 12,1$ wel de waarde van p berekenen en met bijvoorbeeld $S = 2,9$ en $M = 31,2$ niet?
- Vul $p = 12,1$ in de formule $M = p \cdot S^q$ in en bereken met behulp van de twee getallen in de laatste kolom van de tabel de waarde van q in drie decimalen.
- Geef een formule voor M uitgedrukt in S .
- Maak een tabel bij de formule van opdracht f en vergelijk deze met de gegeven tabel.
Kun je nu concluderen dat het verband tussen S en M inderdaad redelijk te benaderen is met een machtsverband?



Theorie

Bij een verband tussen twee grootheden kun je met behulp van meerdere meetresultaten de bijbehorende formule opstellen.

Voorbeeld 1

Bij de machtsformule $B = c \cdot A^n$ horen de waarden in de tabel.

A	1	3	7
B	4	20,8	74,1

Bereken de waarden van c en n .

Oplossing

Uit $A = 1$ en $B = 4$ volgt $4 = c \cdot 1^n$, dus $c = 4$.

Uit $A = 7$ en $B = 74,1$ volgt $74,1 = 4 \cdot 7^n$.

$$7^n = \frac{74,1}{4} \text{ dus } n = {}^7\log\left(\frac{74,1}{4}\right) \approx 1,50.$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $Q = c \cdot g^t$.

Gegeven: bij $t = 2$ is $Q = 70$ en

bij $t = 6$ is $Q = 245$.

Bereken de waarden van c en g .

Oplossing

Het verband tussen Q en t is exponentieel.

De groeifactor per vier tijdseenheden is $245 : 70 = 3,5$.

$$g = 3,5^{\frac{1}{4}} \approx 1,37$$

Uit $t = 2$ en $Q = 70$ volgt $70 = c \cdot (3,5^{\frac{1}{4}})^2$.

$$c = 70 : 3,5^{\frac{1}{2}} \approx 37,42$$

- 17** In de tabel is een aantal meetresultaten gegeven. De bijbehorende formule is van de vorm $y = c \cdot x^n$.
- Bereken de waarde van c .
 - Bereken de waarde van n in twee decimalen.
 - Hoeveel keer zo groot wordt y als x vijf keer zo groot wordt?

x	1	3	4	8
y	5	29	46	140

- 18** Als je een tabel hebt met slechts twee meetresultaten, dan zijn er heel veel verschillende bijpassende formules mogelijk.
- Stel een lineaire formule op bij de tabelwaarden.
 - Stel een exponentiële formule op bij de tabelwaarden.
 - Stel een machtsformule op bij de tabelwaarden.

K	D
1	4
6	17

- 19** Een onderzoeksteam heeft gedurende een aantal jaren het aantal roofvogels in een gebied geteld. Op grond van deze tellingen heeft men een formule van de vorm $R = a - b \cdot 0,6^t$ opgesteld. Hierbij is R het aantal roofvogels en t het aantal jaren na 2010.
- In 2010 telde men met 348 roofvogels en in 2014 telde men 504 roofvogels.
- Bereken in twee decimalen de waarden van a en b .

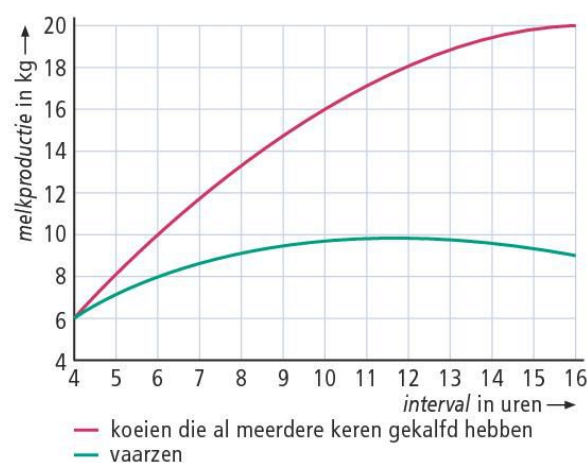
22.3 Formules opstellen

- 20** Een onderzoeker is op zoek naar een formule die het verband zou kunnen beschrijven tussen t en T . Een aantal gegevens staat in de tabel. Na veel proberen denkt hij dat het een formule van de vorm $T = \frac{a}{t+c} + b$ zou kunnen zijn.

t	T
0	18
5	12
10	10
15	9
20	8,4
200	6,3
2000	6,03
20000	6,003

- De tabel suggereert dat T grenswaarde 6 heeft. Waarom volgt hieruit dat $b = 6$?
- Vul $t = 0$ en $T = 18$ in de formule in. Laat zien dat hieruit volgt dat $a = 12c$.
- Vul $t = 20$ en $T = 8,4$ in de formule in. Welk verband krijg je nu tussen a en c ?
- Stel een vergelijking op met behulp van je formules van opdracht b en c en bereken de waarde van a .
- Maak een tabel bij de formule die je gevonden hebt en controleer of deze past bij de gegeven tabel.

- 21** De melkproductie van een koe hangt onder andere af van de lengte van het tijdsinterval tussen twee opeenvolgende tijdstippen waarop een koe wordt gemolken. In de twee grafieken in de figuur is te zien dat er een groot verschil is tussen jonge koeien die nog nooit gekalfd hebben (vaarzen) en koeien die al meerdere keren gekalfd hebben.



