

12 Logaritmische functies

Voorkennis

V1 a $5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$

b $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$

c $(7^2)^5 = 7^{2 \cdot 5} = 7^{10}$

d $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

e $(4^{-3})^2 = 4^{-3 \cdot 2} = 4^{-6} = \frac{1}{4^6}$

f $2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

V2 a $a^{-3} \cdot a^{-5} \cdot a^{12} = a^{-3-5+12} = a^4$

b $\frac{w^{-2}}{w^{-5}} = w^{-2-(-5)} = w^3$

c $(d^{\frac{1}{2}})^4 \cdot d^3 = d^{\frac{1}{2} \cdot 4} \cdot d^3 = d^2 \cdot d^3 = d^{2+3} = d^5$

d $\frac{7^{x+3}}{7^{x-3}} = 7^{x+3-(x-3)} = 7^{x+3-x+3} = 7^6$

V3 a $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

b $\frac{1}{g^{-5}} = g^{-(-5)} = g^5$

c $5a^{\frac{1}{5}} = 5\sqrt[5]{a}$

d $\left(\frac{1}{m}\right)^{-2} = (m^{-1})^{-2} = m^{-1 \cdot (-2)} = m^2$

V4 a Je kunt de groeifactor per jaar berekenen door de waarde van de auto op $t = 5$ te delen door de waarde van de auto op $t = 4$. De groeifactor per jaar is gelijk aan $\frac{14762}{16403} = 0,8999\dots$ dus ongeveer 0,9.

b

t in jaren	W in euro's
0	25 000
1	22 500
2	20 250
3	18 225
4	16 403
5	14 762

c De waarde neemt per jaar met 10% af.

d De groeifactor per 10 jaar is $0,9^{10} \approx 0,349$.

e Per 10 jaar neemt de waarde van 65,1% af.

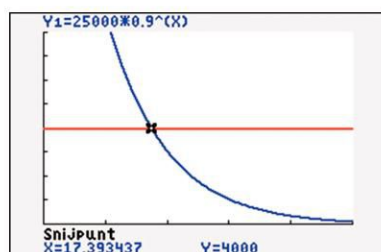
f $W = 25000 \cdot 0,9^t$

g De op te lossen ongelijkheid is $25000 \cdot 0,9^t < 4000$.

Invoer: $y_1 = 25000 \times 0,9^x$ en $y_2 = 4000$

Venster: $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 8000$

Optie: snijpunt



De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (17,39; 4000).

Na 18 jaar is de auto minder dan € 4.000,- waard.

V5 a De groeifactor per week is $2,5^7 \approx 610,35$.

b De groeifactor per halve dag is $2,5^{\frac{1}{2}} \approx 1,58$.

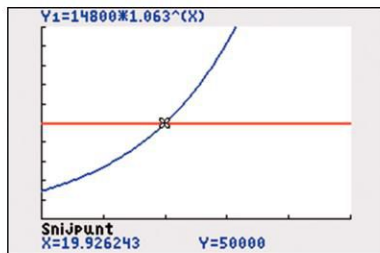
c De groeifactor per zeven uur is $2,5^{\frac{7}{24}} \approx 1,31$.

- V6 a** Bij een toename van 6,3% per dag hoort een groeifactor van 1,063.
Het aantal insecten groeit exponentieel. De formule $N = 14800 \cdot 1,063^t$ hoort daarom bij het aantal insecten N met t de tijd in dagen en $t = 0$ op 1 februari.
- b** Op 2 februari zijn er $14800 \cdot 1,063^1 = 15732$ insecten.
- c** Op 29 januari zijn er $14800 \cdot 1,063^{-3} \approx 12321$ insecten.
- d** De groeifactor per week is $1,063^7 = 1,5336\dots$, dus per week neemt het aantal insecten met ongeveer 53,4% toe.
- e** De groeifactor per acht uur is $1,063^{\frac{1}{3}} = 1,0205\dots$, dus per acht uur neemt het aantal insecten met ongeveer 2,1% toe.
- f** De op te lossen ongelijkheid is $148000 \cdot 1,063^x > 50000$.

Invoer: $y_1 = 14800 \times 1,063^x$ en $y_2 = 50000$

Venster: $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 100000$

Optie: snijpunt



De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (19,93; 50000).

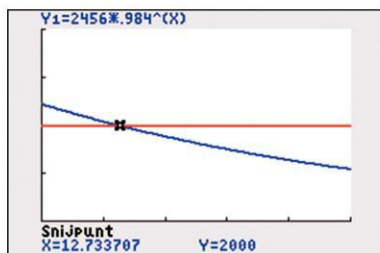
Na 20 dagen is het aantal insecten tot 50000 gegroeid.

- V7 a** Het verband tussen A en t is exponentieel. De groeifactor is gelijk aan 0,984.
De formule is $A = 2456 \cdot 0,984^t$.
- b** De groeifactor per 5 jaar is $0,984^5 \approx 0,923$.
- c** De groeifactor per 10 jaar is $0,984^{10} \approx 0,851$.
Per 10 jaar neemt het aantal inwoners met 14,9% af.
- d** De op te lossen ongelijkheid is $2456 \cdot 0,984^t < 2000$.

Invoer: $y_1 = 2456 \times 0,984^x$ en $y_2 = 2000$

Venster: $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 4000$

Optie: snijpunt



De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (12,73; 2000).

In het jaar 2021 zullen er voor het eerst minder dan 2000 inwoners zijn.

12 Logaritmische functies

- e In 2025 zijn er $2456 \cdot 0,984^{16} \approx 1897$ inwoners.

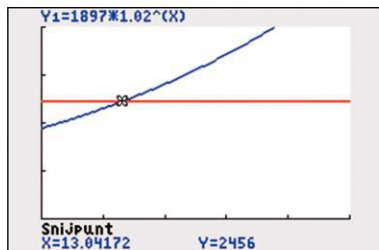
Vanaf 2025 geldt de formule $A = 1897 \cdot 1,02^t$ met A het aantal inwoners en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2025.

De op te lossen vergelijking is $1897 \cdot 1,02^t = 2456$.

Invoer: $y_1 = 1897 \times 1,02^x$ en $y_2 = 2456$

Venster: $0 \leq x \leq 20$, $0 \leq y \leq 4000$

Optie: snijpunt



De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (13,04; 2456).

In het jaar 2038 zullen er dan weer net zoveel inwoners zijn als er in 2009 waren.

12.1 Logaritmen

intro Je kunt precies berekenen na hoeveel uren er 1000 bacteriën waren omdat 1000 een macht van 10 is, namelijk $10^3 = 1000$. Omdat 2000 geen macht van 10 is kun je niet makkelijk berekenen na hoeveel uren er 2000 bacteriën zijn.

- 1 a Invullen van $t = 3$ in de vergelijking geeft $2^3 = 8$, dit klopt dus $t = 3$ is de oplossing van de vergelijking.

- b $16 = 2^4$, dus de oplossing van de vergelijking $2^t = 16$ is $t = 4$.

- c $3^{t-1} = 9$
 $3^{t-1} = 3^2$
 $t - 1 = 2$
 $t = 3$

- 2 a $2^t = 128$
 $2^t = 2^7$
 $t = 7$

- b $9^t = 81$
 $9^t = 9^2$
 $t = 2$

- c $13^t = 13$
 $13^t = 13^1$
 $t = 1$

- d $3^{t+2} = 81$
 $3^{t+2} = 3^4$
 $t + 2 = 4$
 $t = 2$

- e $5^{1-2t} = 25$
 $5^{1-2t} = 5^2$
 $1 - 2t = 2$
 $-2t = 1$
 $t = -\frac{1}{2}$

- f $2 \cdot 6^t = 432$
 $6^t = 216$
 $6^t = 6^3$
 $t = 3$

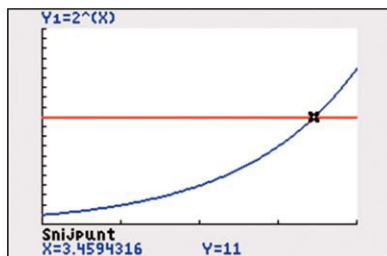
- 3 a** $2^t = 32$
 $2^t = 2^5$
 $t = 5$
 Na 5 kwartier zijn er 32 bacteriën.
- b** Je kunt deze vergelijking niet zonder de grafische rekenmachine oplossen omdat 7 geen macht van 2 is.
- c** $2^2 = 4$ en $2^3 = 8$. Omdat 7 tussen 4 en 8 in ligt, ligt de oplossing van de vergelijking tussen 2 en 3.
- d** $2^{2,80} \approx 6,964$ en $2^{2,81} \approx 7,013$. Omdat 7 tussen 6,964 en 7,013 in ligt, ligt de oplossing van de vergelijking tussen 2,80 en 2,81.
- e** $3^3 = 27$ en $3^4 = 81$. Omdat 28 tussen 27 en 81 in ligt, ligt de oplossing van de vergelijking $3^t = 28$ tussen 3 en 4 in. Dus ergens tussen 3 en 4 kwartier in zijn er 28 bacteriën.

- 4 a** $3^2 = 9$ en $3^3 = 27$. De oplossing ligt tussen 2 en 3 in.
- b** $10^1 = 10$ en $10^2 = 100$. De oplossing ligt tussen 1 en 2 in.
- c** $2^4 = 16$ en $2^5 = 32$. De oplossing ligt tussen 4 en 5 in.
- d** $7^1 = 7$ en $7^2 = 49$. De oplossing ligt tussen 1 en 2 in.

- 5 a** De oplossing betekent hoeveel weken het duurt voordat er 1650 griepgevallen zijn.

- b** $150 \cdot 2^t = 1650$ links en rechts: 150 geeft
 $2^t = 11$

- c** Invoer: $y_1 = 2^x$ en $y_2 = 11$
 Venster: $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 20$
 Optie: snijpunt



De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (3,46; 11).

De oplossing van de vergelijking is $t \approx 3,46$.

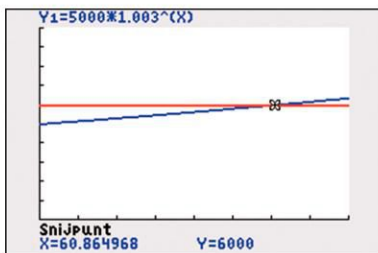
- d** Je kunt de vergelijking $2^t = 11$ niet zonder je grafische rekenmachine oplossen omdat 11 geen macht van 2 is.

- | | |
|--|--|
| <p>6 a $7^t = 4$
 $t = {}^7\log(4)$</p> <p>b $7^{t+2} = 10$
 $t + 2 = {}^7\log(10)$
 $t = -2 + {}^7\log(10)$</p> <p>c $4^t = 27$
 $t = {}^4\log(27)$</p> | <p>d $5^{t-3} = 14$
 $t - 3 = {}^5\log(14)$
 $t = 3 + {}^5\log(14)$</p> <p>e $5^{2t} = 125$
 $5^{2t} = 5^3$
 $2t = 3$
 $t = 1\frac{1}{2}$</p> <p>f $12^{2t+1} = 20$
 $2t + 1 = {}^{12}\log(20)$
 $2t = -1 + {}^{12}\log(20)$
 $t = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^{12}\log(20)$</p> |
|--|--|

12 Logaritmische functies

- 7** a ${}^3\log(9) = 2$, want $9 = 3^2$
 b ${}^2\log(32) = 5$, want $32 = 2^5$
 c ${}^7\log(1) = 0$, want $1 = 7^0$
 d ${}^{10}\log(1\,000\,000) = 6$, want $1\,000\,000 = 10^6$
 e ${}^3\log(3) = 1$, want $3 = 3^1$
 f Je kunt ${}^1\log(7)$ niet uitrekenen omdat 7 geen macht van 1 is.
- 8** a De getallen ${}^2\log(8)$ en ${}^2\log(16)$, want 8 en 16 zijn beide machten van 2 en 12 en 20 niet.
 b ${}^2\log(64) = 6$ want $2^6 = 64$.
 c $4 = {}^2\log(2^4)$ ofwel $4 = {}^2\log(16)$ en $10 = {}^2\log(2^{10})$ ofwel $10 = {}^2\log(1024)$.

- 9** a Het verband tussen B en t is exponentieel en de groeifactor is gelijk aan 1,003. De formule is $B = 5000 \cdot 1,003^t$.
 b De oplossing betekent na hoeveel jaar Irene € 6.000,- op de bankrekening heeft staan.
 c $5000 \cdot 1,003^t = 6000$
 $1,003^t = 1,2$
 $t = {}^{1,003}\log(1,2)$
 Invoer: $y_1 = 5000 \times 1,003^x$ en $y_2 = 6000$
 Venster: $0 \leq x \leq 80$, $0 \leq y \leq 10\,000$
 Optie: snijpunt



De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (60,86; 6000).
 De oplossing van de vergelijking is $t \approx 61$ jaren.

- 10** a De groeifactor per uur is 0,8.
 b Op $t = 0$ is de hoeveelheid Temazepam 50 mg.
 c 40% van 50 mg is 20 mg. Je kunt met de vergelijking $50 \cdot 0,8^t = 20$ berekenen wanneer er nog 20 mg van het medicijn in het lichaam aanwezig is.
 d $50 \cdot 0,8^t = 20$
 $0,8^t = 0,4$
 e $t = {}^{0,8}\log(0,4)$
 f Invoer: $y_1 = 50 \times 0,8^x$ en $y_2 = 20$
 Venster: $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 40$
 Optie: snijpunt
 De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (4,11; 20).
 De oplossing van de vergelijking is $t \approx 4,1$.

- 06** a $7^t = 7$ $7^t = 49$ $7^t = 343$
 $7^t = 7^1$ $7^t = 7^2$ $7^t = 7^3$
 $t = 1$ $t = 2$ $t = 3$
- b De oplossing is geen geheel getal omdat 40 geen macht van 7 is.
 c $g = 7$ en $a = 40$

- d Uit $7^t = 40$ volgt $t = {}^7\log(40)$.
 e Uit $4^t = 5$ volgt $t = {}^4\log(5)$.
 f $4^{t+3} = 5$
 $t + 3 = {}^4\log(5)$
 $t = -3 + {}^4\log(5)$

- 07** a ${}^3\log(81)$ is de oplossing van de vergelijking $3^t = 81$.
 b $3^t = 81$
 $3^t = 3^4$
 $t = 4$
 c $5^3 = 125$
 d ${}^5\log(125)$ is de oplossing van de vergelijking $5^t = 125$. Je weet daarom nu dat ${}^5\log(125) = 3$.
 e ${}^8\log(64) = 2$, want $64 = 8^2$
 f ${}^{12}\log(12) = 1$, want $12 = 12^1$
 g ${}^{10}\log(10\,000) = 4$, want $10\,000 = 10^4$
 h ${}^6\log(1) = 0$, want $1 = 6^0$

- U1** a $2^t = 9$
 $t = {}^2\log(9)$
 b De oplossing is het aantal weken waarna er zich 9 m^2 aan waterplanten in het meer bevindt.
 c 18 is het dubbele van 9. Het aantal waterplanten verdubbelt in één week, het duurt daarom één week langer om 18 m^2 waterplanten te krijgen.
 d Wanneer je 18 drie keer verdubbelt, krijg je 144. Het aantal waterplanten moet nog drie keer verdubbelen, dat duurt drie weken.
 Na ${}^2\log(18) + 3$ weken zijn er 144 m^2 aan waterplanten op het meer.

12.2 Logaritmen berekenen

intro Het aantal IoT apparaten groeit exponentieel met groeifactor 1,00486 per week. Je kunt het aantal IoT apparaten in miljarden berekenen met de formule $N = 7,11 \cdot 1,00486^t$ met t het aantal weken vanaf januari 2018. Zeven jaar zijn 364 weken, dus in januari 2025 zijn er $7,11 \cdot 1,00486^{364} \approx 41,5$ miljard IoT apparaten, dus dan zal het ruimschoots zijn verdubbeld.

- 11** a $\log(5) \approx 0,70$
 $\log(10) = 1$
 $\log(50) \approx 1,70$
 $\log(100) = 2$
 $\log(1000) = 3$
 b $\log(t) = 3$ voor $t = 1000$.
 $\log(t) = 5$ voor $t = 100\,000$.
 c De rekenmachine gebruikt bij de log-knop grondtal 10.
 d $\log(1\,000\,000) = 6$, want $10^6 = 1\,000\,000$.
 $\log(0,0001) = -4$, want $10^{-4} = 0,0001$.

12 Logaritmische functies

- 12 a** $10^t = 100$
 $t = \log(100)$
 $t = 2$
- b** $10^t = 1$
 $t = \log(1)$
 $t = 0$
- c** $10^t = 10$
 $t = \log(10)$
 $t = 1$
- d** $10^t = 100\,000$
 $t = \log(100\,000)$
 $t = 5$
- e** $10^t = 275$
 $t = \log(275)$
 $t \approx 2,44$
- f** $10^t = 29$
 $t = \log(29)$
 $t \approx 1,46$
- g** $10^t = 0,4$
 $t = \log(0,4)$
 $t \approx -0,40$
- h** $10^t = 5000$
 $t = \log(5000)$
 $t \approx 3,70$

- 13 a** Wanneer je de oplossing $t = \log(5)$ invult in de vergelijking $10^t = 5$, krijg je $10^{\log(5)} = 5$.
- b** $10^{\log(564)} = 564$
 $10^{\log(0,1)} = 0,1$
 $10^{\log(0,08)} = 0,08$
- c** $14 = 10^{\log(14)}$
 $400 = 10^{\log(400)}$
 $0,003 = 10^{\log(0,003)}$

- 14 a** $5 = 10^{\log(5)}$ en $12 = 10^{\log(12)}$
- b** $5^t = (10^{\log(5)})^t = 10^{t \cdot \log(5)}$
- c** $10^{t \cdot \log(5)} = 10^{\log(12)}$
- d** $t \cdot \log(5) = \log(12)$
 $t = \frac{\log(12)}{\log(5)}$
- e** Uit $5^t = 12$ volgt ook $t = {}^5\log(12)$. Hieruit volgt ${}^5\log(12) = \frac{\log(12)}{\log(5)}$

- 15 a** ${}^9\log(35) = \frac{\log(35)}{\log(9)} \approx 1,62$
- b** ${}^{\frac{1}{3}}\log(128) = \frac{\log(128)}{\log(\frac{1}{3})} \approx -4,42$
- c** ${}^5\log(10) = \frac{\log(10)}{\log(5)} = \frac{1}{\log(5)} \approx 1,43$
- d** ${}^4\log(\frac{1}{13}) = \frac{\log(\frac{1}{13})}{\log(4)} \approx -1,85$

- 16 a** $3^{t+4} = 12$
 $t + 4 = {}^3\log(12)$
 $t = -4 + {}^3\log(12)$
 $t = -4 + \frac{\log(12)}{\log(3)}$
 $t \approx -1,74$
- b** $9^{t-6} = 5$
 $t - 6 = {}^9\log(5)$
 $t = {}^9\log(5) + 6$
 $t = \frac{\log(5)}{\log(9)} + 6$
 $t \approx 6,73$
- c** $4^{2t-3} = 10$
 $2t - 3 = {}^4\log(10)$
 $2t = 3 + {}^4\log(10)$
 $t = \frac{1}{2} \cdot (3 + {}^4\log(10))$
 $t = \frac{1}{2} \cdot \left(3 + \frac{\log(10)}{\log(4)}\right)$
 $t \approx 2,33$
- d** $3^{3t-1} = 14$
 $3t - 1 = {}^3\log(14)$
 $3t = {}^3\log(14) + 1$
 $t = \frac{1}{3} \cdot ({}^3\log(14) + 1)$
 $t = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\log(14)}{\log(3)} + 1\right)$
 $t \approx 1,13$

- 17 a** De groeifactor per uur is 0,8.
b Met de vergelijking $600 \cdot 0,8^t = 300$ kun je uitrekenen wanneer de beginhoeveelheid gehalveerd is.
c $600 \cdot 0,8^t = 300$
 $0,8^t = \frac{1}{2}$
d $t = {}^{0,8}\log\left(\frac{1}{2}\right)$
e De oplossing van de vergelijking $0,8^t = \frac{1}{2}$ heet de halveringstijd omdat de oplossing aangeeft na hoeveel tijd de hoeveelheid gehalveerd is.
- 18 a** De groeifactor is 1,002 per jaar.
De verdubbelingstijd t is $t = {}^{1,002}\log(2) \approx 346,9$ jaar.
b De groeifactor is 0,986 per maand.
De halveringstijd t is $t = {}^{0,986}\log\left(\frac{1}{2}\right) \approx 49,2$ maanden.
c De groeifactor is 1,0271 per jaar.
De verdubbelingstijd t is $t = {}^{1,0271}\log(2) \approx 25,9$ jaar.
- 19 a** Per 6,6 jaar halveert de hoeveelheid radioactieve straling van Radium-228.
De groeifactor per 6,6 jaar is 0,5.
b De groeifactor per jaar is $0,5^{\frac{1}{6,6}} = 0,9003\dots$
c De op te lossen vergelijking is $100 \cdot 0,9003\dots^t = 10$.
 $0,9003\dots^t = 0,1$
 $t = {}^{0,9003\dots}\log(0,1) = 21,924\dots$
Na ongeveer 21,9 jaar is de straling met 90% afgenomen.
- 20 a** De groeifactor per jaar is 1,05.
De verdubbelingstijd t is $t = {}^{1,05}\log(2) \approx 14$ jaren.
b Het volume is verviervoudigd wanneer het volume twee keer verdubbeld is.
Dat duurt $2 \times 14 = 28$ jaren.
- 016 a** In stap 1 is gebruik gemaakt van de regel: uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.
b In stap 2 is er zowel links als recht 3 af gehaald.
c $2t = {}^5\log(18) - 3$
 $t = \frac{1}{2} \cdot ({}^5\log(18) - 3)$
 $t = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\log(18)}{\log(5)} - 3 \right)$
 $t \approx -0,60$
d $4^{t+7} = 13$
 $t + 7 = {}^4\log(13)$
 $t = {}^4\log(13) - 7$
 $t \approx -5,15$
e $7^{t-4} = 19$
 $t - 4 = {}^7\log(19)$
 $t = {}^7\log(19) + 4$
 $t = \frac{\log(19)}{\log(7)} + 4$
 $t \approx 5,51$
f $8^{2t+1} = 24$
 $2t + 1 = {}^8\log(24)$
 $2t = {}^8\log(24) - 1$
 $t = \frac{1}{2} \cdot ({}^8\log(24) - 1)$
 $t = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\log(24)}{\log(8)} - 1 \right)$
 $t \approx 0,26$
g $11^{3t-2} = 100$
 $3t - 2 = {}^{11}\log(100)$
 $3t = {}^{11}\log(100) + 2$
 $t = \frac{1}{3} \cdot ({}^{11}\log(100) + 2)$
 $t = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\log(100)}{\log(11)} + 2 \right)$
 $t \approx 1,31$

12 Logaritmische functies

018 a $100\% + 12\% = 112\% = 1,12$

b Bij de verdubbelingstijd hoort de vergelijking $g^t = 2$ waarbij g de groeifactor is.

c In stap 1 is er gebruikgemaakt van de regel: uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.

d $t = \frac{\log(2)}{\log(1,12)} \approx 6,12$

U2 De groeifactor per week is $\left(\frac{11\,000}{8\,000}\right)^{\frac{1}{7}} = 1,0465\dots$

De verdubbelingstijd t is $t = {}^{1,0465\dots}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1,0465\dots)} \approx 15,2$ weken.

U3 De groeifactor van soort A is $1 - \frac{p}{100}$.

De halveringstijd van soort A is $1 - \frac{p}{100} \log\left(\frac{1}{2}\right)$.

De op te lossen vergelijking is $1 - \frac{p}{100} \log\left(\frac{1}{2}\right) = 6,52$.

Invoer: $y_1 = \frac{\log(0,5)}{\log(1 - 0,01x)}$ en $y_2 = 6,52$

Venster: $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 10$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (10,09; 6,52).

Hieruit volgt $p \approx 10,09$.

De groeifactor van soort B is 1,1009.

De verdubbelingstijd t van soort B is ${}^{1,1009}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1,1009)} \approx 7,21$ uren.

12.3 Grafieken van logaritmische functies

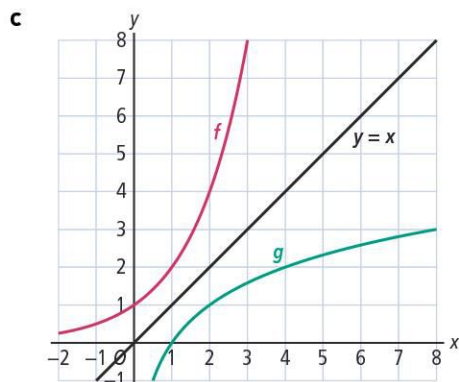
intro De bewering van Dion klopt niet. De grafiek is weliswaar afnemend stijgend, maar de tijd staat niet op de horizontale as, maar op de verticale as. Je ziet dat het aantal deelnemers steeds sneller stijgt naarmate de waarde van t groter wordt. Het aantal deelnemers groeit dus steeds sneller.

21 a

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

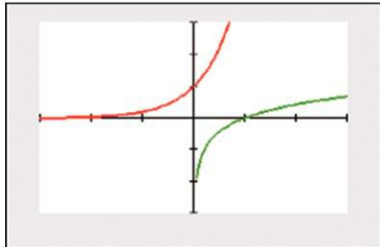
b

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)$	-2	-1	0	1	2	3



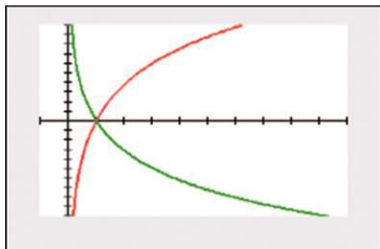
- d Zie opdracht c, de grafieken van f en g zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $y = x$.

22 a Invoer: $y_1 = 5^x$ en $y_2 = \frac{\log(x)}{\log(5)}$
 Venster: $-3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3$



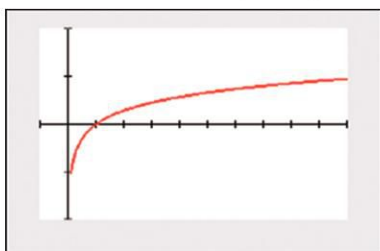
- b In het snijpunt met de y -as geldt $x = 0$.
 $f(0) = 5^0 = 1$ dus de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, 1)$.
 c Optie: nulpunt
 De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van k met de x -as zijn $(1, 0)$.
 d De grafiek van f heeft als asymptoot de x -as, oftewel de lijn $y = 0$.
 De grafiek van k heeft als asymptoot de y -as, oftewel de lijn $x = 0$.

23 a Invoer: $y_1 = \frac{\log(x)}{\log(1,2)}$ en $y_2 = \frac{\log(x)}{\log(0,8)}$
 Venster: $-1 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10$



- b De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f en g met de x -as zijn $(1, 0)$.
 c $h(x) = 1,2^x$
 d $h(0) = 1,2^0 = 1$; het snijpunt van de grafiek van h met de verticale as is $(0, 1)$.

24 a Invoer: $y_1 = \frac{\log(x)}{\log(11)}$
 Venster: $-1 \leq x \leq 10, -2 \leq y \leq 2$

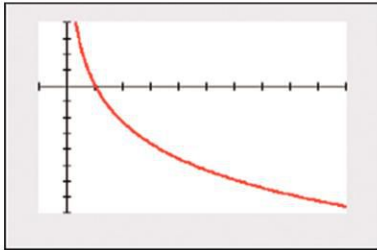


- b De coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as zijn $(1, 0)$. Dit betekent dat er één bacterie is aan het begin van het experiment.
 c De grafiek van t is afnemend stijgend.
 d Dit betekent dat het aantal bacteriën steeds sneller toeneemt.

12 Logaritmische functies

25 a Invoer: $y_1 = \frac{\log(x)}{\log(0,97)}$

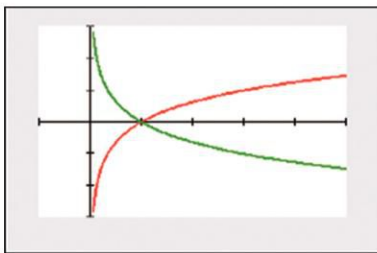
Venster: $-1 \leq x \leq 10, -80 \leq y \leq 40$



- b** De grafiek van t is afnemend dalend.
c De coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as zijn $(1, 0)$. De praktische betekenis hiervan is dat het dorp 10 000 inwoners heeft op 1 januari 2005.
d $t = {}^{0,97}\log(0,8) = \frac{\log(0,8)}{\log(0,97)} = 7,325\dots$
 Het dorp heeft nog maar 8000 inwoners in het jaar 2012.

26 a Invoer: $y_1 = \frac{\log(x)}{\log(3)}$ en $y_2 = \frac{\log(x)}{\log(\frac{1}{3})}$

Venster: $-1 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 3$



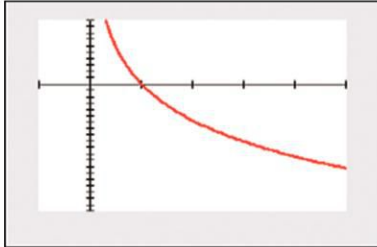
- b** De grafiek van f is afnemend stijgend.
c De grafiek van g stijgt afnemend dalend.
d De grafiek van h ontstaat uit de grafiek van f door deze 4 eenheden omhoog te schuiven.
e De grafiek van j ontstaat uit de grafiek van g door deze 3 eenheden omlaag te schuiven.

- 27** Grafiek 1 hoort bij $g(x)$.
 Grafiek 2 hoort bij $f(x)$.
 Grafiek 3 hoort bij $h(x)$.
 Grafiek 4 hoort bij $i(x)$.

- 28 a** Het verband tussen h en P is exponentieel met groeifactor 0,885. Hierbij hoort de formule $P = 1 \cdot 0,885^h$.
Deze formule kan worden geschreven als $h = {}^{0,885}\log(P)$.

b Invoer: $y_1 = \frac{\log(x)}{\log(0,885)}$

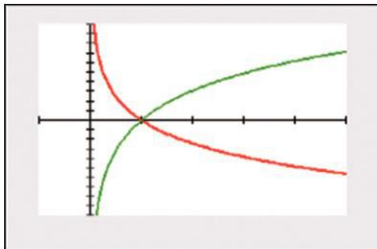
Venster: $-1 \leq x \leq 5, -20 \leq y \leq 10$



- c** De grafiek van h is afnemend dalend.
d De coördinaten van het snijpunt met de horizontale as zijn $(1, 0)$.
De praktische betekenis hiervan is dat de luchtdruk 1 atmosfeer is op 0 km hoogte.
e $h = {}^{0,885}\log(0,51) = 5,511\dots$
De grootste hoogte die voor mensen bewoonbaar is, is 5,5 km.

023 a Invoer: $y_1 = \frac{\log(x)}{\log(0,75)}$ en $y_2 = \frac{\log(x)}{\log(1,25)}$

Venster: $-1 \leq x \leq 5, -10 \leq y \leq 10$



- b** Het punt met coördinaten $(1, 0)$ ligt zowel op de grafiek van f als de grafiek van g .
c Dit punt ligt op de horizontale as omdat de y -coördinaat gelijk is aan 0.
d Het spiegelbeeld van de grafiek van $g(x) = {}^{1,25}\log(x)$ is de grafiek van $h(x) = 1,25^x$.
e De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de verticale as zijn $(0, 1)$.

- 027 a** De grafiek van f is afnemend stijgend omdat het grondtal groter is dan 1.
b De grafiek van g is afnemend dalend omdat het grondtal tussen 0 en 1 ligt.
c De grafiek van h is afnemend stijgend en de grafiek van i is afnemend dalend.
d De grafiek van f ontstaat door elke punt op de grafiek van h 2 omhoog te schuiven.
e De grafiek i ontstaat uit de grafiek van g door elk punt 2 omlaag te schuiven.
f Grafiek 1 hoort bij $h(x)$.
Grafiek 2 hoort bij $i(x)$.
Grafiek 3 hoort bij $f(x)$.
Grafiek 4 hoort bij $g(x)$.

12 Logaritmische functies

U4 Wanneer de grafiek van f eerst gespiegeld wordt in de lijn $y = x$, krijg je de grafiek van $y = {}^2\log(x)$. Wanneer deze grafiek p eenheden verticaal verschoven wordt, krijg je de grafiek van $y = {}^2\log(x) + p$. De coördinaten van $(4, 0)$ in deze formule invullen geeft

$${}^2\log(4) + p = 0$$

$$2 + p = 0$$

$$p = -2$$

Hieruit volgt $h(x) = {}^2\log(x) - 2$.

U5 De lijn $x = -4$ is de asymptoot, hieruit volgt $q = 4$.

$$f(x) = p + {}^2\log(x + 4)$$

Invullen van de coördinaten van $(0, 0)$ geeft

$$p + {}^2\log(0 + 4) = 0$$

$$p + 2 = 0$$

$$p = -2$$

We weten nu dat $f(x) = -2 + {}^2\log(x + 4)$.

$$f(12) = -2 + {}^2\log(12 + 4) = -2 + 4 = 2$$

Ja, het punt $(12, 2)$ ligt op de grafiek van f .

12.4 Rekenregels voor logaritmen

intro Ze vinden hetzelfde antwoord. Pim berekent twee keer de tijd die het kost om te verdrievoudigen en telt de antwoorden bij elkaar op. Murat bedenkt dat het twee keer verdrievoudigen hetzelfde is als vernegenvoudigen. Hij berekent daarom hoelang het duurt voordat het aantal bladluizen is vernegenvoudigd.

- 29 a** $21 = 3 \cdot 7 = 2^p \cdot 2^q = 2^{p+q}$
- b** Uit $2^{p+q} = 21$ volgt $p + q = {}^2\log(21)$ vanwege de regel: uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.
- c** Omdat er ook geldt dat $p + q = {}^2\log(3) + {}^2\log(7)$.
- d** Stel ${}^3\log(5) = p$ en ${}^3\log(15) = q$
 Dan geldt: $5 = 3^p$ en $15 = 3^q$
 En: $75 = 5 \cdot 15 = 3^p \cdot 3^q = 3^{p+q}$
 Hieruit volgt weer $p + q = {}^3\log(75)$, en we weten ook dat
 $p + q = {}^3\log(5) + {}^3\log(15)$ oftewel
 ${}^3\log(75) = {}^3\log(5) + {}^3\log(15)$
- e** ${}^3\log(75) = {}^3\log(5) + {}^3\log(15)$
 ${}^3\log(75) - {}^3\log(15) = {}^3\log(5)$
- f** ${}^5\log(2) + {}^5\log(2) + {}^5\log(2) = 3 \cdot {}^5\log(2)$
- g** $3 \cdot {}^5\log(2) = {}^5\log(2) + {}^5\log(2) + {}^5\log(2)$
 $3 \cdot {}^5\log(2) = {}^5\log(2 \cdot 2 \cdot 2)$
 $3 \cdot {}^5\log(2) = {}^5\log(2^3)$

- 30** a ${}^2\log(7) + {}^2\log(3) =$
 ${}^2\log(21)$
- b $4 \cdot {}^3\log(2) =$
 ${}^3\log(2^4) =$
 ${}^3\log(16)$
- c $2 \cdot {}^{12}\log(8) =$
 ${}^{12}\log(8^2) =$
 ${}^{12}\log(64)$
- d $6 \cdot {}^{0,3}\log(2) =$
 ${}^{0,3}\log(2^6) =$
 ${}^{0,3}\log(64)$
- e ${}^2\log(5) + 3 =$
 ${}^2\log(5) + {}^2\log(2^3) =$
 ${}^2\log(5) + {}^2\log(8) =$
 ${}^2\log(40)$
- f $\log(8) + \log(3) - 2 =$
 $\log(8) + \log(3) - \log(10^2) =$
 $\log(8) + \log(3) - \log(100) =$
 $\log(24) - \log(100) =$
 $\log(0,24)$
- 31** a $2 \cdot {}^5\log(4) + {}^5\log(a) =$
 ${}^5\log(4^2) + {}^5\log(a) =$
 ${}^5\log(16) + {}^5\log(a) =$
 ${}^5\log(16a)$
- b $3 \cdot {}^6\log(x) + 1 =$
 ${}^6\log(x^3) + {}^6\log(6) =$
 ${}^6\log(6x^3)$
- c ${}^3\log(128) - 2 \cdot {}^3\log(8) =$
 ${}^3\log(128) - {}^3\log(8^2) =$
 ${}^3\log(128) - {}^3\log(64) =$
 ${}^3\log(2)$
- d $\log(8) + \log(10) - 2 \cdot \log(2) =$
 $\log(8) + \log(10) - \log(2^2) =$
 $\log(80) - \log(4) =$
 $\log(20)$
- e ${}^7\log(48) - ({}^7\log(3) + {}^7\log(2)) =$
 ${}^7\log(48) - {}^7\log(6) =$
 ${}^7\log(8)$
- f ${}^5\log(a) + {}^5\log(a+1) + 2 =$
 ${}^5\log(a(a+1)) + {}^5\log(5^2) =$
 ${}^5\log(a^2 + a) + {}^5\log(25) =$
 ${}^5\log(25a^2 + 25a)$
- 32** a ${}^4\log(4^1) = 1$
 ${}^4\log(4^2) = 2$
 ${}^4\log(4^3) = 3$
 ${}^4\log(4^4) = 4$
- b ${}^8\log(g^a) = a$
- c A ${}^6\log(6^3) = 3$
 B ${}^{12}\log(12^9) = 9$
 C ${}^8\log(8^3) = 3$
- D ${}^7\log(49) = {}^7\log(7^2) = 2$
 E ${}^2\log(64) = {}^2\log(2^6) = 6$
 F ${}^5\log(625) = {}^5\log(5^4) = 4$
- 33** a In stap 2 is de regel $(g^a)^b = g^{ab}$ gebruikt.
- b In stap 3 is de regel: uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$ gebruikt.
- c $t = \frac{{}^b\log(12)}{p} = \frac{{}^b\log(12)}{{}^b\log(5)}$
- d Uit $5^t = 12$ volgt $t = {}^5\log(12)$. En dus is ${}^5\log(12) = \frac{{}^b\log(12)}{{}^b\log(5)}$

12 Logaritmische functies

34 a Zij gebruikt 2 als grondtal omdat 8 en 128 beide machten van 2 zijn.

$$\begin{aligned} \text{b } {}^8\log(128) &= \frac{{}^2\log(128)}{{}^2\log(8)} \\ &= \frac{{}^2\log(2^7)}{{}^2\log(2^3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

$$\text{c } {}^4\log(32) = \frac{{}^2\log(32)}{{}^2\log(4)} = \frac{{}^2\log(2^5)}{{}^2\log(2^2)} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

$$\text{d } {}^{27}\log(9) = \frac{{}^3\log(9)}{{}^3\log(27)} = \frac{{}^3\log(3^2)}{{}^3\log(3^3)} = \frac{2}{3}$$

$$\text{e } {}^{16}\log(4) = \frac{{}^2\log(4)}{{}^2\log(16)} = \frac{{}^2\log(2^2)}{{}^2\log(2^4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{f } {}^8\log(\sqrt{2}) = \frac{{}^2\log(\sqrt{2})}{{}^2\log(8)} = \frac{{}^2\log(2^{\frac{1}{2}})}{{}^2\log(2^3)} = \frac{(\frac{1}{2})}{3} = \frac{1}{6}$$

35 a De op te lossen vergelijking is $35,9 \cdot \log(v) + 4,1 = 75$.

$$35,9 \cdot \log(v) = 70,9$$

$$\log(v) = \frac{70,9}{35,9}$$

$$v = 10^{\frac{70,9}{35,9}} = 94,390\dots$$

Bij een snelheid van ongeveer 94,4 km/uur is het geluidsniveau 75 dB.

b Als de snelheid v verdubbelt, is deze gelijk aan $2v$ en invullen van $2v$ in de formule $D_v = 35,9 \cdot \log(v) + 4,1$ geeft

$$D_{2v} = 35,9 \cdot \log(2v) + 4,1$$

$$D_{2v} = 35,9 \cdot (\log(2) + \log(v)) + 4,1$$

$$D_{2v} = 35,9 \cdot \log(2) + 35,9 \cdot \log(v) + 4,1$$

$$D_{2v} = 10,806\dots + 35,9 \cdot \log(v) + 4,1$$

$$D_{2v} = 10,806\dots + D_v$$

Hieruit volgt dat het geluidsniveau met ongeveer 11 dB toeneemt als de snelheid verdubbelt.

36 a $E = 60 \times 10^6$ invullen in $n = \frac{2}{3} \cdot \log(\frac{1}{2}E) - 3$ geeft

$$n = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{1}{2} \cdot 60 \times 10^6\right) - 3 = 1,984\dots$$

De magnitude van een aardbeving waarbij 60×10^6 joule energie vrijkwam is ongeveer 2,0.

$$\text{b } 3 = \log(10^3) = \log(1000)$$

$$\text{c } n = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{1}{2}E\right) - 3$$

$$n = \log\left(\left(\frac{1}{2}E\right)^{\frac{2}{3}}\right) - \log(1000)$$

$$n = \log\left(\frac{\left(\frac{1}{2}E\right)^{\frac{2}{3}}}{1000}\right)$$

$$\text{d } E = 60 \times 10^6 \text{ invullen in } n = \log\left(\frac{\left(\frac{1}{2}E\right)^{\frac{2}{3}}}{1000}\right) \text{ geeft}$$

$$n = \log\left(\frac{\left(\frac{1}{2} \cdot 60 \times 10^6\right)^{\frac{2}{3}}}{1000}\right) = 1,984\dots$$

Het antwoord komt overeen met het antwoord van opdracht a.

- 031 a** Als eerste moet je het deel tussen de haakjes herschrijven. Hiervoor gebruik je de rekenregel ${}^s\log(a) + {}^s\log(b) = {}^s\log(a \cdot b)$.
- b** ${}^3\log(36) - ({}^3\log(6) + {}^3\log(2)) =$
 ${}^3\log(36) - {}^3\log(12) =$
 ${}^3\log(3)$
- c** Als eerste moet je de vermenigvuldiging herschrijven. Hiervoor gebruik je de rekenregel $p \cdot {}^s\log(a) = {}^s\log(a^p)$.
- d** Als tweede stap kun je de rekenregel ${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$ gebruiken.
- e** $3 \cdot {}^3\log(4) - {}^3\log(2) =$
 ${}^3\log(4^3) - {}^3\log(2) =$
 ${}^3\log(64) - {}^3\log(2) =$
 ${}^3\log(32)$

- 034 a** Het is niet handig om op grondtal 4 of 3 over te gaan omdat 4 en 128 niet beide een macht van 4 of beide een macht van 3 zijn. 4 en 128 zijn daarentegen wel beide een macht van 2.
- b** ${}^4\log(128) = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$
- c** $b = 3$ is een goede keuze omdat 9 en 27 beide machten van 3 zijn.
- d** ${}^9\log(27) = \frac{{}^3\log(27)}{{}^3\log(9)} = \frac{{}^3\log(3^3)}{{}^3\log(3^2)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
- e** ${}^{16}\log(64) = \frac{{}^2\log(64)}{{}^2\log(16)} = \frac{{}^2\log(2^6)}{{}^2\log(2^4)} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$
- ${}^9\log(243) = \frac{{}^3\log(243)}{{}^3\log(9)} = \frac{{}^3\log(3^5)}{{}^3\log(3^2)} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$
- ${}^{25}\log(\sqrt{5}) = \frac{{}^5\log(\sqrt{5})}{{}^5\log(25)} = \frac{{}^5\log(5^{\frac{1}{2}})}{{}^5\log(5^2)} = \frac{(\frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{4}$

- U6 a** $\log(4) = \log(2) + \log(2) = 0,3010 + 0,3010 = 0,6020$
 $\log(6) = \log(2) + \log(3) = 0,3010 + 0,4771 = 0,7781$
 $\log(8) = \log(2) + \log(2) + \log(2) = 0,3010 + 0,3010 + 0,3010 = 0,9030$
 $\log(9) = \log(3) + \log(3) = 0,4771 + 0,4771 = 0,9542$
- b** $\log(5) + \log(2) = \log(10) = 1$
 Hieruit volgt $\log(5) = 1 - \log(2)$.
- c** Je kunt met deze gegevens de logaritme met grondtal 10 berekenen van de getallen 12, 15, 16, 18 en 20. Je gebruikt hierbij
 $\log(12) = \log(2) + \log(2) + \log(3)$
 $\log(15) = \log(5) + \log(3)$
 $\log(16) = \log(2) + \log(2) + \log(2) + \log(2)$
 $\log(18) = \log(2) + \log(3) + \log(3)$
 $\log(20) = \log(2) + \log(2) + \log(5)$

- U7 a** $10^{\log(4)} \cdot {}^9\log(2) = 4 \cdot {}^9\log(2) = {}^9\log(2^4) = {}^9\log(16)$
- b** $\log(x^3) - \log(2x) = \log\left(\frac{1}{2}x^2\right)$
- c** ${}^2\log(8) + {}^7\log(3x) + {}^7\log(x^2) =$
 $3 + {}^7\log(3x) + {}^7\log(x^2) =$
 ${}^7\log(343) + {}^7\log(3x) + {}^7\log(x^2) =$
 ${}^7\log(1029x^3)$
- d** $3 \cdot {}^{0,5}\log(p) - {}^{0,5}\log(p^2) = {}^{0,5}\log(p^3) - {}^{0,5}\log(p^2) = {}^{0,5}\log(p)$

12 Logaritmische functies

12.5 Formules herleiden

intro Er bestaat een exponentieel verband tussen G en t . De groeifactor per 10°C is 0,88. De groeifactor per 1°C is $0,88^{\frac{1}{10}} \approx 0,987$. Het verband tussen G en t wordt daarom gegeven door $G = 334 \cdot 0,987^t$. Met deze formule en het gewicht dat de ballon kan tillen, kun je een vergelijking opstellen. Door de ontstane vergelijking op te lossen, kun je de buitentemperatuur bepalen.

37 a $y = 3^{t+2} = 3^t \cdot 3^2 = 3^t \cdot 9 = 9 \cdot 3^t$

b Hiervoor gebruik je de rekenregel $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$.

c $y = 4^{2t+3} = 4^{2t} \cdot 4^3 = (4^2)^t \cdot 64 = 64 \cdot 16^t$

38 a $y = 2^{3+t}$

$$y = 2^3 \cdot 2^t$$

$$y = 8 \cdot 2^t$$

d $y = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-t}$

$$y = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-t}$$

$$y = 2 \cdot (2^{-1})^{-t}$$

$$y = 2 \cdot 2^t$$

b $y = 15 \cdot 2^{t+4}$

$$y = 15 \cdot 2^t \cdot 2^4$$

$$y = 15 \cdot 2^t \cdot 16$$

$$y = 240 \cdot 2^t$$

c $y = 3^{-2+3t}$

$$y = 3^{-2} \cdot 3^{3t}$$

$$y = \frac{1}{9} \cdot (3^3)^t$$

$$y = \frac{1}{9} \cdot 27^t$$

e $y = 6 \cdot 4^{\frac{1}{2}t-2}$

$$y = 6 \cdot 4^{\frac{1}{2}t} \cdot 4^{-2}$$

$$y = 6 \cdot (4^{\frac{1}{2}})^t \cdot \frac{1}{16}$$

$$y = \frac{3}{8} \cdot 2^t$$

f $y = 4^{2t-1}$

$$y = 4^{2t} \cdot 4^{-1}$$

$$y = (4^2)^t \cdot \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{4} \cdot 16^t$$

39 a In stap 1 zijn links en rechts verwisseld.

In stap 2 links en rechts -6 .

b In stap 3 gebruikt Corine de regel: uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.

c $x = {}^4\log(y-6)$

d $y = 3^x - 8$

$$3^x - 8 = y$$

$$3^x = y + 8$$

$$x = {}^3\log(y+8)$$

40 a Het verband tussen P en t is exponentieel met groeifactor 0,96 per uur.