- Hoeveel kg melk geeft een koe die al meerdere keren gekalfd heeft en om de 10 uur gemolken wordt per dag meer dan een vaars die om de 10 uur gemolken wordt?

De grafiek bij de melkproductie van een vaars lijkt de vorm van een bergparabool te hebben.

Hier past dus een formule van de vorm

$M = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ bij. Hierin is M de melkproductie per melkbeurt in kg en t de lengte van het tijdsinterval tussen twee melkbeurten in uren.

- De grafiek heeft een top bij een tijdsinterval van 12 uur. Toon met behulp van de afgeleide M' aan dat $b = -24a$.
- Gebruik het gegeven dat de grafiek door het punt (4, 6) gaat en dat $b = -24a$ om aan te tonen dat $c = 80a + 6$.
- Gebruik de coördinaten van de top (12; 9,8) om de waarde van a te berekenen.
- Bereken ook de waarden van b en c en plot de grafiek van de gevonden formule en controleer of deze bij benadering overeen komt met de gegeven grafiek.

Opdrachten op examenniveau

X5 Piramiden

Voor de inhoud van een piramide geldt de formule:

$$I = \frac{1}{3} \cdot \text{oppervlakte grondvlak} \cdot \text{hoogte}.$$

In deze opdracht gaat het over een piramide met een rechthoekig grondvlak met een breedte van 2 dm en een lengte van x dm. De hoogte van de piramide is gelijk is aan $h = 9 - a \cdot x$ waarbij a een constante is.

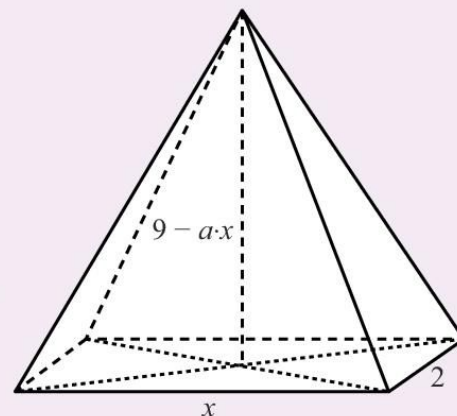
- a** Voor de inhoud I van deze piramide geldt $I = 6x - \frac{2}{3}ax^2$.

Toon dit aan door deze formule af te leiden uit de gegevens.

- b** Neem $a = 2$ en bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van x de piramide de grootste inhoud heeft.
- c** De waarde van x waarvoor de inhoud van de piramide maximaal is, noemen we x_{MAX} . Deze is niet steeds hetzelfde maar hangt af van de waarde van a .

Druk x_{MAX} uit in a .

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2015, tijdvak 1)

**X6 Algen**

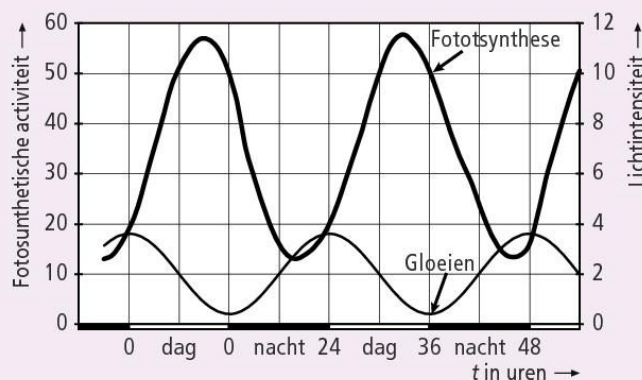
Van een bepaald soort eencellige algen (*Gonyaulax polyedra*) is het dag-en-nachtritme onderzocht. De algen werden blootgesteld aan afwisselend 12 uur licht en 12 uur donker. Deze perioden noemen we respectievelijk dag en nacht. In de figuur zijn resultaten van dit onderzoek te zien.

Een van de gemeten activiteiten is fotosynthese, het opslaan van energie met behulp van (zon)licht. De intensiteit van de fotosynthese is weergegeven op de linker verticale as.

De grafiek voor de fotosynthese F , kan benaderd worden door een formule van de vorm $F = a + b\sin(c(t - 3))$. Hierbij is t de tijd in uren met $t = 0$ bij het begin van een dag.

- a** Stel deze formule op. Licht je antwoord toe.
- b** Sommige algen lichten vanzelf op in het donker. Dit verschijnsel, gloeien genaamd, is in de figuur ook met een grafiek weergegeven. De lichtintensiteit G is gemeten in eenheden die langs de rechter verticale as zijn uitgezet. Stel een formule op voor G .

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2012, tijdvak 2)



22.4 Redeneren met formules

Je herhaalt • hoe je redeneert met formules en grafieken

Bij een telecombedrijf wordt de gemiddelde prijs per belminuut lager naarmate het aantal gebelde minuten groter is. Dit wordt beschreven door de

$$\text{formule } G = 0,015 + \frac{5}{a}$$

Hierin is G de gemiddelde prijs in euro's per belminuut en a het aantal belminuten per maand.

- Hoe kun je vaststellen dat de gemiddelde prijs per belminuut steeds langzamer daalt bij een toename van het aantal belminuten?



- 22** In een zomerperiode is vastgesteld dat het percentage P van een vijveroppervlak dat bedekt is met eendenkroos bij benadering voldoet aan de formule $P = \frac{100}{1 + 35 \cdot 0,756^t}$ waarin t de tijd in dagen is.

- Beredeneer met behulp van de formule dat het percentage op den duur naar 100% zal naderen.
- Toon aan dat $\frac{dP}{dt} \approx \frac{979 \cdot 0,756^t}{(1 + 35 \cdot 0,756^t)^2}$
- Maak een schets van de grafiek van $\frac{dP}{dt}$
- Welke conclusie kun je trekken over de snelheid waarmee de oppervlakte van het eendenkroos toeneemt?

Theorie

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd, kun je beredeneren of de uitkomsten van de formule een grenswaarde naderen.

Om vast te stellen hoe de functiewaarden toe- of afnemen, kun je kijken naar de afgeleide.

Als de afgeleide positief is, dan stijgt de grafiek van de functie.

Als de afgeleide negatief is, dan daalt de grafiek van de functie.

Als afgeleide naar nul nadert, heb je te maken met een afnemende stijging of daling.

Als de afgeleide steeds verder weg van nul gaat, heb je te maken met een toenemende stijging of daling.

Voorbeeld 1

Voor $p \geq 0$ is gegeven $K = 18,5 + \frac{12}{p^2 + 10}$
Ga na of K nadert naar een grenswaarde.

Oplossing

Als p toeneemt, neemt $p^2 + 10$ toe.

12 wordt gedeeld door een steeds groter getal dus $\frac{12}{p^2 + 10}$ neemt af

en nadert naar nul.

K nadert dus naar de grenswaarde 18,5.

Voorbeeld 2

Voor $p \geq 0$ is gegeven $K = 18,5 + \frac{12}{p^2 + 10}$

Ga met behulp van de grafiek van de afgeleide na op welke manier de waarde van K nadert naar de grenswaarde 18,5.

Oplossing

$$K = 18,5 + 12(p^2 + 10)^{-1} \text{ geeft } \frac{dK}{dp} = -12(p^2 + 10)^{-2} \cdot 2p$$

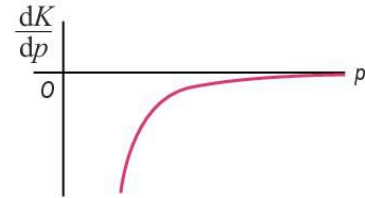
$$\text{ofwel } \frac{dK}{dp} = \frac{-24p}{(p^2 + 10)^2}$$

De afgeleide is negatief voor $p > 0$.

Er is dus sprake van een daling.

In de schets van $\frac{dK}{dp}$ zie je dat de afgeleide naar 0 nadert.

Er is dus sprake van een afnemende daling.



- 23** Voor $p > 0$ wordt het verband tussen A en x gegeven door de formule $A = \frac{2x - p}{p \cdot x}$

- a Bereken voor welke waarde van p de bijbehorende grafiek door het punt met $x = 1$ en $A = 4$ gaat.
- b Plot in één figuur de grafiek van A voor $p = 1$ en $p = 2$.
- c Onderzoek naar welke grenswaarden A nadert bij $p = 1$ en bij $p = 2$.
- d Laat zien dat je de formule $A = \frac{2x - p}{p \cdot x}$ kunt herleiden tot $A = \frac{2}{p} - \frac{1}{x}$ en beredeneer dat A voor elke waarde van $p > 0$ een grenswaarde heeft.
- e Voor welke waarde van p is de grenswaarde van A gelijk aan $3\frac{1}{3}$?
- f Beredeneer met de formule dat de grafiek van A voor elke waarde van $p > 0$ stijgend is voor $x > 0$.
- g Toon aan dat $\frac{dA}{dx} = \frac{1}{x^2}$ voor elke waarde van $p > 0$.
- h Beredeneer met behulp van de formule van de afgeleide dat de grafiek van A voor $x > 0$ afnemend stijgend is.

22.4 Redeneren met formules

- 24** Gegeven is de formule $K = 10 + 3 \cdot \ln(2x)$.
- Leg uit dat K geen grenswaarde heeft.
 - Bereken de afgeleide $\frac{dK}{dx}$
 - Onderzoek met behulp van de grafiek van de afgeleide op welke manier de grafiek van K stijgt.

- 25** Een groeimodel dat de gewichtstoename van courgettes bij

$$\text{benadering weergeeft is } G = \frac{1900}{1,3 + 62 \cdot 0,68^t}$$

Hierin is G het gemiddelde gewicht van courgettes in grammen en t de tijd in weken, gerekend vanaf het moment dat de courgettes een gewicht van ongeveer 30 gram hebben.

- Beredeneer hoe uit de formule volgt dat het gewicht toeneemt.
- Beredeneer met behulp van de formule hoe groot de grenswaarde van het gewicht van courgettes ongeveer is.
- Toon aan dat $\frac{dG}{dt} = \frac{45431 \cdot 0,68^t}{(1,3 + 62 \cdot 0,68^t)^2}$
- Beredeneer met de afgeleide dat de courgettes eerst steeds sneller en vervolgens steeds langzamer groeien.