De beginhoeveelheid is 100% omdat de accu aan het begin helemaal vol is.

b In stap 2 is links en rechts door 100 gedeeld.

c $100 \cdot 0,96^t = P$

$$0,96^t = \frac{P}{100}$$

$$t = {}^{0,96}\log\left(\frac{P}{100}\right)$$

d $t = {}^{0,96}\log\left(\frac{20}{100}\right) = 39,425\dots$

Na ongeveer 39,4 uur is de telefoon onbruikbaar geworden.

$$\begin{aligned} 41 \text{ a } q &= 14^p \\ 14^p &= q \\ p &= {}^{14}\log(q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } q &= 9 + 2^p \\ 9 + 2^p &= q \\ 2^p &= q - 9 \\ p &= {}^2\log(q - 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } q &= 9 \cdot 10^p \\ 9 \cdot 10^p &= q \\ 10^p &= \frac{1}{9}q \\ p &= \log\left(\frac{1}{9}q\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } q &= 5 \cdot 3^p \\ 5 \cdot 3^p &= q \\ 3^p &= \frac{1}{5}q \\ p &= {}^3\log\left(\frac{1}{5}q\right) \\ \text{e } q &= 8^p - 5 \\ 8^p - 5 &= q \\ 8^p &= q + 5 \\ p &= {}^8\log(q + 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } q &= 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^p \\ 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^p &= q \\ \left(\frac{2}{7}\right)^p &= \frac{1}{3}q \\ p &= {}^{\frac{2}{7}}\log\left(\frac{1}{3}q\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 42 \text{ a } N &= 3 \cdot 4^t \\ 3 \cdot 4^t &= N \\ 4^t &= \frac{1}{3}N \\ t &= {}^4\log\left(\frac{1}{3}N\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } N &= -16 + 4 \cdot 5^t \\ -16 + 4 \cdot 5^t &= N \\ 4 \cdot 5^t &= N + 16 \\ 5^t &= \frac{1}{4}N + 4 \\ t &= {}^5\log\left(\frac{1}{4}N + 4\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } 6 \cdot 10^t + 2 &= 8N \\ 6 \cdot 10^t &= 8N - 2 \\ 10^t &= 1\frac{1}{3}N - \frac{1}{3} \\ t &= \log\left(1\frac{1}{3}N - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 3N - 2 &= \frac{1}{12} \cdot 4^t \\ \frac{1}{12} \cdot 4^t &= 3N - 2 \\ 4^t &= 36N - 24 \\ t &= {}^4\log(36N - 24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } 15N \cdot 6^t &= 5 \\ 6^t &= \frac{5}{15N} \\ t &= {}^6\log\left(\frac{1}{3N}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } 4N + 2 \cdot 2^t &= 16 \\ 2 \cdot 2^t &= 16 - 4N \\ 2^t &= 8 - 2N \\ t &= {}^2\log(8 - 2N) \end{aligned}$$

$$43 \text{ a } N = 600 \cdot 2^t$$

$$\begin{aligned} \text{b } 600 \cdot 2^t &= N \\ 2^t &= \frac{1}{600}N \\ t &= {}^2\log\left(\frac{1}{600}N\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } N &= 30\,000 \text{ invullen in } t = {}^2\log\left(\frac{1}{600}N\right) \text{ geeft} \\ t &= {}^2\log\left(\frac{1}{600} \cdot 30\,000\right) \\ t &= {}^2\log(50) \\ t &= 5,643... \end{aligned}$$

Na ongeveer 5,64 dagen zijn er 30 000 bacteriën.

$$44 \text{ a } \frac{7600}{8000} = 0,95, \frac{7220}{7600} = 0,95, \frac{6859}{7220} = 0,95 \text{ en } \frac{6516}{6859} \approx 0,95.$$

De groeifactor is steeds 0,95, dus het aantal knaagdieren neemt exponentieel af met 5% per jaar.

$$\text{b } K = 8000 \cdot 0,95^t$$

$$\begin{aligned} \text{c } \text{Bij een halveringstijd } t \text{ hoort de vergelijking } 0,95^t &= \frac{1}{2}. \\ t &= {}^{0,95}\log\left(\frac{1}{2}\right) = 13,513... \end{aligned}$$

De halveringstijd is ongeveer 13,5 jaar.

12 Logaritmische functies

- d $K = 8000 \cdot 0,95^t$
 $8000 \cdot 0,95^t = K$
 $0,95^t = \frac{1}{8000} K$
 $t = {}^{0,95}\log\left(\frac{1}{8000} K\right)$
- e $t = {}^{0,95}\log\left(\frac{1}{8000} \cdot 4000\right) \approx 13,5$
 Het antwoord komt overeen met het antwoord van opdracht c.

- 45 a** Op het moment van inschenken is $t = 0$.
 $T = 21 + 66 \cdot 0,9^0$
 $T = 21 + 66 \cdot 1 = 87$
 Op het moment van inschenken was de thee 87°C .
- b** De omgevingstemperatuur is 21°C , want dat is de temperatuur die de thee uiteindelijk zal bereiken (vul hiervoor voor t een zeer groot getal in).
- c** $21 + 66 \cdot 0,9^t = T$
 $66 \cdot 0,9^t = T - 21$
 $0,9^t = \frac{1}{66}(T - 21)$
 $t = {}^{0,9}\log\left(\frac{1}{66}(T - 21)\right)$
 $t = {}^{0,9}\log\left(\frac{1}{66}\right) + {}^{0,9}\log(T - 21)$
 $t \approx 39,8 + {}^{0,9}\log(T - 21)$
- d** $t = 39,8 + {}^{0,9}\log(35 - 21) = 14,752\dots$
 $t = 39,8 + {}^{0,9}\log(60 - 21) = 5,028\dots$
 De thee is gedurende $14,752\dots - 5,028\dots \approx 9,7$ minuten goed drinkbaar.

- 041 a** Stap 2: links en rechts: 12
 Stap 3: herleid (als je iets door 12 deelt, krijg je $\frac{1}{12}$ deel hier van)
- b** In stap 4 wordt gebruik gemaakt van de regel: uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.
- c** $2^t = \frac{1}{12}h$
 $t = {}^2\log\left(\frac{1}{12}h\right)$
- d** $h = 9^t$
 $9^t = h$
 $t = {}^9\log(h)$
- e** $h = \frac{1}{10} \cdot 3^t$
 $\frac{1}{10} \cdot 3^t = h$
 $3^t = 10h$
 $t = {}^3\log(10h)$
- f** $h = 12^t + 8$
 $12^t + 8 = h$
 $12^t = h - 8$
 $t = {}^{12}\log(h - 8)$
- g** $h = 5 + 6^t$
 $5 + 6^t = h$
 $6^t = h - 5$
 $t = {}^6\log(h - 5)$
- h** $h = 2 \cdot 10^t$
 $2 \cdot 10^t = h$
 $10^t = \frac{1}{2}h$
 $t = \log\left(\frac{1}{2}h\right)$
- i** $h = 7 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^t$
 $7 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^t = h$
 $\left(\frac{3}{5}\right)^t = \frac{1}{7}h$
 $t = {}^{\frac{3}{5}}\log\left(\frac{1}{7}h\right)$

- 042 a** Stap 2: links en rechts + 8.
- b** Op de puntjes hoort het getal 4 te staan, want links en rechts is door 4 gedeeld.
- c** In stap 4 is de breuk gesplitst.

$$\begin{aligned} \text{d } 5^x &= \frac{y+8}{4} \\ 5^x &= \frac{1}{4}y + 2 \\ x &= {}^5\log\left(\frac{1}{4}y + 2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } y &= 2 \cdot 5^x + 4 \\ 2 \cdot 5^x + 4 &= y \\ 2 \cdot 5^x &= y - 4 \\ 5^x &= \frac{y-4}{2} \\ 5^x &= \frac{1}{2}y - 2 \\ x &= {}^5\log\left(\frac{1}{2}y - 2\right) \end{aligned}$$

$$\text{U8 a } 2(4p-3) \cdot 3^q = 32$$

$$2(4p-3) = \frac{32}{3^q}$$

$$8p-6 = \frac{32}{3^q}$$

$$8p = \frac{32}{3^q} + 6$$

$$p = \frac{4}{3^q} + \frac{3}{4}$$

$$\text{b } 10^p - 3 \cdot 10^p = 10q$$

$$-2 \cdot 10^p = 10q$$

$$10^p = -5q$$

$$p = \log(-5q)$$

$$\text{c } 7 \cdot 3^{2p+2} - 14q = 0$$

$$7 \cdot 3^{2p+2} = 14q$$

$$3^{2p+2} = 2q$$

$$2p+2 = {}^3\log(2q)$$

$$2p = {}^3\log(2q) - 2$$

$$p = \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(2q) - 1$$

$$\text{d } q = 2(3 - 5^{3p+4})$$

$$2(3 - 5^{3p+4}) = q$$

$$3 - 5^{3p+4} = \frac{1}{2}q$$

$$-5^{3p+4} = \frac{1}{2}q - 3$$

$$5^{3p+4} = -\frac{1}{2}q + 3$$

$$3p+4 = {}^5\log\left(-\frac{1}{2}q + 3\right)$$

$$3p = {}^5\log\left(-\frac{1}{2}q + 3\right) - 4$$

$$p = \frac{1}{3} \cdot {}^5\log\left(-\frac{1}{2}q + 3\right) - 1\frac{1}{3}$$

$$\text{e } 7^{p \cdot q} = 10$$

$$p \cdot q = {}^7\log(10)$$

$$p = \frac{{}^7\log(10)}{q}$$

$$\text{f } 3^{2p-6} = 9q$$

$$3^{2p-6} = 3^{2q}$$

$$2p-6 = 2q$$

$$2p = 2q + 6$$

$$p = q + 3$$

$$\text{U9 } m = 18,24 \cdot 0,301^c$$

$${}^3\log(m) = {}^3\log(18,24 \cdot 0,301^c)$$

$${}^3\log(m) = {}^3\log(18,24) + {}^3\log(0,301^c)$$

$${}^3\log(m) = {}^3\log(18,24) + c \cdot {}^3\log(0,301)$$

$${}^3\log(m) \approx 2,64 - 1,09c \text{ dus } a \approx 2,64 \text{ en } b \approx 1,09.$$

12.6 Logaritmische schalen

intro Een bacterie is 0,001 mm en een virus is 0,0001 mm.

Een bacterie is $0,0001 : 0,001 = 10$ keer zo groot.

Een rode bloedcel is 0,01 mm.

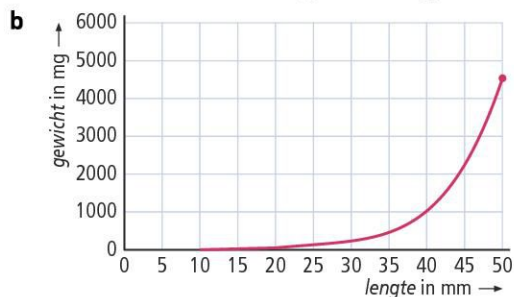
Een rode bloedcel is $0,001 : 0,01 = 10$ keer zo groot.

Bij de schaalverdeling wordt steeds vermenigvuldigd met 10.

12 Logaritmische functies

- 46 a** $53 : 12 \approx 4,4$, $233 : 53 \approx 4,4$, $1029 : 233 \approx 4,4$ en $4539 : 1029 \approx 4,4$.

De groeifactoren per 10 mm zijn steeds ongeveer hetzelfde, dus is het verband tussen de lengte en het gewicht exponentieel.



- c** Je moet zowel erg kleine getallen als erg grote getallen in het assenstelsel verwerken.

- 47 a** Op schaalverdeling A is $a = 3,5$ en $b = 0,25$.

- b** $0,01 = 10^{-2}$, $0,1 = 10^{-1}$, $1 = 10^0$, $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$ en $10\,000 = 10^4$.

- c** Bij a hoort $10^{3,5}$ en bij b hoort $10^{0,25}$.

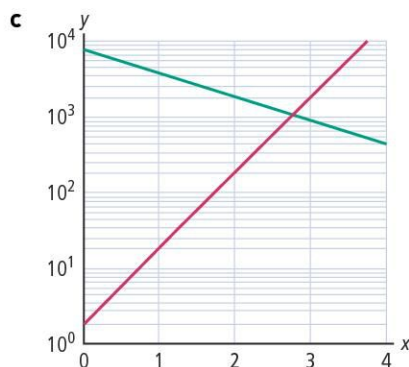
- d** Bij a hoort $10^{3,5} \approx 3162,28$ en bij b hoort $10^{0,25} \approx 1,78$.

- e** Bij het getal 550 op schaalverdeling B hoort het getal $\log(550) \approx 2,74$ op schaalverdeling A.

48 a

x	0	1	2	3	4
y	2	20	200	2000	20\,000

- b** Dat kun je zien omdat er per stap steeds met 10 wordt vermenigvuldigd op de verticale as.



d

x	0	1	2	3	4
y	8000	4000	2000	1000	500

De grafiek zie je in het groen bij opdracht 48c.

- e** De grafieken zijn rechte lijnen.

- 49 a** De concentratie is 10 na 10 dagen, na 15 dagen en na 25 dagen.

De concentratie is 100 na 30 dagen.

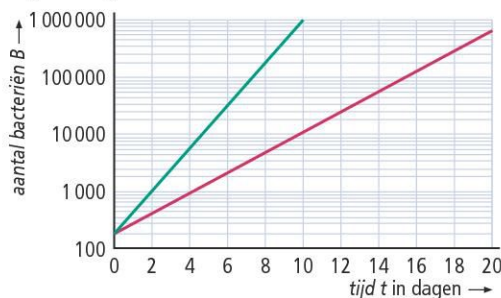
De concentratie is 1000 na 35 dagen en na 48 dagen.

- b** In punt A lees je op de verticale as $10^{3,5}$ af en $10^{3,5} \approx 3162$.

- c** Na 25 dagen is de concentratie 10 en na 40 dagen is de concentratie 10000.

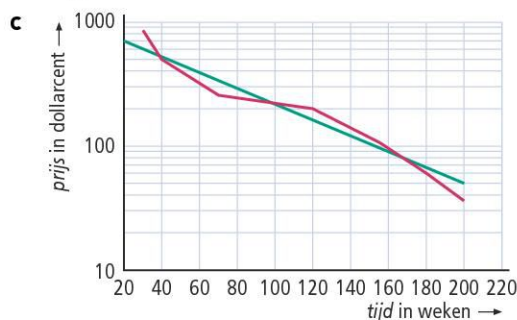
- d De groeifactor per dag is $\left(\frac{10000}{10}\right)^{\frac{1}{15}} \approx 1,585$.
- e Na 25 dagen is de concentratie 10. De concentratie die hoort bij 0 dagen is $10 : 1,585^{25} \approx 0,0001$. De formule is $N = 0,0001 \cdot 1,585^t$ met N de antistoffenconcentratie en t het aantal dagen.

- 50** a De grafiek is een rechte stijgende lijn en de schaalverdeling op de verticale as is logaritmisch, dus het aantal bacteriën nam exponentieel toe.
- b Op $t = 0$ zijn er 200 bacteriën en op $t = 20$ zijn er 600 000 bacteriën in de kip aanwezig. De groeifactor per dag is $\left(\frac{600\,000}{200}\right)^{\frac{1}{20}} \approx 1,492$.
De formule is $B = 200 \cdot 1,492^t$.
- c Bij de verdubbelingstijd t hoort de vergelijking $1,492^t = 2$.
De verdubbelingstijd is $t = {}^{1,492}\log(2) \approx 1,7$ dagen.
- d Bij de kip in de koelkast van 0°C waren er na 10 dagen 10 000 bacteriën.
Bij de kip in de koelkast van 6°C waren dit er dan $100 \times 10\,000 = 1\,000\,000$.



- e De groeifactor per dag is $\left(\frac{1\,000\,000}{200}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 2,951$.
De formule is $B = 200 \cdot 2,951^t$.

- 51** a Na 120 weken had de cryptomunt een prijs van 200 dollarcent.
- b Je mag ervan uitgaan dat het verband tussen P en t exponentieel is omdat de grafiek vrijwel een rechte lijn is en de schaalverdeling op de verticale as logaritmisch is.



- d De groene lijn gaat door de punten met coördinaten (20, 700) en (200, 50).
De groeifactor per week is $\left(\frac{50}{700}\right)^{\frac{1}{180}} = 0,985\dots$
De prijs die hoort bij 0 weken is $700 : 0,985\dots^{20} \approx 939$.
De formule is $P = 939 \cdot 0,985^t$.
- e Na 250 weken zal de cryptomunt volgens de formule $939 \cdot 0,985^{250} \approx 21$ dollarcent waard zijn.

- 048** a Met de rekenmachine vind je dat $10^0 = 1$. De andere machten zijn $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10\,000$ en $10^5 = 100\,000$.
- b De verticale as heeft een log-schaal omdat er per stap met 10 wordt vermenigvuldigd.

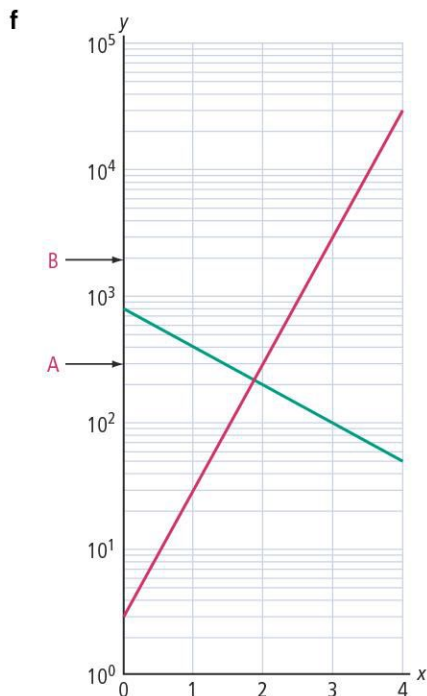
12 Logaritmische functies

c De lijn bij 10^2 geeft 100 aan, de lijn daarboven 200 en de lijn daarboven, waar de A bij staat, geeft de 300 aan.

d Bij B hoort de waarde 2000.

e

x	0	1	2	3	4
y	3	30	300	3000	30 000



g

x	0	1	2	3	4
y	800	400	200	100	50

De grafiek is de groene lijn bij opdracht O48f.

h De grafieken zijn rechte lijnen.

U10

Op de grafiek ligt onder andere het punt (100, 40).

Dus bij een diameter van 100 cm = 1 m hoort een hoogte van 40 meter.

Deze waarden invullen in de formule $H = c \cdot d^a$ geeft

$$40 = c \cdot 1^a$$

Hieruit volgt dat $c = 40$.

Op de grafiek ligt ook het punt (10, 10).

Dus bij een diameter van 10 cm = 0,1 m hoort een hoogte van 10 meter.

$$10 = 40 \cdot 0,1^a$$

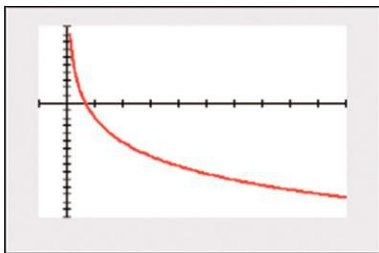
$$0,1^a = 0,25$$

$$a = {}^{0,1}\log(0,25) = \frac{\log(0,25)}{\log(0,1)} = \frac{\log(0,25)}{-1} = -\log(0,25) = 0,602\dots$$

De waarde van a is ongeveer 0,60.

12.7 Gemengde opdrachten

- 52 a** $P = 3^{2t+5}$
 $3^{2t+5} = P$
 $2t + 5 = {}^3\log(P)$
 $2t = {}^3\log(P) - 5$
 $t = \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(P) - 2\frac{1}{2}$
- b** $2P - 4 \cdot 6^t = 12$
 $-4 \cdot 6^t = -2P + 12$
 $6^t = \frac{1}{2}P - 3$
 $t = {}^6\log\left(\frac{1}{2}P - 3\right)$
- c** $P = 7(1 - 2^t)$
 $7(1 - 2^t) = P$
 $1 - 2^t = \frac{1}{7}P$
 $-2^t = \frac{1}{7}P - 1$
 $2^t = -\frac{1}{7}P + 1$
 $t = {}^2\log\left(-\frac{1}{7}P + 1\right)$
- d** $\frac{2P}{12^t} = 1$
 $12^t = 2P$
 $t = {}^{12}\log(2P)$
- 53 a** Het verband tussen $g(t)$ en t is exponentieel en de groeifactor is 0,75 per dag.
 Het functievoorschrift is $g(t) = 100 \cdot 0,75^t$.
- b** De op te lossen vergelijking is $100 \cdot 0,75^t = 15$.
 $0,75^t = 0,15$
 $t = {}^{0,75}\log(0,15) = 6,594\dots$
 Na 6 dagen en $0,594\dots \times 24 \approx 14$ uren (of 158 uren) is er nog 15 mg geneesmiddel in het bloed aanwezig.
- c** Voor de halveringstijd t geldt $0,75^t = 0,5$.
 De halveringstijd is $t = {}^{0,75}\log(0,5)$.
- d** $t = {}^{0,75}\log(0,5) = 2,409\dots$
 De halveringstijd is 2 dagen en $0,409\dots \times 24 \approx 10$ uren (of 58 uren).
- 54 a** ${}^4\log(2x) - {}^4\log(3x^2) = {}^4\log\left(\frac{2x}{3x^2}\right) = {}^4\log\left(\frac{2}{3x}\right)$
- b** ${}^8\log(64) \cdot {}^4\log(10) = 2 \cdot {}^4\log(10) = {}^4\log(10^2) = {}^4\log(100)$
- c** ${}^5\log(x-1) + {}^5\log(x+1) - 2 \cdot {}^5\log(x) =$
 ${}^5\log((x-1)(x+1)) - {}^5\log(x^2) = {}^5\log\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$
- d** ${}^3\log(12) - (3 \cdot {}^3\log(4) - {}^3\log(2)) =$
 ${}^3\log(12) - ({}^3\log(4^3) - {}^3\log(2)) =$
 ${}^3\log(12) - ({}^3\log(64) - {}^3\log(2)) =$
 ${}^3\log(12) - {}^3\log(32) = {}^3\log\left(\frac{12}{32}\right) = {}^3\log\left(\frac{3}{8}\right)$
- 55 a** Invoer: $y_1 = -2 + \frac{\log(x)}{\log(0,8)}$
 Venster: $-1 \leq x \leq 10, -15 \leq y \leq 10$



- b** De grafiek van f is afnemend dalend.
- c** De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van g door deze 2 eenheden omlaag te schuiven.

12 Logaritmische functies

- 56 a** Tussen 1959 en 1962 is de grafiek een rechte lijn. Een rechte lijn op logaritmisch papier geeft aan dat er sprake is van een exponentiële groei.
- b** In 1959 waren er 3000 rupsen per km^2 en in 1962 waren dat er 20 000 000. De groeifactor per jaar is $\left(\frac{20\,000\,000}{3000}\right)^{\frac{1}{3}} = 18,820\dots$
 $18,820\dots \times 100 - 100 = 1782,0\dots$
 De jaarlijkse procentuele toename is ongeveer 1782%.
- c** De groeifactor per dag is $18,820\dots^{\frac{1}{365}} = 1,0080\dots$
 Bij de verdubbelingstijd t hoort de vergelijking $1,0080\dots^t = 2$.
 De verdubbelingstijd t is $^1,0080\dots\log(2) = 86,201\dots$
 In ongeveer 86 dagen verdubbelde het aantal rupsen per km^2 .
- d** Van 1 juli 1962 tot 1 juli 1963 was de jaarlijkse absolute toename van het aantal rupsen het grootst.
- e** Op 1 juli 1965 waren er 10 000 000 rupsen per km^2 en op 1 juli 1966 waren dat er 20 000.
 De groeifactor in dat jaar was $20 : 10\,000 = 0,002$.
 De formule is $A = 10\,000\,000 \cdot 0,002^t$.

Onderzoeksopdrachten

- 57** In de Amerikaanse fabriek mag je vanwege de geluidsterkte maximaal 6 uur per dag werken, oftewel $t = 6$. Hier hoort een geluidsterkte van $L = -16,6 \cdot \log(6) + 105 = 92,082\dots$ dB bij.
 Dat is ongeveer 12 dB meer dan 80 dB. Per toename van 3 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden. $12 : 3 = 4$, dus de maximale werktijd moet 4 keer gehalveerd worden.
 In de Europese fabriek mag bij deze geluidsterkte maximaal $8 : 2^4 = 0,5$ uur, oftewel 30 minuten gewerkt worden.
- 58** Bij een rentepercentage van $p\%$ hoort de groeifactor $1 + 0,01p$.
 De bijbehorende verdubbelingstijd is $^{1+0,01p}\log(2)$.
 We moeten onderzoeken voor welke gehele rentepercentages p er geldt dat $70 : p$ niet meer dan 1% afwijkt van $^{1+0,01p}\log(2)$.
 Hieruit volgt de ongelijkheid $-0,01 < \frac{70:p - ^{1+0,01p}\log(2)}{^{1+0,01p}\log(2)} < 0,01$.
 Met de rekenmachine vind je dat p gelijk kan zijn aan 1, 2, 3 en 4.
 De afwijkingen zijn dan respectievelijk 0,49; 0,08; 0,50 en 0,98 procent.

Samenvatting

- S1 a** $3^t = 25$
 $t = {}^3\log(25)$
- b** $6^{t-4} = 20$
 $t - 4 = {}^6\log(20)$
 $t = {}^6\log(20) + 4$

- S2 a** De grafiek van f is afnemend dalend.
b De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door deze 7 eenheden omhoog te schuiven.

- S3** Bij assenstelsels A en B heeft de verticale as een logaritmische schaalverdeling. Dit kun je zien omdat er per stap met 10 wordt vermenigvuldigd.

- S4 a** $4^x = 7$
 $x = {}^4\log(7)$
 $x \approx 1,40$
- b** $9^{2x-6} = 14$
 $2x - 6 = {}^9\log(14)$
 $2x = {}^9\log(14) + 6$
 $x = \frac{1}{2} \cdot {}^9\log(14) + 3$
 $x \approx 3,60$

- S5 a** De halveringstijd t is ${}^{0,8}\log(0,5) \approx 3,106$.
b De verdubbelingstijd t is ${}^{2,3}\log(2) \approx 0,832$.

- S6 a** $3 \cdot {}^2\log(5) + {}^2\log(4) =$
 ${}^2\log(5^3) + {}^2\log(4) =$
 ${}^2\log(125) + {}^2\log(4) = {}^2\log(500)$
- b** ${}^4\log(x^5) - 2 \cdot {}^4\log(x) + 3 =$
 ${}^4\log(x^5) - {}^4\log(x^2) + {}^4\log(4^3) =$
 ${}^4\log(x^3) + {}^4\log(64) = {}^4\log(64x^3)$
- c** ${}^{16}\log(32) = \frac{{}^2\log(32)}{{}^2\log(16)} = \frac{{}^2\log(2^5)}{{}^2\log(2^4)} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

- S7 a** $p = 6^q - 3$
 $6^q - 3 = p$
 $6^q = p + 3$
 $q = {}^6\log(p + 3)$
- b** $p = 5 + 2 \cdot 3^q$
 $5 + 2 \cdot 3^q = p$
 $2 \cdot 3^q = p - 5$
 $3^q = \frac{1}{2}p - 2\frac{1}{2}$
 $q = {}^3\log\left(\frac{1}{2}p - 2\frac{1}{2}\right)$

- S8 a** De waarde van b is $b = 10^{2,5} \approx 316$.
b Aan het begin van het experiment waren er 10 000 bacteriën.
c Na acht minuten waren er nog 30 bacteriën.

12 Logaritmische functies

Test jezelf

- T1**
- a** $8^t = 5$
 $t = {}^8\log(5)$
 $t \approx 0,77$
- b** $3^t + 1 = 14$
 $3^t = 13$
 $t = {}^3\log(13)$
 $t \approx 2,33$
- c** $10^t = 19$
 $t = \log(19)$
 $t \approx 1,28$
- d** $4^{t-2} = 12$
 $t - 2 = {}^4\log(12)$
 $t = {}^4\log(12) + 2$
 $t \approx 3,79$
- e** $6 + 9^t = 23$
 $9^t = 17$
 $t = {}^9\log(17)$
 $t \approx 1,29$
- f** $5^{2t+3} = 24$
 $2t + 3 = {}^5\log(24)$
 $2t = {}^5\log(24) - 3$
 $t = \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(24) - 1\frac{1}{2}$
 $t \approx -0,51$
- T2**
- a** De groeifactor per jaar is 0,8.
 Bij de halveringstijd t hoort de vergelijking $0,8^t = 0,5$.
 De halveringstijd is $t = {}^{0,8}\log(0,5) = 3,106\dots$
 Na ongeveer 3,1 jaar is het aantal pinguïns gehalveerd.
- b** Van 100 naar 50 pinguïns betekent dat het aantal pinguïns halveert, dat duurt 3,1 jaar.
- c** De groeifactor per jaar van het aantal zeevogels is 1,054.
 De verdubbelingstijd t is $t = {}^{1,054}\log(2) = 13,179\dots$ jaren.
 De groeifactor per jaar van het aantal zeehonden is 0,982.
 De halveringstijd t is $t = {}^{0,982}\log(0,5) = 38,160\dots$ jaren.
 Het verschil tussen de verdubbelingstijd van het aantal zeevogels en de halveringstijd van het aantal zeehonden is $38,160\dots - 13,179\dots \approx 25$ jaren.
- T3**
- a** ${}^{24}\log(3) + {}^{24}\log(18) = {}^{24}\log(54)$
- b** ${}^2\log(12) - {}^2\log(2) = {}^2\log(6)$
- c** ${}^4\log(8) + 2 \cdot {}^4\log(3) = {}^4\log(8) + {}^4\log(3^2) = {}^4\log(8) + {}^4\log(9) = {}^4\log(72)$
- d** ${}^4\log(15) - 2 \cdot {}^4\log(\sqrt{3}) = {}^4\log(15) - {}^4\log((\sqrt{3})^2) = {}^4\log(15) - {}^4\log(3) = {}^4\log(5)$
- e** $3 \cdot {}^7\log(6) - {}^7\log(9) = {}^7\log(6^3) - {}^7\log(9) = {}^7\log(216) - {}^7\log(9) = {}^7\log(24)$
- f** ${}^6\log(g+4) + {}^6\log(g-4) = {}^6\log((g+4)(g-4)) = {}^6\log(g^2 - 16)$
- T4**
- a** ${}^4\log(128) = \frac{{}^2\log(128)}{{}^2\log(4)} = \frac{{}^2\log(2^7)}{{}^2\log(2^2)} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$
- b** ${}^{36}\log(216) = \frac{{}^6\log(216)}{{}^6\log(36)} = \frac{{}^6\log(6^3)}{{}^6\log(6^2)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
- c** ${}^{100}\log(\sqrt{10}) = \frac{\log(\sqrt{10})}{\log(100)} = \frac{\log(10^{\frac{1}{2}})}{\log(10^2)} = \frac{(\frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{4}$
- T5**
- a** Het grondtal van deze functie ligt tussen 0 en 1, want de grafiek is afnemend dalend.
- b** Het grondtal van deze functie is groter dan 1, want de grafiek is toenemend stijgend.
- c** De grafiek die zo ontstaat heeft als functievoorschrift $g(x) = 2^x$.
- d** Een functievoorschrift voor grafiek 4 is $h(x) = {}^2\log(x) + 3$.

T6 a

t in jaren	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A in km^2	6	10	18	32	56	100	178	251	316

- b** $\frac{10}{6} \approx 1,7$, $\frac{18}{10} = 1,8$, $\frac{32}{18} \approx 1,8$, $\frac{56}{32} \approx 1,8$, $\frac{100}{56} \approx 1,8$, $\frac{178}{100} \approx 1,8$, $\frac{251}{178} \approx 1,4$ en $\frac{316}{251} \approx 1,3$.
In het begin is de groeifactor ongeveer 1,8 maar daarna wordt deze kleiner.
- c** In de grafiek zie je dat de groei eerst vrijwel exponentieel verloopt omdat bij een verticale as met een logaritmische schaalverdeling de grafiek een rechte lijn is.
- d** $A = 6 \cdot 1,8^t$
- e** Na 8 jaren verandert de oppervlakte van de waterplanten niet meer. Het meer zal dan volledig begroeid zijn met waterplanten. In de tabel van opdracht a zien we dat het meer een oppervlakte heeft van 316 km^2 .

- T7 a** $R = 8^t$
 $8^t = R$
 $t = {}^8\log(R)$
- b** $R = 12 \cdot 14^t$
 $12 \cdot 14^t = R$
 $14^t = \frac{1}{12} R$
 $t = {}^{14}\log\left(\frac{1}{12} R\right)$
- c** $R = 4 \cdot 5^t + 6$
 $4 \cdot 5^t + 6 = R$
 $4 \cdot 5^t = R - 6$
 $5^t = \frac{1}{4} R - 1\frac{1}{2}$
 $t = {}^5\log\left(\frac{1}{4} R - 1\frac{1}{2}\right)$
- d** $R = 6^t - 5$
 $6^t - 5 = R$
 $6^t = R + 5$
 $t = {}^6\log(R + 5)$
- e** $12R = 6 \cdot 7^t - 24$
 $6 \cdot 7^t - 24 = 12R$
 $6 \cdot 7^t = 12R + 24$
 $7^t = 2R + 4$
 $t = {}^7\log(2R + 4)$
- f** $R \cdot 3^{t-2} = 5$
 $3^{t-2} = \frac{5}{R}$
 $t - 2 = {}^3\log\left(\frac{5}{R}\right)$
 $t = {}^3\log\left(\frac{5}{R}\right) + 2$

- T8 a** De groeifactor per dag is 0,8. Met de vergelijking $0,8^t = 0,5$ kun je berekenen hoelang het duurt voordat er nog maar de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid helium in de ballon zit.
- b** $t = {}^{0,8}\log(0,5) = 3,106... \approx 3,1$
- c** Na twee keer de halveringstijd is er nog maar 25% van de oorspronkelijke hoeveelheid helium in de ballon aanwezig.
Dat duurt $2 \times 3,106... = 6,212... \text{ dagen}$.
Na 6 dagen en $24 \times 0,212... \approx 5 \text{ uur}$ (of 149 uur) is er nog maar 25% van de oorspronkelijke hoeveelheid helium in de ballon.

Extra oefening

- E1 a** ${}^{100}\log(175) = \frac{\log(175)}{\log(100)} \approx 1,122$
- b** ${}^{1,5}\log(75) = \frac{\log(75)}{\log(1,5)} \approx 10,648$
- c** ${}^{0,3}\log(23,78) = \frac{\log(23,78)}{\log(0,3)} \approx -2,632$
- d** ${}^{\frac{1}{4}}\log(15) = \frac{\log(15)}{\log(\frac{1}{4})} \approx -1,953$

12 Logaritmische functies

- E2 a** $15^t = 30$
 $t = {}^{15}\log(30)$
 $t \approx 1,26$
- b** $5^{3t} = 40$
 $3t = {}^5\log(40)$
 $t = \frac{1}{3} \cdot {}^5\log(40)$
 $t \approx 0,76$
- c** $6^{t+6} = 18$
 $t + 6 = {}^6\log(18)$
 $t = {}^6\log(18) - 6$
 $t \approx -4,39$
- d** $8^{2t-3} = 6$
 $2t - 3 = {}^8\log(6)$
 $2t = {}^8\log(6) + 3$
 $t = \frac{1}{2} \cdot {}^8\log(6) + 1\frac{1}{2}$
 $t \approx 1,93$

- E3 a** De groeifactor per week is 1,032.
 Bij de verdubbelingstijd t hoort de vergelijking $1,032^t = 2$.
 De verdubbelingstijd t is $t = {}^{1,032}\log(2) \approx 22$ weken.
- b** De groeifactor per jaar is 0,9835.
 Bij de halveringstijd t hoort de vergelijking $0,9835^t = 0,5$.
 De halveringstijd t is $t = {}^{0,9835}\log(0,5) \approx 42$ jaren.

- E4 a** $5 \cdot {}^3\log(2) + 3 = {}^3\log(2^5) + {}^3\log(3^3) = {}^3\log(32) + {}^3\log(27) = {}^3\log(864)$
- b** $\log(24) - 3 \cdot \log(2) = \log(24) - \log(2^3) = \log(24) - \log(8) = \log(3)$
- c** $4 \cdot {}^6\log(3) - {}^6\log(9) = {}^6\log(3^4) - {}^6\log(9) = {}^6\log(81) - {}^6\log(9) = {}^6\log(9)$
- d** $3 \cdot {}^5\log(6) - {}^5\log(36) = {}^5\log(6^3) - {}^5\log(36) = {}^5\log(216) - {}^5\log(36) = {}^5\log(6)$
- e** ${}^7\log(5a^2) + {}^7\log(3a) = {}^7\log(15a^3)$
- f** ${}^{13}\log(b+1) + {}^{13}\log(b-1) = {}^{13}\log((b+1)(b-1)) = {}^{13}\log(b^2-1)$
- g** $2 \cdot {}^8\log(3p^2) = {}^8\log((3p^2)^2) = {}^8\log(9p^4)$
- h** ${}^{1,2}\log(10x^2) - {}^{1,2}\log(5x) = {}^{1,2}\log\left(\frac{10x^2}{5x}\right) = {}^{1,2}\log(2x)$

- E5 a** ${}^4\log(8) = \frac{{}^2\log(8)}{{}^2\log(4)} = \frac{{}^2\log(2^3)}{{}^2\log(2^2)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
- b** ${}^{27}\log(3) = \frac{{}^3\log(3)}{{}^3\log(27)} = \frac{{}^3\log(3^1)}{{}^3\log(3^3)} = \frac{1}{3}$
- c** ${}^{49}\log(343) = \frac{{}^7\log(343)}{{}^7\log(49)} = \frac{{}^7\log(7^3)}{{}^7\log(7^2)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
- d** ${}^8\log(256) = \frac{{}^2\log(256)}{{}^2\log(8)} = \frac{{}^2\log(2^8)}{{}^2\log(2^3)} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

- E6 a** $P = 4^t - 3$
 $4^t - 3 = P$
 $4^t = P + 3$
 $t = {}^4\log(P+3)$
- b** $P = 9^{t-1}$
 $9^{t-1} = P$
 $t - 1 = {}^9\log(P)$
 $t = {}^9\log(P) + 1$
- c** $P = 3 \cdot 2^t$
 $3 \cdot 2^t = P$
 $2^t = \frac{1}{3}P$
 $t = {}^2\log\left(\frac{1}{3}P\right)$
- d** $P - 5^t = 0$
 $-5^t = -P$
 $5^t = P$
 $t = {}^5\log(P)$
- e** $15P \cdot 3^t = 45$
 $3^t = \frac{45}{15P}$
 $t = {}^3\log\left(\frac{3}{P}\right)$
- f** $5 \cdot 6^t - 15P = 30$
 $5 \cdot 6^t = 30 + 15P$
 $6^t = 6 + 3P$
 $t = {}^6\log(6 + 3P)$

E7 a Volgens de figuur zaten er in de Pentium 4 processor $10^{7,6} \approx 40$ miljoen transistors.

b De groeifactor per jaar is $\left(\frac{730000000}{2500}\right)^{\frac{1}{36}} \approx 1,4185$.

Een formule bij dit groeimodel is $T = 2500 \cdot 1,4185^t$.

c Bij de verdubbelingstijd t hoort de vergelijking $1,4185^t = 2$.

De verdubbelingstijd t is $t = {}^{1,4185}\log(2) \approx 2,0$ jaar.

d Volgens het groeimodel had de 8-Core Xeon processor uit 2010

$T = 2500 \cdot 1,4185^{38} = 1\,470\,465\,819$ transistors.

Het werkelijke aantal van 2,3 miljard transistors wijkt hier

$\frac{2\,300\,000\,000 - 1\,470\,465\,819}{1\,470\,465\,819} \cdot 100\% \approx 56,4\%$ van af.

E8 a Het verband tussen K en t is exponentieel en de groeifactor per week is 1,048. Een formule die hierbij hoort is $K = 80 \cdot 1,048^t$.

b Bij de verdubbelingstijd t hoort de vergelijking $1,048^t = 2$.

De verdubbelingstijd t is $t = {}^{1,048}\log(2) \approx 14,8$ weken.

c $K = 80 \cdot 1,048^t$

$80 \cdot 1,048^t = K$

$1,048^t = \frac{1}{80} K$

$t = {}^{1,048}\log\left(\frac{1}{80} K\right)$

d $t = {}^{1,048}\log\left(\frac{1}{80} \cdot 1000\right) = 53,872\dots$

Na ongeveer 54 weken waren er 1000 kakkerlakken.

E9 a De grafieken zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

b Bij grafiek 2 hoort het functievoorschrift $g(x) = 3^x$.

c Bij de zo ontstane grafiek hoort het functievoorschrift $h(x) = {}^3\log(x) - 7$.

d De grafiek van j is afnemend dalend.

13 Binomiale verdelingen

Voorkennis

V1 a

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

- b De kans dat $S = 2$ is $\frac{1}{16}$.
 c De kans op uitkomst 5 is $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.
 d $P(S = 4)$ is groter dan $P(S = 2)$, omdat er meer mogelijkheden zijn om uitkomst 4 te krijgen dan er zijn om uitkomst 2 te krijgen.
 e Er zijn $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ mogelijkheden om uitkomst 5 of meer te krijgen.
 $P(S \geq 5) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

V2 a De kans op kop is elke worp gelijk aan $\frac{1}{2}$.

$$P(U = 4) = P(kkkk) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

- b $P(kkkk) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
 c Er zijn vier verschillende rijtjes, namelijk $kkkm$, $kkmk$, $kmkk$ en $mkkk$.
 d $P(U = 3) = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

V3 Er zijn drie mogelijkheden met twee vieren namelijk $44a$, $4a4$, $a44$ en elk met kans $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$, dus $P(X = 2) = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$.

V4 a $P(B = 0) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{64}{1000} = 0,064$
 $P(B = 1) = 3 \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{288}{1000} = 0,288$
 $P(B = 2) = 3 \times \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{432}{1000} = 0,432$
 $P(B = 3) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{216}{1000} = 0,216$

u	0	1	2	3
$P(B = u)$	0,064	0,288	0,432	0,216

$$E(B) = 0 \times 0,064 + 1 \times 0,288 + 2 \times 0,432 + 3 \times 0,216 = 1,8$$

- b Er zijn drie mogelijkheden om twee blauwe balletjes te trekken, namelijk bbr , brb en rbb .

$$\text{De kans op twee blauwe balletjes is } 3 \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{360}{720} = \frac{1}{2}.$$

V5 a $P(WRWRW) = \frac{8}{20} \times \frac{12}{20} \times \frac{8}{20} \times \frac{12}{20} \times \frac{8}{20} = \frac{73728}{3200000} = 0,02304$

b $P(WWWRR) = \frac{8}{20} \times \frac{8}{20} \times \frac{8}{20} \times \frac{12}{20} \times \frac{12}{20} = \frac{73728}{3200000} = 0,02304$

- c In het rooster neem je vanaf linksonder twee stappen naar rechts (rood) en drie stappen naar boven (wit). Het getal 10 hoort bij het bijbehorende roosterpunt, dus zijn er 10 rijtjes.
 d Je neemt in totaal 5 stappen in het rooster. Het aantal rijtjes waarbij je twee stappen naar rechts en drie stappen naar boven gaat, is gelijk aan het aantal rijtjes waarbij je drie stappen naar rechts en twee stappen naar boven gaat.

13 Binomiale verdelingen

- e Er zijn 10 rijtjes met twee keer rood en drie keer wit.
 $P(\text{twee keer rood en drie keer wit}) = 10 \times \left(\frac{12}{20}\right)^2 \times \left(\frac{8}{20}\right)^3 = 0,2304$
- f $P(\text{drie keer rood en twee keer wit}) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{12}{20}\right)^3 \times \left(\frac{8}{20}\right)^2$
 $= 10 \times 0,03456 = 0,3456$

- V6 a $P(X=4) = \binom{5}{4} \times \left(\frac{12}{20}\right)^4 \times \frac{8}{20} = 5 \times 0,05184 = 0,2592$
- b $P(\text{hoogstens vier rode knikkers}) = 1 - P(\text{vijf rode knikkers})$
 $= 1 - \left(\frac{12}{20}\right)^5 = 1 - 0,07776 = 0,92224$

- V7 a Voor de eerste kaart zijn er 48 kaarten, waarvan 44 geen mees zijn.
 Voor de tweede kaart zijn er 47 kaarten, waarvan 43 geen mees zijn.
 Voor de derde kaart zijn er 46 kaarten, waarvan 42 geen mees zijn.
 Voor de vierde kaart zijn er 45 kaarten, waarvan 41 geen mees zijn.

$$P(\text{geen enkele mees}) = \frac{44}{48} \times \frac{43}{47} \times \frac{42}{46} \times \frac{41}{45}$$

- b $\frac{44}{48} \times \frac{43}{47} \times \frac{42}{46} \times \frac{41}{45} \approx 0,6977$
- c $P(\text{minstens één mees}) = 1 - P(\text{geen enkele mees})$
 $= 1 - 0,6977 = 0,3023$
- d $P(\text{hoogstens drie mezen}) = 1 - P(\text{vier mezen})$
 $= 1 - \frac{4}{48} \times \frac{3}{47} \times \frac{2}{46} \times \frac{1}{45} = 1 - 0,000005139... \approx 0,999994$

13.1 De binomiale verdeling

intro De kans dat het eerste lot een prijs wint is $\frac{100}{10000} = 0,01$. De kans dat het tweede lot dan ook een prijs wint is $\frac{99}{9999} = 0,0099...$ dus niet 0,01. De kans dat de derde lot ook een prijs wint is $\frac{98}{9998} = 0,0098...$ dus ook niet 0,01. De kansen wijken niet veel van 0,01 af, maar Guus heeft ongelijk.

- 1 a $P(BBABAB) = 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = (0,5)^6 = 0,015625$
- b $P(BBABAB) = 0,4 \times 0,4 \times 0,6 \times 0,4 \times 0,6 \times 0,4 = (0,4)^4 \times (0,6)^2 = 0,009216$
 $P(ABBBAB) = 0,6 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,6 \times 0,4 = (0,4)^4 \times (0,6)^2 = 0,009216$
- c $\binom{6}{3} = 20$ manieren
- d $P(\text{eindstand 3-3}) = 20 \times 0,6^3 \times 0,4^3 = 0,27648$
- 2 a Die kans is $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0,01607... \approx 0,0161$.
- b $\binom{5}{2} = 10$ uitkomsten
- c De kans is $10 \times 0,01607... \approx 0,1608$.
- 3 a Hier wordt een kansexperiment 20 keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten goed en fout. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling.
 X is het aantal goed beantwoorde vragen, $n = 20$ en $p = \frac{1}{3}$.
- b Hierbij hoort geen binomiale verdeling. De kans op het kiezen van een jongen verandert na elke keuze.

- c Hierbij hoort geen binomiale verdeling. Er zijn bij elke worp zes mogelijke uitkomsten en geen twee.
- d Hier wordt een kansexperiment vijf keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten een twee of niet een twee. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling.
 X is het aantal tweeën, $n = 5$ en $p = \frac{1}{6}$.
- e Hierbij hoort geen binomiale verdeling. De kans op een rode knikker verandert na elke herhaling.
- 4 a Hier wordt een kansexperiment vijf keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten rood of niet rood. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. De kansverdeling van X is dus binomiaal verdeeld.

$$b \quad P(X = 3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{4}{10}\right)^3 \times \left(\frac{6}{10}\right)^2 = 10 \times 0,02304 \approx 0,2304$$

- 5 a Je kunt een greep van vijf knikkers opvatten als vijf keer een knikker trekken zonder terugleggen. De kans op een rode knikker verandert na elke trekking dus stochast Y is niet binomiaal verdeeld.

$$b \quad P(Y = 5) = \frac{20}{25} \times \frac{19}{24} \times \frac{18}{23} \times \frac{17}{22} \times \frac{16}{21} = 0,29181... \approx 0,2918$$

$$c \quad P(Y = 4) = \binom{5}{4} \times \frac{20}{25} \times \frac{19}{24} \times \frac{18}{23} \times \frac{17}{22} \times \frac{5}{21} = 0,45595... \approx 0,4560$$

$$P(Y < 4) = 1 - P(Y = 4) - P(Y = 5)$$

$$P(Y < 4) = 1 - 0,45595... - 0,29181... \approx 0,2522$$

6 a

vaas	aantal ballen		$P(X = 2)$	
	rood	wit	niet terugleggen	zonder terugleggen
A	4	6	$\frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = 0,16$	$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \approx 0,1333$
B	40	60	$\frac{40}{100} \times \frac{40}{100} = 0,16$	$\frac{40}{100} \times \frac{39}{99} \approx 0,1576$
C	400	600	$\frac{400}{1000} \times \frac{400}{1000} = 0,16$	$\frac{400}{1000} \times \frac{399}{999} \approx 0,1598$

- b Hoe groter het aantal ballen, hoe meer de kans bij de trekking zonder terugleggen op de kans bij de trekking met terugleggen gaat lijken.
 Als je zonder terugleggen een kleine hoeveelheid uit een groot aantal trekt, dan mag je dit opvatten als een trekking met terugleggen.
- 7 a Sanne neemt een greep uit het aantal toffees. Dit mag je opvatten als een trekking zonder terugleggen. De kans op succes (een droptoffee) verandert na elke trekking. Het aantal droptoffees is niet binomiaal verdeeld.
- b Er wordt een kleine steekproef van drie toffees getrokken uit een grote populatie van 200 toffees.