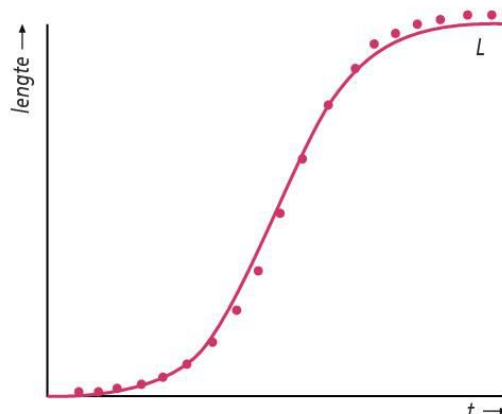


- 26** Bij veel vormen van groei in de economie en in de natuur heeft de bijbehorende grafiek de vorm van een zogeheten S-kromme. In de grafiek is de groei van een zonnebloem weergegeven. Gedurende twintig weken is elke week de lengte gemeten. Het resultaat van deze metingen is in de figuur met stippen weergegeven. In de figuur zie je de grafiek die de groei van deze zonnebloem goed benadert.

Bij die grafiek hoort de formule $L = \frac{400}{1 + 399 \cdot 0,55^t}$,

waarin L de lengte van de zonnebloem in centimeters is en t de tijd in weken vanaf het begin van de metingen.

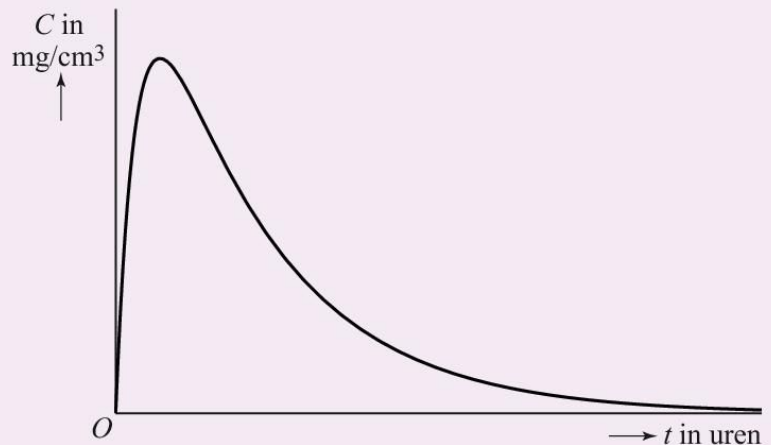
- In de figuur kun je zien dat L nadert naar een grenswaarde. Beredeneer met behulp van de formule hoe groot deze grenswaarde is.
- Een ander groeiproces wordt beschreven door de formule $G = \frac{540}{4 + 86 \cdot e^{c \cdot t}}$. Beredeneer voor $c > 0$ hoe groot de grenswaarde van G is.
- Beredeneer ook voor $c < 0$ hoe groot de grenswaarde van G is.



Opdrachten op examenniveau

X7 Allergie

Hooikoorts is een vervelende allergische aandoening waar veel mensen last van hebben. PharmaCie brengt een nieuw medicijn tegen hooikoorts op de markt. Het nieuwe medicijn van PharmaCie wordt in pilvorm verkocht. Als een patiënt klachten krijgt, neemt hij een pil. De werkzame stof komt dan via de maag en de darm in de bloedbaan terecht. De hoeveelheid werkzame stof in de bloedbaan stijgt eerst en neemt daarna af omdat het door het lichaam wordt afgebroken. De concentratie van de werkzame stof in de bloedbaan noemen we C .



In de figuur zie je een schets van de grafiek van C .

Een onderzoeker van PharmaCie stelt de volgende formule op

die dit verloop redelijk benadert: $C_1 = \frac{16t}{190t^2 + 160}$

Hierin is C_1 de concentratie werkzame stof in mg per cm^3 en t de tijd in uren na het innemen van de pil.

- a** Bereken met behulp van de afgeleide van C_1 na hoeveel minuten, gerekend vanaf het moment dat de pil is ingenomen, de concentratie werkzame stof maximaal is.

Een andere onderzoeker stelt een geheel andere formule op voor het verband tussen de tijd na het innemen van de pil en de concentratie werkzame stof: $C_2 = 0,13(e^{-0,65t} - e^{-3,9t})$.

Hierin is C_2 de concentratie werkzame stof in mg per cm^3 en t weer de tijd in uren na het innemen van de pil.

- b** Laat met berekeningen zien dat bij beide formules op het moment van innemen van de pil de concentratie werkzame stof gelijk is aan nul.
- c** Naast $t = 0$ is er nog een waarde van t waarvoor de concentratie werkzame stof bij beide formules dezelfde is. Bereken deze waarde van t . Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Aan de gegeven schets van de grafiek is te zien dat de werkzame stof na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed verdwenen is. Met een redenering kun je aantonen dat elk van beide formules dit proces beschrijft.

- d** Beredeneer aan de hand van de formules van C_1 en C_2 dat de werkzame stof volgens beide formules na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed is verdwenen.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2012, tijdvak 1)

- 27** Voor het verband tussen A en t geldt een formule van de vorm

$$A = \frac{c}{1 + k \cdot 1,2^t}$$

Hierin zijn c en k constanten.

- Gegeven is dat de grafiek van A door het punt $(0, 10)$ gaat. Laat zien dat hieruit volgt dat $c = 10(1 + k)$.
- Verder is gegeven dat bij $t = 2$ de waarde $A = 8$ hoort. Welk verband volgt hieruit voor c en k ?
- Bereken in twee decimalen de waarden van c en k .
- Leg met behulp van de formule uit dat de grafiek van A dalend is.
- Hoe groot is de grenswaarde van A ?

- 28** Tussen K en p bestaat een verband met de formule

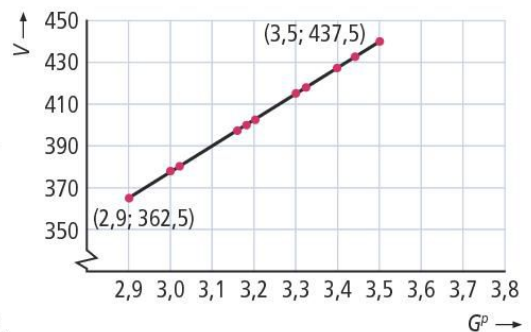
$$K = \frac{15,48p + 10,92}{2,4} - 0,25p + 3,11 - 0,12(2 - 3p).$$

- Toon aan dat het verband tussen K en p lineair is.
- Tussen G en p bestaat een lineair verband met de formule $3p = 5G - 6$. Bereken voor welke waarde van p de waarden van K en G gelijk zijn

- 29** Bij zoogdieren blijkt het hersenvolume V in cm^3 evenredig te zijn met een macht van het lichaamsgewicht G in kg, dus $V = a \cdot G^p$.

De getallen a en p hangen af van het soort zoogdier. In de grafiek is voor 12 volwassen chimpansees het hersenvolume V uitgezet tegen G^p .

- Hoe zie je uit de gegevens in de grafiek dat V recht evenredig is met G^p ?
- Uit de grafiek lees je af: als $G^p = 2,9$, dan is $V = 362,5$. Bereken daarmee de waarde van a in de formule $V = a \cdot G^p$.
- Gebruik de tabel onder de grafiek om de waarde van p te berekenen. Rond af op twee decimalen.
- Voor mensen in de prehistorie geldt $V = 180 \cdot G^{0,25}$. Prehistorische mensen wegen meer dan chimpansees. Er zijn fragmenten gevonden van een heel oude schedel. De schedel is van een volwassen mens of een volwassen chimpansee. Op grond van de fragmenten wordt het hersenvolume geschat op 450 cm^3 . Ga na of de schedel van menselijke herkomst is.



G	31,0	38,5	47,1	56,9
G^p	2,90	3,10	3,30	3,50



- 30** Aan de rand van het dorp Olst in Overijssel is in 2008 het kunstwerk Kantwerk geplaatst van de Belgische kunstenaar Marc de Roover. Het kunstwerk stelt de golvende rivier de IJssel voor. De voorkant van het kunstwerk kan door een sinusoïde benaderd worden.

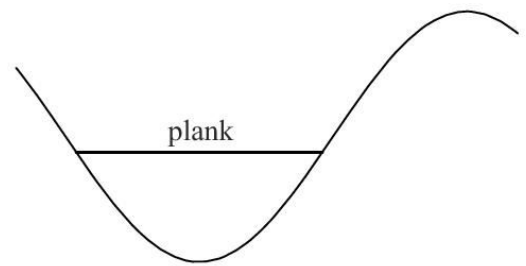
Op de website van de betreffende gemeente is te lezen dat er voor dit kunstwerk 3200 latten zijn gebruikt en dat het een lengte heeft van 100 meter. Telwerk leverde op dat iedere hele periode is opgebouwd uit 60 latten. De uiteindes van de laagste en de hoogste latten liggen respectievelijk 17 cm en 70 cm boven het gras.

Annemarie en Floortje willen een paar mooie foto's voor hun profielwerkstuk maken. Hiervoor willen ze een soort bankje creëren door een plank horizontaal in de golf neer te leggen. Zie de schets in de figuur.

Annemarie neemt hiervoor een plank met een lengte van één meter mee.

Floortje neemt een plank mee met een andere lengte. De zithoogte van het bankje van Floortje komt uit op 50 cm boven het gras.

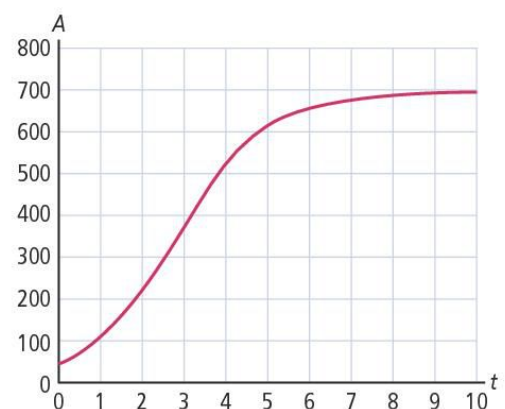
Onderzoek of Annemarie hoger of lager dan Floortje zit.
(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2019, tijdvak 2)



- 31** Veel groeiprocessen verlopen volgens een zogenaamde S-kromme. De grafiek hoort bij een formule van de vorm

$$A = \frac{c}{1 + d \cdot 0,4^t}$$

Onderzoek welke waarden c en d hebben.



Samenvatting

Theorie

Lineair verband en lineaire formules

Bij een lineair verband tussen twee variabelen is sprake van een constante toename of constante afname. Een lineair verband kun je op verschillende manieren herkennen.

- De grafiek is een rechte lijn.
- In een tabel is er bij gelijke stappen altijd dezelfde toename.
- Uit de tekst kun je opmaken dat de toename bij gelijke stappen altijd hetzelfde is.