- c X is binomiaal verdeeld met $n = 3$ en $p = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$.

$$P(X = 0) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 3 \times \frac{3}{64} = \frac{9}{64}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = 3 \times \frac{9}{64} = \frac{27}{64}$$

$$P(X = 3) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

u	0	1	2	3
$P(X = u)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

13 Binomiale verdelingen

- 04 a** De kans dat de pijl op rood komt, is $\frac{1}{5}$.
 De kans dat de pijl niet op rood komt is $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.
- b** Hier wordt een kansexperiment tien keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten rood en niet rood. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling. R is het aantal keren dat de tol op rood komt, $n = 10$ en $p = \frac{1}{5}$.
- c** Dit is het aantal rijtjes met vier keer rood en zes keer niet rood.
- d** De kans op rood is 0,2 en komt vier keer voor en het wordt daarom vier keer met zichzelf vermenigvuldigd dus $0,2^4$. De kans op niet rood is 0,8 en komt zes keer voor en het wordt daarom zes keer met zichzelf vermenigvuldigd dus $0,8^6$.
- e** $\binom{10}{4} \times 0,2^4 \times 0,8^6 = 210 \times 0,000419... \approx 0,0881$
- f** Hier wordt een kansexperiment 12 keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten blauw en niet blauw. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling. B is het aantal keren dat ze blauw draait, $n = 12$ en $p = \frac{2}{5}$.
- g** $P(B = 7) = \binom{12}{7} \times \left(\frac{2}{5}\right)^7 \times \left(\frac{3}{5}\right)^5 = 792 \times 0,000127... \approx 0,1009$
- U1 a** $P(\text{Jackpot}) = \frac{6}{45} \times \frac{5}{44} \times \frac{4}{43} \times \frac{3}{42} \times \frac{2}{41} \times \frac{1}{40} \times \frac{1}{6} = 2,046 \cdot 10^{-8}$
 Dit komt overeen met 1 op de 1 : $2,046 \cdot 10^{-8} = 48\,870\,360$.
 De kans op een Jackpot is inderdaad ongeveer 1 op de 49 miljoen.
- b** Het aantal keren prijs X is bij benadering binomiaal verdeeld omdat je een kleine steekproef van tien formulieren neemt uit een groot aantal formulieren.
 Hierbij is $n = 10$ en $p = 0,175$.
 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,825^{10} = 1 - 0,14606... \approx 0,8539$

13.2 Werken met binomiale verdelingen

intro $P(\text{drie keer kop}) = \binom{8}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{8}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 56 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8$

$$P(\text{één keer kop}) = \binom{8}{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \binom{8}{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

Die kans is $\frac{56}{8} = 7$ keer zo groot.

- 8 a** Hier wordt een kansexperiment 20 keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten wel aan de maximumsnelheid gehouden en niet aan de maximumsnelheid gehouden. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling. X is het aantal mensen dat zich aan de maximumsnelheid houdt, $n = 20$ en $p = 0,75$.
- b** $P(X = 20) = 0,75^{20} \approx 0,0032$
- c** $P(X = 15) = \binom{20}{15} \times 0,75^{15} \times 0,25^5 = 15\,504 \times 0,000013... \approx 0,2023$

- d Het aantal mogelijke uitkomsten waarbij precies 16 mensen zich aan de maximumsnelheid houden is $\binom{20}{16}$. De kans op elk van deze uitkomsten is gelijk aan $0,75^{16} \times 0,25^4$. De kans op precies 16 mensen is dan gelijk aan het product van deze factoren.

$$P(X = 16) = \binom{20}{16} \times 0,75^{16} \times 0,25^4 = 4845 \times 0,000\,039\dots \approx 0,1897$$

- 9 a X is $\text{Bin}(15; 0,85)$ -verdeeld.

$$P(X = 12) = \binom{15}{12} \times 0,85^{12} \times 0,15^3 \approx 0,2184$$

b $P(X = 15) = \binom{15}{15} \times 0,85^{15} \times 0,15^0 \approx 0,0874$

- 10 a Hier wordt een kansexperiment vijf keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten wel een 2 gegoooid en niet een 2 gegoooid. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling.

- b De parameters zijn $n = 5$ en $p = \frac{1}{6}$.

c $P(X = 4) = \binom{5}{4} \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \frac{5}{6} \approx 0,0032$

d $P(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,1608$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,0322$$

11 a $P(X = 5) = \binom{13}{5} \times 0,65^5 \times 0,35^8 \approx 0,0336$

$$P(X = 13) = \binom{13}{13} \times 0,65^{13} \times 0,35^0 \approx 0,0037$$

- b Optie: binomiaal

Invoer: $n = 13$, $p = 0,65$ en $X = 5$

Dit geeft $P(X = 5) \approx 0,0336$.

Neem nu bij invoer $X = 13$.

Dit geeft $P(X = 13) \approx 0,0037$.

- 12 a De parameters zijn $n = 5$ en $p = \frac{1}{4}$.

- b Optie: binomiaal

Invoer: $n = 5$, $p = \frac{1}{4}$ en $X = 3$

Dit geeft $P(X = 3) \approx 0,0879$.

c

$X = k$	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,2373	0,3955	0,2637	0,0879	0,0146	0,0010

- 13 a X is het aantal schuiven dat weigert.

X is hierbij $\text{Bin}\left(62; \frac{1}{100}\right)$ verdeeld, met $n = 62$ en $p = \frac{1}{100}$.

- b Optie: binomiaal

Invoer: $n = 62$, $p = \frac{1}{100}$ en $X = 0$

Dit geeft $P(X = 0) \approx 0,5363$.

- c Optie: binomiaal

Invoer: $n = 62$, $p = \frac{1}{10000}$ en $X = 0$

Dit geeft $P(X = 0) \approx 0,9938$.

13 Binomiale verdelingen

d Optie: binomiaal

Invoer: $n = 62$, $p = \frac{1}{10000}$ en $X = 2$

Dit geeft $P(X = 2) \approx 0,000019$.

e Als de schuiven niet onafhankelijk bestuurd zouden worden dan zijn de kansen dat een afzonderlijke schuif weigert niet allemaal gelijk aan elkaar. Er is dan geen sprake van een binomiale verdeling en je moet de kansen dus anders berekenen. Het is voor de berekening van de kansen wel van belang dat de schuiven onafhankelijk bestuurd worden.

- 09 a Hier wordt een kansexperiment 30 keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten groene ogen of geen groene ogen. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling.
- b Als 12% van de leerlingen groene ogen heeft, dan heeft 88% van de leerlingen geen groene ogen. Dit is een kans van 0,88.
Als 6 leerlingen groene ogen hebben, dan hebben $30 - 6 = 24$ leerlingen geen groene ogen.
- c $P(Y = 6) = \binom{30}{6} \times 0,12^6 \times 0,88^{24} \approx 0,0825$
- d In dat geval is $n = 25$ en $p = 0,12$.
- e $P(\text{vijf studenten}) = \binom{25}{5} \times 0,12^5 \times 0,88^{20} \approx 0,1025$

U2 Optie: binomiaal

Invoer: $y_1 = \text{binomiaal}$, $p = 0,8$, $X = X$

Maak een tabel met de waarden a van 0 tot en met 10.

Voor $a = 7$, $a = 8$ en $a = 9$ is $P(X = a) \geq 0,2$.

X	Y1				
0	1E-7				
1	4.1E-6				
2	7.4E-5				
3	7.9E-4				
4	0.0055				
5	0.0264				
6	0.0881				
7	0.2013				
8	0.302				
9	0.2684				
10	0.1074				
X=0					

- U3 a De uitkomst is p_1 , p_2 of p_3 . Dit zijn alle uitkomsten.
De som van de kansen op alle uitkomsten is 1, dus $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.
- b In totaal zijn er n uitvoeringen.
Uitkomst 1 komt k keer voor, steeds met kans p_1 .
Uitkomst 2 komt l keer voor, steeds met kans p_2 .
Uitkomst 3 komt dan $n - k - l$ keer voor, steeds met kans p_3 .
Uitkomst 1 kan op $\binom{n}{k}$ manieren.
Er zijn dan $n - k$ plaatsen in het rijtje waar uitkomst 2 kan staan.
Uitkomst 2 kan dan op $\binom{n-k}{l}$ manieren.
De uitkomst 3 kan dan nog maar op 1 manier ingevuld worden (namelijk allemaal een 3).
Er zijn dus $\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{l}$ manieren om de uitkomsten 1, 2 en 3 te krijgen.
De kans op elke volgorde is $p_1^k \cdot p_2^l \cdot p_3^{n-k-l}$
Dan is $P(X_1 = k \text{ en } X_2 = l) = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{l} \cdot p_1^k \cdot p_2^l \cdot p_3^{n-k-l}$.

13.3 Cumulatieve kansen

intro De kans dat geel ten minste twee keer boven komt is gelijk aan de kans dat geel twee keer boven komt plus de kans dat geel drie, vier, of tien keer boven komt. De kans dat geel ten minste twee keer boven komt, is daarom altijd groter dan de kans dat geel twee keer boven komt.

14 a Optie: binomiaal

Invoer: $n = 8$, $p = 0,9$ en $X = 8$

Dit geeft $P(X = 8) \approx 0,4305$.

Neem nu $X = 7$ in plaats van $X = 8$.

Dit geeft $P(X = 7) \approx 0,3826$.

b De kans dat ze één of meer keer mist is gelijk aan de kans dat ze nul tot en met zeven keer scoort. Ofwel $1 -$ de kans dat ze acht keer scoort.

Optie: binomiaal

Invoer: $n = 8$, $p = 0,9$ en $X = 8$

$P(X = 8) = 0,4304\dots$

De kans dat ze één of meer keer mist is $1 - 0,4304\dots \approx 0,5695$.

c In opdracht 14a was $P(X = 7) \approx 0,3826$ en $P(X = 8) \approx 0,4305$.

$P(X \leq 6) = 1 - P(X = 7) - P(X = 8)$

$= 1 - 0,3826 - 0,4305 \approx 0,1869$

15 a Optie: binomiaal

Invoer: $n = 6$, $p = 0,5$ en $X = 0, 1, 2$ of 3

$P(K \leq 3) = P(K = 0) + P(K = 1) + P(K = 2) + P(K = 3) \approx 0,6563$

b Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 6$, $p = 0,5$ en $X = 3$

$P(K \leq 3) \approx 0,6563$, klopt.

16 a Hier wordt een kansexperiment acht keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten goed of fout. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk, namelijk $\frac{1}{3}$. Hierbij hoort een binomiale verdeling. X is het aantal vragen dat ze goed gokt, $n = 8$ en $p = \frac{1}{3}$.

b Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 8$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 3$

$P(X \leq 3) \approx 0,7414$

c De rode punten horen bij de gebeurtenis 'minimaal vier vragen goed' of 'meer dan drie vragen goed'.

d De kans bij de rode punten is $P(X \geq 4)$.

e De som van de kansen in opdracht b en d is gelijk aan 1.

De kans van opdracht d is dan gelijk aan 1 min de kans van opdracht b.

$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,7413\dots \approx 0,2586$

f Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 8$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 4$

$P(X \leq 4) \approx 0,9121$

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0,9120\dots \approx 0,0879$

17 a Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 14$, $p = 0,35$ en $X = 6$

$P(X \leq 6) \approx 0,8164$

b $P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - 0,8164\dots \approx 0,1836$

13 Binomiale verdelingen

- c Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 14$, $p = 0,35$ en $X = 8$

$$P(X \leq 8) = 0,9756\dots$$

$$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - 0,9756\dots \approx 0,0243$$

- 18 a De parameters zijn $n = 20$ en $p = \frac{1}{2}$.

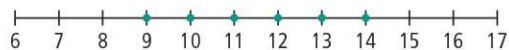
- b Er worden dan minimaal 11 jongens geboren.

Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 20$, $p = \frac{1}{2}$ en $X = 10$

$$P(Y \leq 10) = 0,5880\dots$$

$$P(Y \geq 11) = 1 - P(Y \leq 10) = 1 - 0,5880\dots \approx 0,4119$$

- c 

- d De kans op minder dan 15 maar meer dan 8 jongens is $P(Y \leq 14) - P(Y \leq 8)$.

- e Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 20$, $p = \frac{1}{2}$ en $X = 14$ of $X = 8$

$$P(Y \leq 14) = 0,9793\dots \text{ en } P(Y \leq 8) = 0,2517\dots$$

$$P(Y \leq 14) - P(Y \leq 8) = 0,9793\dots - 0,2517\dots \approx 0,7276$$

- 19 a Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 30$, $p = 0,7$ en $X = 11$

$$P(X < 12) = P(X \leq 11) \approx 0,0002$$

- b Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 30$, $p = 0,7$ en $X = 22$

$$P(X \geq 23) = 1 - P(X \leq 22) = 1 - 0,7186\dots \approx 0,2814$$

- c Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 30$, $p = 0,7$ en $X = 24$ of $X = 17$

$$P(17 < X < 25) = P(X \leq 24) - P(X \leq 17) = 0,9234\dots - 0,0844\dots \approx 0,8389$$

- d Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 30$, $p = 0,7$ en $X = 19$ of $X = 8$

$$P(9 \leq X \leq 19) = P(X \leq 19) - P(X \leq 8) = 0,2696\dots - 0,000001 \approx 0,2696$$

- e Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 30$, $p = 0,7$ en $X = 21$

$$P(X > 21) = 1 - P(X \leq 21) = 1 - 0,5684\dots \approx 0,4315$$

- f Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 30$, $p = 0,7$ en $X = 24$ of $X = 6$

$$P(7 \leq X < 25) = P(X \leq 24) - P(X \leq 6) = 0,9234\dots - 0,00000002 \approx 0,9234$$

- 20 a De stochast X is het aantal succesvolle deelnemers.

X is $\text{Bin}(50; 0,30)$ -verdeeld.

Meer dan de helft betekent dat $X > 25$.

Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 50$, $p = 0,30$ en $X = 25$

$$P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25) = 1 - 0,9990\dots \approx 0,0009$$

- b Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 50$, $p = 0,30$ en $X = 17$ of $X = 12$

$$P(12 < X < 18) = P(X \leq 17) - P(X \leq 12) = 0,7821\dots - 0,2228\dots \approx 0,5593$$

- 21 a Dit kun je opvatten als een trekking zonder terugleggen. De kans om een rotte tulpenbol te vinden blijft niet steeds hetzelfde.

- b Je neemt een kleine steekproef van 20 uit een groot aantal van 2000.

Hierbij is $n = 20$ en $p = 0,18$.

c Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 20$, $p = 0,18$ en $X = 2$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,2747... \approx 0,7252$$

d Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 20$, $p = 0,18$ en $X = 5$ of $X = 2$

$$P(2 < X < 6) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2) = 0,8644... - 0,2747... \approx 0,5896$$

e Je kunt de tulpenbollen indelen in twee selecties. Y is het aantal rotte tulpenbollen in de eerste selectie van 12. Y is $\text{Bin}(12; 0,18)$ -verdeeld.

Z is het aantal rotte tulpenbollen in de tweede selectie van 8.

Z is $\text{Bin}(8; 0,18)$ -verdeeld. De rotte tulpenbollen moeten allemaal in de tweede selectie zitten.

Optie: binomiaal

Invoer: $n = 12$, $p = 0,18$ en $X = 0$

$$P(Y = 0) = 0,0924...$$

Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 8$, $p = 0,18$ en $X = 1$

$$P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,5633... = 0,4366...$$

De gevraagde kans is $0,0924... \times 0,4366... \approx 0,0404$.

017 a $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 5$

b Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 5$

$$P(X \leq 5) \approx 0,6111$$

c Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 6$

$$P(X \leq 6) \approx 0,8041$$



e $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$

f Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 3$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,1852... \approx 0,8147$$

g Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 8$ of $X = 5$

$$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - 0,9782... \approx 0,0218$$

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0,6110... \approx 0,3889$$



b $P(2 \leq A \leq 7) = P(A \leq 7) - P(A \leq 1)$

c Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 10$, $p = 0,3$ en $X = 7$ of $X = 1$

$$P(2 \leq A \leq 7) = P(A \leq 7) - P(A \leq 1) = 0,9984... - 0,1493... \approx 0,8491$$



e $P(3 \leq A < 7) = P(A \leq 6) - P(A \leq 2)$

f Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 10$, $p = 0,3$ en $X = 6$ of $X = 2$

$$P(3 \leq A < 7) = P(A \leq 6) - P(A \leq 2) = 0,9894... - 0,3827... \approx 0,6066$$

13 Binomiale verdelingen

- U4 a** X is het aantal doosjes waar minder dan 25 schroeven in zitten.

X is $\text{Bin}(3; 0,10)$ -verdeeld.

Optie: binomiaal

Invoer: $n = 3$, $p = 0,10$ en $X = 2$

$P(X = 2) = 0,027$

- b** X is het aantal doosjes waar te weinig schroeven in zitten.

X is $\text{Bin}(20; p)$ -verdeeld.

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$. Deze kans moet kleiner dan 0,01 zijn.

Zoek in een tabel waarvoor $P(X > 2) < 0,01$ is.

Invoer: $y_1 = 1 -$ binomiaal cumulatief met $n = 20$, $p = X$ en $X = 2$

Uit de tabel blijkt dat als $p = 0,022$ dat dan $P(X > 2) < 0,01$.

Maximaal 2,2% van de doosjes mag te weinig schroeven bevatten.

X	Y1				
0.02	0.0071				
0.021	0.0081				
0.022	0.0092				
0.023	0.0103				
0.024	0.0116				
0.025	0.013				
0.026	0.0144				
0.027	0.0159				
0.028	0.0175				
0.029	0.0192				
0.03	0.021				
Y1=0.00917203524784					

13.4 Verwachtingswaarde en standaardafwijking

intro Je verwacht na vijf keer verkeerd parkeren dat je in 20% van de gevallen een parkeerbon had. Je verwacht dus 20% van 5 = 1 parkeerbon en na 50 keer verkeerd parkeren verwacht je 20% van 50 = 10 parkeerbonnen.

Na 50 keer zal het aantal meer afwijken. Je kunt dan bijvoorbeeld slechts 4 parkeerbonnen krijgen. Dit wijkt 6 af van het werkelijke aantal, wat meer is dan het aantal parkeerbonnen dat je na vijf keer kunt krijgen.

- 22 a** Je trekt één kaart, dat is of een hartenkaart of niet een hartenkaart. Het aantal hartenkaarten X is dus 0 of 1.

Er zijn 13 hartenkaarten in een volledig kaartspel van 52 kaarten. De kans op een hartenkaart is $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ en de kans op geen hartenkaart is $\frac{39}{52} = \frac{3}{4}$.

$E(X) = 0 \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = 0,25$.

- b** $E(T) = 0 \times 0,178 + 1 \times 0,356 + 2 \times 0,2966 + 3 \times 0,1318 + 4 \times 0,033 + 5 \times 0,0044 + 6 \times 0,0002 = 1,4998 \approx 1,5$

- c** Er zijn zes stochasten: X_1 tot en met X_6 die allemaal een trekking van één kaart weergeven.

$$\begin{aligned} E(T) &= E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) + E(X_6) \\ &= 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 = 1,5 \end{aligned}$$

- 23 a** M is $\text{Bin}\left(3; \frac{1}{2}\right)$ -verdeeld.

Invoer: y_1 binomiaal met $n = 3$, $p = \frac{1}{2}$ en $X = X$

u	0	1	2	3
$P(M = u)$	0,125	0,375	0,375	0,125

- b** $E(M) = 1,5$ en $\sigma(M) \approx 0,866$

- c** $E(M) = 3 \times \frac{1}{2} = 1,5$ en $\sigma(M) = \sqrt{3 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,866$
Je krijgt dezelfde antwoorden.

- d** X is het aantal enen. X is $\text{Bin}\left(5; \frac{1}{6}\right)$ -verdeeld.

Met de rekenmachine krijg je $E(X) \approx 0,8333$ en $\sigma(X) \approx 0,8333$.

$E(X) = 5 \times \frac{1}{6} \approx 0,8333$ en $\sigma(X) = \sqrt{5 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)} = \sqrt{\frac{25}{36}} \approx 0,8333$
De regels van opdracht c kloppen ook hier.

- 24 a** X is $\text{Bin}(50; 0,58)$ -verdeeld.

$$n = 50 \text{ en } p = 0,58$$

$$E(X) = 50 \times 0,58 = 29 \text{ en } \sigma(X) = \sqrt{50 \times 0,58 \times (1 - 0,58)} = \sqrt{12,18} \approx 3,49$$

- b** Y is het dat het eerste jaar haalt in deze groep. Y is $\text{Bin}(70; 0,58)$ -verdeeld.

$$E(Y) = 70 \times 0,58 = 40,6 \text{ en } \sigma(Y) = \sqrt{70 \times 0,58 \times (1 - 0,58)} = \sqrt{17,052} \approx 4,13$$

- 25 a** X is $\text{Bin}(250; 0,06)$ -verdeeld.

$E(X) = 250 \times 0,06 = 15$, dit betekent dat 15 reizigers naar verwachting gebruik zullen maken van de fietsenstalling.

$$\text{De standaardafwijking is } \sigma(X) = \sqrt{250 \times 0,06 \times (1 - 0,06)} = \sqrt{14,1} \approx 3,75.$$

De standaardafwijking is ongeveer 3,75 reizigers.

- b** $15 - 3,75 = 11,25$ en $15 + 3,75 = 18,75$

Minder dan één keer afwijken, betekent dat het aantal reizigers tussen deze waarden moet liggen.

Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 250$, $p = 0,06$ en $X = 18$ of $X = 11$

$$P(11,25 < X < 18,75) = P(X \leq 18) - P(X \leq 11)$$

$$P(11,25 < X < 18,75) = 0,8260... - 0,1765... \approx 0,6495$$

De kans dat X minder dan één keer de standaardafwijking afwijkt is 0,6495.

- 26 a** X is het aantal defecte radio's. X is $\text{Bin}(500; 0,04)$ -verdeeld.

$$E(X) = 500 \times 0,04 = 20 \text{ defecte radio's.}$$

- b** $\sigma(X) = \sqrt{500 \times 0,04 \times (1 - 0,04)} = \sqrt{19,2} \approx 4,38$ defecte radio's.

- c** $20 + 4,38 = 24,38$

Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 500$, $p = 0,04$ en $X = 24$

$$P(X > 24,38) = 1 - P(X \leq 24) = 1 - 0,8477... \approx 0,1522$$

- 27 a** Je neemt een kleine steekproef van vijftig wiskundedocenten uit een groot aantal.

- b** T is het aantal tegenstanders. T is $\text{Bin}(50; 0,15)$ -verdeeld.

$$E(T) = 50 \times 0,15 = 7,5 \text{ verwachte tegenstanders.}$$

De standaardafwijking is $\sigma(T) = \sqrt{50 \times 0,15 \times (1 - 0,15)} = \sqrt{6,375} \approx 2,52$ tegenstanders.

- c** Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 50$, $p = 0,15$ en $X = 7$

$$P(T \geq 8) = 1 - P(T \leq 7) = 1 - 0,5187... \approx 0,4812$$

- d** Ja. Als slechts 15% van de wiskundedocenten ertegen is, dan verwacht je 7,5 tegenstanders in een groep van vijftig. Acht tegenstanders is ongeveer wat je zou verwachten, dan is het waarschijnlijk dat de minister gelijk heeft.

- e** X is $\text{Bin}(50; 0,15)$ -verdeeld.

$$P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a - 1)$$

Invoer: $y_1 = 1 -$ binomiaal cumulatief met

$$n = 50, p = 0,15 \text{ en } X = X - 1.$$

Maak een tabel met waarden van a .

Bij $a \geq 12$ is $P(X \geq a)$ kleiner dan 10%.

De vakbond zal een grootschalig onderzoek starten bij minimaal 12 tegenstanders.

X	Y1				
7	0.6387				
8	0.4812				
9	0.3319				
10	0.2089				
11	0.1199				
12	0.0628				
13	0.0301				
14	0.0132				
15	0.0053				
16	0.0019				
17	5.6E-4				
Y1=0.06281206784611					

13 Binomiale verdelingen

- 024 a** Er zijn twee uitkomsten oranje of groen. De kans op succes (oranje) bij de n herhalingen blijft gelijk. X is $\text{Bin}(n; \frac{3}{10})$ -verdeeld.
- b** Drie van de tien knikkers zijn oranje, dus $p = \frac{3}{10}$.
- c** De parameters zijn $n = 10$ en $p = \frac{3}{10}$.
- d** $E(X) = n \cdot p$
- e** $E(X) = 10 \times \frac{3}{10} = 3$ oranje knikkers.
- f** $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$
- g** $\sigma(X) = \sqrt{10 \times \frac{3}{10} \times (1 - \frac{3}{10})} = \sqrt{2,1} \approx 1,45$ oranje knikkers.
- h** G is $\text{Bin}(6; \frac{7}{10})$ -verdeeld.
- $E(G) = 6 \times \frac{7}{10} = 4,2$ groene knikkers.
- $\sigma(G) = \sqrt{6 \times \frac{7}{10} \times (1 - \frac{7}{10})} = \sqrt{1,26} \approx 1,12$ groene knikkers.

- U5** X is het aantal te lichte pakken suiker. X is $\text{Bin}(50; 0,005)$ -verdeeld.
- Een doos wordt afgekeurd als $X \geq 1$ is.
- Optie: binomiaal
- Invoer: $n = 50$, $p = 0,005$ en $X = 0$
- $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,7783... \approx 0,2217$
- Y is het aantal afgekeurde dozen. Y is $\text{Bin}(20; 0,2217)$ -verdeeld.
- $E(Y) = 20 \times 0,2217 \approx 4,43$ dozen
- Er zullen naar verwachting ongeveer 4 dozen worden afgekeurd.

13.5 Gemengde opdrachten

- 28 a** X is het aantal weken dat Janneke een prijs wint. X is $\text{Bin}(5; \frac{3}{100})$ -verdeeld.
- Optie: binomiaal
- Invoer: $n = 5$, $p = \frac{3}{100}$ en $X = 2$
- $P(X = 2) \approx 0,0082$
- b** Janneke moet $5 \times 2 = 10$ euro betalen voor de loten. Zij maakt winst als zij minimaal één keer een prijs wint.
- Optie: binomiaal
- Invoer: $n = 5$, $p = \frac{3}{100}$ en $X = 0$
- $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0,8587 \approx 0,1413$
- 29 a** X is het aantal linkshandige spelers. X is $\text{Bin}(20; 0,10)$ -verdeeld.
- Er zijn te weinig rechterhandschoenen als $X > 2$.
- Optie: binomiaal cumulatief
- Invoer: $n = 20$, $p = 0,10$ en $X = 1$
- $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0,6769... \approx 0,3231$
- b** Als minstens één leerling met een verkeerde handschoen moet softballen dan weet je dat het aantal linkshandige spelers ongelijk is aan 2.
- Optie: binomiaal
- Invoer: $n = 20$, $p = 0,10$ en $X = 2$
- $P(X \neq 2) = 1 - P(X = 2) = 1 - 0,2851... \approx 0,7148$
- c** Y is het aantal lessen waar er een tekort is aan een bepaalde soort handschoenen. Y is $\text{Bin}(8; 0,7148)$ -verdeeld.
- $E(Y) = 8 \times 0,7148 \approx 5,72$ lessen.
- Hij kan in zes lessen een tekort verwachten.

- 30 a** X is het aantal personen dat kan fietsen. X is $\text{Bin}(20; 0,75)$ -verdeeld.
 $E(X) = 20 \times 0,75 = 15$ personen.
 $\sigma(X) = \sqrt{20 \times 0,75 \times (1 - 0,75)} = \sqrt{3,75} \approx 1,94$ personen.
- b** Y is het aantal personen dat kan fietsen. Y is $\text{Bin}(20; 0,40)$ -verdeeld.
 Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 20$, $p = 0,40$ en $X = 14$ of $X = 7$
 $P(8 \leq Y \leq 14) = P(Y \leq 14) - P(Y \leq 7) = 0,9983... - 0,4158... \approx 0,5825$
- c** Stel dat Ard gelijk heeft en X is het aantal personen dat kan fietsen, dan is X is $\text{Bin}(20; 0,75)$ -verdeeld.
 Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 20$, $p = 0,75$ en $X = 11$
 $P(X < 12) = P(X \leq 11) \approx 0,0409$
- d** Als Ard ten onrechte gelijk krijgt, dan heeft Gert gelijk, dus $p = 0,40$ en 12 of meer mensen in de steekproef konden fietsen.
 Optie: binomiaal
 Invoer: $n = 20$, $p = 0,40$ en $X = 11$
 $P(Y \geq 12) = 1 - P(Y \leq 11) \approx 1 - 0,9435 \approx 0,0565$

Onderzoeksoopdrachten

- 31** X is het aantal waardebonnen. X is $\text{Bin}(n; 0,5)$ -verdeeld.
 Je wilt weten voor welke n de kans $P(X \geq 5)$ groter is dan 0,95.
 $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$
 Invoer: $y_1 = 1 -$ binomiaal cumulatief met $n = X$, $p = 0,5$ en $X = 4$
 Maak een tabel met mogelijke waarden voor n .

X	Y1			
10	0.623			
11	0.7256			
12	0.8062			
13	0.8666			
14	0.9102			
15	0.9408			
16	0.9616			
17	0.9755			
18	0.9846			
19	0.9904			
20	0.9941			
Y1=0.96159362792957				

Je hebt dus minstens 16 enveloppen nodig en je moet minstens
 $16 \times 20 = 320$ euro besteden.

- 32 a** X is het aantal mensen dat komt. X is $\text{Bin}(n; 0,60)$ -verdeeld.
 De kans dat er meer mensen komen dan er plaatsen zijn, is $P(X > 900)$.
 De kans moet kleiner zijn dan 0,01.
 $P(X > 900) = 1 - P(X \leq 900)$
 Invoer: $y_1 = 1 -$ binomiaal cumulatief met $n = X$, $p = 0,60$ en $X = 900$
 Maak een tabel met mogelijke waarden voor n .

X	Y1			
1425	0.0067			
1426	0.0074			
1427	0.0081			
1428	0.0089			
1429	0.0097			
1430	0.0107			
1431	0.0116			
1432	0.0127			
1433	0.0138			
1434	0.0151			
1435	0.0164			
Y1=0.00974615768173				

Het bestuur kan maximaal 1429 mensen uitnodigen.

- b** Er zullen naar verwachting $1429 \times 0,60 \approx 857$ personen komen.
 Er blijven dan $900 - 857 = 43$ stoelen naar verwachting leeg.

13 Binomiale verdelingen

Samenvatting

- S1 a** Hier wordt een kansexperiment twaalf keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten; groter dan vier of maximaal vier. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling.
 X is het aantal uitkomsten groter dan vier, $n = 12$ en $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- b** Je trekt in één keer vier kaarten. Dit mag je opvatten als een trekking zonder terugleggen. De kans op succes (een schoppen) is niet voor elke trekking van één kaart gelijk. Het aantal schoppen is niet binomiaal verdeeld.
- c** Hier wordt een kansexperiment 20 keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten wit of zwart. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling.
 X is het aantal witte knikkers, $n = 20$ en $p = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$.
- d** Je neemt een kleine steekproef van 20 knikkers uit een groot aantal van 5000 knikkers. Dit mag je benaderen met een binomiale verdeling.
 X is het aantal witte knikkers, $n = 20$ en $p = \frac{3000}{5000} = \frac{3}{5}$.
- S2 a** Stochast X is het aantal keer raak. X is $\text{Bin}(20; 0,85)$ -verdeeld.

$$P(X = 16) = \binom{20}{16} \times 0,85^{16} \times 0,15^4 \approx 0,1821$$
- b** Stochast Y is het aantal keer raak. Y is $\text{Bin}(10; 0,85)$ -verdeeld.

$$P(Y = 7) = \binom{10}{7} \times 0,85^7 \times 0,15^3 \approx 0,1298$$
- S3 a** Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 4$
 $P(A \leq 4) \approx 0,3825$
- b** Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 5$
 $P(A \geq 6) = 1 - P(A \leq 5) = 1 - 0,6110... \approx 0,3889$
- c** Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 8$ of $X = 3$
 $P(3 < A \leq 8) = P(A \leq 8) - P(A \leq 3) = 0,9782... - 0,1852... \approx 0,7930$
- d** Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 10$
 $P(A > 10) = 1 - P(A \leq 10) = 1 - 0,9994... \approx 0,0005$
- S4 a** Stochast X is het aantal geslaagde deelnemers. X is $\text{Bin}(30; 0,85)$ -verdeeld.
 Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 30$, $p = 0,85$ en $X = 25$
 $P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25) = 1 - 0,4755... \approx 0,5245$
- b** Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 30$, $p = 0,85$ en $X = 24$ of $X = 20$
 $P(20 < X < 25) = P(X \leq 24) - P(X \leq 20) = 0,2894... - 0,0096... \approx 0,2798$
- S5 a** X is het aantal rode smarties. X is $\text{Bin}(36; 0,15)$ -verdeeld.
 de verwachtingswaarde is $E(X) = 36 \times 0,15 = 5,4$ rode smarties en de standaardafwijking $\sigma(X) = \sqrt{36 \times 0,15 \times (1 - 0,15)} = \sqrt{4,59} \approx 2,14$ smarties
- b** Y is het aantal rode smarties. Y is $\text{Bin}(400; 0,15)$ -verdeeld.
 Naar verwachting zijn er $E(Y) = 400 \times 0,15 = 60$ smarties rood.
 $\sigma(X) = \sqrt{400 \times 0,15 \times (1 - 0,15)} = \sqrt{51} \approx 7,14$ smarties

Test jezelf

T1 a X is $\text{Bin}(15; 0,08)$ -verdeeld.

Optie: binomiaal

Invoer: $n = 15$, $p = 0,08$ en $X = 3$

$$P(X = 3) \approx 0,0857$$

b Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 15$, $p = 0,08$ en $X = 2$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,8870... \approx 0,1130$$

c $E(X) = 15 \times 0,08 = 1,2$ en $\sigma(X) = \sqrt{15 \times 0,08 \times (1 - 0,08)} = \sqrt{1,104} \approx 1,05$

d De kans moet kleiner zijn dan 0,01.

$$P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a - 1)$$

Invoer: $y_1 = 1 -$ binomiaal cumulatief met $n = 15$, $p = 0,08$ en $X = X - 1$

X	Y1			
0	1			
1	0.7137			
2	0.3403			
3	0.113			
4	0.0273			
5	0.005			
6	7E-4			
7	7.6E-5			
8	6.5E-6			
9	4.3E-7			
10	2.2E-8			
Y1=0.00496968449173				

Als $5 \leq a \leq 15$ is $P(X \geq a) \leq 0,01$.

T2 a Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 25$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 8$

$$P(Y \leq 8) \approx 0,5376$$

b Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 25$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 4$

$$P(Y < 5) = P(Y \leq 4) \approx 0,0462$$

c Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 25$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 14$

$$P(Y \geq 15) = 1 - P(Y \leq 14) = 1 - 0,9943... \approx 0,0056$$

d Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 25$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 14$ of $X = 5$

$$P(5 < Y \leq 14) = P(Y \leq 14) - P(Y \leq 5) = 0,9943... - 0,1119... \approx 0,8824$$

e Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 25$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 10$

$$P(Y > 10) = 1 - P(Y \leq 10) = 1 - 0,8820... \approx 0,1180$$

f Optie: binomiaal

Invoer: $n = 25$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 7$ of $X = 8$

$$P(7 \leq Y < 9) = P(Y = 7) + P(Y = 8) = 0,1487... + 0,1673... \approx 0,3160$$

T3 a Hier wordt een kansexperiment vijf keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten; munt en kop. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. K is het aantal keer kop, $n = 5$ en $p = 0,55$.

b Invoer: y_1 binomiaal met $n = 5$, $p = 0,55$, $X = X$

Maak een tabel van de waarden van a van 0 tot en met 5.

u	0	1	2	3	4	5
$P(K = u)$	0,0185	0,1128	0,2757	0,3369	0,2059	0,0503

c $P(K \leq 2) = 0,01845... + 0,11276... + 0,27565... \approx 0,4069$

13 Binomiale verdelingen

- d** Meer dan drie keer munt, dat is 4 of 5 keer munt oftewel 1 of 0 keer kop.
Zie de tabel bij opdracht b. De kans hierop is
 $0,01845... + 0,11276... \approx 0,1311$.

T4 a Het aantal punten dat Tom haalt is gelijk aan het aantal keer dat er een even aantal ogen is gegooid. De kans op een even aantal ogen is $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

T is het aantal keer dat Tom een punt haalt. T is $\text{Bin}\left(12; \frac{1}{2}\right)$ -verdeeld.

Optie: binomiaal

Invoer: $n = 12$, $p = \frac{1}{2}$, $X = 8$

$P(T = 8) \approx 0,1208$

- b** Tom krijgt $\frac{8}{12} \times 30 = 20$ euro en Harry krijgt dan $\frac{4}{12} \times 30 = 10$ euro.

- c** Zij moeten nog $25 - 12 = 13$ keer gooien.

De winnaar moet minimaal 13 punten halen en Tom moet hiervoor nog minimaal 5 punten halen in de laatste 13 worpen.

X is het aantal keer dat Tom een punt haalt. X is $\text{Bin}\left(13; \frac{1}{2}\right)$ -verdeeld.

Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 13$, $p = \frac{1}{2}$, $X = 4$

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0,1334... \approx 0,8666$

De kans dat Harry wint is $1 - 0,8666 = 0,1334$.

Tom krijgt $0,8666 \times 30 \approx 26$ euro en Harry krijgt $0,1334 \times 30 \approx 4$ euro.

T5 a Een leerling die een zes haalt heeft acht keer een halve punt aftrek gekregen.

De leerling heeft dan 12 vragen goed beantwoord.

X is $\text{Bin}\left(20; \frac{1}{4}\right)$ -verdeeld.

Optie: binomiaal

Invoer: $n = 20$, $p = \frac{1}{4}$, $X = 12$

$P(X = 12) \approx 0,0008$

- b** De leerling heeft dan minimaal 12 vragen goed beantwoord.

Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 20$, $p = \frac{1}{4}$, $X = 11$

$P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) = 1 - 0,9990... \approx 0,0009$

- c** Y is het aantal leerlingen dat een zes of meer scoort.

Y is $\text{Bin}(124; 0,0009)$ -verdeeld.

$E(Y) = 124 \times 0,0009 \approx 0,11$

De verwachting is dat niemand een zes of meer scoort.

- d** $E(X) = 20 \times \frac{1}{4} = 5$ vragen

- e** $\sigma(X) = \sqrt{20 \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \sqrt{3,75} \approx 1,94$ leerlingen

Het aantal goed beantwoorde vragen moet tussen $5 - 1,94 = 3,06$ en $5 + 1,94 = 6,94$ liggen.

Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 20$, $p = \frac{1}{4}$, $X = 6$ of $X = 3$

$P(3,06 \leq X \leq 6,94) = P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3)$

$= 0,7857... - 0,2251... \approx 0,5606$

- f** Je gokt dan het antwoord op $20 - 4 = 16$ vragen.

Z is het aantal goed beantwoorde vragen. Z is $\text{Bin}\left(16; \frac{1}{4}\right)$ -verdeeld.

$E(Z) = 16 \times \frac{1}{4} = 4$

Je verwacht dan $16 - 4 = 12$ vragen fout te hebben. Dit aantal fouten kost $12 \times \frac{1}{2} = 6$ punten.

Je verwacht dan het cijfer $10 - 6 = 4$ te halen.

- g** J is het aantal goed beantwoorde vragen. J is $\text{Bin}\left(20; \frac{1}{2}\right)$ -verdeeld.
 Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 20$, $p = \frac{1}{2}$, $X = 11$
 $P(J \geq 12) = 1 - P(J \leq 11) = 1 - 0,7482... \approx 0,2517$
- T6 a** B is het aantal bollen dat zal bloeien. B is $\text{Bin}(50; 0,90)$ -verdeeld.
 Optie: binomiaal
 Invoer: $n = 50$, $p = 0,90$, $X = 45$
 $P(B = 45) \approx 0,1849$
- b** Bij de doos van 50 bollen gaat het om minstens $0,90 \times 50 = 45$ bollen.
 Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 50$, $p = 0,90$, $X = 44$
 $P(B \geq 45) = 1 - P(B \leq 44) \approx 1 - 0,3839 \approx 0,6161$
 X is het aantal bollen dat zal bloeien. X is $\text{Bin}(100; 0,90)$ -verdeeld.
 Bij de doos van 100 bollen gaat het om minstens $0,90 \times 100 = 90$ bollen.
 Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 100$, $p = 0,90$, $X = 89$
 $P(X \geq 90) = 1 - P(X \leq 89) \approx 1 - 0,4168 \approx 0,5832$
 Bij de doos van 50 bollen is de kans het grootst.
- c** D is het aantal dozen waarin minstens 45 bollen tot bloei komen.
 D is $\text{Bin}(5; 0,6161)$ -verdeeld.
 Optie: binomiaal
 Invoer: $n = 5$, $p = 0,6161$, $X = 4$
 $P(D = 4) \approx 0,2766$
- T7 a** X is het aantal gewichtsheffers dat stimulerende middelen heeft gebruikt.
 X is $\text{Bin}(10; 0,12)$ -verdeeld.
 Optie: binomiaal
 Invoer: $n = 10$, $p = 0,12$, $X = 0$
 $P(X = 0) \approx 0,2785$
- b** De kans dat niemand in een wedstrijd wordt betrapt is 0,2785.
 W is het aantal wedstrijden waarin niemand betrapt wordt.
 W is $\text{Bin}(5; 0,2785)$ -verdeeld.
 Optie: binomiaal
 Invoer: $n = 5$, $p = 0,2785$, $X = 5$
 $P(W = 5) \approx 0,0017$

Extra oefening

- E1 a** De parameters zijn $n = 10$ en $p = 0,25$.
- b** $P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,25^3 \times 0,75^7 \approx 0,2503$
- c** Y is het aantal keer dat de speler een vrije worp scoort.
 Y is $\text{Bin}(10; 0,75)$ -verdeeld.
 $P(Y = 8) = \binom{10}{8} \times 0,75^8 \times 0,25^2 \approx 0,2816$

13 Binomiale verdelingen

E2 a X is het aantal klanten dat met iDEAL betaalt.

X is $\text{Bin}(8; 0,58)$ -verdeeld.

$$P(X = 5) = \binom{8}{5} \times 0,58^5 \times 0,42^3 \approx 0,2723$$

b $P(X = 4) = \binom{8}{4} \times 0,58^4 \times 0,42^4 \approx 0,2465$

E3 a Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 13$, $p = 0,6$, $X = 4$

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0,0320... \approx 0,9679$$

b Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 13$, $p = 0,6$, $X = 5$

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 0,0977$$

c Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 13$, $p = 0,6$, $X = 7$ of $X = 4$

$$P(4 < X < 8) = P(X \leq 7) - P(X \leq 4) = 0,4256... - 0,0320... \approx 0,3935$$

d Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 13$, $p = 0,6$, $X = 6$ of $X = 1$

$$P(2 \leq X < 7) = P(X \leq 6) - P(X \leq 1) = 0,2288... - 0,0001... \approx 0,2287$$

e Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 13$, $p = 0,6$, $X = 9$

$$P(X < 10) = P(X \leq 9) \approx 0,8314$$

f Optie: binomiaal

Invoer: $n = 13$, $p = 0,6$, $X = 0$

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,000006... \approx 0,999993$$

E4 a X is het aantal zessen. X is $\text{Bin}(15; \frac{1}{6})$ -verdeeld.

Optie: binomiaal

Invoer: $n = 15$, $p = \frac{1}{6}$, $X = 0$

$$P(X = 0) \approx 0,0649$$

b Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 15$, $p = \frac{1}{6}$, $X = 3$

$$P(X \leq 3) \approx 0,7685$$

c Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 15$, $p = \frac{1}{6}$, $X = 3$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,7684... \approx 0,2315$$

d Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 15$, $p = \frac{1}{6}$, $X = 6$ of $X = 2$

$$P(2 < X < 7) = P(X \leq 6) - P(X \leq 2) = 0,9933... - 0,5322... \approx 0,4612$$

E5 a De parameters zijn $n = 20$ en $p = 0,15$.

b $E(X) = 20 \times 0,15 = 3$ en $\sigma(X) = \sqrt{20 \times 0,15 \times (1 - 0,15)} = \sqrt{2,55} \approx 1,60$

E6 a R is het aantal gekochte rode paraplu's. R is $\text{Bin}(100; 0,45)$ -verdeeld.

$$E(R) = 100 \times 0,45 = 45 \text{ paraplu's.}$$

b Optie: binomiaal

Invoer: $n = 100$, $p = 0,45$, $X = 45$

$$P(R = 45) \approx 0,0800$$

- c** Als er meer zwarte dan rode paraplu's worden verkocht, dan worden er maximaal 49 rode paraplu's verkocht.
 Optie: binomiaal
 Invoer: $n = 100$, $p = 0,45$, $X = 49$
 $P(R \leq 49) \approx 0,8173$
- d** Er worden dan minimaal 51 rode paraplu's verkocht.
 Optie: binomiaal
 Invoer: $n = 100$, $p = 0,45$, $X = 50$
 $P(R \geq 51) = 1 - P(R \leq 50) = 1 - 0,8654... \approx 0,1346$
- E7 a** Je kunt een greep van vijf knikkers opvatten als vijf keer een knikker trekken zonder terugleggen. De kans op een rode knikker verandert na elke trekking dus stochast Y is niet binomiaal verdeeld.
- b** $P(Y = 5) = \frac{15}{25} \times \frac{14}{24} \times \frac{13}{23} \times \frac{12}{22} \times \frac{11}{21} = \frac{360360}{6375600} = \frac{13}{230} \approx 0,0565$
- c** Je neemt een kleine steekproef van vijf knikkers uit een groot aantal van 1250 knikkers.
- d** De kans op een rode knikker is $\frac{750}{1250} = 0,6$.
 X is het aantal getrokken rode knikkers. X is $\text{Bin}(5; 0,6)$ -verdeeld.
 $E(X) = 5 \times 0,6 = 3$ rode knikkers.
 $\sigma(X) = \sqrt{5 \times 0,6 \times (1 - 0,6)} = \sqrt{1,2} \approx 1,10$ rode knikkers.
- e** Z is het aantal witte knikkers. Z is $\text{Bin}(5; 0,4)$ -verdeeld.
 Meer dan twee, maar hoogstens vier betekent drie of vier witte knikkers.
 Optie: binomiaal
 Invoer: $n = 5$, $p = 0,4$, $X = 3$ of $X = 4$
 $P(2 < Z \leq 4) = P(Z = 3) + P(Z = 4) = 0,2304 + 0,0768 = 0,3072$
- E8 a** X is het aantal vrouwen dat rookt. X is $\text{Bin}(40; 0,19)$ -verdeeld.
- b** Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 40$, $p = 0,19$, $X = 7$
 $P(X < 8) = P(X \leq 7) \approx 0,5009$
- c** Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 40$, $p = 0,19$, $X = 5$
 $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0,2020... \approx 0,7980$
- d** 15% van 40 vrouwen is gelijk aan $0,15 \cdot 40 = 6$ vrouwen.
 25% van 40 vrouwen is gelijk aan $0,25 \cdot 40 = 10$ vrouwen.
 Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 40$, $p = 0,19$, $X = 9$ en $X = 6$
 $P(6 < X < 10) = P(X \leq 9) - P(X \leq 6) = 0,7833... - 0,3417... \approx 0,4416$

14 Rijen en recursie

Voorkennis

- V1 a** Als x met 1 toeneemt, neemt y steeds met 4 toe.
b Vanwege de regelmaat in de tabel is de waarde van y bij $x = 10$ eenvoudig te berekenen met behulp van de waarde van y bij $x = 8$.
c Bij $x = 10$ is $y = 43 + 2 \times 4 = 51$.
d Bij $x = 82,7$ is de toename lastig te berekenen.
e Bij $x = 0$ is $y = 19 - 2 \cdot 4 = 11$. Het startgetal is 11.
 Het hellingsgetal is 4.
 De formule bij de tabel is $y = 4x + 11$.
f Bij $x = 20$ is $y = 4 \times 20 + 11 = 91$.
 Bij $x = 82,7$ is $y = 4 \times 82,7 + 11 = 341,8$.

- V2** tabel A:
 Als in de tabel t met 1 toeneemt, neemt p met 2 toe.
 De richtingscoëfficiënt is 2.
 Bij $t = 0$ is $p = 9 - 7 \times 2 = -5$.
 De formule bij de tabel is $p = 2t - 5$.
 Bij $t = 20$ is $p = 2 \times 20 - 5 = 35$.
 tabel B:
 Als in de tabel t met 2 toeneemt, neemt p met 5 af.
 Dus als t met 1 toeneemt, neemt p met $2\frac{1}{2}$ af.
 De richtingscoëfficiënt is $-2\frac{1}{2}$.
 Bij $t = 0$ is $p = 120 - 2 \times 2\frac{1}{2} = 125$.
 De formule bij de tabel is $p = -2\frac{1}{2}t + 125$.
 Bij $t = 20$ is $p = -2\frac{1}{2} \times 20 + 125 = 75$.
 tabel C:
 Als in de tabel t met 1 toeneemt, neemt p met 0,3 toe.
 De richtingscoëfficiënt is 0,3.
 Bij $t = 0$ is $p = 4,8 - 3 \times 0,3 = 3,9$.
 De formule bij de tabel is $p = 0,3t + 3,9$.
 Bij $t = 20$ is $p = 0,3 \times 20 + 3,9 = 9,9$.