Bestaat tussen de variabelen x en y een lineair verband, dan kun je de bijbehorende formule schrijven als $y = a \cdot x + b$.

Je zegt ook wel dat dit de vergelijking is van de bijbehorende rechte lijn.

Hierbij is a de richtingscoëfficiënt en is b het startgetal.

Voorbeeld

Bij een verband tussen K en t hoort de formule $5K = 1\frac{1}{2} - \frac{7t}{2}$

Toon aan dat het verband lineair is.

Oplossing

Schrijf de gegeven formule in de vorm $K = a \cdot t + b$.

$$5K = 1\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}t$$

$$K = -0,7t + 0,3$$

Dus het verband is lineair.

S1 Herleid de formules tot de vorm $y = a \cdot x + b$.

a $0,2x + 5y = 3(y - 4)$

c $8 - 3x - \frac{1}{4}y = 0$

b $\frac{x}{2y} + 3 = 10$

d $2(4x - 3 + y) = 5 + 3(x - 2)$

S2 Het verband tussen het aantal geproduceerde kopjes q en de fabricagekosten K is lineair. Het produceren van 50 kopjes kost €189,-. Het produceren van 100 kopjes kost €213,-. Hoeveel kost het produceren van 300 kopjes?

Theorie

Recht evenredige en omgekeerd evenredige verbanden

Twee variabelen heten recht evenredig als geldt:

als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

Zijn de variabelen x en y , dan heet y recht evenredig, of

kortweg evenredig met x . Er geldt $\frac{y}{x} = c$, maar ook $y = c \cdot x$.

Twee variabelen heten omgekeerd evenredig als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele

k keer zo klein. Zijn de variabelen x en y , dan geldt $x \cdot y = c$

ofwel $y = \frac{c}{x}$ ofwel $x = \frac{c}{y}$

Voorbeeld 1

G	2	5	10	40
W	3	7,5	15	60

G en W zijn recht evenredig want er geldt steeds $W = 1,5 \cdot G$.

De bijbehorende grafiek is een rechte lijn door $(0, 0)$ met richtingscoëfficiënt 1,5.

Voorbeeld 2

a	0,5	1	2	10
k	6	3	1,5	0,3

a en k zijn omgekeerd evenredig want er geldt steeds $a \cdot k = 3$.

Ook geldt $a = \frac{3}{k}$ of $k = \frac{3}{a}$

S3 In de tabellen zijn de variabelen recht evenredig of omgekeerd evenredig.

Vul de open plaatsen in en stel bij iedere tabel een formule op.

x	1,2	...	3	6	54
y	90	72	36	...	...

A

n	1	2	6	30	80
k	...	60	...	4	...

B

p	3	6	8	12
q	27	...	72	...

C**Vaardigheid****Je kunt lineair interpoleren en extrapoleren.**

Interpoleren is een tussengelegen waarde bepalen. Soms kun je een dergelijke waarde uit een gegeven grafiek aflezen. Je kunt zo'n tussengelegen waarde ook berekenen door uit te gaan van een constante toe- of afname. Dit heet lineair interpoleren.

Het vinden van een verder gelegen waarde in een tabel of in een grafiek heet extrapoleren. Je kunt de waarde berekenen door uit te gaan van een verdere constante toe- of afname. Dit heet lineair extrapoleren.

Voorbeeld

In 1990 had de gemeente Almere ongeveer 71 duizend inwoners. In het jaar 2005 was dat aantal toegenomen tot ongeveer 175 duizend inwoners. Schat met lineair interpoleren het aantal inwoners in 1993.

Oplossing

De toename per jaar tussen 1990 en 2005 is $(175 - 71) : 15 = 6,933...$ duizend.

$$71 + 3 \times 6,933... = 91,8$$

In 1993 had Almere ongeveer 92 duizend inwoners.

S4 In het voorbeeld zie je dat Almere 175 000 inwoners had in 2005. In 2020 had Almere 210 000 inwoners.

- Schat met lineair interpoleren het aantal inwoners van Almere in 2010.
- Schat met lineair extrapoleren het aantal inwoners van Almere in 2026.

Samenvatting

Vaardigheid

Je kunt een formule opstellen bij meerdere meetresultaten.

Bij een verband tussen twee grootheden kun je met behulp van meerdere meetresultaten de bijbehorende formule opstellen.

Voorbeeld 1

Stel een exponentiële formule op bij de tabel.

t	2	5	8	11
F	10,0	17,9	32,1	57,5

Oplossing

De groeifactor is $\left(\frac{57,5}{10,0}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 1,21$.

Hieruit volgt dat de beginwaarde gelijk is aan

$$10 : 1,21^2 \approx 6,8.$$

Een formule bij de tabel is dus $F = 6,8 \cdot 1,21^t$.

Voorbeeld 2

Bij de tabel past bij benadering een machtsverband met een formule van de vorm $M = c \cdot k^a$.

Bereken c en a .

k	1	4	9	15
M	24	56	92	125

Oplossing

Invullen van $k = 1$ en $M = 24$ geeft $24 = c \cdot 1^a$.

Hieruit volgt $c = 24$ zodat $M = 24 \cdot k^a$.

$k = 15$ en $M = 125$ invullen in $M = 24 \cdot k^a$ geeft

$$125 = 24 \cdot 15^a.$$

$$15^a = \frac{125}{24} \approx 5,2083$$

$$a = {}^{15}\log(5,2083) \approx 0,61$$

Dus $a \approx 0,61$ en $c = 24$.

- S5** In de tabel staat voor enkele planeten de afstand tot de zon A in miljoenen kilometers en de omwentelingstijd rond de zon T in dagen.

Het verband tussen T en A voldoet aan een formule van de vorm $T = 0,2 \cdot A^p$.

planeet	A	T
Jupiter	778	4 329
Saturnus	1427	10 753
Uranus	2870	30 660
Neptunus	4497	60 150
Pluto	5907	90 670

- Bereken de waarde van p in één decimaal.
- Bereken met de formule de afstand van de aarde tot de zon.
- Hoeveel keer zo groot wordt T als A twee keer zo groot wordt?



Vaardigheid**Je kunt redeneren met formules en grafieken.**

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd, kun je beredeneren of de uitkomsten van de formule een grenswaarde naderen.

Om vast te stellen hoe de functiewaarden toe- of afnemen kun je kijken naar de afgeleide.

Als de afgeleide positief is, dan stijgt de grafiek van de functie.

Als de afgeleide negatief is, dan daalt de grafiek van de functie.

Als afgeleide naar nul nadert, heb je te maken met een afnemende stijging of daling.

Als de afgeleide steeds verder weg van nul gaat, heb je te maken met een toenemende stijging of daling.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $K = 2 + {}^3\log(A + 4)$ voor $A \geq 0$.

Beredeneer of K naar een grenswaarde nadert en op welke manier de grafiek stijgt of daalt.

Oplossing

Als A groter wordt, dan wordt ${}^3\log(A + 4)$ ook groter. De uitkomsten van de formule blijven ook stijgen en dus heeft K geen grenswaarde.

De afgeleide is $\frac{dK}{dA} = \frac{1}{\ln(3)} \cdot \frac{1}{A + 4} = \frac{1}{\ln(3) \cdot (A + 4)}$ ofwel $\frac{dK}{dA} \approx \frac{1}{1,1 \cdot (A + 4)}$

Voor $A \geq 0$ is $1,1(A + 4) > 0$. De teller en de noemer zijn positief, dus de breuk is ook positief.

Als A toeneemt, dan neemt $1,1(A + 4)$ ook toe. De breuk neemt dan af.

$\frac{dK}{dA} = \frac{1}{1,1 \cdot (A + 4)}$ is positief en neemt af, dus de grafiek van K is afnemend stijgend.

- S6** Beredeneer of de waarde van K toeneemt of afneemt en naar welke grenswaarde K nadert.

a $K = \frac{20}{2x + 1} - 3,2$ voor $x \geq 0$

b $K = \frac{9}{45 - 12 \cdot 0,85^t}$ voor $t \geq 0$

- S7** Gegeven is de formule $A = \frac{3}{(2k + 1)^2}$ voor $k \geq 0$.

- a** Beredeneer naar welke grenswaarde A nadert.

b Toon aan dat $\frac{dA}{dk} = \frac{-12}{(2k + 1)^3}$

- c** Gebruik de afgeleide om te beredeneren op welke manier de grafiek van A stijgt of daalt.

T1



De grafiek hoort bij het verband tussen het gemiddelde gewicht en de leeftijd van kinderen tot vijf jaar. Vanaf een leeftijd van twee jaar is het verband bij benadering lineair. Bereken met lineair extrapoleren het gemiddelde gewicht van een kind van 6 jaar.

T2

De overlevingskans van personen die te water raken, is onder andere afhankelijk van de watertemperatuur. In de tabel staan watertemperaturen met de bijbehorende overlevingstijden.

watertemperatuur T in $^{\circ}\text{C}$	5	10	15	20
overlevingstijd Z in uren	0,5	1,0	2,0	4,0

- Waarom kun je de overlevingstijd bij 17°C niet berekenen met lineair interpoleren?
- Ga voor $5,0 \leq T \leq 20$ uit van een exponentieel verband tussen T en Z .
Bereken de overlevingstijd van iemand in water van 17°C .
Geef je antwoord in uren op één decimaal nauwkeurig.

T3

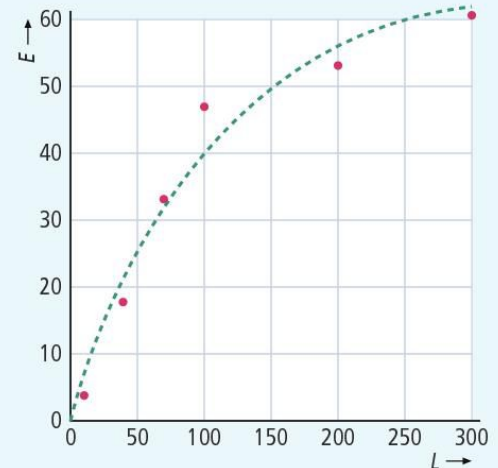
Er wordt een tijdrit van 36 km gehouden voor amateur wielrenners.

- Maarten wint deze tijdrit met een gemiddelde snelheid van 45 km per uur.
Hoelang doet hij over de tijdrit?
- De gemiddelde snelheid in km per uur over deze tijdrit is v en t is de tijd in uren die de wielrenner nodig had.
Leg uit dat tussen v en t een omgekeerd evenredig verband bestaat en stel een bijbehorende formule op.
- Nico fietst met een gemiddelde snelheid die $\frac{2}{3}$ keer zo groot is als die van Maarten.
Hoeveel keer zo veel tijd als Maarten heeft Nico nodig?