- V3 a** $80 : 64 = 1,25$
 $100 : 80 = 1,25$
 $125 : 100 = 1,25$
 $156,25 : 125 = 1,25$
 Als in de tabel x met 1 toeneemt, wordt y steeds met 1,25 vermenigvuldigd.
b Je hoeft maar één keer met 1,25 te vermenigvuldigen.
c Bij $x = 8$ is $y = 156,25 \times 1,25 = 195,3125$.
d Het is veel minder werk.
e Bij $x = 0$ is $y = 64 : 1,25^3 = 32,768$.
 De formule bij de tabel is $y = 32,768 \cdot 1,25^x$.

- V4** tabel A:
 De groeifactor is $11 : 10 = 1,1$
 Bij $t = 0$ is $p = 10$.
 De formule bij de tabel is $p = 10 \cdot 1,1^t$.
 Bij $t = 15$ is $p = 10 \cdot 1,1^{15} \approx 41,77$.
 tabel B:
 De groeifactor is $96 : 48 = 2$.
 Bij $t = 7$ is $p = 48$ dus $b = \frac{48}{2^7} = 0,375$.
 De formule bij de tabel is $p = 0,375 \cdot 2^t$.
 Bij $t = 15$ is $p = 0,375 \cdot 2^{15} = 12\,288$.
 tabel C:
 De groeifactor is $256 : 1024 = 0,25$.
 Bij $t = 6$ is $p = 1024$ dus $b = \frac{1024}{0,25^6} = 4\,194\,304$.
 De formule bij de tabel is $p = 4\,194\,304 \cdot 0,25^t$.
 Bij $t = 15$ is $p = 4\,194\,304 \cdot 0,25^{15} = 0,00390625$.

- V5 a** Tabel A:
 $81 : 90 = 0,9$; $72,9 : 81 = 0,9$; $65,61 : 72,9 = 0,9$ en $59,05 : 65,61 \approx 0,9$.
 Er is sprake van een exponentieel verband.
 Tabel B: $1 - 3 = -2$ en $0 - 1 = -1$; $1 : 3 = \frac{1}{3}$ en $0 : 1 = 0$.
 Geen lineair of exponentieel verband.
 Tabel C: $1 - (-1,5) = 2,5$; $3,5 - 1 = 2,5$; $6 - 3,5 = 2,5$ en $8,5 - 6 = 2,5$.
 Er is sprake van een lineair verband.
- b** A: Bij $x = 12$ is $y = 59,05 \cdot 0,9^6 \approx 31,38$.
 B: Bij $x = 12$ is $y = 10 + 5 + 6 = 21$.
 C: Bij $x = 12$ is $y = 8,5 + 3 \cdot 2,5 = 16$.

14.1 Recursieve formules

- intro** Rij A De toename is steeds 3. Het volgende getal is $16 + 3 = 19$.
 Rij B Het volgende getal is steeds de helft van het voorgaande getal.
 Het volgende getal is $3 : 2 = 1\frac{1}{2}$.
 Rij C Er is afwisselend een verdubbeling en een aftrek van 3.
 Het volgende getal is $27 \times 2 = 54$.
 Rij D Het zijn kwadraten. Het volgende getal is $6^2 = 36$.
 Rij E Het volgende getal is het voorgaande keer 2 plus 1.
 Het volgende getal is $63 \times 2 + 1 = 127$.

- 1 a** Het verschil tussen de getallen is 1, 2, 3 en 4.
 Het verschil tussen twee opeenvolgende neemt steeds met 1 toe.
- b** Het 6e getal is $13 + 5 = 18$.
 Het 7e getal is $18 + 6 = 24$.
 Het 8e getal is $24 + 7 = 31$.
- c** $4 \times 3 - 7 = 5$
 $5 \times 3 - 7 = 8$
 $8 \times 3 - 7 = 17$, klopt allemaal.

14 Rijen en recursie

- d** Het 5e getal is $17 \times 3 - 7 = 44$
 Het 6e getal is $44 \times 3 - 7 = 125$
 Het 7e getal is $125 \times 3 - 7 = 368$
e $\text{nieuwe waarde} = 3 \times \text{oude waarde} - 7$
- 2 a** De vijfde term is $2 \times 23 + 1 = 47$ en de zesde term is $2 \times 47 + 1 = 95$.
b $\text{nieuwe waarde} = \frac{1}{2} \times \text{oude waarde}$ of $\text{nieuwe waarde} = \text{oude waarde} : 2$
 De vijfde term is $\frac{1}{2} \times 100 = 50$ en de zesde term is $\frac{1}{2} \times 50 = 25$.
c $\text{nieuwe waarde} = 3 \times \text{oude waarde} - 2$
 De vijfde term is $3 \times 55 - 2 = 163$ en de zesde term is $3 \times 163 - 2 = 487$.
- 3 a** De 1e term is 46
 De 2e term is $1,5(46 - 10) = 54$
 De 3e term is $1,5(54 - 10) = 66$
 De 4e term is $1,5(66 - 10) = 84$, klopt allemaal.
b De 5e term is $1,5(84 - 10) = 111$
 De 6e term is $1,5(111 - 10) = 151,5$.
c De 1e term is 74
 De 2e term is $1,5(74 - 10) = 96$
 De 3e term is $1,5(96 - 10) = 129$
 De 4e term is $1,5(129 - 10) = 178,5$, klopt allemaal.
d De 1e term is 34
 De 2e term is $1,5(34 - 10) = 36$
 De 3e term is $1,5(36 - 10) = 39$
 De 4e term is $1,5(39 - 10) = 43,5$
- 4 a**
- | | | | | | | | |
|--------|---|---|----|----|----|----|----|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $u(n)$ | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 |
- b** $\text{nieuwe waarde} = \text{oude waarde} + 4$ met $u(0) = 3$
c $\text{nieuwe waarde} = \text{oude waarde} \times 4$ met $w_1 = 5$
- 5 a** $u(1) = 4$
 $u(2) = 2 \times 4 + 1 = 9$
 $u(3) = 2 \times 9 + 1 = 19$
 $u(4) = 2 \times 19 + 1 = 39$
 $u(5) = 2 \times 39 + 1 = 79$
b Als $u(n)$ de oude waarde is, dan is $u(n + 1)$ de volgende ofwel nieuwe waarde.
- 6** $u(n + 1) = 1,4 \cdot u(n) - 5$
- 7 a** $\text{nieuwe waarde} = 10 \cdot \text{oude waarde} + 4$
 $u(1) = 2$
 $u(2) = 10 \cdot u(1) + 4 = 10 \times 2 + 4 = 24$
 $u(3) = 10 \cdot u(2) + 4 = 10 \times 24 + 4 = 244$
 $u(4) = 10 \cdot u(3) + 4 = 10 \times 244 + 4 = 2444$

b $\text{nieuwe waarde} = \frac{1}{2} \cdot \text{oude waarde}$

$$u(0) = 34$$

$$u(1) = \frac{1}{2} \cdot u(0) = \frac{1}{2} \times 34 = 17$$

$$u(2) = \frac{1}{2} \cdot u(1) = \frac{1}{2} \times 17 = 8\frac{1}{2}$$

$$u(3) = \frac{1}{2} \cdot u(2) = \frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2} = 4\frac{1}{4}$$

c $\text{nieuwe waarde} = 2 \cdot \text{oude waarde} + 3$

$$u_0 = -\frac{1}{2}$$

$$u_1 = 2 \cdot u_0 + 3 = 2 \times -\frac{1}{2} + 3 = 2$$

$$u_2 = 2 \cdot u_1 + 3 = 2 \times 2 + 3 = 7$$

$$u_3 = 2 \cdot u_2 + 3 = 2 \times 7 + 3 = 17$$

8 a De oppervlakte van A1 is $0,5 \times 1 = 0,5 \text{ m}^2$

De oppervlakte van A2 is $0,5 \times 0,5 = 0,25 \text{ m}^2$

De oppervlakte van A3 is $0,5 \times 0,25 = 0,125 \text{ m}^2$

b $A(n+1) = 0,5 \times A(n)$ met $A(0) = 1$

c De oppervlakte van een A6 vel is $0,5^6 = 0,015625 \text{ m}^2$ (of $\frac{1}{64} \text{ m}^2$)

04 a

n	0	1	2	3	4	5
$u(n)$	-1	2	5	8	11	14

b Elke volgende term is 3 groter dan de voorgaande term.

c Zie opdracht a.

$$u(4) = 8 + 3 = 11 \text{ en } u(5) = 11 + 3 = 14$$

d $\text{nieuwe waarde} = \text{oude waarde} + 3$ met beginterm $u(0) = -1$

e $w(6) = \frac{1}{2} \times 15 = 7,5$ en $w(7) = \frac{1}{2} \times 7,5 = 3,75$

n	1	2	3	4	5	6	7
w_n	240	120	60	30	15	7,5	3,75

f Elke volgende term is steeds de helft van de voorgaande term.

g $\text{nieuwe waarde} = \frac{1}{2} \times \text{oude waarde}$ met beginterm $w_1 = 240$.

07 a Als $u(1)$ de oude waarde is, dan is $u(2)$ de nieuwe waarde.

b $u(2) = 3 \cdot u(1) - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10$

c $u(3) = 3 \times 10 - 2 = 28$

$$u(4) = 3 \times 28 - 2 = 82$$

$$u(5) = 3 \times 82 - 2 = 244$$

d $u_1 = 0$

$$u_2 = 7 \cdot u_1 + 1 = 7 \times 0 + 1 = 1$$

$$u_3 = 7 \cdot u_2 + 1 = 7 \times 1 + 1 = 8$$

$$u_4 = 7 \cdot u_3 + 1 = 7 \times 8 + 1 = 57$$

e $u(0) = 0,5$

$$u(1) = 6 \cdot u(0) + 1 = 6 \times 0,5 + 1 = 4$$

$$u(2) = 6 \cdot u(1) + 1 = 6 \times 4 + 1 = 25$$

$$u(3) = 6 \cdot u(2) + 1 = 6 \times 25 + 1 = 151$$

14 Rijen en recursie

U1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Zie tabel; de term met rangnummer 12 is de eerste term die ook een kwadraat is.

14.2 Rijen weergeven

intro Eens in de twee jaar wordt er geteld hoeveel het er ongeveer zijn.
 Het is niet goed te zien of het verband lineair of exponentieel is.
 In twintig jaar is het aantal gedaald met 30 000, dat is per jaar 1500.
 De recursieve formule vanaf het jaar 2000 zou dus kunnen zijn:
 $u(n+1) = u(n) - 1500$ met $u(0) = 68\,000$.

Of:

de groeifactor per 20 jaar is $\frac{38\,000}{68\,000} = 0,558\dots$ dus per jaar $0,558\dots^{\frac{1}{20}} \approx 0,97$.

Dan is de recursieve formule $u(n+1) = 0,97 \cdot u(n)$ met $u(0) = 68\,000$

9 a $u(2) = 4 \cdot u(1) + 7 = 4 \times 0 + 7 = 7$

b $u(3) = 4 \cdot u(2) + 7 = 4 \times 7 + 7 = 35$

$u(4) = 4 \cdot u(3) + 7 = 4 \times 35 + 7 = 147$

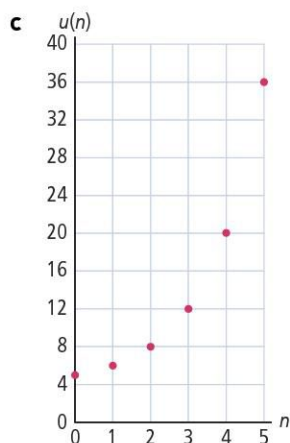
$u(5) = 4 \cdot u(4) + 7 = 4 \times 147 + 7 = 595$

n	1	2	3	4	5
$u(n)$	0	7	35	147	595

10 a $u(0) = 5$ dus $u(1) = 2 \cdot u(0) - 4 = 2 \times 5 - 4 = 6$

b

n	0	1	2	3	4	5
$u(n)$	5	6	8	12	20	36



d Voor n gebruik je alleen gehele getallen. De waarden tussen de punten komen dus niet voor in de rij getallen.

11 a Invoer: $u(n+1) = 2 \cdot u(n) + 24$ met $u(0) = 10$

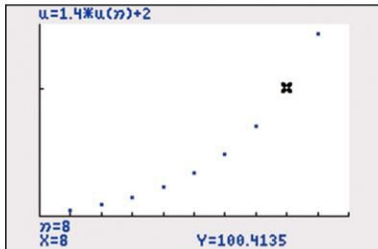
Maak een tabel vanaf $n = 0$ met stapgrootte 1.

In de tabel lees je af dat $u(11) = 69\,608$ en $u(12) = 139\,240$

Dus vanaf $n = 12$ is de bijbehorende term groter dan 100 000.

- b** Invoer: $u(n+1) = 1,5 \cdot (u(n))^2 - 10$ met $u(1) = 3$
 Maak een tabel vanaf $n = 1$ met stapgrootte 1.
 In de tabel lees je af dat $u(5) = 13\,588$ en $u(6) = 2,77 \cdot 10^8$
 Dus vanaf $n = 6$ is de bijbehorende term groter dan 100 000.

- 12 a** Invoer: $u(n+1) = 1,4 \cdot u(n) + 2$ met $u(1) = 5$
 Venster: $0 \leq n \leq 10$, start $n = 1$ en stapgrootte 1
 $0 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 120$



- b** In de plot zie je dat $P(7) \approx 70,3$ en $P(8) \approx 100,4$.
 $P(t) > 100$ vanaf rangnummer 8.

- 13 a** $u(1) = 0$
 $u(2) = 3 \cdot u(1) + 10 = 3 \times 0 + 10 = 10$
 $u(3) = 3 \cdot u(2) + 10 = 3 \times 10 + 10 = 40$
 $u(4) = 3 \cdot u(3) + 10 = 3 \times 40 + 10 = 130$
 $u(5) = 3 \cdot u(4) + 10 = 3 \times 130 + 10 = 400$
- b** In woorden is de formule $u(n+1) = 3 \cdot u(n) + 10$
nieuwe waarde = $3 \times$ *oude waarde* + 10.
 De term met rangnummer n is de term na die met rangnummer $n - 1$.
 Dus ook bij de formule $u(n) = 3 \cdot u(n-1) + 10$ hoort de woordformule
nieuwe waarde = $3 \times$ *oude waarde* + 10.
 Dus ook hier geldt: $u(2) = 3 \cdot u(1) + 10 = 3 \times 0 + 10 = 10$ enzovoort.
- c** $a(n+1) = a(n) - 5$ kun je ook schrijven als $a(n) = a(n-1) - 5$.

- 14 a** Invoer: $u(n) = 0,9 \cdot u(n-1) + 2000$ met $u(0) = 40\,000$
 Maak een tabel vanaf $n = 0$ met stapgrootte 1.

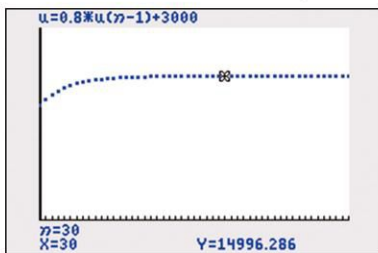
t	0	1	2	3	4
$a(t)$	40 000	38 000	36 200	34 580	33 122

- b** In de tabel lees je af dat $a(13) \approx 25\,084$ en $a(14) \approx 24\,575$.
 Dus na 14 jaar ofwel in 2025 zijn er voor het eerst minder dan 25 000 bezoekers.

- 15 a** Een toename van 1,2% betekent een groeifactor van 1,012.
 De recursieve formule is $V(t) = 1,012 \cdot V(t-1) - 500$ met $V(0) = 10\,000$.
- b** Invoer: $u(n) = 1,012 \cdot u(n-1) - 500$ met $u(0) = 10\,000$
 Maak een tabel vanaf $n = 0$ met stapgrootte 1.
 $u(10) \approx 5988$, dus na 10 jaar zijn er ongeveer 6000 vissen.
- c** Het aantal vissen blijft afnemen, op den duur zullen er dus geen vissen meer zijn.
- d** Een groei van 1,2% bij een beginaantal van 10 000 betekent dat er meer dan 100 vissen bijkomen. Als je dus maar 100 vissen vangt, neemt het aantal toe.

14 Rijen en recursie

- 16 a** Het getal 3000 is het aantal nieuwe bomen dat elk jaar wordt bij geplant.
De factor 0,8 betekent dat elk jaar 20% van de bomen wordt gekapt.
- b** Invoer: $u(n+1) = 0,8 \cdot u(n) + 3000$ met $u(0) = 12000$
Venster: $0 \leq n \leq 50$, start $n = 1$ en stapgrootte 1
 $0 \leq x \leq 50$ en $0 \leq y \leq 20000$



Het aantal bomen neemt toe tot 15000 en blijft daarna stabiel op dit aantal.

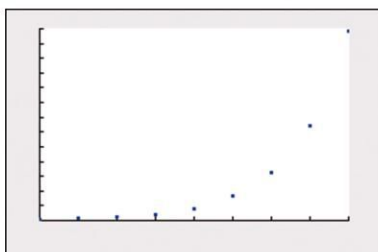
- c** Als er 3500 bomen geplant worden dan moet de formule veranderd worden:
Invoer: $u(n+1) = 0,8 \cdot u(n) + 3500$ met $u(0) = 12000$.
Als er 3500 bomen geplant worden staan er op den duur 17500 bomen in het bos.

- 011 a** Voor n gebruik je alleen gehele getallen. De waarden tussen de punten komen dus niet voor in de rij getallen.

- b** Invoer: $u(n+1) = 2 \cdot u(n) - 3$ met $u(0) = 8$
Maak een tabel vanaf $n = 0$ met stapgrootte 1.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N_t	8	13	23	43	83	163	323	643	1283

- c** Venster: $0 \leq n \leq 8$, start $n = 1$ en stapgrootte 1
 $0 \leq x \leq 8$ en $0 \leq y \leq 1300$



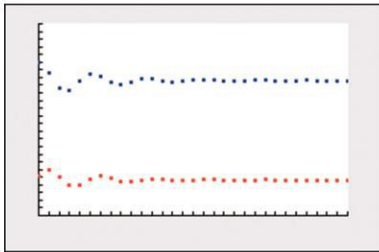
- d** In de tabel zie je dat $N_4 = 83$ en $N_5 = 163$.
Dus bij $t \geq 5$ is $N_t > 100$.
- e** In de tabel zie je dat $u(8) = 114820$ en $u(9) = 344455$.
Vanaf $n = 9$ is $u(n) > 300000$.

- 014 a** $\text{nieuwe waarde} = 1,6 \times \text{oude waarde} + 2$.
- b** De nieuwe waarde is $a(t+1)$.
- c** De oude waarde is $a(t)$.
- d** De oude waarde is nu $a(t-1)$, het rangnummer is één lager dan de nieuwe waarde.
- e** Invoer: $u(n) = 1,6 \cdot u(n-1) + 2$ met $u(0) = 10$
Maak een tabel vanaf $n = 0$ met stapgrootte 1.
 $u(4) \approx 84$ en $u(5) \approx 136$
Na 5 weken zijn er voor het eerst meer dan 100 grieppatiënten.

n	$u(n)$			
0	10			
1	18			
2	30.8			
3	51.28			
4	84.048			
5	136.48			
6	220.36			
7	354.58			
8	569.33			
9	912.93			
10	1462.7			

$u(5) = 136.4768$

- U2 a** Invoer: $u(n+1) = 0,8 \cdot u(n) - 1,4 \cdot v(n) + 1000$ met $u(0) = 2000$
 $v(n+1) = 0,6 \cdot u(n) - 0,2 \cdot v(n) - 500$ met $v(0) = 525$
 Venster: $0 \leq n \leq 30$, start $n = 0$ en stapgrootte 1
 $0 \leq x \leq 30, 0 \leq y \leq 2500$



- b** In de eerste jaren beïnvloeden de twee populaties elkaar en is er een schommeling van de aantallen binnen de twee populaties. Na een jaar of 10 ontstaat er een evenwicht.
 Populatie a stabiliseert zich en heeft ongeveer 1760 dieren, het aantal van populatie b stabiliseert zich bij ongeveer 460 dieren.

14.3 Directe formules

intro Je ziet dat er per uur 20 bacteriën bij komen. Na 50 uur is dat een toename van $50 \times 20 = 1000$.
 Na 50 uur zullen er dus $10 + 1000 = 1010$ bacteriën zijn.

- 17 a** In het 5e figuur zullen er $5 \times 5 = 25$ sterren staan.

b

n	1	2	3	4	5
$a(n)$	1	4	9	16	25

c $a(1) = 1$

$$a(2) = a(1) + 2 \cdot n - 1 = 1 + 2 \times 2 - 1 = 4$$

$$a(3) = a(2) + 2 \cdot n - 1 = 4 + 2 \times 3 - 1 = 9$$

$$a(4) = a(3) + 2 \cdot n - 1 = 9 + 2 \times 4 - 1 = 16$$

$$a(5) = a(4) + 2 \cdot n - 1 = 16 + 2 \times 5 - 1 = 25, \text{ klopt allemaal.}$$

d $a(6) = a(5) + 2 \cdot n - 1 = 25 + 2 \times 6 - 1 = 36$

$$a(7) = a(6) + 2 \cdot n - 1 = 36 + 2 \times 7 - 1 = 49$$

$$a(8) = a(7) + 2 \cdot n - 1 = 49 + 2 \times 8 - 1 = 64$$

Het 8e figuur heeft voor het eerst meer dan 50 sterren.

e $a(1) = 1^2 = 1, a(2) = 2^2 = 4, a(3) = 3^2 = 9, \dots$ klopt allemaal.

f De formules geven dezelfde uitkomsten.

g De formule $a(n) = n^2$ is makkelijker. Je kunt daarmee direct uitrekenen hoe groot de 30e term is. Bij de formule $a(n) = a(n-1) + 2n - 1$ moet je steeds verder rekenen met de voorgaande term.

- 18 a** Bij het berekenen van de termen wordt alleen het rangnummer n gebruikt.

b $u(1) = 1^2 + 3 \times 1 = 4$

$$u(2) = 2^2 + 3 \times 2 = 10$$

$$u(3) = 3^2 + 3 \times 3 = 18$$

$$u(4) = 4^2 + 3 \times 4 = 28$$

n	0	1	2	3	4
$u(n)$	0	4	10	18	28

14 Rijen en recursie

- c $u(30) = 30^2 + 3 \times 30 = 990$ en $u(31) = 31^2 + 3 \times 31 = 1054$
Vanaf $n = 31$ geldt dat $u(n) > 1000$.

19 a Rij A:

De volgende term is de voorgaande term -3 met $v(0) = 14$.

Een recursieve formule is $v(n+1) = v(n) - 3$ met $v(0) = 14$.

Rij B:

De volgende term is de voorgaande term $\times 2$ met $w(0) = 96$.

Een recursieve formule is $w(n+1) = 2 \cdot w(n)$ met $w(0) = 96$.

- b Een directe formule bij rij A is $v(n) = -3n + 14$.
c Bij rij B is er sprake van een exponentieel verband.
d Een directe formule bij rij B is $w(n) = 96 \cdot 2^n$.

20 a $216 : 324 = \frac{2}{3}$; $144 : 216 = \frac{2}{3}$; $96 : 144 = \frac{2}{3}$

De volgende term is de voorgaande term $\times \frac{2}{3}$ met $u(0) = 324$.

Een recursieve formule is $u(n+1) = \frac{2}{3} \cdot u(n)$ met $u(0) = 324$.

Een directe formule bij rij u is $u(n) = 324 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- b $198 - 212 = -14$; $184 - 198 = -14$; $170 - 184 = -14$
De volgende term is de voorgaande term -14 met $w_1 = 212$.
Een recursieve formule is $w(n+1) = w(n) - 14$ met $w(1) = 212$.
 $w_0 = 212 + 14 = 226$
Een directe formule bij rij w is $w_n = -14n + 226$.

21 a A: De volgende term is $27 + 5 = 32$.

B: Het verschil tussen de termen wordt steeds één groter.

De volgende term is $10 + 5 = 15$.

C: De volgende term is $\frac{1}{2} \times 12\frac{1}{2} = 6\frac{1}{4}$.

D: De volgende term is $2 \times 24 = 48$.

E: De volgende term is $11 - 3 = 8$.

- b Rij A en rij E zijn rekenkundig.
Het verschil bij rij A is 5, het verschil bij rij E is -3 .
c Rij A: $A(n) = 5n + 12$
Rij E: $E(n) = -3n + 20$
d Rij C en rij D zijn meetkundig.
De reden van rij C is $\frac{1}{2}$, de reden bij rij D is 2.
e Rij C: $C(n) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$
Rij D: $D(n) = 3 \cdot 2^n$

22 a De volgende term is de voorgaande term $+12$ met $L_0 = 75$.

Een recursieve formule is $L_{t+1} = L_t + 12$ met $L_0 = 75$.

- b Een directe formule bij rij L is $L_t = 12t + 75$.
c Een directe formule bij het aantal jongens is $J_t = 4t + 15$.
1 augustus 2021 komt overeen met $t = 4$.
Het totaal aantal leden is dan $L_{14} = 12 \times 4 + 75 = 123$.
Het aantal jongens is $J_4 = 4 \times 4 + 15 = 31$.
 $(31 : 123) \times 100\% = 25,203\ldots\%$
Op 1 augustus 2021 is ongeveer 25% van de leden een jongen.

- 23 a** De toename tussen $u(1)$ en $u(4)$ is $243 - 72 = 171$.
Dit is een toename van $171 : 3 = 57$ per stap.
 $u(0) = 72 - 57 = 15$.
Een recursieve formule is $u(n+1) = u(n) + 57$ met $u(0) = 15$.
Een directe formule is $u(n) = 57n + 15$.
- b** De factor tussen $u(1)$ en $u(4)$ is $243 : 72 = 3,375$.
De factor per stap is $3,375^{\frac{1}{3}} = 1,5$.
- c** $u(0) = 72 : 1,5 = 48$
Een recursieve formule is $u(n+1) = 1,5 \cdot u(n)$ met $u(0) = 48$.
Een directe formule is $u(n) = 48 \cdot 1,5^n$.

- 018 a** Bij het berekenen van de termen wordt alleen het rangnummer n gebruikt.
- b** $u(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$
- c** Om $u(2)$ te berekenen gebruik je $n = 2$.
- d** $u(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8$
 $u(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 = 15$
- e**
- | | | | | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $u(n)$ | 0 | 3 | 8 | 15 | 24 | 35 | 48 | 63 | 80 | 99 | 120 |
- f** In de tabel zie je dat $u(9) = 99$ en $u(10) = 120$.
Dus bij $n \geq 10$ is $u(n) > 100$.

- 020 a** De volgende term is de voorgaande term $+7$
- | | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| a_n | 12 | 19 | 26 | 33 | 40 | 47 | 54 |
- b** Het verschil van rij a is 7.
- c** $a_0 = 12 - 7 = 5$
- d** Een directe formule is $a_n = 7n + 5$.
- e** $8000 : 10000 = 0,8$; $6400 : 8000 = 0,8$ en $5120 : 6400 = 0,8$
Je vindt de volgende term door de voorgaande term met 0,8 te vermenigvuldigen.
- f** De reden van rij c is 0,8.
- g** $c(0) = 10000 : 0,8 = 12500$
- h** Een directe formule voor rij c is $c(n) = 12500 \cdot 0,8^n$.

- U3** Van rij u is $u(0) = 5700 + 100 \times 7 = 6400$.
Een directe formule is $u(n) = -7n + 6400$.
Van rij w is $w(0) = 80 : 2^4 = 5$.
Een directe formule is $w(n) = 5 \cdot 2^n$.
Bereken met de rekenmachine bij welke waarde van n geldt $u(n) < w(n)$.
Invoer: $y_1 = -7x + 6400$ en $y_2 = 5 \cdot 2^x$
In een tabel zie je dat bij $x = 10$ hoort $y_1 = 6330$ en $y_2 = 5120$ en dat bij $x = 11$ hoort $y_1 = 6323$ en $y_2 = 10240$.
Dus vanaf $n = 11$ is $u(n) < w(n)$.

14 Rijen en recursie

14.4 Som van een rekenkundige rij

intro Er zijn 100 getallen van 1 tot en met 100
 $1 + 100 = 101, 2 + 99 = 101, 3 + 98 = 101, 4 + 97 = 101, \dots, 50 + 51 = 101$.
 Er zijn 50 paren getallen met de som 101.
 De som van de getallen 1 tot en met 100 is dus $50 \times 101 = 5050$.

24 a

n	0	1	2	3	4	5
$u(n)$	16	18	20	22	24	26

- b** $u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + u(4) + u(5) = 16 + 18 + 20 + 22 + 24 + 26 = 126$
c Het aantal opgetelde termen is 6.
d Bij de som $u(4) + u(5) + \dots + u(11)$ zijn 8 termen opgeteld.

25 a De volgende term vind je door steeds 10 bij de voorgaande term op te tellen.

b $\sum_{k=2}^5 u(k) = u(2) + u(3) + u(4) + u(5)$

c $\sum_{k=2}^5 u(k) = 19 + 29 + 39 + 49 = 136$

26 a De som $\sum_{k=0}^5 u(k)$ is de som van de termen $u(0), u(1), u(2), u(3), u(4)$ en $u(5)$.
 Bij deze som worden er 6 termen opgeteld.

b $\sum_{k=0}^5 u(k) = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 = 69$

c Er worden 6 termen opgeteld.
 $u(0) + u(5) = 23, u(1) + u(4) = 23, \dots, u(5) + u(0) = 23$
 Er zijn dus 6 paren getallen met de som 23.

Je hebt dan de som van twee rijen.

De som van één rij is dan $\frac{1}{2} \times 6 \times 23 = 69$.

d Het aantal op te tellen termen is 11.
 De som van de eerste term en laatste term is de som van $u(5)$ en $u(15)$.
 Er zijn 11 paren getallen waarvan de som gelijk is aan de som van $u(5)$ en $u(15)$.

De som van de termen $u(5)$ tot en met $u(15)$ is dus $\frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (u(5) + u(15))$.

e $u(5) = 3 \times 5 + 4 = 19$ en $u(15) = 3 \times 15 + 4 = 49$

$$\sum_{k=5}^{15} u(k) = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (19 + 49) = 374$$

27 a Het aantal op te tellen termen is 81.

b $u(0) = 1,5 \times 0 + 100 = 100$ en $u(80) = 1,5 \times 80 + 100 = 220$

$$\sum_{k=0}^{80} u(k) = \frac{1}{2} \cdot 81 \cdot (100 + 220) = 12960$$

- 28 a** Bij $\sum_{k=0}^{11} (2k + 5)$ moet je 12 termen optellen.

$$u(0) = 2 \times 0 + 5 = 5 \text{ en } u(11) = 2 \times 11 + 5 = 27$$

$$\sum_{k=0}^{11} (2k + 5) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (5 + 27) = 192$$

- b** Bij $\sum_{k=3}^{17} (4k - 20)$ moet je 15 termen optellen.

$$u(3) = 4 \times 3 - 20 = -8 \text{ en } u(17) = 4 \times 17 - 20 = 48$$

$$\sum_{k=3}^{17} (4k - 20) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (-8 + 48) = 300$$

- c** Bij $\sum_{k=5}^{19} (0,5k - 3)$ moet je 15 termen optellen.

$$u(5) = 0,5 \times 5 - 3 = -0,5 \text{ en } u(19) = 0,5 \times 19 - 3 = 6,5$$

$$\sum_{k=5}^{19} (0,5k - 3) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (-0,5 + 6,5) = 45$$

- d** Bij $\sum_{k=19}^{104} (1 - 3k)$ moet je 86 termen optellen.

$$u(19) = 1 - 3 \times 19 = -56 \text{ en } u(104) = 1 - 3 \times 104 = -311$$

$$\sum_{k=19}^{104} (1 - 3k) = \frac{1}{2} \cdot 86 \cdot (-56 - 311) = -15\,781$$

- 29 a** De volgende term is de voorgaande term +4 met $u(0) = 2$.

Een directe formule is $u(n) = 4n + 2$.

- b** $4n + 2 = 74$

$$n = 72 : 4 = 18$$

Bij de term met waarde 74 hoort $n = 18$.

- c** Lies moet 19 termen optellen.

- d** De som van de getallen 2, 6, 10, ..., 74 is $\frac{1}{2} \cdot 19 \cdot (2 + 74) = 722$

- e** De volgende term is de voorgaande term +3 met $u(0) = 4$.

Een directe formule is $u(n) = 3n + 4$.

$$3n + 4 = 67$$

$$n = 63 : 3 = 21$$

Bij de term met waarde 67 hoort $n = 21$.

Er moeten 22 termen worden opgeteld.

De som van de getallen 4, 7, 10, ..., 67 is $\frac{1}{2} \cdot 22 \cdot (4 + 67) = 781$.

- 30 a** $\sum_{k=0}^0 u(k)$ is de som van één term, namelijk de term bij $n = 0$.

$$u(0) = 2 \times 0 - 5 = -5$$

- b** $\sum_{k=0}^1 u(k) = u(0) + u(1) = -5 + -3 = -8$

$$\sum_{k=0}^2 u(k) = u(0) + u(1) + u(2) = -5 + -3 + -1 = -9$$

$$\sum_{k=0}^3 u(k) = u(0) + u(1) + u(2) + u(3) = -5 + -3 + -1 + 1 = -8$$

$$\sum_{k=0}^4 u(k) = u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + u(4) = -5 + -3 + -1 + 1 + 3 = -5$$

$$\sum_{k=0}^5 u(k) = u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + u(4) + u(5) = -5 + -3 + -1 + 1 + 3 + 5 = 0$$

14 Rijen en recursie

31 $u(0) = 3, u(1) = 7, u(2) = 11, u(3) = 15$ en $u(4) = 19$
 $s(0) = u(0) = 3$
 $s(1) = u(0) + u(1) = 3 + 7 = 10$
 $s(2) = u(0) + u(1) + u(2) = 10 + 11 = 21$
 $s(3) = u(0) + u(1) + u(2) + u(3) = 21 + 15 = 36$
 $s(4) = u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + u(4) = 36 + 19 = 55$

32 a De volgende term is de voorgaande term $+\frac{1}{2}$ met $u_0 = 6$.

Een directe formule is $u_n = \frac{1}{2}n + 6$.

b $s_n = \frac{1}{2} \times \text{aantal termen} \times (\text{eerste term} + \text{laatste term})$

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (u(0) + u(n))$$

$$s_n = \frac{1}{2}(n+1)\left(6 + \frac{1}{2}n + 6\right)$$

$$s_n = \frac{1}{2}(n+1)\left(\frac{1}{2}n + 12\right)$$

c Maak een tabel op je rekenmachine.

Invoer: $y_1 = 0,5(x+1)(0,5x+12)$

Bij $x = 51$ is $y_1 = 975$ en bij $x = 52$ is $y_1 = 1007$.

Dus vanaf $n = 52$ is $s_n > 1000$.

027 a

n	0	1	2	3	4	5
$u(n)$	-8	-5	-2	1	4	7

b De volgende term is de voorgaande term $+3$ met $u(0) = -8$.

c Bij deze som moet je 6 termen optellen.

d De eerste term is $u(0) = -8$.

De laatste term is $u(5) = 7$.

e De som van een rekenkundige rij is

$$\frac{1}{2} \times \text{aantal termen} \times (\text{eerste term} + \text{laatste term}).$$

Dat is in dit geval dus $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (-8 + 7) = -3$.

031 a

n	0	1	2	3	4	5
$u(n)$	4	1	-2	-5	-8	-11
$s(n)$	4	5	3	-2	-10	-21

b De volgende term is de voorgaande term -3 met $u(0) = 4$.

c $s(2) = u(0) + u(1) + u(2) = 4 + 1 - 2 = 3$

d $s(3) = u(0) + u(1) + u(2) + u(3) = 4 + 1 - 2 - 5 = -2$

$$s(4) = u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + u(4) = 4 + 1 - 2 - 5 - 8 = -10$$

$$s(5) = u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + u(4) + u(5) = 4 + 1 - 2 - 5 - 8 - 11 = -21$$

U4

n	0	1	2	3	4	5
$s(n)$	21	44	69	96	125	156

$$u(0) = s(0) \text{ dus } u(0) = 21$$

$$u(1) = s(1) - s(0) = 44 - 21 = 23$$

$$u(2) = s(2) - s(1) = 69 - 44 = 25$$

$$u(3) = s(3) - s(2) = 96 - 69 = 27$$

$$u(4) = s(4) - s(3) = 125 - 96 = 29$$

Bij de rij u is de volgende term steeds 2 groter dan de voorgaande term.

Een recursieve formule is $u(n+1) = u(n) + 2$ met $u(0) = 21$.

Een directe formule is $u(n) = 2n + 21$.

- U5 a** Op nummer 2000 tot en met nummer 1 moeten dus minimaal $150 + 151 + \dots + 2149$ stemmen zijn uitgebracht.

Het aantal termen is 2000, de eerste term is 150, de laatste term is 2149.

De som van de termen is $\frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot (150 + 2149) = 2\,299\,000$.

Er zijn dan dus minimaal 2 299 000 stemmen uitgebracht.

- b** $u(1)$ is het aantal stemmen op nummer 1.

$$u(2) = u(1) - 420 + 2$$

$$u(3) = u(2) - 420 + 3 = u(1) - 2 \times 420 + 2 + 3$$

$$u(4) = u(3) - 420 + 4 = u(1) - 3 \times 420 + 2 + 3 + 4$$

$$u(100) = u(99) - 420 + 100 = u(1) - 99 \times 420 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$$

$$\text{Omdat } 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = \frac{1}{2} \cdot 99 \cdot (2 + 100) = 5049 \text{ is}$$

$$u(100) = u(1) - 99 \times 420 + 5049 = u(1) - 36\,531$$

Nummer 1 krijgt dus 36 531 stemmen meer dan nummer 100.

14.5 Som van een meetkundige rij

intro Het totaal aantal mensen dat de roddel na 10 uur gehoord heeft is

$$20 + 20 \cdot 1,25^1 + 20 \cdot 1,25^2 + 20 \cdot 1,25^3 + \dots + 20 \cdot 1,25^{10}$$

- 33 a** Op het 1e veld ligt $2^0 = 1$ graankorrel.
Op het 10e veld liggen $2^9 = 512$ graankorrels.
- b** Het aantal korrels op het volgende veld is steeds twee keer zo groot als op het voorgaande veld.
- c** Op het 1e veld ligt $2^0 = 1$ graankorrel, op het 2e veld $2^1 = 2$, op het 3e veld $2^2 = 4$ en als je zo doorgaat liggen er op het 64e veld 2^{63} graankorrels.

- 34 a** Voor het 64e veld geldt $n = 64$.

$$s(64) = u(1) + u(2) + u(3) + u(4) + \dots + u(64)$$

$$= 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63}$$

- b** $2(1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{62} + 2^{63}) = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{63} + 2^{64}$

- c** $2 \cdot s(64) - s(64) = -1 + 2^{64}$

$$s(64) = -1 + 2^{64} \text{ ofwel}$$

$$s(64) = 2^{64} - 1$$

- 35 a** $u(2) = 4 \cdot 3^2$, $u(3) = 4 \cdot 3^3$, $u(4) = 4 \cdot 3^4$, ..., $u(10) = 4 \cdot 3^{10}$

Op de tweede regel staat de som van al deze termen.

- b** Omdat $3 \cdot u(2) = u(3)$, $3 \cdot u(3) = u(4)$, ..., $3 \cdot u(10) = u(11)$

- c** $3 \cdot s - s = -4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^{11}$ ofwel

$$3 \cdot s - s = 4 \cdot 3^{11} - 4 \cdot 3^2$$

$$3 \cdot s - s = u(11) - u(2)$$

$$s(3 - 1) = u(11) - u(2)$$

$$s = \frac{u(11) - u(2)}{3 - 1}$$

- d** $\sum_{k=2}^{10} u(k) = \frac{u(11) - u(2)}{2} = \frac{4 \cdot 3^{11} - 4 \cdot 3^2}{2} = 354\,276$

14 Rijen en recursie

$$36 \text{ a } \sum_{k=0}^{11} (3 \cdot 1,2^k) = \frac{3 \cdot 1,2^{12} - 3 \cdot 1,2^0}{1,2 - 1} \approx 118,7415$$

$$\text{b } \sum_{k=3}^7 (3^k) = \frac{3^8 - 3^3}{3 - 1} = 3267$$

$$\text{c } \sum_{k=5}^{16} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{17} - \left(\frac{3}{4}\right)^5}{\frac{3}{4} - 1} \approx 0,9192$$

$$\text{d } \sum_{k=7}^{22} (5 \cdot 1,03^k) = \frac{5 \cdot 1,03^{23} - 5 \cdot 1,03^7}{1,03 - 1} \approx 123,9521$$

37 a De reden is $6 : 3 = 2$.

De eerstvolgende term is $2 \times 768 = 1536$

$$\text{b } 3 + 6 + 12 + \dots + 768 = \frac{1536 - 3}{2 - 1} = 1533$$

c De reden is $2 : 4 = \frac{1}{2}$, de eerstvolgende term is $\frac{1}{2} \times \frac{1}{32} = \frac{1}{64}$

$$4 + 2 + 1 + \dots + \frac{1}{32} = \frac{\frac{1}{64} - 4}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-3\frac{63}{64}}{-\frac{1}{2}} = 7\frac{62}{64} = 7\frac{31}{32}$$

38 a Een verhoging van 1,8% per jaar betekent dat de huur 1,018 keer hoger is dan het voorgaande jaar.

De recursieve formule is *nieuwe waarde* = $1,018 \times \text{oude waarde}$.

b Een directe formule is $J_n = 80\,000 \cdot 1,018^n$ met $n = 0$ in 2020.

Na 10 jaar, dat is dus van $n = 0$ tot en met $n = 9$.

$$\sum_{k=0}^9 (80\,000 \cdot 1,018^k) = \frac{80\,000 \cdot 1,018^{10} - 80\,000}{1,018 - 1} = 868\,010,526$$

Joris heeft dus totaal € 868.010,53 betaald.

$$39 \text{ a } s(4) = \frac{20 \cdot 1,1^5 - 20 \cdot 1,1^0}{1,1 - 1} = \frac{20 \cdot 1,1^5 - 20}{0,1} = 122,102$$

$$s(5) = \frac{20 \cdot 1,1^6 - 20 \cdot 1,1^0}{1,1 - 1} = \frac{20 \cdot 1,1^6 - 20}{0,1} = 154,3122$$

b In de eerste stap heeft ze in de formule voor de som van een rekenkundige rij voor de eerstvolgende term $n + 1$ ingevuld.

c In stap 2 is de regel $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ gebruikt.

De factor $1,1^{n+1}$ is geschreven als $1,1 \cdot 1,1^n$.

$$\text{d } s(n) = \frac{20 \cdot 1,1 \cdot 1,1^n}{0,1} - \frac{20}{0,1} = 220 \cdot 1,1^n - 200$$

e Maak een tabel op de rekenmachine.

Invoer: $y_1 = 220 \cdot 1,1^x - 200$

Bij $x = 17$ is $y = 911,98$ en bij $x = 18$ is $y = 1023,2$

Dus vanaf $n = 18$ is $s(n) > 1000$.

$$40 \text{ a } u_0 = 7, u_1 = 12, u_2 = 17, u_3 = 22, u_4 = 27, u_5 = 32, u_6 = 37$$

$$\text{b } u_1 - u_0 = 12 - 7 = 5$$

$$u_2 - u_1 = 17 - 12 = 5$$

$$u_3 - u_2 = 22 - 17 = 5$$

$$u_4 - u_3 = 27 - 22 = 5$$

$$u_5 - u_4 = 32 - 27 = 5$$

$$u_6 - u_5 = 37 - 32 = 5$$

c De verschillen zijn gelijk.

41 a $w_0 = 5, w_1 = 15, w_2 = 45, w_3 = 135, w_4 = 405, w_5 = 1215, w_6 = 3645$
 $w_1 - w_0 = 15 - 5 = 10$
 $w_2 - w_1 = 45 - 15 = 30$
 $w_3 - w_2 = 135 - 45 = 90$
 $w_4 - w_3 = 405 - 135 = 270$
 $w_5 - w_4 = 1215 - 405 = 810$
 $w_6 - w_5 = 3645 - 1215 = 2430$

b De verschillen zijn steeds drie keer zo groot.

c recursieve formule: $v_{n+1} = 3 \cdot v_n$ met $v_0 = 10$, directe formule: $v(n) = 10 \cdot 3^n$

036 a De opeenvolgende termen van de rij $u(n) = 5 \cdot 2^n$ zijn steeds 2 keer zo groot.

b De eerste term $u(0) = 5 \cdot 2^0 = 5$.

c $u(8) = 5 \cdot 2^8 = 1280$ en de eerstvolgende term $u(9) = 2 \times 1280 = 2560$.

d $\sum_{k=0}^8 (5 \cdot 2^k) = \frac{2560 - 5}{2 - 1} = 2555$

037 a

n	0	1	2	3	4
u_n	2	10	50	250	1250

Het is een meetkundige rij omdat de volgende term 5 keer de voorgaande term is.

b De reden van de rij is $10 : 2 = 5$.

c De eerste term is 2.

d De eerstvolgende term van de rij is $5 \times 781250 = 3906250$.

e $2 + 10 + 50 + \dots + 781250 = \frac{3906250 - 2}{5 - 1} = 976562$

f De reden is $14 : 7 = 2$.

De eerste term is 7 en de eerstvolgende term is $2 \times 114688 = 229376$.

$7 + 14 + 28 + \dots + 114688 = \frac{229376 - 7}{2 - 1} = 229369$

U6 $u_0 = 5$ dus $s_0 = 5$

n	0	1	2	3	4	5
s_n	5	20	65	200	605	1820
u_n	5	15	45	135	405	1215

In de tabel zie je dat de rij u een meetkundige rij is met reden 3 en $u_0 = 5$.

Een directe formule is $u_n = 5 \cdot 3^n$.

$s_n = \frac{5 \cdot 3^{n+1} - 5}{3 - 1} = 2\frac{1}{2} \cdot 3^{n+1} - 2\frac{1}{2}$ ofwel $s_n = 7\frac{1}{2} \cdot 3^n - 2\frac{1}{2}$.

U7 a $\text{nieuwe waarde} = \text{oude waarde} + 2n + 3$

Het verschil tussen twee opeenvolgende termen is dus $2n + 3$.

Een directe formule voor de rij v is $v(n) = 2n + 3$.

b Rij v is een rekenkundige rij.

$s(n) = \frac{1}{2}(n+1)(v(0) + v(n))$

$s(n) = \frac{1}{2}(n+1)(3 + 2n + 3)$

$s(n) = \frac{1}{2}(n+1)(2n+6)$ ofwel $s(n) = (n+1)(n+3)$

c $u(0) = 9$ en de toename van de rij u is $v(n) = 2n + 3$.

$u(n) = 9 + n(2n + 3)$

$u(n) = 2n^2 + 3n + 9$

14 Rijen en recursie

14.6 Gemengde opdrachten

- 42 a** 54, 18, 6, 2, ... is een meetkundige rij met reden $\frac{1}{3}$.

Een recursieve formule is $u(n+1) = \frac{1}{3} \cdot u(n)$ met $u(0) = 54$.

Een directe formule is $u(n) = 54 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$$u(9) = 54 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{2}{729}$$

- b** 1, 4, 7, 10, ... is een rekenkundige rij met verschil 3.

Een recursieve formule is $u(n+1) = u(n) + 3$ met $u(0) = 1$.

Een directe formule is $u(n) = 3n + 1$.

$$u(9) = 3 \times 9 + 1 = 28$$

- c** 10, 110, 1210, 13310 is een meetkundige rij met reden 11.

Een recursieve formule is $u(n+1) = 11 \cdot u(n)$ met $u(0) = 10$.

Een directe formule is $u(n) = 10 \cdot 11^n$.

$$u(9) = 10 \cdot 11^9 \approx 2,36 \times 10^{10}$$

- d** 9; 7,5; 6; 4,5; ... is een rekenkundige rij met verschil $-1,5$.

Een recursieve formule is $u(n+1) = u(n) - 1,5$ met $u(0) = 9$.

Een directe formule is $u(n) = -1,5n + 9$.

$$u(9) = -1,5 \times 9 + 9 = -4,5$$

- 43 a** Figuur nummer 6 heeft $2 \times 6 + 1 = 13$ stippen.

- b** $u(n+1) = u(n) + 2$ met $u(1) = 3$.

- c** $u(1) = 3$ dus $u(0) = 3 - 2 = 1$

Een directe formule is $u(n) = 2n + 1$.

De vijftiengste figuur heeft $2 \times 25 + 1 = 51$ stippen.

- d** Het aantal stippen is een rekenkundige rij.

Hij heeft dan $\sum_{k=1}^{25} (2k+1) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (3+51) = 675$ stippen getekend.

- 44 a** $u(n) = 10 - 2n$ is een rekenkundige rij.

Bij de som $\sum_{k=5}^{13} (10 - 2k)$ tel je 9 termen op.

De eerste term is $u(5) = 10 - 2 \times 5 = 0$ en de laatste term is

$$u(13) = 10 - 2 \times 13 = -16.$$

$$\sum_{k=5}^{13} (10 - 2k) = \frac{1}{2} \cdot 9(0 + (-16)) = -72$$

- b** $u(n) = 5 \cdot 1,17^n$ is een meetkundige rij met reden 1,17.

$$\sum_{k=6}^{19} (5 \cdot 1,17^k) = \frac{u(20) - u(6)}{1,17 - 1} = \frac{5 \cdot 1,17^{20} - 5 \cdot 1,17^6}{0,17} \approx 604,13$$

- c** $235\,298 : 33\,614 = 7$; $33\,614 : 4802 = 7$, enzovoort.

De rij is een meetkundige rij met reden $\frac{1}{7}$.

$$235\,298 + 33\,614 + 4802 + \dots + \frac{2}{49} = \frac{\frac{2}{49} \cdot \frac{1}{7} - 235\,298}{1 - \frac{1}{7}} \approx 274\,514,33$$

- d** De rij is een rekenkundige rij met de formule $u(n) = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n$.

$$4\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n = -6\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}n = -11 \text{ dus } n = 22$$

Je telt dus de termen met rangnummer 0 tot en met 22 op, dit zijn 23 termen.

$$4\frac{1}{2} + 4 + 3\frac{1}{2} + \dots + -6\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 23(4\frac{1}{2} + -6\frac{1}{2}) = -23$$

- 45 a** Door jaarlijks een aflossing van $150\,000 : 20 = 7500$ te betalen daalt elk jaar hun schuld met € 7.500,- en is de lening na 20 jaar afbetaald.
- b** $0,022 \cdot 150\,000 = 3300$ euro rente over het eerste jaar.
- c** $0,022 \cdot (150\,000 - 7500) = 3135$ euro rente over het tweede jaar.
- d** Elk jaar gaat het bedrag waarover ze rente betalen met € 7.500,- omlaag. Het laatste jaar betalen ze dus nog over $150\,000 - 19 \times 7500$ euro rente. Totaal betalen ze:
 $0,022(20 \cdot 150\,000 - 7500 - 2 \cdot 7500 - \dots - 19 \cdot 7500) =$
 $0,022(20 \cdot 150\,000 - 7500 \cdot (1 + 2 + \dots + 19)) =$
 $0,022(20 \cdot 150\,000 - 7500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 20) = 34\,650$ euro aan rente.
- e** Ze betalen € 9.000. Dit bedrag is aflossing plus rente. De rente die ze betalen is 0,022 keer de schuld.
 De schuld S na 1 jaar is $S(1) = 150\,000 - (9\,000 - 0,022 \cdot 150\,000)$
 ofwel $S(n) = S(n-1) - (9\,000 - 0,022 \cdot S(n-1))$
 $S(n) = S(n-1) - 9\,000 + 0,022 \cdot S(n-1)$ dus
 $S(n) = 1,022 \cdot S(n-1) - 9\,000$ met $S(0) = 150\,000$.
 Maak een tabel op de rekenmachine:
 Invoer $u(n) = 1,022 \times u(n-1) - 9\,000$ met $u(0) = 150\,000$
 Bij $x = 20$, is $y = 8713$
 Na 20 jaar is de schuld dus nog 8713 euro.

Onderzoeksopdrachten

- 46 a** De aanwezige personen geven alle vier de vijfde persoon een hand. Er worden dus $6 + 4 = 10$ handdrukken totaal gegeven.
- b** Bij persoon n die er bijkomt, neemt het aantal handdrukken met $n - 1$ toe. Het totaal aantal handdrukken is dus $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 49$. Het is de som van een rekenkundige rij met 50 termen.
 $s_{50} = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot (0 + 49) = 1225$
- 47** Rij C is een meetkundige rij met directe formule $C(n) = 18,0 \cdot 0,91^n$. Plot de grafieken bij de formules op je rekenmachine.
 Invoer: $y_1 = 19,0 : (1 + 26,14 \times 0,73^x)$ en $y_2 = 18,0 \times 0,91^x$
 Venster: $0 \leq x \leq 20$, $0 \leq y \leq 20$
 Optie: snijpunt
 Het snijpunt is (9,10; 7,63)
 Dus in het 10e jaar na 2008 ofwel in 2018 is het aantal verkochte cd's kleiner dan het aantal downloadverkoppen.

Samenvatting

- S1** $u(1) = 2$
 $u(2) = 2^2 + 1 = 5$
 $u(3) = 5^2 + 1 = 26$

14 Rijen en recursie

S2 a Hier is de indexnotatie gebruikt.

b $a_1 = 1$

$$a_2 = \frac{2}{a_1} - 5 = \frac{2}{1} - 5 = -3$$

$$a_3 = \frac{2}{a_2} - 5 = \frac{2}{-3} - 5 = -5\frac{2}{3}$$

S3 a Formule A hoort bij een rekenkundige rij.

Het verschil is -4 .

b Formule B hoort bij een meetkundige rij, de reden is 2.

Formule D hoort bij een meetkundige rij, de reden is 9.

S4 $\sum_8^{12} \left(\frac{1}{2}k^2 - 3 \right) = u(8) + u(9) + u(10) + u(11) + u(12)$

$$\sum_8^{12} \left(\frac{1}{2}k^2 - 3 \right) = 29 + 37,5 + 47 + 57,5 + 69 = 240$$

S5 a

n	0	1	2	3	4
$u(n)$	-2	-1	6	25	62

b $s(0) = u(0) = -2$

$$s(1) = u(0) + u(1) = -2 + -1 = -3$$

$$s(2) = u(0) + u(1) + u(2) = -2 + -1 + 6 = 3$$

$$s(3) = u(0) + u(1) + u(2) + u(3) = -2 + -1 + 6 + 25 = 28$$

$$s(4) = u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + u(4) = -2 + -1 + 6 + 25 + 62 = 90$$

S6 Het is een meetkundige rij met reden $\frac{-72}{-108} = \frac{2}{3}$.

Een recursieve formule is $u(n+1) = \frac{2}{3} \cdot u(n)$ met $u(0) = -108$ of
 $u(n) = \frac{2}{3} \cdot u(n-1)$ met $u(0) = -108$.

S7 Maak een tabel op de rekenmachine.

Invoer: $u(n+1) = 1,4 \cdot u(n) + n$ met $u(0) = 2$.

$A(16) = 2292,5\dots$ en $A(17) = 3226,5\dots$

Vanaf rangnummer 17 is $A(t) > 3000$.

S8 a Het is een meetkundige rij met reden $288 : 384 = 0,75$.

Een recursieve formule is $v(n+1) = 0,75 \cdot v(n)$ met $v(0) = 384$.

Een directe formule is $v(n) = 384 \cdot 0,75^n$.

b Het is een rekenkundige rij met verschil 5.

Een recursieve formule is $w(n+1) = w(n) + 5$ met $w(1) = 76$.

$w(0) = 71$, dus een directe formule is $w(n) = 5n + 71$.

S9 De rij $u(n) = 142 - 5n$ is een rekenkundige rij.

Bij de som $\sum_{k=8}^{26} (142 - 5k)$ is het aantal op te tellen termen 19.

De eerste term is $142 - 5 \times 8 = 102$, de laatste term is $142 - 5 \times 26 = 12$.

$$\sum_{k=8}^{26} (142 - 5k) = \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot (102 + 12) = 1083$$

S10 De rij $u(n) = \frac{1}{9} \cdot 3^n$ is een meetkundige rij met reden 3.

$$\sum_{k=4}^{14} \left(\frac{1}{9} \cdot 3^k \right) = \frac{u(15) - u(4)}{3 - 1} = \frac{\frac{1}{9} \cdot 3^{15} - \frac{1}{9} \cdot 3^4}{2} = 797\,157$$

Test jezelf

T1 a u : 200, 202, 204, 206, ...

De volgende twee termen zijn: $206 + 2 = 208$ en $208 + 2 = 210$.

v : 200, 300, 450, 675, ...

De volgende twee termen zijn: $675 \times 1,5 = 1\,012,5$ en $1\,012,5 \times 1,5 = 1\,518,75$.

w : 200, 100, 50, 25, ...

De volgende twee termen zijn: $\frac{1}{2} \times 25 = 12\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2} \times 12\frac{1}{2} = 6\frac{1}{4}$.

b Een recursieve formule is $u(n+1) = u(n) + 2$ met $u(0) = 200$.

Een recursieve formule is $v(n+1) = 1\frac{1}{2} \cdot u(n)$ met $v(0) = 200$.

Een recursieve formule is $w(n+1) = \frac{1}{2} \cdot w(n)$ met $w(0) = 200$.

T2 a De aantallen in de rij worden steeds met 1,04 vermenigvuldigd.

b De groeifactor is 1,04. De toename per jaar is dus 4%.

c De reden is 1,04 en $A(0) = 800$.

Een directe formule is $A(t) = 800 \cdot 1,04^t$.

d Maak een tabel op de rekenmachine.

Invoer: $y_1 = 800 \cdot 1,04^x$

Bij $x = 5$ is $y = 973,3$ en bij $x = 6$ is $y = 1\,012,3$.

Dus na 6 jaar zijn er voor het eerst meer dan 1000 schapen.

T3 a De reden van de rij $1\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 5, \dots$ is 2.

Een recursieve formule is $u(n+1) = 2 \cdot u(n)$ met $u(0) = 1\frac{1}{4}$.

Een directe formule is $u(n) = 1\frac{1}{4} \cdot 2^n$.

b Maak een tabel op je rekenmachine

Invoer: $u(n) = 2u(n-1)$ met $u(0) = 1\frac{1}{4}$.

In de tabel lees je af dat $u(20)$ de eerste term is die groter is dan 1 miljoen.

c
$$\sum_{k=0}^{14} u(k) = \frac{u(15) - u(0)}{r - 1} = \frac{40\,960 - 1,25}{2 - 1} = 40\,958,75$$

d
$$\sum_{k=0}^n u(k) = \frac{u(n+1) - u(0)}{r - 1} = \frac{1,25 \cdot 2^{n+1} - 1,25}{2 - 1} = 1,25 \cdot 2^{n+1} - 1,25 = 2,5 \cdot 2^n - 1,25$$

T4 a Het zakgeld verandert niet elke maand met dezelfde hoeveelheid; drie maanden hetzelfde bedrag en dan drie maanden elke maand 1 euro meer.

b In het 1^e kwartaal krijgt hij $10 + 10 + 10 = 30$ euro.

In het 2^e kwartaal krijgt hij $11 + 11 + 11 = 33$ euro.

In het n^e kwartaal krijgt hij dus $27 + 3n$ euro.

Hij krijgt $z(n) = 27 + 3n$ euro per kwartaal aan zakgeld.

14 Rijen en recursie

- c Hij spaart per kwartaal $z(n) = 1,5n + 13,5$ euro.
 $z(n) = 1,5n + 13,5$ is een rekenkundige rij, na n kwartalen heeft hij

$$\sum_{k=1}^n (1,5k + 13,5) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (15 + 1,5n + 13,5) = \frac{1}{2}n(18,5 + 1,5n)$$
 euro gespaard.
 Maak een tabel met je rekenmachine.
 Invoer: $y_1 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (18,5 + 1,5x)$
 Bij $x = 14$ is $y = 276,5$ en bij $x = 15$ is $y = 307,5$.
 Dus na 15 kwartalen heeft hij meer dan 300 euro gespaard.
 Op 1 oktober 2023 heeft hij meer dan € 300,- gespaard.

- T5 a $u(n+1) = 0,75 \cdot u(n) + 80$ met $u(0) = 320$
 $u(1) = 0,75 \cdot 320 + 80 = 320$
 $u(2) = 0,75 \cdot 320 + 80 = 320$
 $u(3) = 0,75 \cdot 320 + 80 = 320$
 b De termen blijven constant 320.
 Door de factor 0,75 neemt de nieuwe waarde met 25% af.
 25% van 320 is 80, dus de afname is gelijk aan de toename van 80.
- T6 a Het aantal boeken neemt met 2% toe dus $p = 1,02$.
 Er worden 100 boeken weggedaan dus $q = -100$.
 b $B(n) = 1,02 \cdot B(n-1) - 100$ met $B(0) = 2500$ op 1 januari 2021.
 Maak een tabel op de rekenmachine.
 Invoer: $u(n) = 1,02 \times u(n-1) - 100$ en $u(0) = 2500$
 $u(2) = 2399$ en $u(5) = 2239,8$
 Na 2 jaar zijn er 2399 boeken en na 5 jaar zijn er 2240 boeken.
 c 2% van 2500 is $0,02 \times 2500 = 50$.
 Het aantal neemt dus toe met 50 boeken. Er moeten dus ook elk jaar 50 boeken worden weggedaan.

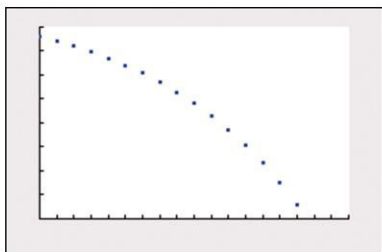
- T7 a $u_n : 2; 0,2; 0,02; 0,002; \dots$
 u is een meetkundige rij met reden 0,1.
 $u_n = 2 \cdot 0,1^n$

$$\sum_{k=0}^8 u_k = \frac{u_9 - u_0}{0,1 - 1} = \frac{2 \cdot 0,1^9 - 2}{-0,9} \approx 2,222$$

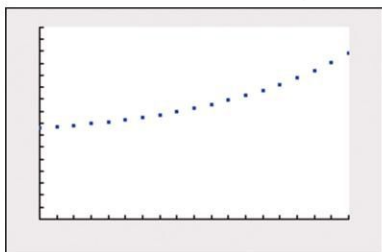
 b $w_n : 480, 430, 380, 330, \dots$
 w is een rekenkundige rij met verschil -50 .
 $w_n = -50n + 480$
 Bij de som $\sum_{k=11}^{20} w_k$ tel je 10 termen op.
 $w_{11} = -50 \times 11 + 480 = -70$ en $w_{20} = -50 \times 20 + 480 = -520$

$$\sum_{k=11}^{20} w_k = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (-70 + -520) = -2950$$

- T8 a** Het aantal zeerobben in 2002 is $1,12 \times 760 - 110 \approx 741$.
 Het aantal zeerobben in 2003 is $1,12 \times 741 - 110 \approx 720$.
- b** Een recursieve formule voor deze groei is $a(n+1) = 1,12 \cdot a(n) - 110$ met $a(0) = 760$.
 Invoer: $u(n+1) = 1,12 \cdot u(n) - 110$ met $u(0) = 760$.
 Venster: $0 \leq n \leq 18$, start $n = 1$ en stapgrootte 1
 $0 \leq x \leq 18, 0 \leq y \leq 800$



- c** Invoer: $u(n+1) = 1,12 \cdot u(n) - 80$ met $u(0) = 760$.
 Venster: $0 \leq n \leq 18$, start $n = 1$ en stapgrootte 1
 $0 \leq x \leq 18$ en $0 \leq y \leq 1600$



Je ziet dat het aantal dan toeneemt.

- d** In het eerste jaar komen er $0,12 \cdot 760 = 91,2$ zeehonden bij.
 Om het aantal zeerobben constant of net groeiend te houden mogen er 91,2 zeerobben gevangen worden.
 Dus bij een vangstquotum van 91 zeerobben per jaar is het aantal nog net groeiend.

Extra oefening

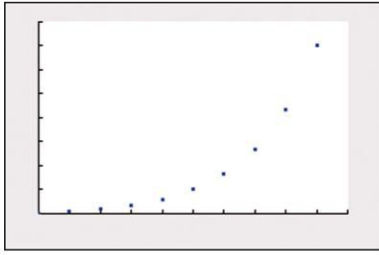
- E1 a** $72 : 96 = 0,75$; $54 : 72 = 0,75$ en $40,5 : 54 = 0,75$
 Een recursieve formule is $u(n) = 0,75 \times u(n-1)$ met $u(0) = 96$.
- b** $5 - 12 = -7$; $-2 - 5 = -7$; $-9 - -2 = -7$
 Een recursieve formule is $v_n = v_{n-1} - 7$ met $v_0 = 12$.

- E2 a** Invoer: $u(n+1) = 1,6 \cdot u(n) + 5$ met $u(0) = 2$.

n	u			
0	2			
1	8.2			
2	18.12			
3	33.992			
4	59.387			
5	100.02			
6	165.03			
7	269.05			
8	435.48			
9	701.77			
10	1127.8			
$n=0$				

14 Rijen en recursie

- b** Venster: $0 \leq n \leq 10$, start $n = 0$ en stapgrootte 1
 $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 1600$



- c** In de tabel zie je dat $B(t) > 300$ vanaf $t = 8$.

- E3 a** Het is een rekenkundige rij, het verschil is 9 en $u_0 = 22$.
 Een directe formule is $u_n = 9n + 22$.
- b** Het is een meetkundige rij, de reden is 3 en $v(0) = 9 : 3 = 3$
 Een directe formule is $v(n) = 3 \cdot 3^n$.
- c** Het is een rij met de kwadraten van n .
 Een directe formule is $w(n) = n^2$.
- E4 a** Het aantal op te tellen termen is 12.
 De eerste term is $u(0) = 200 - 6 \times 0 = 200$, de laatste term is
 $u(11) = 200 - 6 \times 11 = 134$.

$$\sum_{k=0}^{11} (200 - 6k) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (200 + 134) = 2004$$
- b** Het aantal op te tellen termen is 17.
 De eerste term is $u(7) = 200 - 6 \times 7 = 158$, de laatste term is
 $u(23) = 200 - 6 \times 23 = 62$.

$$\sum_{k=7}^{23} (200 - 6k) = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot (158 + 62) = 1870$$
- c** Het verschil in de rij is 5, de beginwaarde is 6.
 Een directe formule is $v(n) = 5n + 6$.
 $5n + 6 = 266$
 $n = 260 : 5 = 52$
 De term met waarde 266 hoort bij $n = 52$.
 Het aantal op te tellen termen is 53.
 De eerste term is 6, de laatste term is 266.
 $6 + 11 + 16 + \dots + 266 = \frac{1}{2} \cdot 53 \cdot (6 + 266) = 7208$

- E5 a**
$$\sum_{k=0}^{14} a(k) = \frac{a(15) - a(0)}{1,06 - 1} = \frac{5 \cdot 1,06^{15} - 5 \cdot 1,06^0}{0,06} \approx 116,38$$
- b**
$$\sum_{k=14}^{26} a(k) = \frac{a(27) - a(14)}{1,06 - 1} = \frac{5 \cdot 1,06^{27} - 5 \cdot 1,06^{14}}{0,06} \approx 213,45$$
- c** Het is een meetkundige rij met reden 2.

$$3 + 6 + 12 + \dots + 3072 = \frac{3072 \times 2 - 3}{2 - 1} = \frac{6144 - 3}{1} = 6141$$

E6 a Rij A:

$$u(0) = 3$$

$$u(1) = 2 \cdot u(0) - 4 = 2 \cdot 3 - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$u(2) = 2 \cdot u(1) - 4 = 2 \cdot 2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$u(3) = 2 \cdot u(2) - 4 = 2 \cdot 0 - 4 = 0 - 4 = -4$$

Rij B:

$$K_0 = 20$$

$$K_1 = -\frac{1}{2} \cdot K_0 + 1 = -\frac{1}{2} \cdot 20 + 1 = -10 + 1 = -9$$

$$K_2 = -\frac{1}{2} \cdot K_1 + 1 = -\frac{1}{2} \cdot -9 + 1 = 4\frac{1}{2} + 1 = 5\frac{1}{2}$$

$$K_3 = -\frac{1}{2} \cdot K_2 + 1 = -\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{2} + 1 = -2\frac{3}{4} + 1 = -1\frac{3}{4}$$

Rij C:

$$p(0) = 2$$

$$p(1) = (p(0))^2 - p(0) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$p(2) = (p(1))^2 - p(1) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$p(3) = (p(2))^2 - p(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

- b** Het is een meetkundige rij met reden $-\frac{1}{2}$ en beginterm $u(0) = 64$.

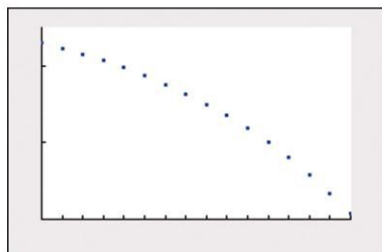
Een recursieve formule is $u(n+1) = -\frac{1}{2} \cdot u(n)$ met $u(0) = 64$.

- E7 a** De populatie neemt jaarlijks met 30 walvissen af, in het begin zijn er 230 en na elk jaar is de populatie 1,1 keer groter door de geboorte van de jongen.

- b** Invoer: $u(n+1) = 1,1 \cdot u(n) - 30$ met $u(0) = 230$.

Venster: $0 \leq n \leq 15$, start $n = 0$ en stapgrootte 1

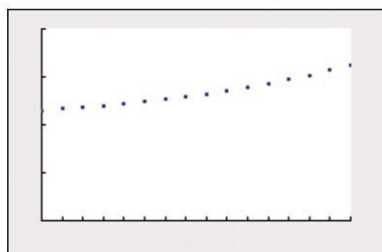
$$0 \leq x \leq 15, 0 \leq y \leq 250$$



- c** Invoer: $u(n+1) = 1,1 \cdot u(n) - 20$ met $u(0) = 230$.

Venster: $0 \leq n \leq 15$, start $n = 0$ en stapgrootte 1

$$0 \leq x \leq 15, 0 \leq y \leq 400$$



- d** Het aantal walvissen neemt toe met de factor 1,1.

Als er 230 walvissen zijn is dat dus een toename met $0,1 \times 230 = 23$.

Er mogen 23 walvissen gevangen worden om de walvispopulatie stabiel te laten blijven.

14 Rijen en recursie

- E8 a** 72, 24, 8, ... is een meetkundige rij met reden $\frac{24}{72} = \frac{1}{3}$.
 De eerste term is 72, dus $u(0) = 72 : \frac{1}{3} = 216$.
 $u(n) = 216 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$, dus de 10e term is $u(10) = 216 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = \frac{8}{2187}$.
- b** 111, 114, 117, 120, ... is een rekenkundige rij met verschil $114 - 111 = 3$.
 De eerste term is 111, dus $u(0) = 111 - 3 = 108$.
 $u(n) = 108 + 3n$, dus de 10e term is $u(10) = 108 + 3 \cdot 10 = 138$.
- c** 23, 14, 8, 5, ... is geen rekenkundige rij en geen meetkundige rij.
- d** 0,3; 0,03; 0,003; 0,0003, ... is een meetkundige rij met reden $0,03 : 0,3 = 0,1$.
 De eerste term is 0,3, dus $u(0) = 0,3 : 0,1 = 3$.
 $u(n) = 3 \cdot 0,1^n$, dus de 10e term is $u(10) = 3 \cdot 0,1^{10} = 0,000\,000\,000\,3$.
- e** 1,8; 1,62; 1,458; 1,3122; ... is een meetkundige rij met reden $\frac{1,62}{1,8} = 0,9$.
 De eerste term is 1,8, dus $u(0) = 1,8 : 0,9 = 2$.
 $u(n) = 2 \cdot 0,9^n$, dus de 10e term is $u(10) = 2 \cdot 0,9^{10} \approx 0,6974$.
- f** 1, -2, 4, -8, ... is een meetkundige rij met reden $\frac{-2}{1} = -2$.
 De eerste term is 1, dus $u(0) = 1 : -2 = -\frac{1}{2}$.
 $u(n) = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^n$, dus de 10e term is $u(10) = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^{10} = -512$.
- E9 a** De toename per week is constant, namelijk 1,5 kilometer.
- b** Het aantal op te tellen termen is 28.
 De eerste term is 6, de laatste term is $6 + 27 \times 1,5 = 46,5$.
 $\frac{1}{2} \cdot 28(6 + 46,5) = 735$
 Meneer Sanders heeft totaal 735 km gelopen als hij aan de vierdaagse begint.

15 Normale verdelingen

Voorkennis

V1 a

u	1	2	3	4	5	6
$P(X=u)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Met de rekenmachine krijg je $E(X) = 3\frac{1}{2}$ en $\sigma(X) \approx 1,71$.

b

u	11	12	13	14	15	16
$P(Y=u)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Met de rekenmachine krijg je $E(Y) = 13\frac{1}{2}$ en $\sigma(Y) \approx 1,71$.

c

u	10	20	30	40	50	60
$P(Z=u)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Met de rekenmachine krijg je $E(Z) = 35$ en $\sigma(Z) \approx 17,1$.

- d** Je ziet bij de verwachtingswaarden dat $E(Y) = E(X) + 10$ en dat $E(Z) = 10 \cdot E(X)$.
Je ziet bij de standaardafwijking dat $\sigma(X) = \sigma(Y)$ en $\sigma(X) = 10 \cdot \sigma(Z)$.

V2

$$E(C) = E(0,56 \cdot F - 17,78) = 0,56 \cdot E(F) - 17,78$$

$$= 0,56 \cdot 77 - 17,78 = 25,34$$

$$\sigma(C) = \sigma(0,56 \cdot F - 17,78) = 0,56 \cdot \sigma(F)$$

$$= 0,56 \cdot 4,2 = 2,352$$

V3 a

u	1	2	3	4
$P(X=u)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Met de rekenmachine krijg je $E(X) = 2,8$ en $\sigma(X) \approx 1,17$.

b

u	1	2	3
$P(Y=u)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

Met de rekenmachine krijg je $E(Y) = 2\frac{1}{3}$ en $\sigma(Y) \approx 0,75$.

c

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$= 2,8 + 2\frac{1}{3} = 5\frac{2}{15}$$

$$\sigma(Z) = \sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$$

$$= \sqrt{1,17^2 + 0,75^2} \approx 1,4$$

V4 a

$$E(S) = n \cdot E(X) = 10 \cdot 2,8 = 28$$

$$\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X) = \sqrt{10} \cdot 1,17 \approx 3,70$$

b

$$E(\bar{X}) = E(X) = 2,8$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} = \frac{1,17}{\sqrt{10}} \approx 0,37$$

V5 a

$$E(\bar{Z}) = E(Z) = 12 \text{ gram}$$

$$\sigma(\bar{Z}) = \frac{\sigma(Z)}{\sqrt{n}} = \frac{0,3}{\sqrt{100}} = 0,03 \text{ gram}$$

b Stochast S is de som van het gewicht van 100 koekjes.

$$E(S) = n \cdot E(Z) = 100 \cdot 12 = 1200 \text{ gram}$$

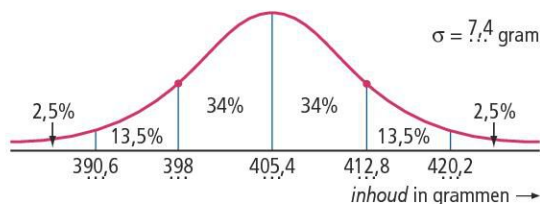
$$\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(Z) = \sqrt{100} \cdot 0,3 = 3 \text{ gram}$$

$$E(D + S) = E(D) + E(S) = 46 + 1200 = 1246 \text{ gram}$$

$$\sigma(D + S) = \sqrt{\sigma(D)^2 + \sigma(S)^2} = \sqrt{1,2^2 + 3^2} \approx 3,23 \text{ gram}$$

15 Normale verdelingen

V6 a

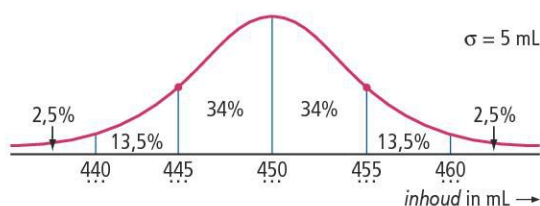


- b $P(X < 398) = 0,025 + 0,135 = 0,16$
 c $P(398 \leq X \leq 420,2) = 0,34 + 0,34 + 0,135 = 0,815$
 d Meer dan 420,2 gram kattenvoer.

15.1 Percentage berekenen

intro 1 kg zit precies midden tussen 0,98 kg en 1,02 kg. In de grafiek zie je dat de oppervlakte van het deel galiameloenen met een gewicht tussen 1 kg en 1,02 kg groter is dan het deel met een gewicht tussen 0,98 kg en 1 kg. Tussen 0,98 kg en 1,02 kg zitten 13,5% van de galiameloenen. Een schatting is dat ongeveer een derde van deze meloenen een gewicht heeft tussen 0,98 kg en 1 kg. Dit is ongeveer 4,5%. In totaal hebben $2,5\% + 4,5\% = 7\%$ een gewicht van minder dan 1 kg, dus heeft ongeveer 93% een gewicht van meer dan 1 kg.

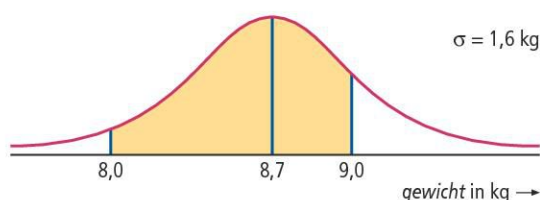
1 a



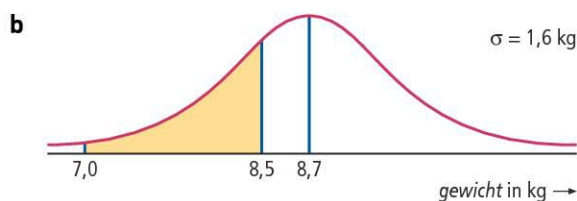
- b 2,5% van de flesjes bevat meer dan 460 mL.
 c De kans is $0,025 + 0,135 = 0,16$.
 d In de schets zie je dat dat de oppervlakte van het deel van de flesjes tussen 445 mL en 447,5 mL kleiner is dan van het deel tussen 447,5 mL en 450 mL. Minder dan 17% van de flesjes zal tussen de 445 mL en 447,5 mL afwasmiddel bevatten.

- 2 a Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 445, bovengrens = 447,5, $\mu = 450$, $\sigma = 5$
 Dit geeft 0,14988... dus de kans is afgerond 0,1499.
 b Ja, omdat 14,99% minder is dan 17%.

3 a



Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 8,0, bovengrens = 9,0, $\mu = 8,7$, $\sigma = 1,6$
 Dit geeft 0,24349...
 Dit is 24,35% van de zakken tuinaarde.



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 7,0, bovengrens = 8,5, $\mu = 8,7$, $\sigma = 1,6$

Dit geeft 0,30625...

De kans is 0,3063.

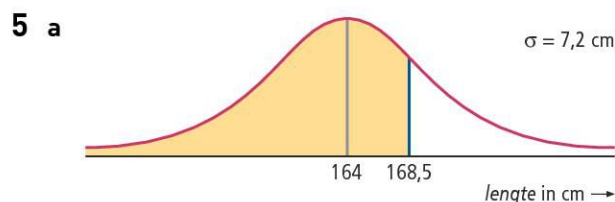
4 a Je weet het gewicht van de pot niet waarin de minste pindakaas zit.

b Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 350, $\mu = 352$, $\sigma = 0,9$

Dit geeft 0,01313...

Dit is 1,31% van de potten.

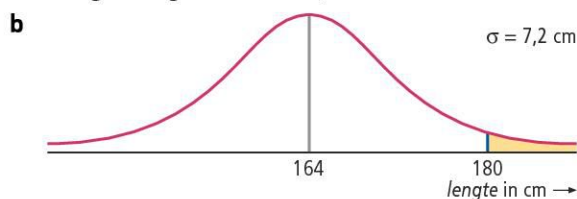


Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 168,5, $\mu = 164$, $\sigma = 7,2$

Dit geeft 0,73401...

De gevraagde kans is 0,7340.

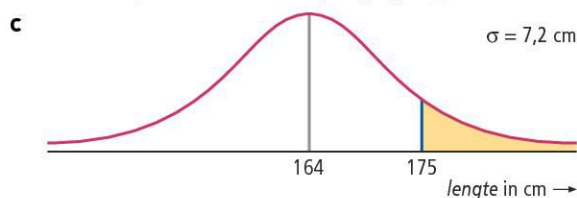


Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 180, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 164$, $\sigma = 7,2$

Dit geeft 0,01313...

Dit is 1,31% van de 14-jarige jongens.



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 175, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 164$, $\sigma = 7,2$

Dit geeft 0,06328...

De kans dat één jongen langer is dan 175 cm, is 0,06328...

De kans dat twee willekeurige jongens langer zijn dan 175 cm is

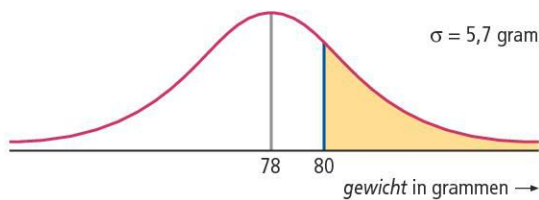
$0,06328...^2 \approx 0,0040$.

d De kans dat één jongen langer is dan 175 cm, is 0,06328...

Je verwacht dat $0,06328... \times 292 \approx 18$ jongens langer zijn dan 175 cm.

15 Normale verdelingen

6 a



Optie: normaal cumulatief

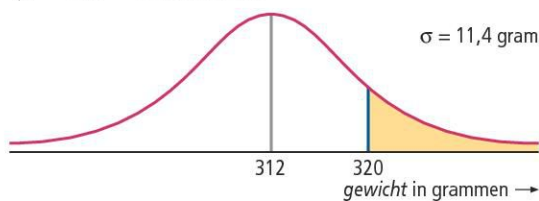
ondergrens = 80, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 78$, $\sigma = 5,7$

Dit geeft 0,36284...

De gevraagde kans is 0,3628.

b Je moet de $\sqrt{n}$ -wet gebruiken omdat je de som van een aantal onafhankelijke stochasten (de gewichten van de pannenkoeken) neemt.

c Het gemiddelde wordt $4 \times 78 = 312$ gram en de standaardafwijking wordt $\sqrt{4} \times 5,7 = 11,4$ gram.



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 320, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 312$, $\sigma = 11,4$

Dit geeft 0,24141...

De gevraagde kans is 0,2414.

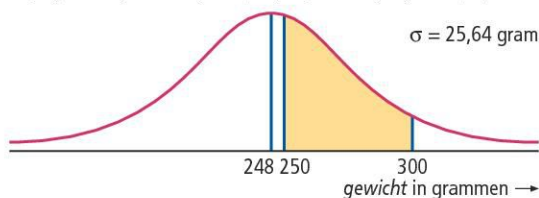
d Stochast X is het gewicht van één pannenkoek in grammen.

Sstochast Y is het gewicht van een bord in grammen.

Stochast S is het gewicht van één pannenkoek en een bord samen in grammen.

$$E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 78 + 170 = 248 \text{ gram}$$

$$\sigma(S) = \sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2} = \sqrt{5,7^2 + 25^2} \approx 25,64 \text{ gram}$$



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 250, bovengrens = 300, $\mu = 248$, $\sigma = 25,64$

Dit geeft 0,44763...

De gevraagde kans is 0,4476.

05 a Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 168, $\mu = 171$, $\sigma = 6,3$

Dit geeft 0,31696...

De gevraagde kans is 0,3170.

b Je vult dan als rechtergrens het getal 10^{99} in.

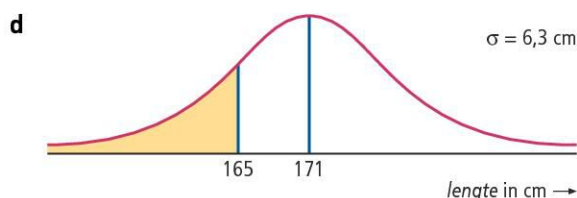
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 180, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 171$, $\sigma = 6,3$

Dit geeft 0,07656...

De gevraagde kans is 0,0766.

c De kans dat twee willekeurige meisjes langer zijn dan 180 cm is $0,07656... \times 0,07656... \approx 0,0059$.



Optie: normaal cumulatief

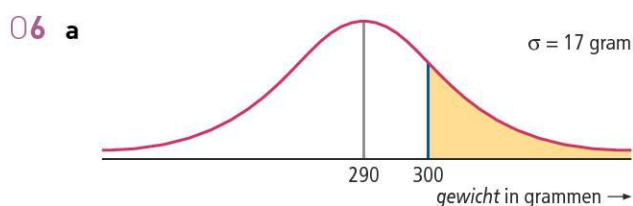
ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 165, $\mu = 171$, $\sigma = 6,3$

Dit geeft 0,17045...

De kans dat een meisje kleiner is dan 165 cm is 0,17045...

De kans dat twee willekeurige meisjes kleiner zijn dan 165 cm is $0,17045...^2 \approx 0,0291$.

e Je verwacht dat $0,07656... \times 198 \approx 15$ meisjes langer zijn dan 180 cm.



Optie: normaal cumulatief

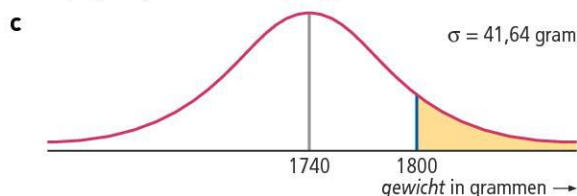
ondergrens = 300, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 290$, $\sigma = 17$

Dit geeft 0,27818...

De gevraagde kans is 0,2782.

b $E(T) = 6 \times 290 = 1740 \text{ gram}$

$\sigma(T) = \sqrt{6} \times 17 \approx 41,64 \text{ gram}$



Optie: normaal cumulatief

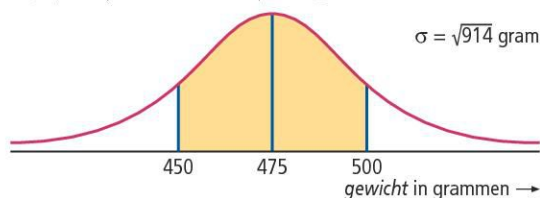
ondergrens = 1800, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 1740$, $\sigma = 41,64$

Dit geeft 0,07480...

De gevraagde kans is 0,0748.

d $E(S) = 290 + 185 = 475 \text{ gram}$

$\sigma(S) = \sqrt{17^2 + 25^2} = \sqrt{914} \text{ gram}$



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 450, bovengrens = 500, $\mu = 475$, $\sigma = \sqrt{914}$

Dit geeft 0,59175...

De gevraagde kans is 0,5918.

U1 a Stochast N is het nettogewicht van een pakje puddingpoeder in grammen.

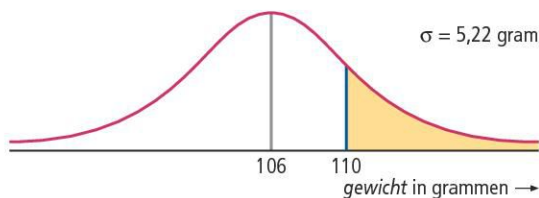
Stochast T is het tarragewicht in grammen.

Stochast B is het brutogewicht van een pakje puddingpoeder in grammen.

$E(B) = E(N + T) = E(N) + E(T) = 100 + 6 = 106 \text{ gram}$

$\sigma(B) = \sigma(N + T) = \sqrt{\sigma(N)^2 + \sigma(T)^2} = \sqrt{5^2 + 1,5^2} \approx 5,22 \text{ gram}$

15 Normale verdelingen



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 110, bovengrens = 10^9 , $\mu = 106$, $\sigma = 5,22$

Dit geeft 0,22175...

De gevraagde kans is 0,2218.

- b** Stochast S is het gewicht van 200 pakjes puddingpoeder in grammen.

$$E(S) = n \cdot E(B) = 200 \cdot 106 = 21\,200 \text{ gram}$$

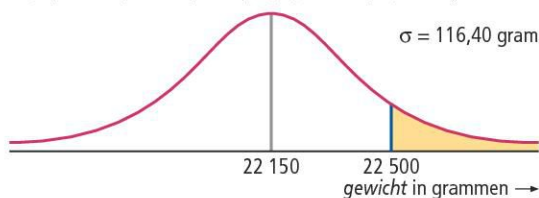
$$\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(B) = \sqrt{200} \cdot 5,22 = 73,821... \text{ gram}$$

Stochast D is het gewicht van een lege doos in grammen.

Stochast V is het gewicht van een volle doos in grammen.

$$E(V) = E(S + D) = E(S) + E(D) = 21\,200 + 950 = 22\,150 \text{ gram}$$

$$\sigma(V) = \sigma(S + D) = \sqrt{\sigma(S)^2 + \sigma(D)^2} = \sqrt{73,821...^2 + 90^2} \approx 116,40 \text{ gram}$$



Optie: normaal cumulatief

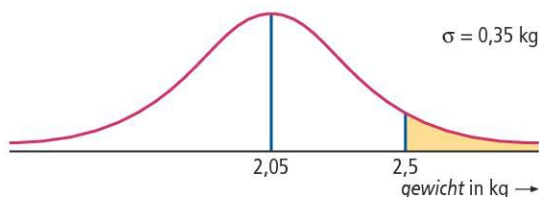
ondergrens = 22 500, bovengrens = 10^9 , $\mu = 22\,150$, $\sigma = 116,40$

Dit geeft 0,00131...

De genoemde kans is 0,0013.

15.2 Grenswaarden berekenen

intro



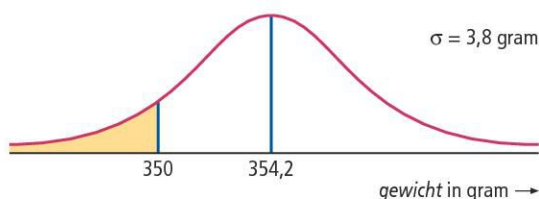
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 2,5, bovengrens = 10^9 , $\mu = 2,05$, $\sigma = 0,35$

Dit geeft 0,09927...

9,93% van dit ras konijnen heeft een gewicht van minimaal 2,5 kg, dus het is zeer waarschijnlijk dat Flip een gewicht van meer dan 2,5 kg heeft.

7 a



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^9 , bovengrens = 350, $\mu = 354,2$, $\sigma = 3,8$

Dit geeft 0,13452...

Deze kans is inderdaad ongeveer gelijk aan 0,1345.

b Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 351 tot en met 354, $\mu = 354,2$, $\sigma = 3,8$

g in grammen	350	351	352	353	354
$P(G \leq g)$	0,1345	0,1999	0,2813	0,3761	0,4790

c De kans dat er maximaal 351 gram honing in een pot zit is 0,1999.

De kans dat er maximaal 352 gram honing in een pot zit, is 0,2813.

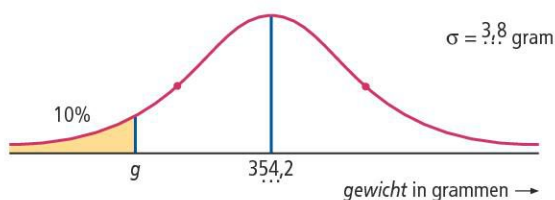
Er zit dan maximaal tussen 351 gram en 352 gram honing in de 25% lichtste potten.

d Gebruik dezelfde instellingen als in opdracht b, alleen neem nu bovengrenzen vanaf 351,5 gram.

g in grammen	351,5	351,6	351,7	351,8
$P(G \leq g)$	0,2387	0,2469	0,2553	0,2638

Bij 351,6 gram zit de kans het dichtst bij 0,25.

Er zit dus maximaal 351,6 gram in de 25% lichtste potten.

8 a**b** Links van het gemiddelde zit 50% van de potten.

De 10% lichtste potten zitten ook links van het gemiddelde.

c $\mu - \sigma = 354,2 - 3,8 = 350,4$ gram

$$\mu - 2 \cdot \sigma = 354,2 - 2 \cdot 3,8 = 346,6 \text{ gram}$$

d Onder 346,6 gram ligt 2,5% van de potten.

Onder 350,4 gram ligt 16% van de potten.

10% ligt hiertussen, dus g ligt ergens tussen 346,6 gram en 350,4 gram.

e Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; x; 354,2; 3,8)$

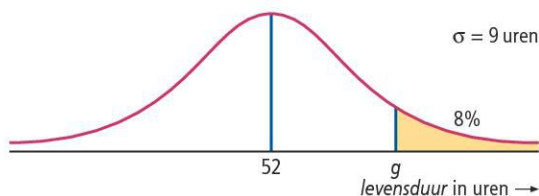
$$y_2 = 0,10$$

Venster: $346,6 \leq x \leq 350,4$, $0 \leq y \leq 0,20$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (349,33; 0,1).

De 10% lichtste potten bevatten maximaal 349,3 gram honing.

9 a

Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x, 10^{99}, 52, 9)$

$$y_2 = 0,08$$

Venster: $52 \leq x \leq 70$, $0 \leq y \leq 0,16$

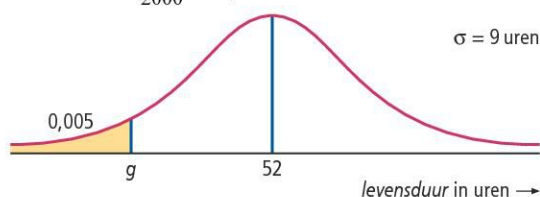
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (64,65; 0,08).

De levensduur van de batterij is minimaal 64,7 uur.

15 Normale verdelingen

- b De kans is $\frac{10}{2000} = 0,005$.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, x, 52, 9)$

$y_2 = 0,005$

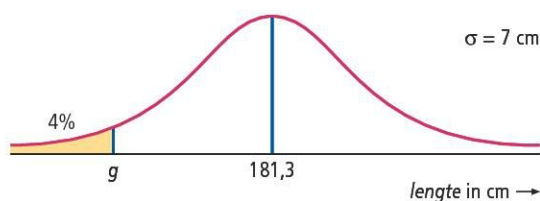
Venster: $25 \leq x \leq 52, 0 \leq y \leq 0,01$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (28,82; 0,005).

De levensduur van de batterij is maximaal 28,8 uur.

10 a



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, x; 181,3; 7)$

$y_2 = 0,04$

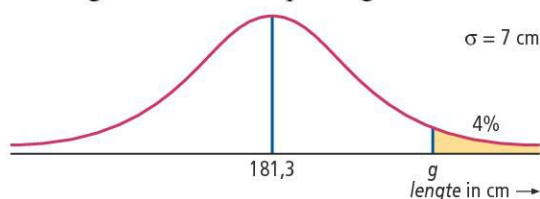
Venster: $160 \leq x \leq 181,3, 0 \leq y \leq 0,08$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (169,05; 0,08).

De lengte van de dienstplichtigen was maximaal 169,0 cm.

b



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 10^{99}, 181,3; 7)$

$y_2 = 0,04$

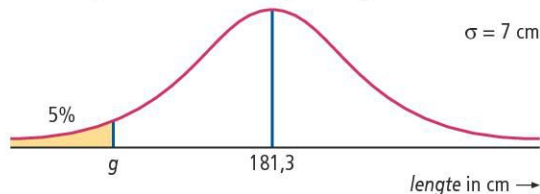
Venster: $181,3 \leq x \leq 200, 0 \leq y \leq 0,08$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (193,55; 0,04).

De lengte van de dienstplichtigen was minimaal 193,6 cm.

c



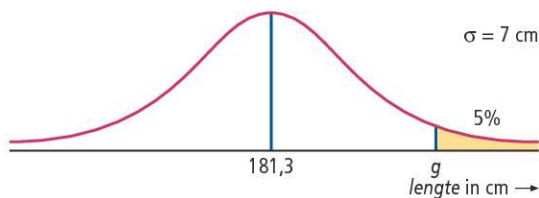
Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, x; 181,3; 7)$

$y_2 = 0,05$

Venster: $160 \leq x \leq 181,3, 0 \leq y \leq 0,10$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (169,79; 0,05).



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 10^{99}; 181,3; 7)$

$y_2 = 0,05$

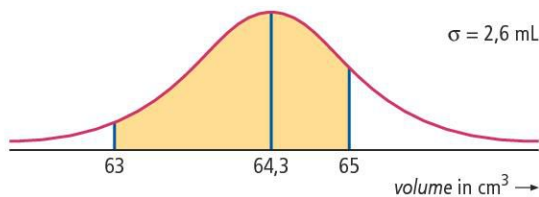
Venster: $181,3 \leq x \leq 200, 0 \leq y \leq 0,10$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (192,81; 0,05).

De afgekeurde dienstplichtigen hadden een lengte kleiner dan 169,8 cm of groter dan 192,8 cm.

11 a



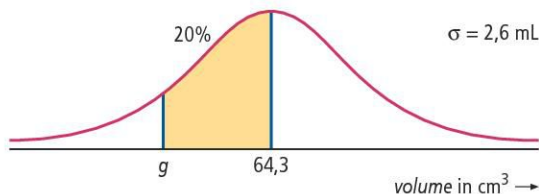
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 63, bovengrens = 65, $\mu = 64,3$, $\sigma = 2,6$

Dit geeft 0,29758...