- T4** Om na te gaan of een wielrenner een bepaalde snelheid kan halen, kijkt men naar het vermogen van de wielrenner. Het vermogen is de energie die de wielrenner per seconde levert. Men gebruikt vaak de formule $P = (k \cdot v^2 + 4) \cdot v$. Hierin is v de snelheid in meters per seconde, is P het vermogen in watt en is k een getal dat per wielrenner kan verschillen.
- Daan is wielrenner en hij weet dat hij een vermogen kan leveren van 190 watt en daarmee op zijn huidige fiets een snelheid van 9,2 meter per seconde kan halen. Leid uit de gegevens af dat bij hem geldt dat $k \approx 0,2$.
 - Leg met behulp van de formule uit wat het effect van een kleinere k -waarde is op het te leveren vermogen om een bepaalde snelheid te halen.
 - Met behulp van training kan Daan zijn vermogen verhogen tot 250 watt. Daarbij blijft $k \approx 0,2$. Bereken welke snelheid in km per uur hij kan halen.
 - Met behulp van een nieuwe fiets en nieuwe fietskleding kan Daan zijn k -waarde met 25% verlagen. Onderzoek met hoeveel procent zijn maximaal haalbare snelheid toeneemt bij een vermogen van 250 watt.



- T5** Larven die grote schade toebrengen aan gewassen kunnen milieuvriendelijk bestreden worden met sluipwespen. Een sluipwesp legt een eitje in de larve waardoor de larve uiteindelijk dood gaat. Een onderzoeker wilde weten hoeveel larven één sluipwesp maximaal per dag kan bestrijden. Om dit te onderzoeken werd één sluipwesp in een grote afgesloten ruimte met larven gezet. Na een dag werd geteld hoeveel larven er in totaal in de ruimte waren. Dit aantal noem je L . Ook werd geteld hoeveel larven een eitje bevatten. Dit aantal noem je E . Het experiment werd zes maal uitgevoerd. De resultaten (stippen) zie je in de figuur. Bij 100 larven blijken er 46 te zijn met een eitje.



- Hoe kun je in de figuur zien dat het verband tussen E en L voor de waarden van L van 0 tot 100 recht evenredig is?
- Geef een formule voor het verband tussen E en L voor de waarden van L van 0 tot 100.
- Het verband tussen E en L wordt voor grotere waarden van L beter benaderd door de formule $E = 64 \cdot (1 - 0,6^{0,02L})$. Hoeveel procent wijkt het aantal volgens deze formule bij $L = 100$ af van het werkelijke aantal?
- Beredeneer met behulp van de formule hoe groot de grenswaarde van het aantal larven met een eitje is. (Ontleend aan CE havo wiskunde B 2009, tijdvak 2)

Hoe oud zijn historische vondsten?

In 1940 werd in een grot bij de plaats Lascaux in het Franse departement Dordogne een groot aantal rotswandschilderingen ontdekt, een ervan zie je hiernaast. Vlak na de vondst maakten archeologen een ruwe schatting dat de tekeningen 10000 tot 20000 jaar oud waren. Er ontstond behoefte aan een methode waarmee de ouderdom van opgegraven voorwerpen en beenderen nauwkeuriger kon worden bepaald. Dat werd de C14-dateringsmethode.

C14 is een radioactieve variant van koolstof dat ieder levend organisme bevat. Nadat het organisme is doodgegaan, daalt de hoeveelheid C14 langzaam door radioactief verval. Na ongeveer 5730 jaar is er nog 50% van de oorspronkelijke hoeveelheid C14 over.

Opdracht

Je mag aannemen dat radioactief verval exponentieel verloopt. Als de halveringstijd gelijk is aan 5730 jaar, dan geldt $g^{5730} = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per jaar.

Ga na dat $g \approx 0,99988$.

In 1950 is gemeten dat in een van de houtskoollijnen van de tekeningen nog 14,5% van de hoeveelheid C14 aanwezig was. Bereken hoe oud de tekening toen was.



Onbekende Da Vinci gevonden

In 2010 is in een Zwitserse bankkluis een schilderij (rechter afbeelding) opgedoken dat mogelijk door Leonardo da Vinci (1452 - 1519) is gemaakt.

Het is een portret van markiezin Isabella d'Este, die als begunstiger van de vrije kunsten een hoofdrolspeelster is in de Renaissance. In het Louvre hangt een tekening uit 1499 van deze dame (linker afbeelding) en er zijn brieven bekend waarin D'Este vraagt om een geschilderd portret.

De vraag is: Heeft Da Vinci het portret geschilderd? De argumenten hiervoor zijn: het gebruikte pigment is hetzelfde als dat in ander werk van Leonardo, precies volgens recept dat Leonardo in zijn Traktaat van de schilderkunst voorschrijft. Toch is er twijfel. Het belangrijkste argument tegen: het is op doek, terwijl alle nog bekende werken van Leonardo geschilderd zijn op hout.



Opdracht

Er is gemeten dat de aanwezige hoeveelheid C14 ligt tussen 93,56% en 95,73%.

- Bereken hoe oud het schilderij is.
- Kan het schilderij toegeschreven worden aan Leonardo da Vinci?