29,8% van de leerlingen vinden een volume tussen 63 cm^3 en 65 cm^3 .

b



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 64,3; 64,3; 2,6)$

$y_2 = 0,20$

Venster: $60 \leq x \leq 64,3, 0 \leq y \leq 0,40$

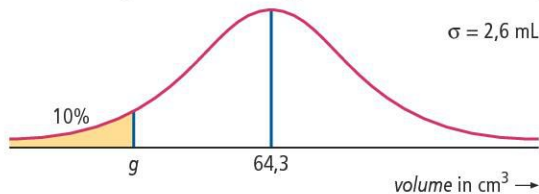
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (62,94; 0,2).

De ondergrens van het gemeten volume is 62,9 mL.

De bovengrens van het gemeten volume is $64,3 + (64,3 - 62,9) = 65,7 \text{ mL}$.

c



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; x; 64,3; 2,6)$

$y_2 = 0,10$

Venster: $55 \leq x \leq 64,3, 0 \leq y \leq 0,20$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (60,97; 0,1).

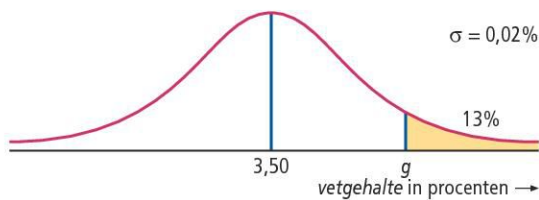
De ondergrens van deze volumes is 61,0 mL.

De bovengrens van de 10% grootste volumes is $64,3 + (64,3 - 61,0) = 67,6 \text{ mL}$.

Deze leerlingen hebben een volume van minder dan 61,0 mL of meer dan 67,6 mL gemeten.

15 Normale verdelingen

12 a



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 10^{99}; 3,50; 0,02)$

$y_2 = 0,13$

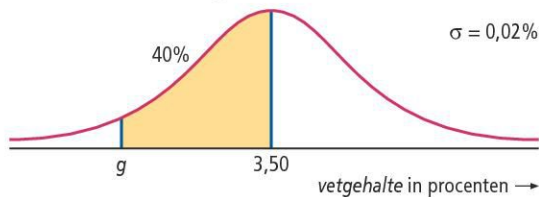
Venster: $3,50 \leq x \leq 3,60$, $0 \leq y \leq 0,26$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (3,52; 0,13).

Het minimale vetgehalte is 3,52%.

b



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 3,50; 3,50; 0,02)$

$y_2 = 0,40$

Venster: $3,40 \leq x \leq 3,50$, $0 \leq y \leq 0,60$

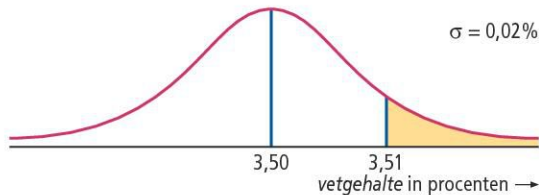
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (3,47; 0,4).

De ondergrens van het gemeten volume is 3,47%.

De bovengrens is $3,50 + (3,50 - 3,47) = 3,53\%$.

c



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 3,51, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 3,50$, $\sigma = 0,02$

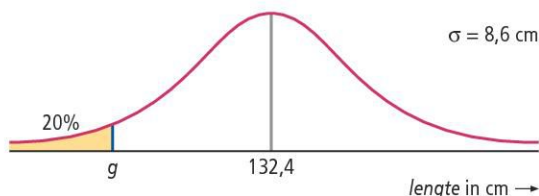
Dit geeft 0,30853...

De kans dat een pak een vetgehalte van meer dan 3,51% heeft, is 0,30853...

De kans dat alle drie de pakken een vetgehalte hebben van meer dan 3,51% is $0,30853...^3 \approx 0,0294$.

13

Als er vijf klassen zijn waarin evenveel leerlingen komen, dan zit in elke klasse $100 : 5 = 20\%$ van de leerlingen.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; x; 132,4; 8,6)$

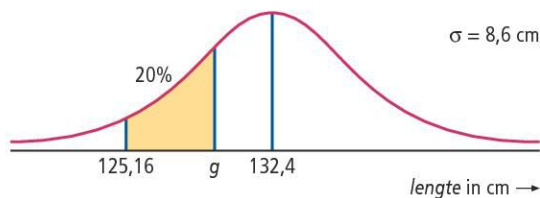
$y_2 = 0,20$

Venster: $120 \leq x \leq 132,4$, $0 \leq y \leq 0,40$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (125,16; 0,2).

De eerste klasse eindigt bij 125,16 cm.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(125,16; x; 132,4; 8,6)$

$$y_2 = 0,20$$

Venster: $125,16 \leq x \leq 132,4$, $0 \leq y \leq 0,40$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (130,22; 0,2).

De tweede klasse eindigt bij 130,22 cm.

De derde klasse is de middelste 20%, de ondergrens daarvan ligt net zo ver van het gemiddelde als de bovengrens.

De derde klasse eindigt bij $132,4 + (132,4 - 130,22) = 134,58$ cm.

De klassenbreedte van de vierde klasse is gelijk aan de klassenbreedte van de tweede klasse.

De vierde klasse eindigt bij $134,58 + (130,22 - 125,16) = 139,64$ cm.

Samengevat:

De eerste klasse bevat kinderen die maximaal 125,2 cm lang zijn.

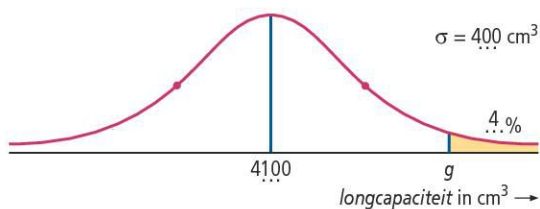
De tweede klasse bevat kinderen van 125,2 cm tot 130,2 cm lang.

De derde klasse bevat kinderen van 130,2 cm tot 134,6 cm lang.

De vierde klasse bevat kinderen van 134,6 cm tot 139,6 cm lang.

De vijfde klasse bevat kinderen die minimaal 139,6 cm lang zijn.

09 a



b Rechts van 4100 cm^3 zijn de longcapaciteiten die groter zijn dan het gemiddelde. De 4% grootste longcapaciteiten horen hier ook bij.

c $\mu + \sigma = 4100 + 400 = 4500 \text{ cm}^3$

$$\mu + 2 \cdot \sigma = 4100 + 2 \times 400 = 4900 \text{ cm}^3$$

d 16% van de waarnemingen is groter dan $\mu + \sigma = 4500 \text{ cm}^3$.

2,5% van de waarnemingen is groter dan $\mu + 2 \cdot \sigma = 4900 \text{ cm}^3$.

4% van de waarnemingen moeten groter dan g zijn. Hierdoor moet g ergens tussen 4500 en 4900 liggen.

e Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x, 10^{99}, 4100, 400)$

$$y_2 = 0,04$$

Venster: $4100 \leq x \leq 4900$, $0 \leq y \leq 0,08$

Optie: snijpunt

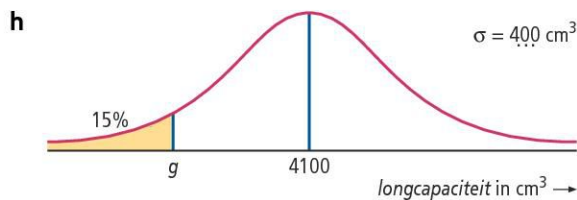
De coördinaten van het snijpunt zijn (4800,27; 0,04).

De linkergrens is 4800,3.

f Deze studenten hebben een longcapaciteit van minimaal $4800,3 \text{ cm}^3$.

g $\frac{240}{1600} \times 100\% = 15\%$

15 Normale verdelingen



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, x, 4100, 400)$

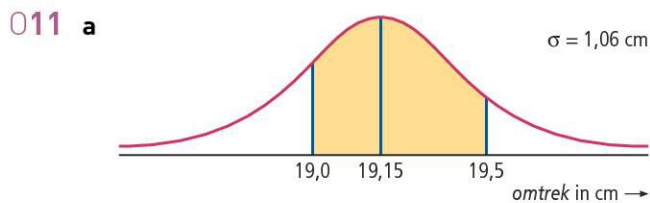
$y_2 = 0,15$

Venster: $3300 \leq x \leq 4100, 0 \leq y \leq 0,30$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (3685,43; 0,15).

De maximale longcapaciteit is 3685,4 cm^3 .



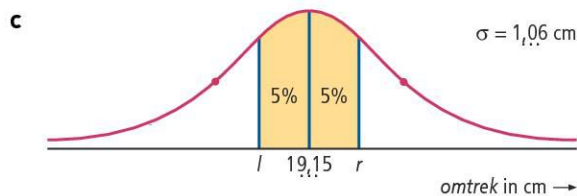
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 19,0; bovengrens = 19,5; $\mu = 19,15$; $\sigma = 1,06$

Dit geeft 0,18563...

Naar verwachting zal 18,6% van de leerlingen een omtrek tussen 19,0 cm en 19,5 cm vinden.

- b** De middelste 10% betekent dat 5% links van het gemiddelde zal zitten en 5% rechts van het gemiddelde.



- d** Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 19,15; 19,15; 1,06)$

$y_2 = 0,05$

Venster: $18 \leq x \leq 19,15, 0 \leq y \leq 0,10$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (19,02; 0,05).

De waarde van de linkergrens l is 19,02.

- e** Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(19,15; x; 19,15; 1,06)$

$y_2 = 0,05$

Venster: $19,15 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 0,10$

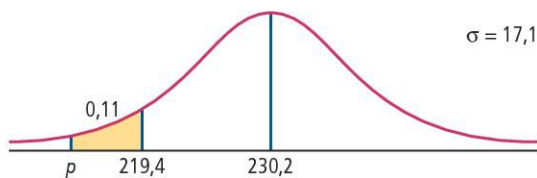
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (19,28; 0,05).

De waarde van de rechtergrens r is 19,28.

- f** De gemeten omtrek ligt tussen 19,02 cm en 19,28 cm.

U2 a

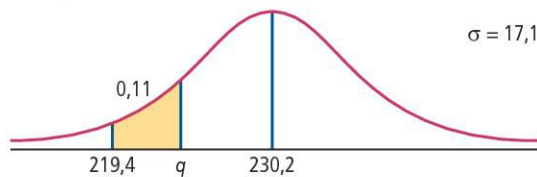
Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 219,4; 230,2; 17,1)$ $y_2 = 0,11$ Venster: $190 \leq x \leq 219,4$, $0 \leq y \leq 0,22$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (212,76; 0,11).

Dit geeft $p \approx 212,8$.

b

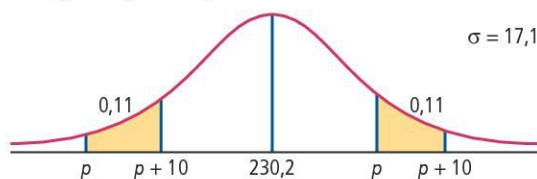
Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(219,4; x; 230,2; 17,1)$ $y_2 = 0,11$ Venster: $219,4 \leq x \leq 230,2$, $0 \leq y \leq 0,22$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (224,70; 0,11).

Dit geeft $q \approx 224,7$.

c

Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; x+10; 230,2; 17,1)$ $y_2 = 0,11$ Venster: $200 \leq x \leq 260$, $0 \leq y \leq 0,22$

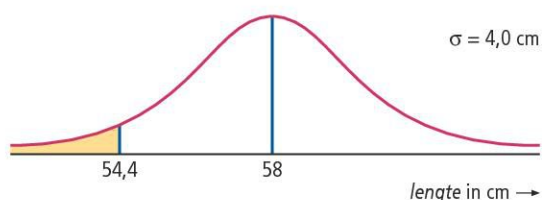
Optie: snijpunt (tweemaal)

De coördinaten van de snijpunten zijn (204,13; 0,11) en (246,27; 0,11).

Dit geeft $p \approx 204,1$ of $p \approx 246,3$.

15.3 Gemiddelde en standaardafwijking berekenen

intro



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 54,4, $\mu = 58$, $\sigma = 4,0$

Dit geeft 0,18406...

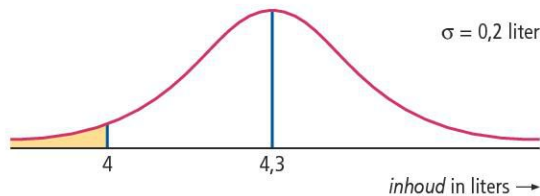
Bij een gemiddelde van 58 cm is deze kans ongeveer 18,41%.

15 Normale verdelingen

Als de gemiddelde lengte groter dan 58 cm is, dan ligt het deel onder de 54,4 cm verder van het gemiddelde af en de bedoelde kans zal dan kleiner dan 18,41% worden. Als de gemiddelde lengte kleiner dan 58 cm is, dan ligt het deel onder de 54,4 cm dicht bij het gemiddelde en de bedoelde kans zal dan groter dan 18,41% worden.

De gemiddelde lengte zal meer dan 58 cm zijn en Joop heeft geen gelijk.

14 a



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 4, $\mu = 4,3$, $\sigma = 0,2$

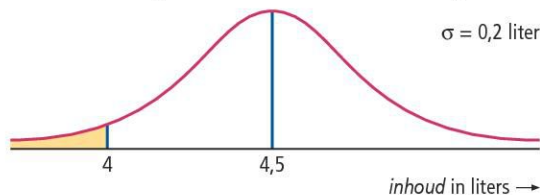
Dit geeft 0,06680...

Naar verwachting wordt 6,7% van de flessen opnieuw gevuld.

- b Als het percentage slechts 1% wordt, dan moet de grenswaarde van 4 liter verder van het gemiddelde afliggen.

Het nieuwe gemiddelde wordt dan hoger dan 4,3 liter.

c



Optie: normaal cumulatief

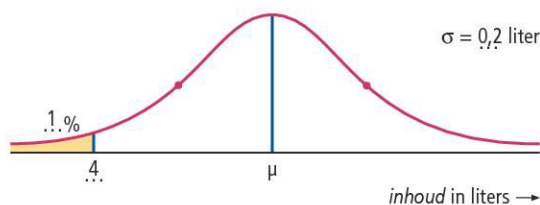
ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 4, $\mu = 4,5$, $\sigma = 0,2$

Dit geeft 0,00620...

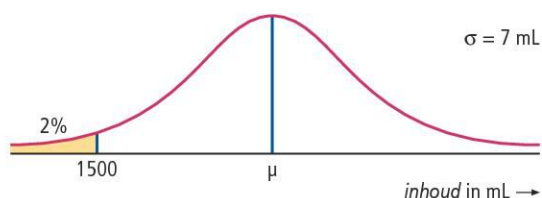
Naar verwachting wordt 0,62% van de flessen opnieuw gevuld.

Dit is minder dan 1%, dus er wordt aan de eis voldaan.

15 a



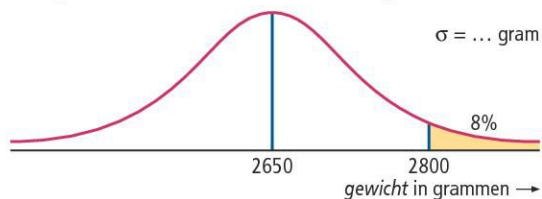
- b Als het gemiddelde 4,4 liter is, dan is $\mu - 2 \cdot \sigma = 4$.
2,5% van de flessen zou dan een inhoud van minder dan 4 liter hebben.
Het gemiddelde moet verder van 4 liter af liggen, dus meer zijn dan 4,4 liter.
- c Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; 4; x; 0,2)$
 $y_2 = 0,01$
Venster: $4 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 0,02$
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn (4,465; 0,01).
Dit geeft $\mu \approx 4,47$.
- d De machine wordt op een gemiddelde van 4,47 liter ingesteld.

16 aInvoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 1500, x, 7)$ $y_2 = 0,02$ Venster: $1500 \leq x \leq 1520, 0 \leq y \leq 0,04$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (1514,38; 0,02).

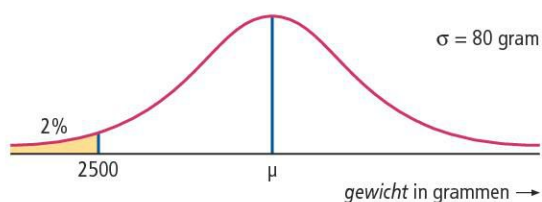
De gemiddelde inhoud van een pak melk is ongeveer 1514 mL.

bInvoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(2800, 10^{99}, 2650, x)$ $y_2 = 0,08$ Venster: $0 \leq x \leq 150, 0 \leq y \leq 0,16$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (106,76; 0,08).

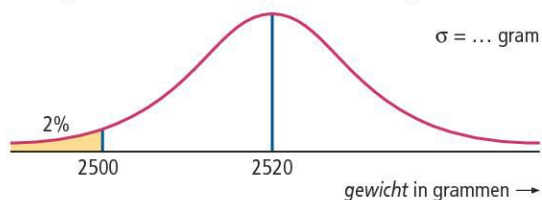
De standaardafwijking van het gewicht is ongeveer 106,8 gram.

17 aInvoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 2500, x, 80)$ $y_2 = 0,02$ Venster: $2500 \leq x \leq 3000, 0 \leq y \leq 0,04$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (2664,3; 0,02).

Het gemiddelde is ongeveer 2664 gram.

bInvoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 2500, 2520, x)$ $y_2 = 0,02$ Venster: $0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 0,04$

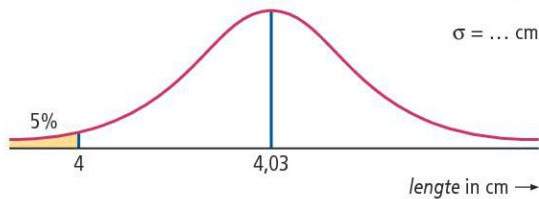
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (9,73; 0,02).

De standaardafwijking is ongeveer 9,7 gram.

15 Normale verdelingen

- 18 a** De kans dat een schroef korter is dan 4 cm, is $\frac{50}{1000} = 0,05$.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; 4; 4,03; x)$

$$y_2 = 0,05$$

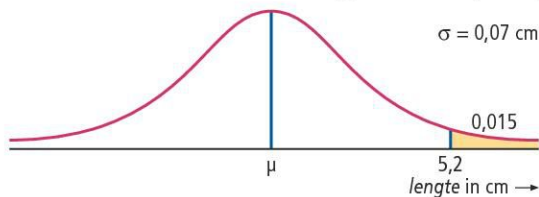
Venster: $0 \leq x \leq 0,10$, $0 \leq y \leq 0,10$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (0,018; 0,05).

De standaardafwijking is 0,02 cm.

- b** De kans dat een schroef langer is dan 5,2 cm, is $\frac{12}{800} = 0,015$.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(5,2; 10^{99}; x; 0,07)$

$$y_2 = 0,015$$

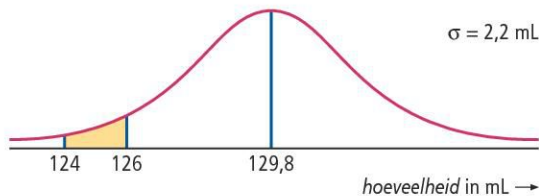
Venster: $4,5 \leq x \leq 5,2$, $0 \leq y \leq 0,03$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (5,048; 0,015).

Het gemiddelde is 5,05 cm.

- 19 a**



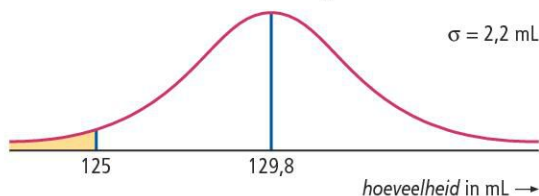
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 124, bovengrens = 126, $\mu = 129,8$, $\sigma = 2,2$

Dit geeft 0,03786...

Naar verwachting zullen er $0,03786... \times 2,94$ miljoen $\approx 111\,000$ bekertjes tussen 124 mL en 126 mL ijs bevatten.

- b**



Optie: normaal cumulatief

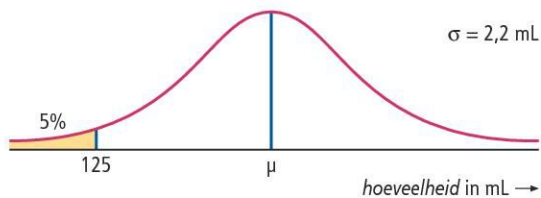
ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 125, $\mu = 129,8$, $\sigma = 2,2$

Dit geeft 0,01456...

Het klopt dat hooguit 1,5% van de bekertjes minder dan 125 mL bevat.

Pinguïn voldoet aan de eis van de overheid.

c



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 125; x; 2,2)$

$$y_2 = 0,05$$

Venster: $125 \leq x \leq 135, 0 \leq y \leq 0,10$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (128,62; 0,05).

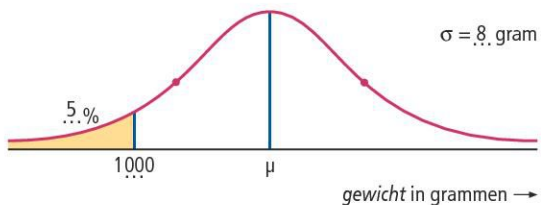
Het gemiddelde is 128,62 mL.

Het gemiddelde kan dus $129,8 - 128,62 = 1,18$ mL minder worden.

Er kan dan $2,94 \text{ miljoen} \times 1,18 \text{ mL} = 3469\,200 \text{ mL} = 3469,2$ liter ijs bespaard worden.

Dit is een besparing van $3469,2 \times 0,73 \approx \text{€}2.530,-$.

017 a

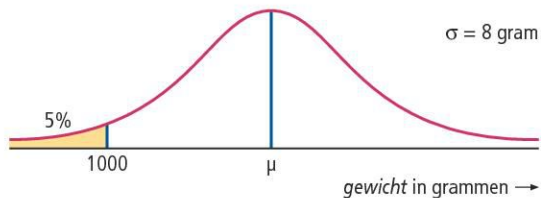


- b Als het gemiddelde 1008 gram is, dan is $\mu - \sigma = 1000$ en daaronder zit meer dan 5%, namelijk 16%.

Als het gemiddelde 1016 gram is, dan is $\mu - 2 \cdot \sigma = 1000$ en daaronder zit minder dan 5%, namelijk 2,5%.

Het gemiddelde moet dus tussen 1008 gram en 1016 gram zitten.

c



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 1000, x, 8)$

$$y_2 = 0,05$$

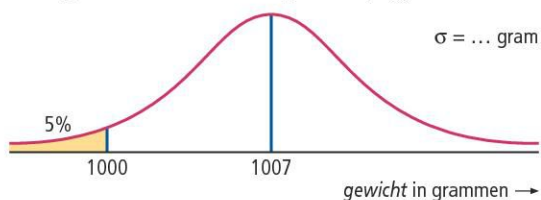
Venster: $1000 \leq x \leq 1050, 0 \leq y \leq 0,10$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (1013,16; 0,05).

Het gemiddelde moet op 1013,2 gram worden ingesteld.

d



- e Als de standaardafwijking 8 gram is, dan zit 16% onder $\mu - \sigma = 999$ gram. Dit is veel meer dan er onder 1000 gram zit. De standaardafwijking moet daarom kleiner dan 8 gram zijn.

- f Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 1000, 1007, x)$

$$y_2 = 0,05$$

Venster: $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 0,10$

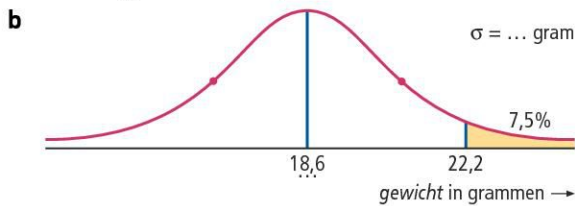
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (4,26; 0,05).

De standaardafwijking is ongeveer 4,3 gram.

15 Normale verdelingen

018 a Dit is $\frac{6}{80} \times 100\% = 7,5\%$.



c Als de standaardafwijking 3,6 gram is, dan is $\mu + \sigma = 22,2$. Hierboven zit 16% terwijl 7,5% boven 22,2 gram zit. Bij een grotere standaardafwijking zal de waarde van $\mu + \sigma > 22,2$ zijn waardoor er bij een nog grotere gewicht meer dan 16% zit. De standaardafwijking moet dus kleiner zijn dan 3,6 gram.

d Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(22,2; 10^{99}; 18,6; x)$
 $y_2 = 0,075$

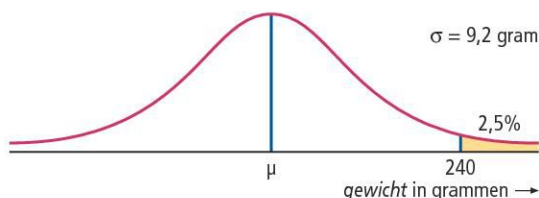
Venster: $0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 0,15$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (2,50; 0,075).

De standaardafwijking is ongeveer 2,5 gram.

e Van deze peren is $\frac{3}{120} \times 100\% = 2,5\%$ zwaarder dan 240 gram.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(240; 10^{99}; x; 9,2)$
 $y_2 = 0,025$

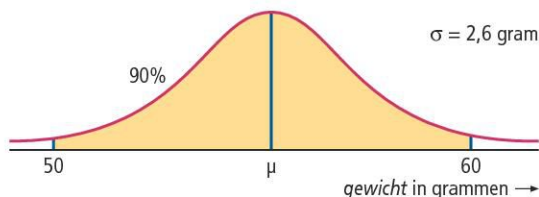
Venster: $200 \leq x \leq 240, 0 \leq y \leq 0,05$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (221,97; 0,025).

Het gemiddelde gewicht is 222 gram.

U3 $\frac{450}{500} \times 100\% = 90\%$ van de tennisballen heeft een gewicht tussen 50 gram en 60 gram.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(50; 60; x; 2,6)$
 $y_2 = 0,90$

Venster: $50 \leq x \leq 60, 0,8 \leq y \leq 1,0$

Optie: snijpunt (tweemaal)

De coördinaten van de snijpunten zijn (53,42; 0,90) en (56,58; 0,90).

Het gemiddelde gewicht van de tennisballen kan 53,4 gram of 56,6 gram zijn.

15.4 Normale verdeling met discrete waarden

intro Zij kan het percentage berekenen door het aantal doosjes met minder dan 20 spijkers bij elkaar op te tellen en dat te delen door het totaal aantal doosjes. Het staafdiagram lijkt op een klokkromme dat hoort bij een normale verdeling. Je kunt met een normale verdeling het percentage benaderen, maar moet dan wel afspraken maken over het afronden op hele spijkers.

- 20**
- a** Het aantal vruchten is altijd een geheel getal, dus de stochast X is discreet.
 - b** Het staafdiagram lijkt op een klokkromme. De verdeling van X kan daarom worden benaderd met een normale verdeling.
 - c** Alles in het interval $[32,5; 33,5)$ is afgerond op helen 33.
 - d** Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 32,5, bovengrens = 33,5, $\mu = 35,2$, $\sigma = 4,1$
 Dit geeft 0,08410...
 De kans $P(X = 33) \approx 0,0841$.
 - e** Je ziet dat de oppervlakte van de rode staaf niet precies gelijk is aan de oppervlakte van het deel onder de klokkromme tussen 32,5 en 33,5.
- 21**
- a** Alle getallen kleiner dan 37,5.
 - b** De kans op alle discrete getallen kleiner dan 38 is ongeveer gelijk aan de kans op alle continue getallen die afgerond 37 of kleiner zijn. Deze laatste getallen zijn allemaal kleiner dan 37,5.
 - c** Dit zijn alle getallen die kleiner of gelijk aan 34,5 zijn.
 - d** De kans op alle discrete getallen kleiner of gelijk aan 34 is ongeveer gelijk aan de kans op alle continue getallen die afgerond op helen kleiner of gelijk zijn aan 34. Deze laatste getallen zijn allemaal kleiner dan 34,5.
- 22**
- a** Het aantal dropjes X in een zak kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm(62,1; 4,9)-verdeeld is.
 De gevraagde kans is $P(X \geq 65)$ en benader je met $P(Y \geq 64,5)$
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 64,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 62,1$, $\sigma = 4,9$
 Dit geeft 0,31213...
 De kans $P(X \geq 65) \approx 0,3121$.
 - b** De gevraagde kans is $P(X < 60)$ en benader je met $P(Y < 59,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 59,5, $\mu = 62,1$, $\sigma = 4,9$
 Dit geeft 0,29784...
 De kans $P(X < 60) \approx 0,2978$.
 - c** De gevraagde kans is $P(X \leq 66)$ en benader je met $P(Y < 66,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 66,5, $\mu = 62,1$, $\sigma = 4,9$
 Dit geeft 0,81539...
 De kans $P(X \leq 66) \approx 0,8154$.
 - d** De gevraagde kans is $P(X = 58)$ en benader je met $P(57,5 \leq Y < 58,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 57,5, bovengrens = 58,5, $\mu = 62,1$, $\sigma = 4,9$
 Dit geeft 0,05733...
 De kans $P(X = 58) \approx 0,0573$.

15 Normale verdelingen

- e De gevraagde kans is $P(59 < X < 63)$ en benader je met $P(59,5 \leq Y < 62,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 59,5, bovengrens = 62,5, $\mu = 62,1$, $\sigma = 4,9$

Dit geeft 0,23468...

De kans $P(59 < X < 63) \approx 0,2347$.

- f De gevraagde kans is $P(62 \leq X \leq 64)$ en benader je met $P(61,5 \leq Y < 64,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 61,5, bovengrens = 64,5, $\mu = 62,1$, $\sigma = 4,9$

Dit geeft 0,23658...

De kans $P(62 \leq X \leq 64) \approx 0,2366$.

- 23** Het aantal vellen papier X in een pak kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm(503, 2)-verdeeld is.

De gevraagde kans is $P(X < 500)$ en benader je met $P(Y < 499,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 499,5, $\mu = 503$, $\sigma = 2$

Dit geeft 0,04005...

Het percentage pakken met minder dan 500 vellen is ongeveer 4,0%.

- 24 a** Het aantal broodjes X kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm(56,2; 4,9)-verdeeld is.

De gevraagde kans is $P(X \geq 52)$ en benader je met $P(Y \geq 51,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 51,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 56,2$, $\sigma = 4,9$

Dit geeft 0,83126...

De kans $P(X \geq 52) \approx 0,8313$.

- b De gevraagde kans is $P(X = 52)$ en benader je met $P(51,5 \leq Y < 52,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 51,5, bovengrens = 52,5, $\mu = 56,2$, $\sigma = 4,9$

Dit geeft 0,05636...

De kans $P(X = 52) \approx 0,0564$.

- c De gevraagde kans is $P(X \leq 67)$ en benader je met $P(Y < 67,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 67,5, $\mu = 56,2$, $\sigma = 4,9$

Dit geeft 0,98944...

De kans $P(X \leq 67) \approx 0,9894$.

- d De gevraagde kans is $P(55 < X < 60)$ en benader je met $P(55,5 \leq Y < 59,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 55,5, bovengrens = 59,5, $\mu = 56,2$, $\sigma = 4,9$

Dit geeft 0,30647...

De kans $P(55 < X < 60) \approx 0,3065$.

- 25 a** Het aantal gasten X kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm(29,8; 5,4)-verdeeld is.

De gevraagde kans is $P(X = 35)$ en benader je met $P(34,5 \leq Y < 35,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 34,5, bovengrens = 35,5, $\mu = 29,8$, $\sigma = 5,4$

Dit geeft 0,04646...

De kans $P(X = 35) \approx 0,0465$.

- b** De gevraagde kans is $P(20 < X < 30)$ en benader je met $P(20,5 \leq Y < 29,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 20,5, bovengrens = 29,5, $\mu = 29,8$, $\sigma = 5,4$

Dit geeft 0,43533...

Naar verwachting zullen er $0,43533... \times 10 \approx 4$ zaterdagavonden zijn.

- c** De gevraagde kans is $P(X > 30)$ en benader je met $P(Y \geq 30,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 30,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 29,8$, $\sigma = 5,4$

Dit geeft 0,44842...

Naar verwachting zullen er $0,44842... \times 52 \approx 23$ zaterdagavonden zijn.

- d** $E(T) = 52 \times 29,8 = 1549,6$

$\sigma(T) = \sqrt{52} \times 5,4 \approx 38,94$

- e** Het totaal aantal gasten T kan worden benaderd met de continue stochast Z die Norm(1549,6; 38,94)-verdeeld is.

De gevraagde kans is $P(T > 1500)$ en benader je met $P(Z \geq 1500,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 1500,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 1549,6$, $\sigma = \sqrt{52} \times 5,4$

Dit geeft 0,89633...

De kans $P(T > 1500) \approx 0,8963$.

- 26 a** Het aantal correct beantwoorde vragen X kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm(19,3; 2,7)-verdeeld is.

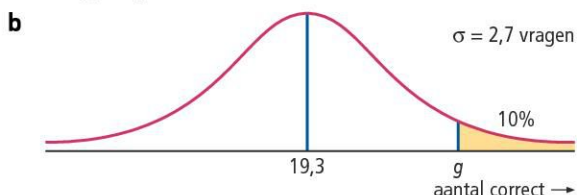
De gevraagde kans is $P(X > 15)$ en benader je met $P(Y \geq 15,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 15,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 19,3$, $\sigma = 2,7$

Dit geeft 0,92034...

Ongeveer 92% van de leerlingen beantwoordt meer dan de helft van de vragen goed.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 10^{99}; 19,3; 2,7)$

$y_2 = 0,10$

Venster: $19,3 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 0,20$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (22,76; 0,10).

Govert heeft minstens 23 vragen goed.

- c** De kans dat een leerling meer dan de helft van de vragen goed heeft is 0,92034... (zie opdracht a).

De kans dat alle 25 leerlingen dit hebben is $0,92034...^{25} \approx 0,1255$.

- d** Het gemiddeld aantal goed beantwoorde vragen $\bar{X}$ van de leerlingen uit V2c is Norm($19,3; \frac{2,7}{\sqrt{25}} = 0,54$)-verdeeld. De stochast $\bar{X}$ is continu.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 20, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 19,3$, $\sigma = 0,54$

Dit geeft 0,09743...

De kans is 0,0974.

15 Normale verdelingen

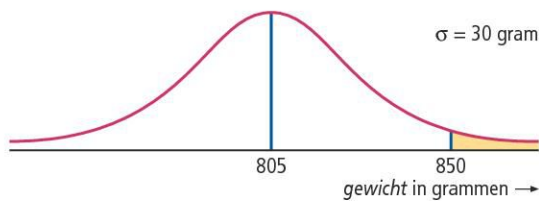
- 022 a** Alle getallen vanaf 73,5 zijn afgerond op helen groter dan 73.
b $P(X > 73) \approx P(Y \geq 73,5)$
c Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 73,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 75,3$, $\sigma = 6,8$
 Dit geeft 0,60438...
 De kans $P(X > 73) \approx 0,6044$.
d Alle getallen kleiner dan 76,5 zijn afgerond op helen kleiner of gelijk aan 76.
e $P(X \leq 76) \approx P(Y < 76,5)$
f Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 76,5, $\mu = 75,3$, $\sigma = 6,8$
 Dit geeft 0,57003...
 De kans $P(X \leq 76) \approx 0,5700$.
g $P(74 \leq X < 77) \approx P(73,5 \leq Y < 76,5)$
h Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 73,5, bovengrens = 76,5, $\mu = 75,3$, $\sigma = 6,8$
 Dit geeft 0,17441...
 De kans $P(74 \leq X < 77) \approx 0,1744$.

- 025 a** Het aantal kelkbladeren A kan worden benaderd met de continue stochast B die Norm(4,99; 0,55)-verdeeld is.
 De gevraagde kans is $P(A \leq 4)$ en benader je met $P(B < 4,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 4,5, $\mu = 4,99$, $\sigma = 0,55$
 Dit geeft 0,18648...
 De kans $P(A \leq 4) \approx 0,1865$.
b De gevraagde kans is $P(A = 6)$ en benader je met $P(5,5 \leq B < 6,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 5,5, bovengrens = 6,5, $\mu = 4,99$, $\sigma = 0,55$
 Dit geeft 0,17387...
 Het verwachte aantal ranonkels is $0,17387 \dots \times 150 \approx 26$.
c $E(T) = 16 \times 4,99 = 79,84$ en $\sigma(T) = \sqrt{16} \times 0,55 = 2,2$.
d Het totaal aantal kelkbladeren T kan worden benaderd met de continue stochast S die Norm(79,84; 2,2)-verdeeld is.
 De gevraagde kans is $P(T = 75)$ en benader je met $P(74,5 \leq S < 75,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 74,5, bovengrens = 75,5, $\mu = 79,84$, $\sigma = 2,2$
 Dit geeft 0,01665...
 De kans $P(T = 75) \approx 0,0167$.

- U4 a** Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 800$, $p = 0,14$ en $X = 100$
 $P(X \leq 100) \approx 0,1196$
b Het aantal fietsers dat zonder verlichting fietst X kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm($800 \times 0,14 = 112$; $\sqrt{800 \times 0,14 \times (1 - 0,14)} = \sqrt{96,32} \approx 9,814$)-verdeeld is. De gevraagde kans is $P(X \leq 100)$ en benader je met $P(Y < 100,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 100,5, $\mu = 112$, $\sigma = 9,814$
 Dit geeft 0,12063...
 De kans $P(X \leq 100) \approx 0,1206$.
c De eerste manier heeft meestal de voorkeur omdat het veel sneller gaat.

15.5 Gemengde opdrachten

27 a



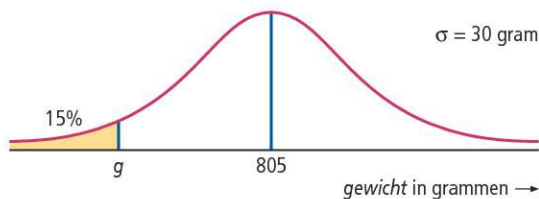
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 850, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 805$, $\sigma = 30$

Dit geeft 0,06680...

Het aantal broden dat meer dan 850 gram zal wegen is $0,06680... \times 400 \approx 27$ broden.

b



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, x, 805, 30)$

$y_2 = 0,15$

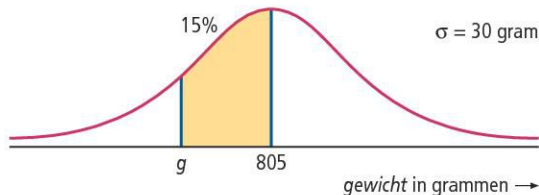
Venster: $750 \leq x \leq 805$, $0 \leq y \leq 0,30$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (773,91; 0,15).

De 15% lichtste broden wegen maximaal 773,9 gram.

c



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x, 805, 805, 30)$

$y_2 = 0,15$

Venster: $750 \leq x \leq 805$, $0 \leq y \leq 0,30$

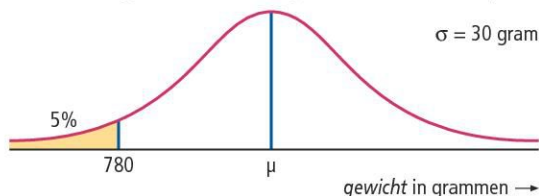
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (793,44; 0,15).

De ondergrens van het gewicht is 793,4 gram.

De bovengrens van het gewicht is $805 + (805 - 793,4) = 816,6$ gram.

d



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 780, x, 30)$

$y_2 = 0,05$

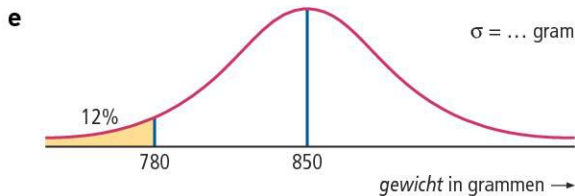
Venster: $780 \leq x \leq 850$, $0 \leq y \leq 0,10$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (829,35; 0,05).

De bakker moet zijn machine instellen op een gemiddelde gewicht van 829 gram.

15 Normale verdelingen



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 780, 850, x)$

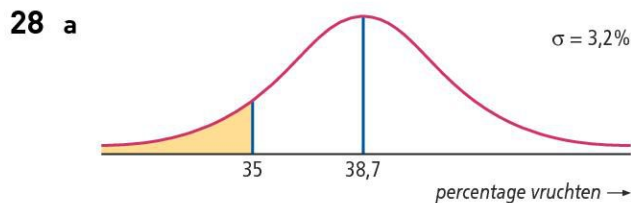
$y_2 = 0,12$

Venster: $0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 0,24$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (59,58; 0,12).

De standaardafwijking is 59,6 gram.

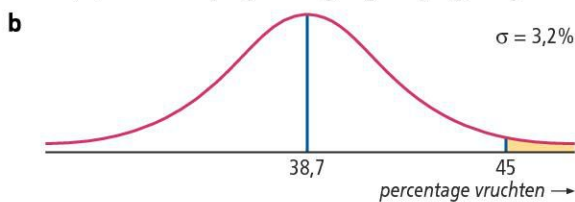


Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 35, $\mu = 38,7$, $\sigma = 3,2$

Dit geeft 0,12378...

12,4% van de potjes mag eigenlijk geen jam heten.

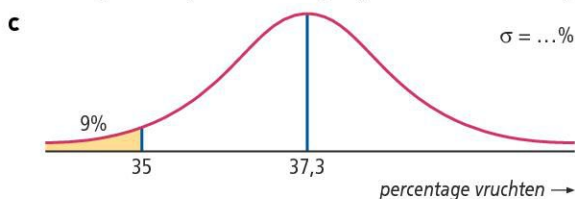


Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 45, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 38,7$, $\sigma = 3,2$

Dit geeft 0,02449...

Philip zou 2,4% van de potjes kunnen verkopen als 'extra jam'.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 35; 37,3; x)$

$y_2 = 0,09$

Venster: $0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 0,18$

Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt zijn (1,715; 0,09).

De standaardafwijking is 1,72%.

29 a Het aantal paperclips in doosjes X kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm(202,3; 1,4)-verdeeld is.

A minimaal 200 paperclips

De gevraagde kans is $P(X \geq 200)$ en benader je met $P(Y \geq 199,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 199,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 202,3$, $\sigma = 1,4$

Dit geeft 0,97724...

De kans $P(X \geq 200) \approx 0,9772$.

B precies 200 paperclips

De gevraagde kans is $P(X = 200)$ en benader je met $P(199,5 \leq Y < 200,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 199,5, bovengrens = 200,5, $\mu = 202,3$, $\sigma = 1,4$

Dit geeft 0,07652...

De kans $P(X = 200) \approx 0,0765$.

C tussen 199 paperclips en 205 paperclips

De gevraagde kans is $P(199 < X < 205)$ en benader je met $P(199,5 \leq Y < 204,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 199,5, bovengrens = 204,5, $\mu = 202,3$, $\sigma = 1,4$

Dit geeft 0,91920...

De kans $P(199 < X < 205) \approx 0,9192$.

b De kans is 0,91920...¹⁶ $\approx 0,2598$

c Het gemiddeld aantal paperclips in de 16 doosjes $\bar{X}$ is

$\text{Norm}(202,3; \frac{1,4}{\sqrt{16}} = 0,35)$ -verdeeld. De stochast $\bar{X}$ is continu.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 202, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 202,3$, $\sigma = 0,35$

Dit geeft 0,80431...

De kans is 0,8043.

Onderzoeksoopdrachten

30 a Het aantal verhuurde fietsen X kan worden benaderd met de continue stochast Y die $\text{Norm}(186; 37)$ -verdeeld is.

Ten minste één klant wordt teleurgesteld als de vraag naar fietsen meer dan 195 is. De gevraagde kans is $P(X > 195)$ en benader je met $P(Y \geq 195,5)$.

Optie: normaal cumulatief

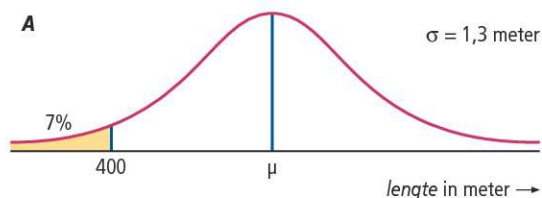
ondergrens = 195,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 186$, $\sigma = 37$

Dit geeft 0,39868...

Op ongeveer 40% van de dagen wordt tenminste één klant teleurgesteld.

b Er wordt $0,40 \times 365 \times 8 = \text{€ } 1.168$, – meer winst gemaakt als de fiets verhuurd wordt. Er wordt ook $0,60 \times 365 \times 2 = \text{€ } 438$, – minder winst gemaakt als de fiets niet verhuurd wordt. In totaal zou er $\text{€ } 1.168 - \text{€ } 438 = \text{€ } 730$,– extra winst per jaar worden gemaakt met deze 196e fiets.

31



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; 400; x; 1,3)$

$y_2 = 0,07$

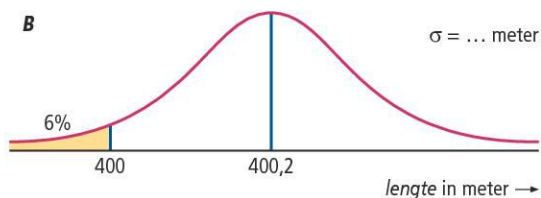
Venster: $400 \leq x \leq 410$, $0 \leq y \leq 0,14$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (401,92; 0,07).

Het gemiddelde bij machine A is 401,9 meter.

15 Normale verdelingen



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; 400; 400,2; x)$

$y_2 = 0,06$

Venster: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0,12$

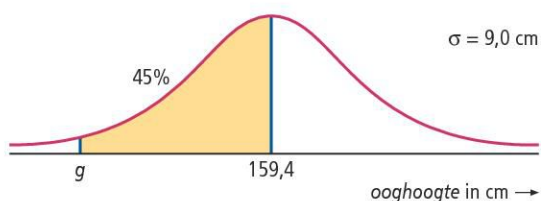
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (0,129; 0,06).

De standaardafwijking bij machine B is 0,13 meter.

Machine B wikkelt gemiddeld het minste linnen op een rol en heeft de kleinste standaardafwijking en is dus ook inderdaad het nauwkeurigst.

32



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 159,4; 159,4; 9,0)$

$y_2 = 0,45$

Venster: $140 \leq x \leq 159,4, 0 \leq y \leq 0,90$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (144,60; 0,45).

De ondergrens van de ooghoogtes is 144,6 cm.

De bovengrens van de ooghoogtes is $159,4 + (159,4 - 144,6) = 174,2$ cm.

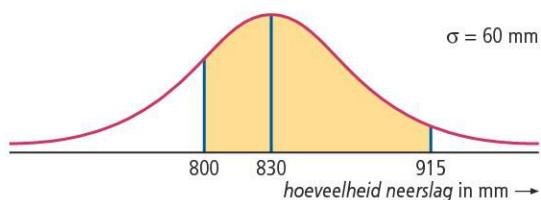
De onderkant van de spiegel moet minstens 12 cm beneden 144,6 cm hangen, dus op 132,6 cm hoogte.

De bovenkant van de spiegel moet minstens 12 cm boven 174,2 cm hangen, dus op 186,2 cm hoogte.

De spiegel moet minstens $186,2 - 132,6 = 53,6$ cm hoog zijn.

Samenvatting

S1 a

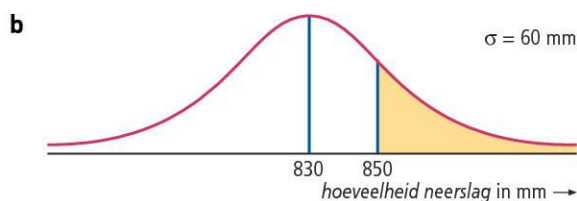


Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 800, bovengrens = 915, $\mu = 830$, $\sigma = 60$

Dit geeft 0,61317...

In 61,3% van de jaren valt er tussen de 800 mm en 915 mm neerslag.

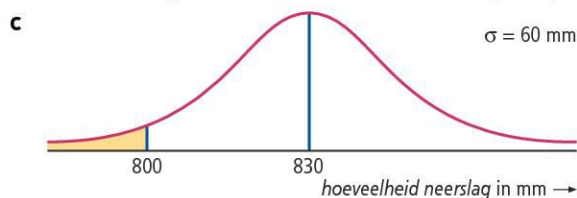


Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 850, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 830$, $\sigma = 60$

Dit geeft 0,36944...

De kans op meer dan 850 mm neerslag is 0,3694.



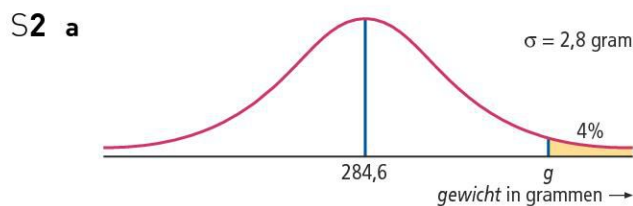
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 800, $\mu = 830$, $\sigma = 60$

Dit geeft 0,30853...

De kans op minder dan 800 mm neerslag is 0,3085.

d De kans is $0,30853...^2 \approx 0,0952$.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 10^{99}; 284,6; 2,8)$

$y_2 = 0,04$

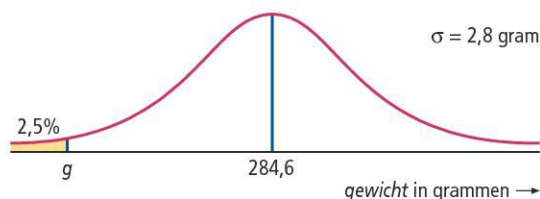
Venster: $284,6 \leq x \leq 295$, $0 \leq y \leq 0,08$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (289,50; 0,08).

De zwaarste 4% potten appelmoes wegen minimaal 289,5 gram.

b $\frac{20}{800} \times 100\% = 2,5\%$



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; x; 284,6; 2,8)$

$y_2 = 0,025$

Venster: $275 \leq x \leq 284,6$, $0 \leq y \leq 0,05$

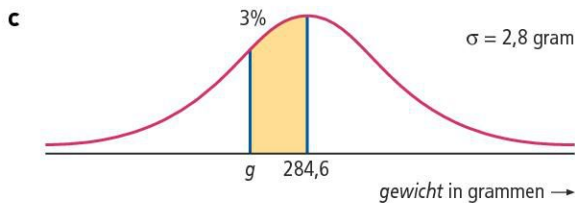
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (279,11; 0,025).

De lichtste 20 potten appelmoes wegen maximaal 279,1 gram.

Of met de vuistregels: de lichtste 2,5% potten wegen maximaal $284,6 - 2 \cdot 2,8 = 279$ gram.

15 Normale verdelingen



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 284,6; 284,6; 2,8)$

$y_2 = 0,03$

Venster: $280 \leq x \leq 284,6$, $0 \leq y \leq 0,06$

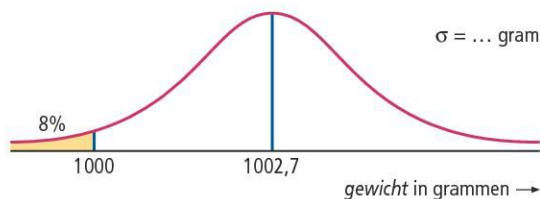
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (284,39; 0,03).

De ondergrens van het gewicht is 284,4 cm.

De bovengrens van het gewicht is $284,6 + (284,6 - 284,4) = 284,8 \text{ cm}$.

S3 a



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; 1000; 1002,7; x)$

$y_2 = 0,08$

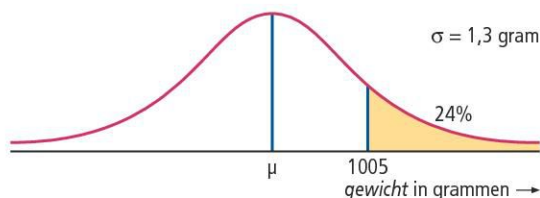
Venster: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 0,16$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (1,922; 0,08).

De standaardafwijking van deze pakken suiker is 1,92 gram.

b $\frac{120}{500} \times 100\% = 24\%$



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(1005; 10^{99}; x; 1,3)$

$y_2 = 0,24$

Venster: $1000 \leq x \leq 1005$, $0 \leq y \leq 0,48$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (1004,08; 0,24).

Het gemiddelde gewicht van deze pakken suiker is 1004,1 gram.

S4 a Het aantal snoepjes in een zak X kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm(83,6; 2,4)-verdeeld is.

De gevraagde kans is $P(X \leq 85)$ en benader je met $P(Y < 85,5)$

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 85,5, $\mu = 83,6$, $\sigma = 2,4$

Dit geeft 0,78572...

De kans $P(X \leq 85) \approx 0,7857$.

b De gevraagde kans is $P(X \geq 82)$ en benader je met $P(Y \geq 81,5)$

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 81,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 83,6$, $\sigma = 2,4$

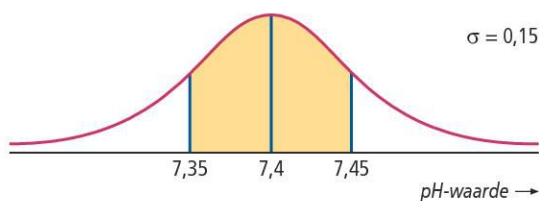
Dit geeft 0,80921...

De kans $P(X \geq 82) \approx 0,8092$.

- c De gevraagde kans is $P(X = 85)$ en benader je met $P(84,5 \leq Y < 85,5)$
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 84,5, bovengrens = 85,5, $\mu = 83,6$, $\sigma = 2,4$
 Dit geeft 0,13955...
 De kans $P(X = 85) \approx 0,1396$.
- d De gevraagde kans is $P(83 \leq X \leq 86)$ en benader je met $P(82,5 \leq Y < 86,5)$
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 82,5, bovengrens = 86,5, $\mu = 83,6$, $\sigma = 2,4$
 Dit geeft 0,56318...
 De kans $P(83 \leq X \leq 86) \approx 0,5632$.

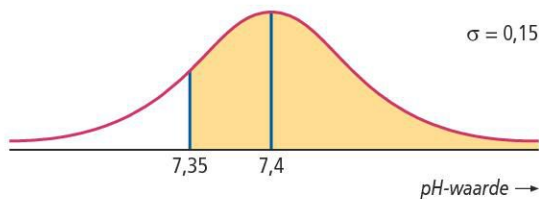
Test jezelf

T1 a



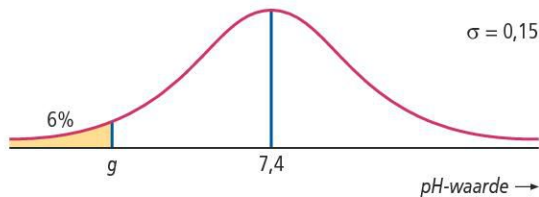
Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 7,35, bovengrens = 7,45, $\mu = 7,4$, $\sigma = 0,15$
 Dit geeft 0,26111...
 Het gevraagde percentage is 26,11%.

b



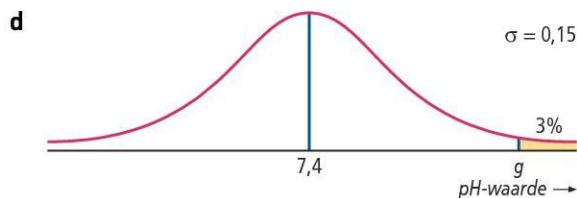
Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 7,35, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 7,4$, $\sigma = 0,15$
 Dit geeft 0,63055...
 Het gevraagde percentage is 63,06%.

c



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; x; 7,4; 0,15)$
 $y_2 = 0,06$
 Venster: $7 \leq x \leq 7,4$, $0 \leq y \leq 0,12$
 Optie: snijpunt
 De coördinaten van het snijpunt zijn (7,167; 0,06).
 Deze mensen hebben een maximale pH-waarde van 7,16.

15 Normale verdelingen



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 10^{99}; 7,4; 0,15)$

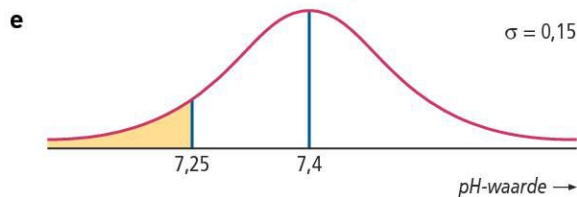
$y_2 = 0,03$

Venster: $7,4 \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq 0,06$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (7,682; 0,03).

Deze mensen hebben een pH-waarde van minimaal 7,69.

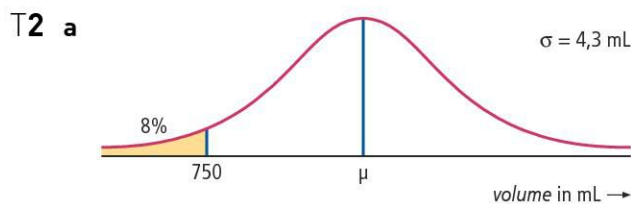


Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 7,25, $\mu = 7,4$, $\sigma = 0,15$

Dit geeft 0,15865...

Er zullen naar verwachting $0,15865... \times 67 \approx 11$ mensen zijn met een pH-waarde kleiner dan 7,25.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; 750; x; 4,3)$

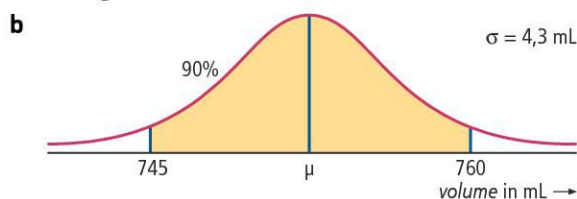
$y_2 = 0,08$

Venster: $750 \leq x \leq 770, 0 \leq y \leq 0,16$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (756,04; 0,08).

Het gemiddelde is 756,0 mL.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(745; 760; x; 4,3)$

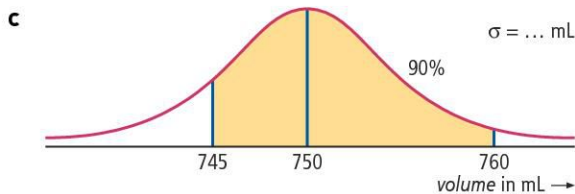
$y_2 = 0,90$

Venster: $745 \leq x \leq 760, 0 \leq y \leq 1,80$

Optie: snijpunt (tweemaal)

De coördinaten van de snijpunten zijn (750,99; 0,90) en (754,01; 0,90).

Het gemiddelde is 751,0 mL of 754,0 mL.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(745, 760, 750, x)$

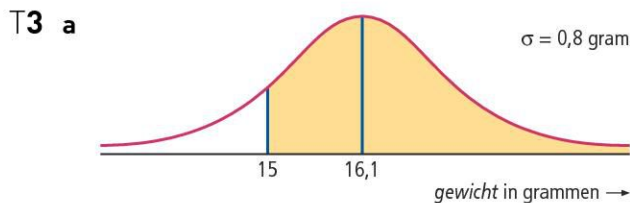
$$y_2 = 0,90$$

Venster: $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 1,80$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (3,824; 0,90).

De standaardafwijking is 3,82 mL.



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 15, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 16,1$, $\sigma = 0,8$

Dit geeft 0,91543...

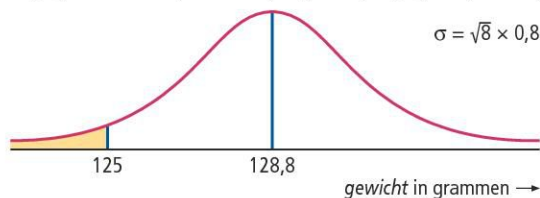
Die kans is 0,9154.

b De kans is $0,91543...^2 \approx 0,8380$.

c Stochast X is het gewicht van een pennywafel.

Stochast S is het gewicht van acht pennywafels.

$E(S) = 8 \times 16,1 = 128,8 \text{ gram}$; $\sigma(S) = \sqrt{8} \times 0,8 \text{ gram}$



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 125, $\mu = 128,8$, $\sigma = \sqrt{8} \times 0,8$

Dit geeft 0,04653...

De kans is 0,0465.

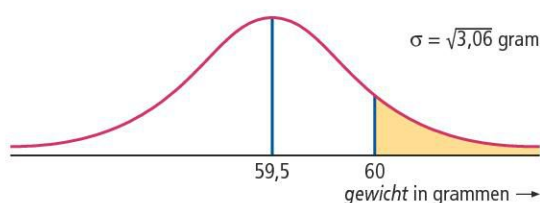
d Stochast X is het gewicht van een pennywafel. Stochast Y is het gewicht van een sprits. Stochast Z is het gewicht van twee spritsen.

Stochast T is het totale gewicht van één pennywafel en twee spritsen.

$E(Z) = 2 \times 21,7 = 43,4 \text{ gram}$; $\sigma(Z) = \sqrt{2} \times 1,1 = 1,555...$

$E(T) = E(X + Z) = E(X) + E(Z) = 16,1 + 43,4 = 59,5 \text{ gram}$

$\sigma(T) = \sigma(X + Z) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Z))^2} = \sqrt{0,8^2 + 1,555...^2} = \sqrt{3,06} \text{ gram}$



Optie: normaal cumulatief

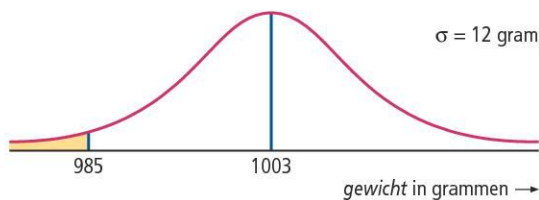
ondergrens = 60, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 59,5$, $\sigma = \sqrt{3,06}$

Dit geeft 0,38754...

Deze kans is 0,3875.

15 Normale verdelingen

T4 a



Optie: normaal cumulatief

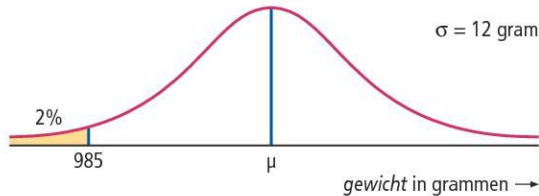
ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 985, $\mu = 1003$, $\sigma = 12$

Dit geeft 0,06680...

De kans is dus 6,68% en dit is meer dan 2%.

De fabrikant voldoet niet aan de EU-norm.

b



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 985, x, 12)$

$y_2 = 0,02$

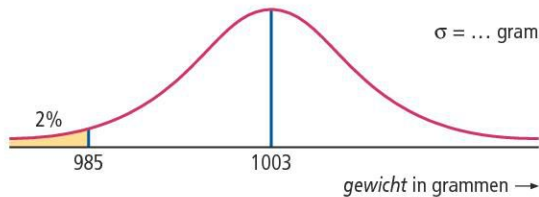
Venster: $985 \leq x \leq 1020$, $0 \leq y \leq 0,04$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (1009,645; 0,02).

Het gemiddelde is 1009,6 gram.

c



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 985, 1003, x)$

$y_2 = 0,02$

Venster: $0 \leq x \leq 15$, $0 \leq y \leq 0,04$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (8,76; 0,02).

De standaardafwijking moet dan 8,7 gram zijn.

T5 a Het aantal schubben X kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm(82, 4)-verdeeld is.

De gevraagde kans is $P(X < 75)$ en benader je met $P(Y < 74,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 74,5, $\mu = 82$, $\sigma = 4$

Dit geeft 0,03039...

De kans $P(X < 75) \approx 0,0304$.

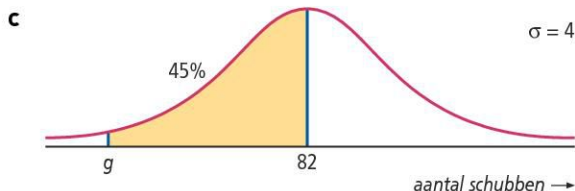
b De gevraagde kans is $P(80 < X < 85)$ en benader je met $P(80,5 \leq Y < 84,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 80,5, bovengrens = 84,5, $\mu = 82$, $\sigma = 4$

Dit geeft 0,38018...

De kans $P(80 < X < 85) \approx 0,3802$.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x, 82, 82, 4)$

$y_2 = 0,45$

Venster: $70 \leq x \leq 82, 0 \leq y \leq 0,90$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (75,42; 0,45).

De ondergrens van het aantal schubben is 75.

De bovengrens van het aantal schubben is $82 + (82 - 75,42) \approx 89$.

d Stochast T is het totaal aantal schubben bij tien willekeurige spiegelkarpers.

Stochast T is $\text{Norm}(10 \times 82 = 820; \sqrt{10} \times 4)$ -verdeeld.

Het totaal aantal schubben T kan worden benaderd met de continue stochast Y die $\text{Norm}(820, 4\sqrt{10})$ -verdeeld is.

De gevraagde kans is $P(T < 800)$ en benader je met $P(Y < 799,5)$.

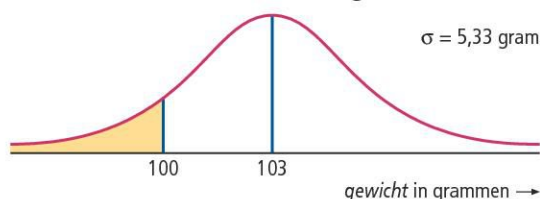
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 799,5, $\mu = 820$, $\sigma = 4\sqrt{10}$

Dit geeft 0,05254...

De kans $P(T < 800) \approx 0,0525$.

T6 a $\sigma = 1,21 + 0,04 \times 103 = 5,33$ gram

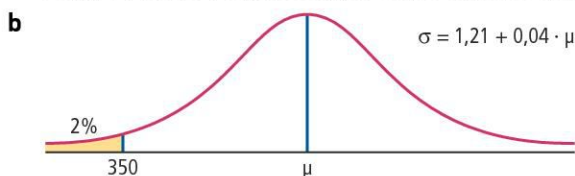


Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 100, $\mu = 103$, $\sigma = 5,33$

Dit geeft 0,28676...

28,7% van de verpakkingen bevat minder dan 100 gram.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 350, x, 1,21 + 0,04x)$

$y_2 = 0,02$

Venster: $350 \leq x \leq 400, 0 \leq y \leq 0,04$

Optie: snijpunt

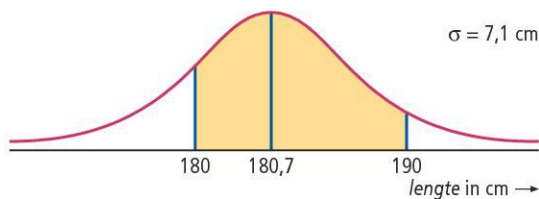
De coördinaten van het snijpunt zijn (384,03; 0,04).

Het ingestelde vulgewicht moet 384,0 gram zijn.

15 Normale verdelingen

Extra oefening

E1 a



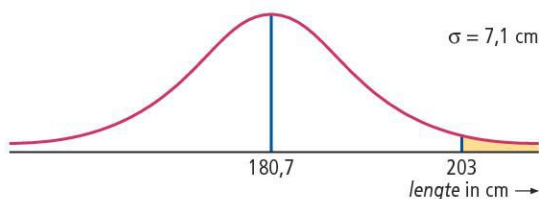
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 180, bovengrens = 190, $\mu = 180,7$, $\sigma = 7,1$

Dit geeft 0,44414...

44,4% van de Nederlandse mannen heeft een lengte tussen 180 cm en 190 cm.

b



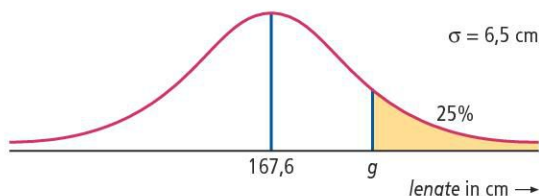
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 203, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 180,7$, $\sigma = 7,1$

Dit geeft 0,00084...

Er moeten naar verwachting $0,00084... \times 6,5$ miljoen ≈ 5000 mannen bukken als ze door zo'n deur gaan.

E2 a



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 10^{99}; 167,6; 6,5)$

$y_2 = 0,25$

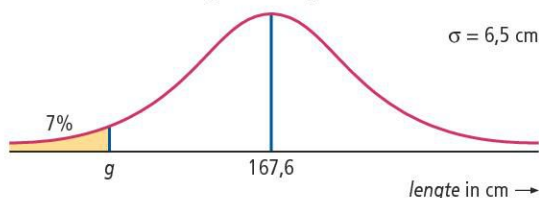
Venster: $167,6 \leq x \leq 200$, $0 \leq y \leq 0,50$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (171,98; 0,25).

De minimale lengte is ongeveer 172 cm.

b



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; x; 167,6; 6,5)$

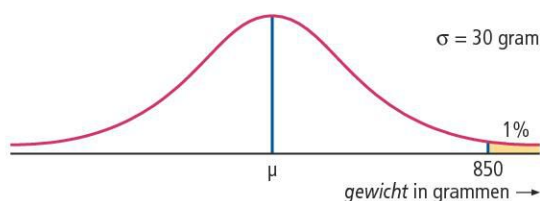
$y_2 = 0,07$

Venster: $150 \leq x \leq 167,6$, $0 \leq y \leq 0,14$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (158,01; 0,07).

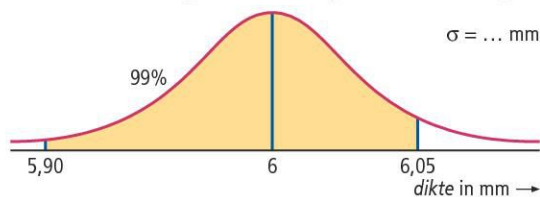
De 7% kleinste vrouwen hebben een lengte van maximaal 158,0 cm.

E3 aInvoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(850, 10^{99}, x, 30)$ $y_2 = 0,01$ Venster: $750 \leq x \leq 850, 0 \leq y \leq 0,02$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (780,21; 0,01).

Het maximale gemiddelde gewicht is 780 gram.

bInvoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(5,90; 6,05; 6; x)$ $y_2 = 0,99$ Venster: $0 \leq x \leq 0,1, 0 \leq y \leq 1,98$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (0,021; 0,99).

Het maximale toegestane waarde van de standaardafwijking is 0,02 mm.

E4 a Het aantal dropjes X kan worden benaderd met de continue stochast Y die

Norm(47,2; 3,7)-verdeeld is.

De gevraagde kans is $P(X = 52)$ en benader je met $P(51,5 \leq Y < 52,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 51,5, bovengrens = 52,5, $\mu = 47,2$, $\sigma = 3,7$

Dit geeft 0,04657...

De kans $P(X = 52) \approx 0,0466$.**b** De gevraagde kans is $P(X \geq 50)$ en benader je met $P(Y \geq 49,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 49,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 47,2$, $\sigma = 3,7$

Dit geeft 0,26709...

De kans $P(X \geq 50) \approx 0,2671$.**c** $E(S) = 5 \times 47,2 = 236$ en $\sigma(S) = \sqrt{5} \times 3,7$ Het aantal dropjes in vijf zakken T kan worden benaderd met de continue stochast S die Norm(236; $\sqrt{5} \times 3,7$)-verdeeld is.De gevraagde kans is $P(T \geq 250)$ en benader je met $P(S \geq 249,5)$.

Optie: normaal cumulatief

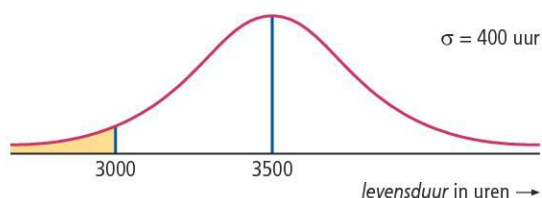
ondergrens = 249,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 236$, $\sigma = \sqrt{5} \times 3,7$

Dit geeft 0,05136...

De kans $P(T \geq 250) \approx 0,0514$.

15 Normale verdelingen

E5 a



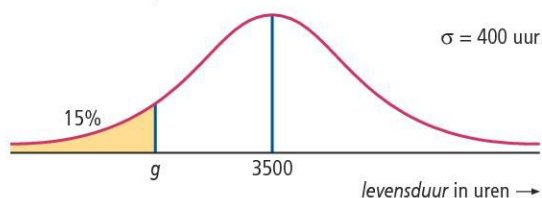
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 3000, $\mu = 3500$, $\sigma = 400$

Dit geeft 0,10564...

De kans is 0,1056.

b



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, x, 3500, 400)$

$y_2 = 0,15$

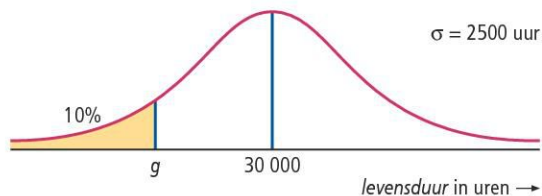
Venster: $3000 \leq x \leq 3500$, $0 \leq y \leq 0,30$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (3085,43; 0,15).

De lampen moeten om de 3085 uur worden vervangen.

c



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, x, 30\,000, 2500)$

$y_2 = 0,10$

Venster: $25\,000 \leq x \leq 30\,000$, $0 \leq y \leq 0,20$

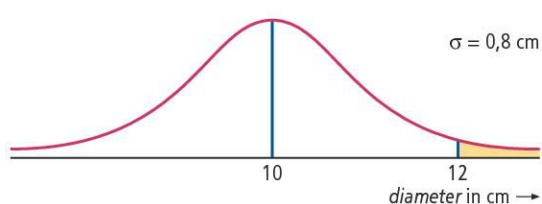
Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt zijn (26 796,12; 0,10).

Deze lampen moeten worden vervangen om de 26 796 uur.

Een LED-lamp mag $26\,796 : 3085 \approx 8,7$ keer zo duur zijn.

E6 a



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 12, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 10$, $\sigma = 0,8$

Dit geeft 0,00620...

De gevraagde kans is 0,0062.

b

Dan moet elke bol in een vakje van 12 cm passen.

De kans dat een bol een diameter van maximaal 12 cm heeft, is

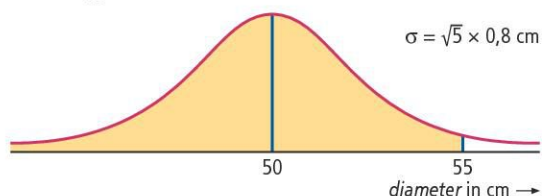
$1 - 0,00620... = 0,99379...$

De kans dat een tiental in doos 1 past is $0,99379...^{10} \approx 0,9396$.

- c Stochast S stelt de lengte van 5 bollen op een rij voor.

$$E(S) = 5 \times 10 = 50 \text{ cm en } \sigma(S) = \sqrt{5} \times 0,8 \text{ cm}$$

De lengte van doos 2 is 55 cm.



Optie: normaal cumulatief

$$\text{ondergrens} = -10^{99}, \text{ bovengrens} = 55, \mu = 50, \sigma = \sqrt{5} \times 0,8$$

Dit geeft 0,99740...

De kans dat de bollen in een vakje passen is 0,9974.

- d De kans dat vijf willekeurige bollen in de lengte passen is ongeveer 0,9974.

Voor de breedte moet de diameter van elke bol kleiner dan 12 cm zijn.

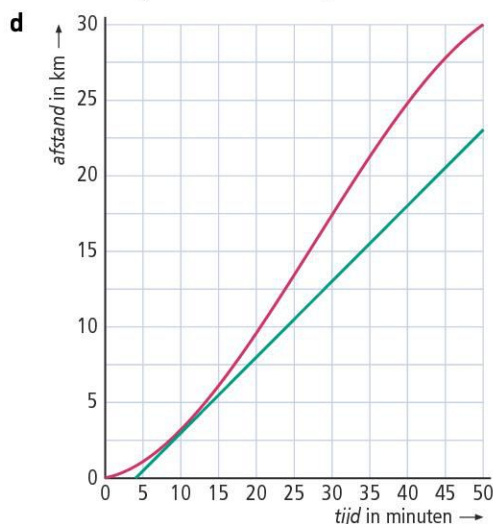
De kans daarop is ongeveer $(0,9938)^2 \approx 0,9876$. De kans dat twee willekeurige bollen in de breedte passen is dus 0,9876.

De kans dat de bollen in de breedte passen is kleiner dan de kans dat ze in de lengte passen, dus het heeft meer zin om de breedte te vergroten.

16 Samengestelde functies

Voorkennis

- V1 a** Marian reed niet met een constante snelheid want de grafiek is geen rechte lijn.
- b** In 50 minuten reed ze een afstand van 30 km.
Haar gemiddelde snelheid was $\frac{30}{50} = 0,6$ km per minuut.
Dat is $0,6 \cdot 60 = 36$ km per uur.
- c** In de eerste 10 minuten reed zij een afstand van 3 km.
Haar gemiddelde snelheid was $\frac{3}{10} = 0,3$ km per minuut.
Dat is $0,3 \cdot 60 = 18$ km per uur.



De raaklijn gaat door de punten (4, 0) en (24, 10).

In 20 minuten neemt de afstand 10 km toe.

De snelheid van Marian is dan ongeveer $\frac{10}{20} = 0,5$ km per minuut.

Dat is $0,5 \cdot 60 = 30$ km per uur.

e
$$\frac{S(15) - S(10)}{15 - 10} = \frac{6,1125 - 3,2}{5} = 0,5825 \text{ km per minuut}$$

$$\frac{S(11) - S(10)}{11 - 10} = \frac{3,7257 - 3,2}{1} = 0,5257 \text{ km per minuut}$$

$$\frac{S(10,1) - S(10)}{10,1 - 10} = \frac{3,251... - 3,2}{0,1} \approx 0,512 \text{ km per minuut}$$

$$\frac{S(10,001) - S(10)}{10,001 - 10} = \frac{3,20... - 3,2}{0,001} \approx 0,51 \text{ km per minuut}$$

- f** Marian heeft dan volgens de formule een snelheid van 0,51 km per minuut.
Dat is $0,51 \cdot 60 = 30,6$ km per uur.

V2 a De helling in het punt (0, 1) is $\frac{f(0,001) - f(0)}{0,001 - 0} = \frac{1,000... - 1}{0,001} \approx 0,50.$

De helling in het punt (3, 2) is $\frac{f(3,001) - f(3)}{3,001 - 3} = \frac{2,000... - 2}{0,001} \approx 0,25.$

- b** De antwoorden van opdracht a komen overeen met de tabel.

- c Invoer: $y_1 = \sqrt{x+1}$ en $y_2 = (y_1(x+0,001) - y_1(x))/0,001$

Optie: tabel

X	Y ₁	Y ₂		
16	4.1231	0.1213		
17	4.2426	0.1178		
18	4.3589	0.1147		
19	4.4721	0.1118		
20	4.5826	0.1091		
21	4.6904	0.1066		
22	4.7958	0.1043		
23	4.899	0.1021		
24	5	0.1		
25	5.099	0.0981		
26	5.1962	0.0962		
Y ₂ =0.099999				

Vanaf $x = 24$ is de helling van de grafiek van f kleiner dan 0,1.

- V3 a De grafiek van f is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt -2 .

In elk punt heeft de grafiek van f een helling -2 .

- b De gemiddelde toename van de grafiek van g over het interval $[1, 4]$ is

$$\frac{g(4) - g(1)}{4 - 1} = \frac{2 - 5 \cdot \log(4) - (2 - 5 \cdot \log(1))}{3} \approx -1,0$$

- c De helling van de grafiek van g in dat punt is

$$\frac{g(3,001) - g(3)}{3,001 - 3} = \frac{2 - 5 \cdot \log(3,001) - (2 - 5 \cdot \log(3))}{0,001} \approx -0,72$$

- d De grafieken hebben in een punt dezelfde helling als de helling van de grafiek van g ook -2 is.

Invoer: $y_1 = 2 - 5 \cdot \log(x)$ en $y_2 = (y_1(x+0,001) - y_1(x)) / 0,001$

Optie: tabel

X	Y ₁	Y ₂		
0.8	2.4846	-2.713		
0.9	2.2288	-2.411		
1	2	-2.17		
1.1	1.793	-1.973		
1.2	1.6041	-1.809		
1.3	1.4303	-1.67		
1.4	1.2694	-1.55		
1.5	1.1195	-1.447		
1.6	0.9794	-1.357		
1.7	0.8478	-1.277		
1.8	0.7236	-1.206		
Y ₂ =-1.9731690677				

Als $x \approx 1,1$ is de helling van de grafiek van g ook -2 .

- V4 a $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

$$f'(x) = 2 \cdot 4x - 4$$

$$f'(x) = 8x - 4$$

- c $h(p) = (4p - 3)(p - 1)$

$$h(p) = 4p^2 - 7p + 3$$

$$h'(p) = 2 \cdot 4p - 7$$

$$h'(p) = 8p - 7$$

- b $g(t) = -3t - 7$

$$g'(t) = -3$$

- d $A(x) = 12x^6 - 5x^2$

$$A'(x) = 6 \cdot 12x^5 - 2 \cdot 5x$$

$$A'(x) = 72x^5 - 10x$$

- V5 a $f(x) = -16x + \frac{1}{2}x^4$

$$f'(x) = -16 + 4 \cdot \frac{1}{2}x^3$$

$$f'(x) = -16 + 2x^3$$

- b $f'(x) = 0$

$$-16 + 2x^3 = 0$$

$$2x^3 = 16$$

$$x^3 = 8$$

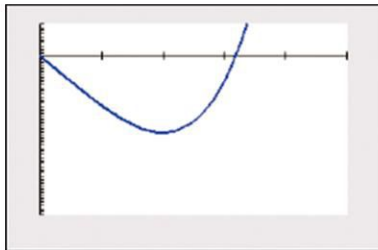
$$x = 2$$

16 Samengestelde functies

c De extreme waarde van f is $f(2) = -16 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2^4 = -24$.

d Invoer: $y_1 = -16x + \frac{1}{2}x^4$

Venster: $0 \leq x \leq 5, -50 \leq y \leq 10$



In de plot zie je dat het om een minimum gaat.

V6 a $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{2}{3}x^2 - 2x - 4$$

$$f'(x) = 2x^2 - 2x - 4$$

b $f'(x) = 0$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

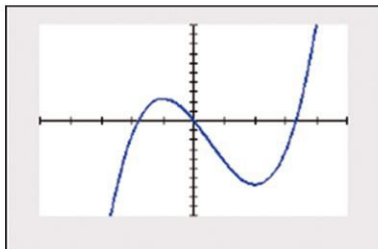
$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x-2 = 0 \text{ of } x+1 = 0$$

$$x = 2 \text{ of } x = -1$$

c Invoer: $y_1 = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x$

Venster: $-5 \leq x \leq 5, -10 \leq y \leq 10$



Als $f'(x) < 0$, dan daalt de grafiek van f .

Dit is het geval voor $-1 < x < 2$.

d Links van $x = 2$ is $f'(x)$ negatief en dus de grafiek van f dalend en rechts van $x = 2$ is $f'(x)$ positief en dus de grafiek van f stijgend.

Een overgang van dalen naar stijgen betekent een minimum.

16.1 Machtsfuncties

intro $G = 50$ invullen in de eerste formule geeft $H = 0,09 \cdot 50^{\frac{2}{3}} = 1,221... \text{ dm}^2$

$G = 50$ invullen in de tweede formule geeft $50 = 37 \cdot H^{1,5}$

$$H^{1,5} = \frac{50}{37}$$

$$H = \left(\frac{50}{37}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,221... \text{ dm}^2$$

Met beide formules krijg je dezelfde huidoppervlakte.

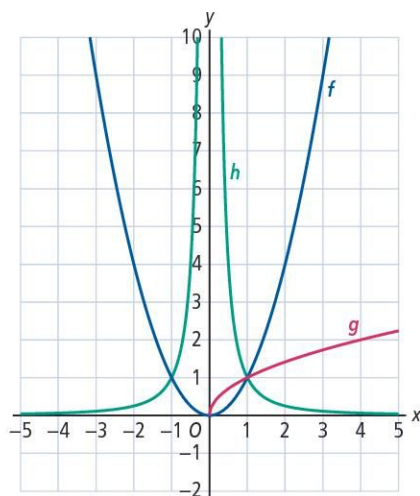
1 a $TK(500) = 25 \cdot 500^{0,64} = 1334,383... \text{ euro}$

b $TK(501) = 25 \cdot 501^{0,64} = 1336,091... \text{ euro}$

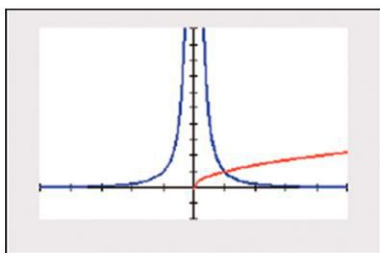
De extra kosten zijn $1336,091... - 1334,383... \approx 1,71 \text{ euro}$.

- c $TO(500) = 78 \cdot 500^{0,5} = 1744,133... \text{ euro}$
 $TO(501) = 78 \cdot 501^{0,5} = 1745,876... \text{ euro}$
 De extra opbrengst is $1745,876... - 1744,133... \approx 1,74 \text{ euro}$.
- d De totale opbrengst neemt dan meer toe dan de totale kosten, dat betekent dat de winst iets toeneemt bij het verhogen van de productie.
 De directie zal besluiten de productie op te voeren.
- e $TW = TO - TK = 78 \cdot q^{0,5} - 25 \cdot q^{0,64}$
- f Invoer: $y_1 = 78x^{0,5} - 25x^{0,64}$
 Venster: $0 \leq x \leq 2000, 0 \leq y \leq 500$
 Optie: maximum
 De winst is maximaal als er 580 liter geproduceerd wordt.
 De maximale winst is dan 411 euro.

- 2 a Invoer: $y_1 = x^2, y_2 = x^{0,5}$ en $y_3 = x^{-2}$
 Venster: $-5 \leq x \leq 5, -2 \leq y \leq 10$



- b Invoer: $y_1 = \frac{1}{x^2}$ en $y_2 = \sqrt{x}$
 Venster: $-5 \leq x \leq 5, -2 \leq y \leq 10$



De grafieken van p en van h zijn gelijk, dus functie p is gelijk aan functie h .
 De grafieken van r en van g zijn gelijk, dus functie r is gelijk aan functie g .

- 3 a $j(x) = \frac{1}{x^{-5}}$
 $j(x) = x^{- \cdot -5}$
 $j(x) = x^5$
- b $p(x) = x^{-3,2} \cdot x^{-4,3}$
 $p(x) = x^{-3,2 + -4,3}$
 $p(x) = x^{-7,5}$
- c $k(x) = 4(x^{-2})^{-4}$
 $k(x) = 4x^{-2 \cdot -4}$
 $k(x) = 4x^8$, dus $b = 8$

16 Samengestelde functies

$$\begin{aligned} \text{d } h(x) &= x^{-\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{3x^2} \\ h(x) &= x^{-\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2} \\ h(x) &= x^{-\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-2} \\ h(x) &= \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{1}{5}} \cdot x^{-2} \\ h(x) &= \frac{1}{3} \cdot x^{-2\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{4 a } p(x) &= \frac{x^4 \cdot x^{2,7}}{x^{0,2}} \\ p(x) &= \frac{x^{6,7}}{x^{0,2}} \\ p(x) &= 1 \cdot x^{6,5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } p(x) &= 4x^2 \cdot 2\sqrt[3]{x} \\ p(x) &= 4x^2 \cdot 2x^{\frac{1}{3}} \\ p(x) &= 8 \cdot x^{2\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{5 a } q &= (P^{-3})^{\frac{1}{0,25}} \\ q &= (P^{-3})^4 \\ q &= 1 \cdot P^{-12} \\ \text{b } q &= (4,2 \cdot P^{-3,7})^{-3,2} \\ q &= 4,2^{-3,2} \cdot (P^{-3,7})^{-3,2} \\ q &\approx 0,010 \cdot P^{11,84} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{6 a } A(p) &= \frac{3p^2 - 8p^{1,5} + 10}{2p} \\ A(p) &= \frac{3p^2}{2p} - \frac{8p^{1,5}}{2p} + \frac{10}{2p} \\ A(p) &= 1,5p - 4p^{0,5} + 5p^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } W(p) &= \frac{8p^4 + 5p^2 + p + 1}{p} \\ W(p) &= \frac{8p^4}{p} + \frac{5p^2}{p} + \frac{p}{p} + \frac{1}{p} \\ W(p) &= 8p^3 + 5p + 1 + p^{-1} \\ N(t) &= \frac{-2t^{3,5} + 4t^{2,1} - 2t^{0,3} + 6}{2t} \\ N(t) &= \frac{-2t^{3,5}}{2t} + \frac{4t^{2,1}}{2t} - \frac{2t^{0,3}}{2t} + \frac{6}{2t} \\ N(t) &= -t^{2,5} + 2t^{1,1} - t^{-0,7} + 3t^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } p(x) &= \frac{x^{\frac{1}{4}} \cdot x}{5x^{\frac{1}{2}}} \\ p(x) &= \frac{1}{5} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} \\ p(x) &= \frac{1}{5} \cdot x^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } p(x) &= (\sqrt{x})^3 \cdot \sqrt[4]{x} \\ p(x) &= (x^{\frac{1}{2}})^3 \cdot x^{\frac{1}{4}} \\ p(x) &= x^{1\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \\ p(x) &= 1 \cdot x^{1\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } q &= (4 \cdot P^{16})^{-0,125} \cdot (3 \cdot P)^2 \\ q &= 4^{-0,125} \cdot (P^{16})^{-0,125} \cdot 3^2 \cdot P^2 \\ q &= 0,840... \cdot P^{-2} \cdot 9 \cdot P^2 \\ q &\approx 7,568 \cdot P^0 \quad (q \approx 7,568) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } q &= (2\sqrt[3]{P})^3 \cdot 4P^{\frac{1}{3}} \\ q &= 2^3 \cdot (\sqrt[3]{P})^3 \cdot 4 \cdot P^{\frac{1}{3}} \\ q &= 8 \cdot (P^{\frac{1}{3}})^3 \cdot 4 \cdot P^{\frac{1}{3}} \\ q &= 32 \cdot P \cdot P^{\frac{1}{3}} \\ q &= 32 \cdot P^{1\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

- 7 a** In stap 1 zijn de linkerkant en de rechterkant verwisseld.
In stap 2 is aan beide kanten van het gelijkteken gedeeld door 32.
- b** Er staan haakjes omdat je zowel $\frac{1}{32}$ als p tot de macht $\frac{1}{2,5}$ moet doen.
- c** In stap 4 is de rekenregel $(p \cdot q)^c = p^c \cdot q^c$ gebruikt.
- d** $q = \left(\frac{1}{32}\right)^{0,4} \cdot p^{0,4}$
 $q = 0,25 \cdot p^{0,4}$

- 8 a** $v = 8 \cdot u^3$
 $8 \cdot u^3 = v$
 $u^3 = \frac{1}{8} \cdot v$
 $u = \left(\frac{1}{8} \cdot v\right)^{\frac{1}{3}}$
 $u = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot v^{\frac{1}{3}}$
 $u = \frac{1}{2} \cdot v^{\frac{1}{3}}$
- c** $v = 2 \cdot \sqrt[3]{u}$
 $2 \cdot \sqrt[3]{u} = v$
 $\sqrt[3]{u} = \frac{1}{2} \cdot v$
 $u^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot v$
 $u = \left(\frac{1}{2} \cdot v\right)^3$
 $u = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot v^3$
 $u = \frac{1}{8} \cdot v^3$
- b** $v = 2,35 \cdot \sqrt[4]{u}$
 $2,35 \cdot \sqrt[4]{u} = v$
 $\sqrt[4]{u} = \frac{1}{2,35} \cdot v$
 $u^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2,35} \cdot v$
 $u = \left(\frac{1}{2,35} \cdot v\right)^4$
 $u = \left(\frac{1}{2,35}\right)^4 \cdot v^4$
 $u \approx 0,033 \cdot v^4$
- d** $v = 12,3 \cdot u^{1,25}$
 $12,3 \cdot u^{1,25} = v$
 $u^{1,25} = \frac{1}{12,3} \cdot v$
 $u = \left(\frac{1}{12,3} \cdot v\right)^{\frac{1}{1,25}}$
 $u = \left(\frac{1}{12,3}\right)^{\frac{1}{1,25}} \cdot v^{\frac{1}{1,25}}$
 $u \approx 0,134 \cdot v^{0,8}$

- 9 a** $Z = 0,4 \cdot 4500^{0,67} \approx 112$
- b** $Z = 0,4 \times 40^{0,67} \approx 4,73\dots$
Voor 7 km heeft de hond $7 \times 4,73\dots \approx 33$ ml zuurstof nodig.
- c** $Z = 0,4 \cdot L^{0,67}$
 $0,4 \cdot L^{0,67} = Z$
 $L^{0,67} = \frac{1}{0,4} \cdot Z$
 $L = \left(\frac{1}{0,4} \cdot Z\right)^{\frac{1}{0,67}}$
 $L = \left(\frac{1}{0,4}\right)^{\frac{1}{0,67}} \cdot Z^{\frac{1}{0,67}}$
 $L = 3,925\dots \cdot Z^{1,492\dots}$
Het gewicht van de zebra is $3,925\dots \cdot 35^{1,492\dots} \approx 792$ kg.

- 04 a** Bij herleiding A is de rekenregel $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ gebruikt.
Bij herleiding B is de rekenregel $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ gebruikt.
Bij herleiding C is de rekenregel $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$ gebruikt.
Bij herleiding D is de rekenregel $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$ gebruikt.
- b** $j(x) = \frac{1}{x^7}$
 $j(x) = x^{-7}$
Bij deze herleiding is de rekenregel $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$ gebruikt.

16 Samengestelde functies

c $p(x) = x^{-2,8} \cdot x^{-1,3}$

$$p(x) = x^{-2,8 + -1,3}$$

$$p(x) = x^{-4,1}$$

d $k(x) = 3(x^{-2})^5$

$$k(x) = 3 \cdot x^{-2 \cdot 5}$$

$$k(x) = 3 \cdot x^{-10}, \text{ dus } b = -10$$

e $p(x) = \frac{x^{2,8} \cdot x^3}{x^4}$

$$p(x) = \frac{x^{2,8+3}}{x^4}$$

$$p(x) = \frac{x^{5,8}}{x^4}, \text{ dus } c = 5,8$$

f $p(x) = \frac{x^{5,8}}{x^4}$

$$p(x) = x^{5,8-4}$$

$$p(x) = x^{1,8}$$

g $f(x) = \frac{x^3 \cdot x^{2,2}}{x^{0,5}}$

$$f(x) = \frac{x^{3+2,2}}{x^{0,5}}$$

$$f(x) = \frac{x^{5,2}}{x^{0,5}}$$

$$f(x) = x^{5,2-0,5}$$

$$f(x) = x^{4,7}$$

$$h(x) = x^{3,2} \cdot \sqrt[5]{x}$$

$$h(x) = x^{3,2} \cdot x^{\frac{1}{5}}$$

$$h(x) = x^{3,2} \cdot x^{0,2}$$

$$h(x) = x^{3,2+0,2}$$

$$h(x) = x^{3,4}$$

08 a In stap 2 is aan beide kanten van het gelijkteken gedeeld door 2,5.

b $Q = (0,4 \cdot P)^{\frac{1}{0,2}}$

c $Q = (0,4)^{\frac{1}{0,2}} \cdot P^{\frac{1}{0,2}}$
 $Q = 0,01024 \cdot P^5$

d $v = \frac{1}{4} \cdot u^2$

$$\frac{1}{4} \cdot u^2 = v$$

$$u^2 = 4v$$

$$u = (4 \cdot v)^{\frac{1}{2}}$$

$$u = 4^{\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}}$$

$$u = 2 \cdot v^{0,5}$$

e $v = 2,5 \cdot \sqrt[3]{u}$

$$2,5 \cdot \sqrt[3]{u} = v$$

$$\sqrt[3]{u} = \frac{1}{2,5} \cdot v$$

$$u^{\frac{1}{3}} = 0,4 \cdot v$$

$$u = (0,4 \cdot v)^3$$

$$u = 0,4^3 \cdot v^3$$

$$u = 0,064 \cdot v^3$$

f $v = 0,1 \cdot \sqrt[5]{u}$

$$0,1 \cdot \sqrt[5]{u} = v$$

$$\sqrt[5]{u} = 10v$$

$$u = (10 \cdot v)^5$$

$$u = 10^5 \cdot v^5$$

$$u = 100\,000 \cdot v^5$$

g $v = 1,15 \cdot u^{2,25}$

$$1,15 \cdot u^{2,25} = v$$

$$u^{2,25} = \frac{1}{1,15} \cdot v$$

$$u = \left(\frac{1}{1,15} \cdot v\right)^{\frac{1}{2,25}}$$

$$u = \left(\frac{1}{1,15}\right)^{\frac{1}{2,25}} \cdot v^{\frac{1}{2,25}}$$

$$u \approx 0,940 \cdot v^{0,444}$$

U1 a Invullen van de coördinaten van het punt (1, 6) in $h(x) = c \cdot x^a$ geeft:

$$6 = c \cdot 1^a$$

$$6 = c \cdot 1$$

$$c = 6$$

Invullen van de coördinaten van het punt (4, 48) in $h(x) = 6 \cdot x^a$ geeft:

$$48 = 6 \cdot 4^a$$

$$4^a = 8$$

$$a = {}^4\log 8$$

$$a = \frac{\log 8}{\log 4} = 1,5$$

b $P = m \cdot Q^{\frac{2}{3}}$

$$m \cdot Q^{\frac{2}{3}} = P$$

$$Q^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{m} \cdot P$$

$$Q = \left(\frac{1}{m} \cdot P\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$Q = \left(\frac{1}{m} \cdot P\right)^{\frac{3}{5}}$$

$$Q = \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot P^{\frac{3}{5}}$$

Omdat $Q = \frac{1}{8} \cdot P^b$ moet gelden $b = \frac{3}{5}$ en $\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{3}{5}} = \frac{1}{8}$.

$$\frac{1}{m} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{1}{m} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{32} \text{ dus } m = 32$$

16.2 Machtsfuncties differentiëren

intro Over $[10; 10,001]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6 \cdot 10,001 \cdot \sqrt{10,001} - 6 \cdot 10 \cdot \sqrt{10}}{0,001} = 28,461 \dots$

Na 10 seconden is haar snelheid volgens de formule 28,461... meter per seconde.

Dat komt overeen met $28,461 \dots \times 3,6 \approx 102$ km per uur.

De bewering van Loise is in overeenstemming met de formule.

10 a De helling van f bij $x = 1$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1,001) - f(1)}{1,001 - 1} \approx -1$.

De helling van f bij $x = 2$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2,001) - f(2)}{2,001 - 2} \approx -0,25$.

De helling van f bij $x = 3$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3,001) - f(3)}{3,001 - 3} \approx -0,11$.

De helling van f bij $x = 4$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4,001) - f(4)}{4,001 - 4} \approx -0,06$.

b $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) = x^{-1}$$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = -1 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

16 Samengestelde functies

$$\text{c } f'(1) = \frac{-1}{1^2} = -1, f'(2) = \frac{-1}{2^2} = \frac{-1}{4} = -0,25, f'(3) = \frac{-1}{3^2} = \frac{-1}{9} \approx -0,11 \text{ en}$$

$$f'(4) = \frac{-1}{4^2} = \frac{-1}{16} = -0,0625$$

Deze uitkomsten komen overeen met de uitkomsten van opdracht a.

11 a Invoer: $y_1 = \frac{2}{x^3}$ en $y_2 = (y_1(x + 0,001) - y_1(x))/0,001$

Optie: tabel

X	Y1	Y2		
0	ERROR	ERROR		
1	2	-5,988		
2	0,25	-0,375		
3	0,0741	-0,074		
4	0,0313	-0,023		
5	0,016	-0,01		
6	0,0093	-0,005		
7	0,0058	-0,002		
8	0,0039	-0,001		
9	0,0027	-9E-4		
10	0,002	-6E-4		

X=0

Afgerond zijn de hellingen achtereenvolgens $-5,988$; $-0,375$; $-0,074$ en $-0,023$.

b $g(x) = 2x^{-3}$
 $g'(x) = -3 \cdot 2x^{-4}$
 $g'(x) = -6 \cdot \frac{1}{x^4}$

$$g'(x) = \frac{-6}{x^4}$$

c $g'(1) = \frac{-6}{1^4} = -6, g'(2) = \frac{-6}{2^4} = -0,375, g'(x) = \frac{-6}{3^4} = -0,0740\dots$ en
 $g'(x) = \frac{-6}{4^4} = -0,0234\dots$

Deze uitkomsten komen overeen met de waarden van opdracht a.

12 a $h(x) = x^{0,7}$
 $h'(x) = 0,7 \cdot x^{-0,3}$
 $h'(x) = 0,7 \cdot \frac{1}{x^{0,3}}$

b $h'(1) = 0,7 \cdot \frac{1}{1^{0,3}} = 0,7, h'(2) = 0,7 \cdot \frac{1}{2^{0,3}} = 0,5685\dots, h'(3) = 0,7 \cdot \frac{1}{3^{0,3}} = 0,5034\dots$
en $h'(4) = 0,7 \cdot \frac{1}{4^{0,3}} = 0,4618\dots$

c De uitkomsten komen overeen met de getallen in de tabel, dus de functie van opdracht a kan de afgeleide van h zijn.

13 a $f(x) = x^{1,9}$
 $f'(x) = 1,9x^{0,9}$

c $A = -10g^{10,3} + g^{-1}$
 $\frac{dA}{dg} = -10 \cdot 10,3 \cdot g^{9,3} + -1 \cdot g^{-2}$
 $\frac{dA}{dg} = -103g^{9,3} - g^{-2}$

b $K(q) = 0,5q^2 + 3q^{-1}$
 $K'(q) = 0,5 \cdot 2q + 3 \cdot -1 \cdot q^{-2}$
 $K'(q) = q - 3q^{-2}$

d $N = 2,4p^{-3,4} - 67$
 $\frac{dN}{dp} = 2,4 \cdot -3,4p^{-4,4} - 0$
 $\frac{dN}{dp} = -8,16p^{-4,4}$

14 a $f(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

b $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c $g(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \cdot x^3$

$$g(x) = x^{-2} + x^{\frac{1}{2}} \cdot x^3$$

$$g(x) = x^{-2} + x^{3\frac{1}{2}}$$

d $g'(x) = -2 \cdot x^{-3} + 3\frac{1}{2} \cdot x^{2\frac{1}{2}}$

$$g'(x) = -2 \cdot \frac{1}{x^3} + 3\frac{1}{2} \cdot x^{2\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = \frac{-2}{x^3} + 3\frac{1}{2}x^{2\frac{1}{2}} \text{ ofwel } g'(x) = \frac{-2}{x^3} + 3\frac{1}{2}x^2\sqrt{x}$$

e $h(x) = \frac{2x^{3,5} + x^2 - 3}{x^2}$

$$h(x) = \frac{2x^{3,5}}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}$$

$$h(x) = 2x^{1,5} + 1 - 3x^{-2}$$

f $h'(x) = 2 \cdot 1,5x^{0,5} + 0 - 3 \cdot -2x^{-3}$

$$h'(x) = 3x^{0,5} + 6 \cdot x^{-3}$$

$$h'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{6}{x^3}$$

15 a $S(p) = 3\sqrt{p}$

$$S(p) = 3 \cdot p^{0,5}$$

$$S'(p) = 3 \cdot 0,5p^{-0,5}$$

$$S'(p) = 1,5 \cdot \frac{1}{p^{0,5}}$$

$$S'(p) = \frac{1,5}{\sqrt{p}}$$

$$S'(p) = \frac{3}{2\sqrt{p}}$$

b $g(d) = \frac{5}{d^3} + d^{2,5}$

$$g(d) = 5d^{-3} + d^{2,5}$$

$$g'(d) = 5 \cdot -3d^{-4} + 2,5d^{1,5}$$

$$g'(d) = -15 \cdot \frac{1}{d^4} + 2,5 \cdot d \cdot d^{0,5}$$

$$g'(d) = \frac{-15}{d^4} + 2,5d \cdot \sqrt{d}$$

d $TW = 4q^{1,5} + 2q \cdot \sqrt[3]{q}$

$$TW = 4q^{1,5} + 2q \cdot q^{\frac{1}{3}}$$

$$TW = 4q^{1,5} + 2q^{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{dTW}{dq} = 4 \cdot 1,5 \cdot q^{0,5} + 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot q^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dTW}{dq} = 6 \cdot \sqrt{q} + 2\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{q}$$

e $A = 4p^{0,5} - \frac{3}{p^2}$

$$A = 4p^{0,5} - 3p^{-2}$$

$$\frac{dA}{dp} = 4 \cdot 0,5p^{-0,5} - 3 \cdot -2p^{-3}$$

$$\frac{dA}{dp} = 2 \cdot \frac{1}{p^{0,5}} + 6 \cdot \frac{1}{p^3}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{2}{\sqrt{p}} + \frac{6}{p^3}$$

16 Samengestelde functies

$$\text{c } T(p) = \frac{1}{2\sqrt{p}} + 3p$$

$$T(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}} + 3p$$

$$T(p) = \frac{1}{2} \cdot p^{-\frac{1}{2}} + 3p$$

$$T'(p) = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} p^{-\frac{1}{2}} + 3$$

$$T'(p) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}} + 3$$

$$T'(p) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p \cdot p^{\frac{1}{2}}} + 3$$

$$T'(p) = \frac{-1}{4p \cdot \sqrt{p}} + 3$$

$$\text{f } K = \frac{t^2 \cdot \sqrt{t} + t^2 + 3}{t}$$

$$K = \frac{t^2 \cdot t^{\frac{1}{2}} + t^2 + 3}{t}$$

$$K = t^{1,5} + t + 3t^{-1}$$

$$\frac{dK}{dt} = 1,5t^{0,5} - 3t^{-2}$$

$$\frac{dK}{dt} = 1,5t^{0,5} - 3 \cdot \frac{1}{t^2}$$

$$\frac{dK}{dt} = 1,5 \cdot \sqrt{t} - \frac{3}{t^2}$$

$$\text{16 a } TW = TO - TK = 30 \cdot 75 - (100 + 75^{1,6}) \approx 1149,77 \text{ euro}$$

$$\text{b } TW = TO - TK$$

$$TW = 30 \cdot q - (100 + q^{1,6})$$

$$TW = 30q - 100 - q^{1,6}$$

$$\text{c } TW'(q) = 30 - 0 - 1,6q^{0,6}$$

$$TW'(q) = 30 - 1,6q^{0,6}$$

Er is een maximale winst als geldt $TW'(q) = 0$.

$$30 - 1,6q^{0,6} = 0$$

$$1,6q^{0,6} = 30$$

$$q^{0,6} = 18,75$$

$$q = 18,75^{\frac{1}{0,6}}$$

$$q = 132,3 \dots$$

Als $q \approx 132$ is de winst maximaal.

$$\text{17 a } \text{Het magazijn is } x \text{ bij } y \text{ meter en heeft een oppervlakte van } 1125 \text{ m}^2.$$

Hieruit volgt dat $x \cdot y = 1125$.

$$\text{b } x \cdot y = 1125 \text{ kun je schrijven als } y = \frac{1125}{x}$$

De lengte van het hele terrein is $5 + x + 20 = x + 25$ meter.

De breedte van het hele terrein is $y + 5$ meter.

De oppervlakte van het hele terrein is $(x + 25)(y + 5) \text{ m}^2$.

$(x + 25)(y + 5)$ kun je schrijven als $x \cdot y + 5x + 25y + 125$.

Als je de formule van opdracht a substitueert in dit resultaat krijg je een formule voor de oppervlakte van het hele terrein uitgedrukt in x .

$$O(x) = x \cdot \frac{1125}{x} + 5x + 25 \cdot \frac{1125}{x} + 125$$

$$O(x) = 1125 + 5x + \frac{28125}{x} + 125$$

$$O(x) = 5x + 1250 + \frac{28125}{x}$$

$$\text{c } O(x) = 5x + 1250 + \frac{28125}{x}$$

$$O(x) = 5x + 1250 + 28125x^{-1}$$

$$O'(x) = 5 + 0 + 28125 \cdot -1 \cdot x^{-2}$$

$$O'(x) = 5 - 28125 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$O'(x) = 5 - \frac{28125}{x^2}$$

Bij het minimum geldt: $O'(x) = 0$ dus

$$5 - \frac{28125}{x^2} = 0$$

$$\frac{28125}{x^2} = 5$$

$$x^2 = \frac{28125}{5} = 5625$$

$$x = \sqrt{5625} = 75 \text{ of } x = -\sqrt{5625} = -75$$

In deze situatie gaat het om de oplossing $x = 75$.

De minimale afmetingen van het stuk grond zijn $75 + 5 + 20 = 100$ meter

voor de lengte en $\frac{1125}{75} + 5 = 20$ meter voor de breedte.

015 a Ties heeft in stap 1 de rekenregels $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ en $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$ gebruikt.

b $f'(x) = 3,7x^{2,7} + -1,9x^{-2,9}$

$$f'(x) = 3,7x^{2,7} - 1,9 \cdot \frac{1}{x^{2,9}}$$

$$f'(x) = 3,7x^{2,7} - \frac{1,9}{x^{2,9}}$$

c Marie heeft in stap 1 de rekenregels $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$, $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$ en $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$ gebruikt.

d $g'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot -3x^{-4}$

$$g'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6x^{-4}$$

e $g'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6 \cdot \frac{1}{x^4}$

$$g'(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{6}{x^4}$$

f $K(v) = \frac{2v^3 + 3v - 4}{2v^2}$

$$K(v) = \frac{2v^3}{2v^2} + \frac{3v}{2v^2} + \frac{-4}{2v^2}$$

$$K(v) = v + 1\frac{1}{2}v^{-1} - 2v^{-2}$$

$$K'(v) = 1 + 1\frac{1}{2} \cdot -1v^{-2} - 2 \cdot -2v^{-3}$$

$$K'(v) = 1 - 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v^2} + 4 \cdot \frac{1}{v^3}$$

$$K'(v) = 1 - \frac{3}{2v^2} + \frac{4}{v^3}$$

U2 $f(x) = x \cdot (\sqrt[4]{x})^3$

$$f(x) = x \cdot x^{\frac{3}{4}}$$

$$f(x) = x^{1\frac{3}{4}}$$

$$f'(x) = 1\frac{3}{4} \cdot x^{\frac{3}{4}}$$

$$f'(x) = 1\frac{3}{4} \cdot (\sqrt[4]{x})^3$$

$$f'(16) = 1\frac{3}{4} \cdot (\sqrt[4]{16})^3$$

$$f'(16) = 1\frac{3}{4} \cdot 2^3 = 14$$

De helling van de raaklijn l in punt P is 14.

De formule bij de raaklijn l is $y = 14x + b$.

16 Samengestelde functies

Invullen van de coördinaten van punt P geeft:

$$128 = 14 \cdot 16 + b$$

$$128 = 224 + b$$

$$b = -96$$

De formule bij de raaklijn l is $y = 14x - 96$.

De lijn l snijdt de y -as in het punt $(0, -96)$.

16.3 Kettingfuncties

intro Als $t = 10$ dan is $T = 20 + 0,5 \cdot 10 = 25$.

Als $T = 25$ dan is $p = 3,4 \cdot 25 + 932 = 1017$.

Bij $t = 10$ is de druk 1017 hPa.

Door de formule van temperatuur te substitueren in de formule voor de druk kun je de druk van het gas uitrekenen zonder eerst de temperatuur te berekenen.

- 18 a** Aflezen bij $t = 400$ in de linker grafiek geeft 2000 liter.
- b** Aflezen bij $V = 2000$ in de rechter grafiek geeft een waterhoogte van ongeveer 71 cm.
- c** Aflezen bij $h = 80$ in de rechter grafiek geeft een volume van ongeveer 2550 liter.
Aflezen in de linker grafiek bij $V = 2550$ geeft ongeveer 460 seconden.
- d** $V(200) = 0,01 \cdot 200^2 + 400 = 800$
 $h(800) = \sqrt{2,5 \cdot 800} \approx 45$
Op het tijdstip $t = 200$ is de waterhoogte ongeveer 45 cm.
- e** $60 = \sqrt{2,5 \cdot V}$
 $3600 = 2,5 \cdot V$
 $V = 1440$
Als het water 60 cm hoog staat, zit er 1440 liter water in het reservoir.
 $1440 = 0,01t^2 + 400$
 $0,01t^2 = 1040$
 $t^2 = 104000$
 $t \approx 322$ of $t \approx -322$
Na ongeveer 322 seconden staat het water 60 cm hoog.
- f** Als je de functie $V(t) = 0,01t^2 + 400$ substitueert in de functie $h(V) = \sqrt{2,5 \cdot V}$ krijg je $h(t) = \sqrt{2,5 \cdot (0,01t^2 + 400)}$.
- 19 a** Joost heeft $170 - 1,5 \times 72 = 62$ punten gehaald.
- b** Joost krijgt het cijfer $0,09(170 - 1,5 \times 72) + 1 \approx 6,6$.
- c** Achmed heeft $170 - 1,5 \times 56 = 86$ punten gehaald.
Hij krijgt het cijfer $0,09(170 - 1,5 \times 56) + 1 \approx 8,7$.
- d** De formule is $P = 170 - 1,5t$.
- e** De formule is $C = 0,09P + 1$.

20 a $y = \frac{1}{u}$ en $u = 0,5 + t$

$$y = \frac{1}{0,5 + t}$$

b $y = \sqrt{u}$ en $u = 0,5 + 2t$

$$g(t) = \sqrt{0,5 + 2t}$$

21 a $k(q) = \sqrt{2^q + 19}$
 $y = \sqrt{u}$ en $u = 2^q + 19$

b $w(x) = \frac{3}{2x-5}$
 $y = \frac{3}{u}$ en $u = 2x - 5$

c $s(t) = 0,7 \cdot (3t + 6)^2$
 $y = 0,7 \cdot u^2$ en $u = 3t + 6$

d $d(a) = \frac{-4}{(x+5)^2}$
 $y = \frac{-4}{u^2}$ en $u = x + 5$

22 a $f(t) = (3 + \sqrt{t})^{-1}$
 $y = u^{-1}$ en $u = 3 + \sqrt{t}$

b $g(t) = \sqrt{3 + t^{-1}}$
 $y = \sqrt{u}$ en $u = 3 + t^{-1}$

23 a $f(x) = (2x + 1)^{0,3}$
 $y = u^{0,3}$ en $u = 2x + 1$

b $g(x) = \frac{5}{2x^{0,3} + 1}$
 $y = \frac{5}{u}$ en $u = 2x^{0,3} + 1$

24 a $60 \text{ cm} = 6 \text{ dm}$
 De huidoppervlakte is $2 \cdot 6^2 = 72 \text{ dm}^2$.

b $V = 0,1 \cdot 6^3 = 21,6$
 $G = 0,2 \cdot 21,6 = 4,32$
 Het gewicht van dit jong is 4,32 kg.

c $G = 0,2 \cdot V$ en $V = 0,1 \cdot L^3$
 $G = 0,2 \cdot 0,1 \cdot L^3$
 $G = 0,02 \cdot L^3$

d $80 = 0,02 \cdot L^3$
 $L^3 = 4000$
 $L = 4000^{\frac{1}{3}} = 15,874\dots$
 De lengte van het mannetje is ongeveer 15,874 dm.
 Het huidoppervlakte O is $2 \cdot 15,874\dots^2 \approx 504 \text{ dm}^2$.

020 a Bij het substitueren moet zowel x^2 als 1 met 2 worden vermenigvuldigd.

b $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2 - 5}$
 $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3}$

c $y = u^4$ en $u = x^2 + 5$
 $y = (x^2 + 5)^4$

d $y = \frac{1}{u}$ en $u = 3x + 1$
 $y = \frac{1}{3x + 1}$

e $y = \sqrt{2 - 3u}$ en $u = x^3 + 2x$
 $y = \sqrt{2 - 3(x^3 + 2x)}$
 $y = \sqrt{2 - 3x^3 - 6x}$

021 a $f(1) = \frac{14}{2 \cdot 1^2 + 3}$

$f(1) = \frac{14}{5}$

$f(1) = 2,8$

b De schakels zijn $y = \frac{14}{u}$ en $u = 2x^2 + 3$.

16 Samengestelde functies

c $g(-1) = (2 \cdot -1 + 5)^4 = 3^4 = 81$

d De functie $g(x) = (2x + 5)^4$ is samengesteld uit de schakels $y = u^4$ en $u = 2x + 5$.

U3 a $f(x) = \sqrt{2(x^2 + x)^3 - 5}$

$y = \sqrt{u}$, $u = 2w^3 - 5$ en $w = x^2 + x$

b $y = \frac{3}{v}$, $v = \sqrt{4u}$ en $u = 3 - x^2$

$f(x) = \frac{3}{\sqrt{4u}}$ en $u = 3 - x^2$

$f(x) = \frac{3}{\sqrt{4(3 - x^2)}}$

$f(x) = \frac{3}{\sqrt{12 - 4x^2}}$

16.4 Kettingfuncties differentiëren

intro $P = 25,4347 \cdot (18 - T)^{1,81}$

$\frac{dP}{dT} = 25,4347 \cdot 1,81(18 - T)^{0,81}$

$\frac{dP}{dT} \approx 46,04(18 - T)^{0,81}$

Je krijgt meer punten als je sneller rent (of je krijgt minder punten als je langzamer rent).

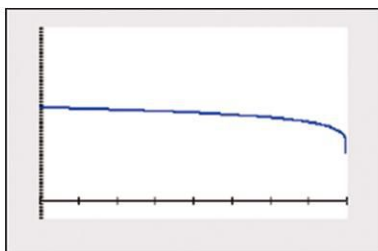
Dus als T toeneemt, dan moet P afnemen.

Als je naar de grafiek van deze afgeleide formule van P kijkt zal deze negatief moeten zijn.

Dat is echter niet zo, wat met een plot al snel zichtbaar is.

Invoer: $y_1 = 46,04(18 - x)^{0,81}$

Venster: $10 \leq x \leq 18$, $-10 \leq y \leq 100$



25 a $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(20) - V(10)}{20 - 10} = \frac{450 - 150}{10} = 30$ liter per seconde

b $\frac{\Delta h}{\Delta V} = \frac{h(450) - h(150)}{450 - 150} = \frac{42,426... - 24,494...}{300} = 0,06$ cm per liter

c $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ is dan $30 \cdot 0,06 = 1,8$ cm per seconde.

d $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\Delta h}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$, want $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ is de gemiddelde toename van het aantal liters per seconde en $\frac{\Delta h}{\Delta V}$ is de gemiddelde toename van de hoogte per liter.

De hoogte neemt dan gemiddeld $\frac{\Delta h}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$ cm per seconde toe.

$$\text{e } \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta h}{\Delta V} = \frac{V(10,001) - V(10)}{10,001 - 10} \cdot \frac{h(V(10,001)) - h(V(10))}{V(10,001) - V(10)} =$$

$$\frac{150,02 - 150}{0,001} \cdot \frac{24,49653 - 24,49490}{150,02 - 150} \approx 1,63 \text{ cm per seconde}$$

$$\text{f } V(t) = t^2 + 50$$

$$V'(t) = 2t$$

$$V'(10) = 2 \cdot 10 = 20$$

$$h(V) = 2 \cdot \sqrt{V}$$

$$h(V) = 2 \cdot V^{\frac{1}{2}}$$

$$h'(V) = 2 \cdot \frac{1}{2} V^{-\frac{1}{2}}$$

$$h'(V) = V^{-\frac{1}{2}}$$

Bij $t = 10$ geldt $V(10) = 10^2 + 50 = 150$ en $h'(150) = 150^{-\frac{1}{2}} \approx 0,081 \dots$

De stijgsnelheid van het water op $t = 10$ is dan $20 \cdot 0,081 \dots \approx 1,63$ cm per seconde.

$$\text{26 a } \frac{dy}{du} = 4u^3 \text{ en } \frac{du}{dx} = -3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot -3$$

$$\text{b } \frac{dy}{dx} = -12u^3$$

$$f'(x) = -12(2 - 3x)^3$$

$$\text{c } g(x) = (5x + 1)^3 \text{ bestaat uit de schakels } y = u^3 \text{ en } u = 5x + 1$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \text{ en } \frac{du}{dx} = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 15u^2$$

$$g'(x) = 15(5x + 1)^2$$

$$\text{27 a } w(x) = (1 - 3x)^4$$

$$y = u^4 \text{ en } u = 1 - 3x$$

$$\frac{dy}{du} = 4u^3 \text{ en } \frac{du}{dx} = -3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot -3$$

$$w'(x) = 4 \cdot (1 - 3x)^3 \cdot -3$$

$$w'(x) = -12(1 - 3x)^3$$

$$\text{b } h(x) = 2(3x^2 + 8)^{1,5}$$

$$y = 2u^{1,5} \text{ en } u = 3x^2 + 8$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^{0,5} \text{ en } \frac{du}{dx} = 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^{0,5} \cdot 6x$$

$$h'(x) = 3(3x^2 + 8)^{0,5} \cdot 6x$$

$$h'(x) = 18x\sqrt{3x^2 + 8}$$

$$\text{c } g(x) = (x^3 + 7x)^3$$

$$y = u^3 \text{ en } u = x^3 + 7x$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \text{ en } \frac{du}{dx} = 3x^2 + 7$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot (3x^2 + 7)$$

$$g'(x) = 3(x^3 + 7x)^2 \cdot (3x^2 + 7)$$

$$\text{d } p(x) = 4(2 - x)^{-5}$$

$$y = 4u^{-5} \text{ en } u = 2 - x$$

$$\frac{dy}{du} = -20u^{-6} \text{ en } \frac{du}{dx} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -20u^{-6} \cdot -1$$

$$p'(x) = -20(2 - x)^{-6} \cdot -1$$

$$p'(x) = 20(2 - x)^{-6}$$

16 Samengestelde functies

28 a $f(x) = (4x + 5)^2$

$$y = u^2 \text{ en } u = 4x + 5$$

$$\frac{dy}{du} = 2u \text{ en } \frac{du}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 4$$

$$f'(x) = 2(4x + 5) \cdot 4$$

$$f'(x) = 8(4x + 5)$$

$$f'(x) = 32x + 40$$

b $f(x) = (4x + 5)^2$

$$f(x) = (4x + 5)(4x + 5)$$

$$f(x) = 16x^2 + 20x + 20x + 25$$

$$f(x) = 16x^2 + 40x + 25$$

$$f'(x) = 32x + 40$$

c Bij beide opdrachten vind je dezelfde afgeleide.

d Bij de functie $g(x) = (2x + 5)^4$ is het handiger om de kettingregel te gebruiken, want de haakjes wegwerken is erg lastig, want

$$g(x) = (2x + 5)^4$$

$$g(x) = (2x + 5)(2x + 5)(2x + 5)(2x + 5)$$

e $y = u^4$ en $u = 2x + 5$

$$\frac{dy}{du} = 4u^3 \text{ en } \frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot 2$$

$$g'(x) = 4(2x + 5)^3 \cdot 2$$

$$g'(x) = 8(2x + 5)^3$$

29 a $A(x) = \sqrt{x^3 + 4x}$

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = x^3 + 4x$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 3x^2 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 + 4)$$

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^3 + 4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 + 4)$$

$$A'(x) = \frac{3x^2 + 4}{2\sqrt{x^3 + 4x}}$$

b $h(x) = \sqrt{10 - 10x^2}$

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = 10 - 10x^2$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = -20x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot -20x$$

$$h'(x) = \frac{1}{2} (10 - 10x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -20x$$

$$h'(x) = -10x \cdot \frac{1}{(10 - 10x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$h'(x) = \frac{-10x}{\sqrt{10 - 10x^2}}$$

30 a $f(x) = \sqrt{4x}$

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = 4x$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{(4x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

b $g(x) = \sqrt{2x+1}$

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = 2x+1$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$g'(x) = \frac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

c $h(x) = \sqrt{2x-x^2}$

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = 2x-x^2$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2-2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (2-2x)$$

$$h'(x) = \frac{1}{2} (2x-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2-2x)$$

$$h'(x) = (1-x) \cdot \frac{1}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$h'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

d $k(x) = (1+\sqrt{x})^2$

$$y = u^2 \text{ en } u = 1+\sqrt{x}$$

$$y = u^2 \text{ en } u = 1+x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{du} = 2u \text{ en } \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$k'(x) = 2(1+\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$k'(x) = (1+\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{(x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$k'(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$k'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$$

31 a $H = \sqrt{-2t^2 + 210t + 900}$

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = -2t^2 + 210t + 900$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dt} = -4t + 210$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4t + 210)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2} \cdot (-2t^2 + 210t + 900)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4t + 210)$$

$$\frac{dH}{dt} = (-2t + 105) \cdot \frac{1}{(-2t^2 + 210t + 900)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{-2t + 105}{\sqrt{-2t^2 + 210t + 900}}$$

De waterhoogte is maximaal als de afgeleide nul is, dus als $-2t + 105 = 0$ ofwel $2t = 105$ dus $t = 52,5$.

De waterhoogte is maximaal na 52,5 dagen.

De maximale waterhoogte is dan $\sqrt{-2 \cdot 52,5^2 + 210 \cdot 52,5 + 900} \approx 80,1$ cm.

16 Samengestelde functies

$$\text{b } t = 100 \text{ invullen in de afgeleide geeft } \frac{-2 \cdot 100 + 105}{\sqrt{-2 \cdot 100^2 + 210 \cdot 100 + 900}} \approx -2,18$$

De waterhoogte daalt bij $t = 100$ ongeveer 2,18 cm per dag.

$$\text{c } \sqrt{-2t^2 + 210t + 900} = 60$$

$$-2t^2 + 210t + 900 = 3600$$

$$t^2 - 105t - 1350 = 0$$

$$(t - 15)(t - 90) = 0$$

Bij $t = 15$ is de waterhoogte voor het eerst 60 cm hoog.

$$\frac{-2 \cdot 15 + 105}{\sqrt{-2 \cdot 15^2 + 210 \cdot 15 + 900}} = 1,25$$

De waterhoogte stijgt dan 1,25 cm per dag.

$$\text{027 a } \frac{dy}{du} = 4u^3 \text{ en } \frac{du}{dx} = 21x^2$$

b In stap 4 is $7x^3 - 9$ gesubstitueerd voor u .

In stap 5 is 4 vermenigvuldigt met $21x^2$.

$$\text{c } f(x) = (6x + 1)^3$$

$$y = u^3 \text{ en } u = 6x + 1$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \text{ en } \frac{du}{dx} = 6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot 6$$

$$f'(x) = 3(6x + 1)^2 \cdot 6$$

$$f'(x) = 18(6x + 1)^2$$

$$\text{d } g(x) = (12 - 5x^2)^4$$

$$y = u^4 \text{ en } u = 12 - 5x^2$$

$$\frac{dy}{du} = 4u^3 \text{ en } \frac{du}{dx} = -10x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot -10x$$

$$g'(x) = 4(12 - 5x^2)^3 \cdot -10x$$

$$g'(x) = -40x(12 - 5x^2)^3$$

$$\text{e } h(x) = (2x^{1,4} + 2,5)^6$$

$$y = u^6 \text{ en } u = 2x^{1,4} + 2,5$$

$$\frac{dy}{du} = 6u^5 \text{ en } \frac{du}{dx} = 2,8x^{0,4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 6u^5 \cdot 2,8x^{0,4}$$

$$h'(x) = 6(2x^{1,4} + 2,5)^5 \cdot 2,8x^{0,4}$$

$$h'(x) = 16,8x^{0,4}(2x^{1,4} + 2,5)^5$$

$$\text{f } k'(x) = (x^2 + 8x)^3$$

$$y = u^3 \text{ en } u = x^2 + 8x$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \text{ en } \frac{du}{dx} = 2x + 8$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot (2x + 8)$$

$$k'(x) = 3(x^2 + 8x)^2 \cdot (2x + 8)$$

$$k'(x) = (6x + 24)(x^2 + 8x)^2$$

$$\text{030 a } y = u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = 2x + 5$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2$$

$$\text{b } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x + 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$f'(x) = (2x + 5)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{c } g(x) = \sqrt{3x}$$

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = 3x$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot 3$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3$$

$$g'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(3x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

$$\text{e } k(x) = \sqrt{1 - 5x^2}$$

$$y = u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = 1 - 5x^2$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = -10x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot -10x$$

$$k'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - 5x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -10x$$

$$k'(x) = -5x \cdot \frac{1}{(1 - 5x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$k'(x) = \frac{-5x}{\sqrt{1 - 5x^2}}$$

d $h(x) = \sqrt{3 + 4x}$

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = 3 + 4x$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot 4$$

$$h'(x) = \frac{1}{2} (3 + 4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4$$

$$h'(x) = 2 \cdot \frac{1}{(3 + 4x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$h'(x) = \frac{2}{\sqrt{3 + 4x}}$$

f $l(x) = \sqrt{4x + x^2}$

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = 4x + x^2$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 4 + 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (4 + 2x)$$

$$l'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4x + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4 + 2x)$$

$$l'(x) = (2 + x) \cdot \frac{1}{(4x + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$l'(x) = \frac{2 + x}{\sqrt{4x + x^2}}$$

U4 a $f(x) = \sqrt{2(x^3 + x)^2 + 1}$

$$y = u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = 2w^2 + 1 \text{ en } w = x^3 + x$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dw} = 4w \text{ en } \frac{dw}{dx} = 3x^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot 4w \cdot (3x^2 + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = \frac{1}{2} (2w^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4w \cdot (3x^2 + 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (2(x^3 + x)^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4(x^3 + x) \cdot (3x^2 + 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4(x^3 + x) \cdot (3x^2 + 1) \cdot (2(x^3 + x)^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 2(x^3 + x)(3x^2 + 1) \cdot (2(x^3 + x)^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 2(x^3 + x)(3x^2 + 1) \cdot \frac{1}{(2(x^3 + x)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^3 + x)(3x^2 + 1)}{\sqrt{2(x^3 + x)^2 + 1}}$$

Bij een top geldt $f'(x) = 0$.

$$\frac{2(x^3 + x)(3x^2 + 1)}{\sqrt{2(x^3 + x)^2 + 1}} = 0$$

$$2(x^3 + x)(3x^2 + 1) = 0$$

$$x^3 + x = 0 \text{ of } 3x^2 + 1 = 0$$

$$x(x^2 + 1) = 0 \text{ of } 3x^2 = -1 \text{ (geen oplossing)}$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 + 1 = 0 \text{ (geen oplossing)}$$

$$x = 0$$

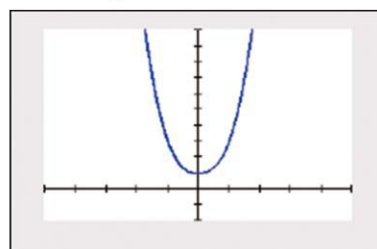
Met een plot van de grafiek van f controleren of de grafiek van f inderdaad bij $x = 0$ een top heeft.

$$\text{Invoer: } y_1 = \sqrt{2(x^3 + x)^2 + 1}$$

$$\text{Venster: } -5 \leq x \leq 5, -2 \leq y \leq 10$$

De grafiek van f heeft inderdaad een top bij $x = 0$.

De top is het punt $(0, 1)$.



16 Samengestelde functies

- b** Eerst een punt zoeken waar beide grafieken doorheen gaan.

$$\sqrt{2x^2 + 7} = 1,2x + 1,4$$

$$\text{Invoer: } y_1 = \sqrt{2x^2 + 7} \text{ en } y_2 = 1,2x + 1,4$$

$$\text{Venster: } 0 \leq x \leq 110, 0 \leq y \leq 90$$

Optie: snijpunt

De grafieken gaan beide door het punt (3, 5).

Als de grafieken elkaar raken in dat punt, dan moeten de grafieken daar dezelfde helling hebben.

$$g(x) = \sqrt{2x^2 + 7}$$

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = 2x^2 + 7$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (2x^2 + 7)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x$$

$$g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 7}}$$

$$g'(3) = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{2 \cdot 3^2 + 7}} = 1,2$$

De helling van de grafiek van $y = 1,2x + 1,4$ is overal 1,2.

De grafieken hebben in het punt (3, 5) dezelfde helling en dus raken de grafieken elkaar.

16.5 Gebroken functies differentiëren

intro Als H' voor alle waarden negatief is dan daalt de grafiek van H voor alle waarden van t . Dus als t toeneemt, moet H afnemen.

Als t toeneemt, wordt de noemer van de breuk steeds groter. Als je 180 door een steeds groter getal deelt, wordt de uitkomst van de deling steeds kleiner.

Dus als t toeneemt, neemt H af en is dus H' negatief.

- 32 a** Als de vloeroppervlakte 2000 m^2 is, dan is $A = 2$.

$$P = 13,4 + \frac{12,2}{2} = 19,5$$

De kosten per jaar per m^2 zijn € 19,50.

De kosten voor de hele vloer zijn dan $2000 \times € 19,50 = € 39.000,-$.

- b** Als de vloeroppervlakte steeds groter wordt, neemt A toe.

De uitkomst van $\frac{12,2}{A}$ wordt daardoor steeds kleiner en zelfs bijna 0.

De uitkomst van de formule, de prijs per m^2 , wordt daardoor nooit lager dan € 13,40.

- c** De uitkomst van de deling $\frac{12,2}{A}$ wordt groot als A een klein getal is.

Daardoor zal P , de kosten per m^2 , stijgen.

$$\text{d } P = 13,4 + \frac{12,2}{A}$$

$$P = 13,4 + 12,2 \cdot A^{-1}$$

$$\frac{dP}{dA} = 12,2 \cdot -1 \cdot A^{-2}$$

$$\frac{dP}{dA} = -12,2 \cdot \frac{1}{A^2}$$

$$\frac{dP}{dA} = \frac{-12,2}{A^2}$$

$$\text{Bij } A = 100 \text{ is } \frac{dP}{dA} = \frac{-12,2}{100^2} = -0,00122.$$

- e De grafiek van P bij $A = 100$ daalt met een snelheid van 0,00122 euro per duizend m^2 ofwel de kosten per m^2 nemen bij een vloeroppervlakte van 100 000 m^2 af met 0,00122 euro per duizend m^2 .

33 a Omdat f een samengestelde functie is.

b $y = u^{-3}$ en $u = 4x^2 - 5$

$$\frac{dy}{du} = -3u^{-4} \text{ en } \frac{du}{dx} = 8x$$

c $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -3u^{-4} \cdot 8x$

$$f'(x) = -3 \cdot (4x^2 - 5)^{-4} \cdot 8x$$

$$f'(x) = -24x \cdot \frac{1}{(4x^2 - 5)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-24x}{(4x^2 - 5)^4}$$

34 a $f(x) = \frac{14}{2x + 7}$

$$y = 14u^{-1} \text{ en } u = 2x + 7$$

$$\frac{dy}{du} = -14u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -14u^{-2} \cdot 2$$

$$f'(x) = -28 \cdot (2x + 7)^{-2}$$

$$f'(x) = \frac{-28}{(2x + 7)^2}$$

b $g(x) = -\frac{3}{9 - 2x}$

$$y = -3u^{-1} \text{ en } u = 9 - 2x$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dx} = -2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^{-2} \cdot -2$$

$$g'(x) = 3 \cdot (9 - 2x)^{-2} \cdot -2$$

$$g'(x) = \frac{-6}{(9 - 2x)^2}$$

c $h(x) = \frac{1}{(2x + 3)^4}$

$$y = u^{-4} \text{ en } u = 2x + 3$$

$$\frac{dy}{du} = -4u^{-5} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -4u^{-5} \cdot 2$$

$$h'(x) = -4 \cdot (2x + 3)^{-5} \cdot 2$$

$$h'(x) = \frac{-8}{(2x + 3)^5}$$

d $j(x) = \frac{-2}{\left(4 - \frac{1}{2}x\right)^2}$

$$y = -2u^{-2} \text{ en } u = 4 - \frac{1}{2}x$$

$$\frac{dy}{du} = 4u^{-3} \text{ en } \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^{-3} \cdot -\frac{1}{2}$$

$$j'(x) = 4 \cdot \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^{-3} \cdot -\frac{1}{2}$$

$$j'(x) = \frac{-2}{\left(4 - \frac{1}{2}x\right)^3}$$

16 Samengestelde functies

$$\begin{aligned}
 35 \text{ a } g(x) &= \frac{5}{(2x^3 + 4)^3} \\
 y &= \frac{5}{u^3} = 5u^{-3} \text{ en } u = 2x^3 + 4 \\
 \frac{dy}{du} &= -15u^{-4} \text{ en } \frac{du}{dx} = 6x^2 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -15u^{-4} \cdot 6x^2 \\
 g'(x) &= -15 \cdot (2x^3 + 4)^{-4} \cdot 6x^2 \\
 g'(x) &= -\frac{90x^2}{(2x^3 + 4)^4}
 \end{aligned}$$

$$b \quad h(x) = 6x^2 - 5$$

$$h'(x) = 12x$$

$$c \quad f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

$$f'(x) = -\frac{90x^2}{(2x^3 + 4)^4} + 12x$$

$$\begin{aligned}
 36 \text{ a } f(x) &= \frac{3}{2x + 8} \\
 y &= 3u^{-1} \text{ en } u = 2x + 8 \\
 \frac{dy}{du} &= -3u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -3u^{-2} \cdot 2 \\
 f'(x) &= -3(2x + 8)^{-2} \cdot 2 \\
 f'(x) &= \frac{-6}{(2x + 8)^2} \\
 g(x) &= 5x \text{ dus } g'(x) = 5 \\
 h'(x) &= \frac{-6}{(2x + 8)^2} + 5
 \end{aligned}$$

$$b \quad f(x) = 4x^2 \text{ dus } f'(x) = 8x$$

$$g(x) = (8x - 5)^{-3}$$

$$y = u^{-3} \text{ en } u = 8x - 5$$

$$\frac{dy}{du} = -3u^{-4} \text{ en } \frac{du}{dx} = 8$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -3u^{-4} \cdot 8$$

$$g'(x) = -3 \cdot (8x - 5)^{-4} \cdot 8$$

$$g'(x) = \frac{-24}{(8x - 5)^4}$$

$$f'(x) = 8x - \frac{24}{(8x - 5)^4}$$

$$c \quad f(x) = 6 \text{ dus } f'(x) = 0$$

$$g(x) = -\frac{3}{(2x - 2)^4}$$

$$y = -3u^{-4} \text{ en } u = 2x - 2$$

$$\frac{dy}{du} = 12u^{-5} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 12u^{-5} \cdot 2$$

$$g'(x) = 12 \cdot (2x - 2)^{-5} \cdot 2$$

$$g'(x) = \frac{24}{(2x - 2)^5}$$

$$k'(x) = \frac{24}{(2x - 2)^5}$$

$$d \quad f(x) = (3x^2 + 4)^{-2}$$

$$y = u^{-2} \text{ en } u = 3x^2 + 4$$

$$\frac{dy}{du} = -2u^{-3} \text{ en } \frac{du}{dx} = 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -2u^{-3} \cdot 6x$$

$$f'(x) = -2 \cdot (3x^2 + 4)^{-3} \cdot 6x$$

$$f'(x) = \frac{-12x}{(3x^2 + 4)^3}$$

$$g(x) = 2x \text{ dus } g'(x) = 2$$

$$m'(x) = \frac{-12x}{(3x^2 + 4)^3} + 2$$

$$37 \text{ a } \text{Bij de start van het experiment hoort } t = 0.$$

$$N(0) = 1500 - \frac{600}{2 + 3 \cdot 0} = 1200$$

De onderzoekers hebben 1200 muggen in de ruimte gebracht.

- b Als t toeneemt, dan neemt de noemer van de breuk toe. Als je 600 door een steeds groter wordend getal deelt, wordt de uitkomst van de deling steeds kleiner. Daardoor wordt er steeds minder van de 1500 afgetrokken. Het aantal muggen zal dus steeds toenemen.

$$\text{c } 1500 - \frac{600}{2+3t} = 1490$$

$$\frac{600}{2+3t} = 10$$

$$2+3t = 60$$

$$3t = 58$$

$$t = 19\frac{1}{3}$$

Na 20 dagen is het aantal muggen meer dan 1490.

$$\text{d } f(t) = 1500 \text{ dus } f'(t) = 0$$

$$g(t) = -\frac{600}{(2+3t)}$$

$$y = -\frac{600}{u} = -600u^{-1} \text{ en } u = 2+3t$$

$$\frac{dy}{du} = 600u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dt} = 3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 600u^{-2} \cdot 3$$

$$g'(t) = 600 \cdot (2+3t)^{-2} \cdot 3$$

$$g'(t) = \frac{1800}{(2+3t)^2}$$

$$N'(t) = \frac{1800}{(2+3t)^2}$$

$$\text{e } N'(5) = \frac{1800}{(2+3 \cdot 5)^2} = 6,228\dots$$

Na vijf dagen neemt het aantal muggen met ongeveer 6 muggen per dag toe.

38 a Hoe lager de stip, hoe korter de verdubbelingsnelheid en dus hoe sterker de groei. Dus de groei bij 42 °C is juist minder sterk dan de groei bij 40 °C.

$$\text{b } V = \frac{16,9}{-T^2 + 75T - 1350}$$

$$y = 16,9u^{-1} \text{ en } u = -T^2 + 75T - 1350$$

$$\frac{dy}{du} = -16,9u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dT} = -2T + 75$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -16,9u^{-2} \cdot (-2T + 75)$$

$$\frac{dV}{dT} = -16,9 \cdot (-T^2 + 75T - 1350)^{-2} \cdot (-2T + 75)$$

$$\frac{dV}{dT} = \frac{33,8T - 1267,5}{(-T^2 + 75T - 1350)^2}$$

De sterkste groei heb je bij de top van de grafiek, dus als $\frac{dV}{dT} = 0$.

$$\frac{33,8T - 1267,5}{(-T^2 + 75T - 1350)^2} = 0 \text{ als } 33,8T - 1267,5 = 0$$

$$33,8T = 1267,5$$

$$T = 37,5$$

Bij een temperatuur van 37,5 °C is de groei het sterkst.

034 a In stap 1 is de functie in schakels gegeven.

$$\text{b } y = 6u^{-2} \text{ en } u = 5x - 4$$

$$\frac{dy}{du} = -12u^{-3} \text{ en } \frac{du}{dx} = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -12u^{-3} \cdot 5$$

16 Samengestelde functies

c $f'(x) = -12 \cdot (5x - 4)^{-4} \cdot 5$

$$f'(x) = \frac{-60}{(5x - 4)^4}$$

d $A(x) = \frac{1}{(2x - 6)^2}$

$$y = u^{-2} \text{ en } u = 2x - 6$$

$$\frac{dy}{du} = -2u^{-3} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -2u^{-3} \cdot 2$$

$$A'(x) = -2 \cdot (2x - 6)^{-3} \cdot 2$$

$$A'(x) = \frac{-4}{(2x - 6)^3}$$

e $T(x) = \frac{2}{(4x^3 + 1)^4}$

$$y = 2u^{-4} \text{ en } u = 4x^3 + 1$$

$$\frac{dy}{du} = -8u^{-5} \text{ en } \frac{du}{dx} = 12x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -8u^{-5} \cdot 12x^2$$

$$T'(x) = -8 \cdot (4x^3 + 1)^{-5} \cdot 12x^2$$

$$T'(x) = \frac{-96x^2}{(4x^3 + 1)^5}$$

f $k(x) = \frac{-5}{(x^4 + 1)^2}$

$$y = -5u^{-2} \text{ en } u = x^4 + 1$$

$$\frac{dy}{du} = 10u^{-3} \text{ en } \frac{du}{dx} = 4x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 10u^{-3} \cdot 4x^3$$

$$k'(x) = 10 \cdot (x^4 + 1)^{-3} \cdot 4x^3$$

$$k'(x) = \frac{40x^3}{(x^4 + 1)^3}$$

g $q(x) = -\frac{3}{(4x - 2)^3}$

$$y = -3u^{-3} \text{ en } u = 4x - 2$$

$$\frac{dy}{du} = 9u^{-4} \text{ en } \frac{du}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 9u^{-4} \cdot 4$$

$$q'(x) = 9 \cdot (4x - 2)^{-4} \cdot 4$$

$$q'(x) = \frac{36}{(4x - 2)^4}$$

U5 a Op $t = 0$ is het zuurstofniveau normaal.

$$\text{Dat is } Z = 200 - \frac{2000}{3 \cdot 0 + 10} + \frac{20000}{(3 \cdot 0 + 10)^2} = 200 \text{ cm}^3 \text{ per liter.}$$

Als t een heel groot getal is, dan worden van beide breuken de noemers heel groot en de uitkomsten van beide delingen bijna 0.

Op den duur wordt het zuurstof gehalte dan weer bijna

$$200 - 0 + 0 = 200 \text{ cm}^3 \text{ per liter.}$$

b $f(t) = 200$ dus $f'(t) = 0$

$$g(t) = -\frac{2000}{3t + 10}$$

$$g(t) = -2000 \cdot (3t + 10)^{-1}$$

$$y = -2000u^{-1} \text{ en } u = 3t + 10$$

$$\frac{dy}{du} = 2000u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dt} = 3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 2000u^{-2} \cdot 3$$

$$g'(t) = 2000 \cdot 3 \cdot (3t + 10)^{-2}$$

$$g'(t) = \frac{6000}{(3t + 10)^2}$$

$$\frac{dZ}{dt} = 0 + \frac{6000}{(3t + 10)^2} - \frac{120000}{(3t + 10)^3}$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{6000(3t + 10)}{(3t + 10)^3} - \frac{120000}{(3t + 10)^3}$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{6000(3t + 10) - 120000}{(3t + 10)^3}$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{18000t - 60000}{(3t + 10)^3}$$

$$h(t) = \frac{20000}{(3t + 10)^2}$$

$$h(t) = 20000(3t + 10)^{-2}$$

$$y = 20000u^{-2} \text{ en } u = 3t + 10$$

$$\frac{dy}{du} = -40000u^{-3} \text{ en } \frac{du}{dt} = 3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -40000u^{-3} \cdot 3$$

$$h'(t) = -40000 \cdot 3 \cdot (3t + 10)^{-3}$$

$$h'(t) = \frac{-120000}{(3t + 10)^3}$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{6000(3t - 10)}{(3t + 10)^3}$$

$$\frac{dZ}{dt} = 6000 \cdot \frac{3t - 10}{(3t + 10)^3}$$

$$\text{Voor } t = 0 \text{ geldt } \frac{dZ}{dt} = 6000 \cdot \frac{3 \cdot 0 - 10}{(3 \cdot 0 + 10)^3} = -60.$$

Dat wil zeggen dat bij $t = 0$ het zuurstofniveau daalt.

c Het zuurstofniveau is minimaal als $\frac{dZ}{dt} = 0$ ofwel $6000 \cdot \frac{3t - 10}{(3t + 10)^3} = 0$

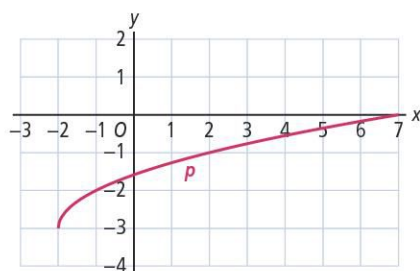
$$\frac{3t - 10}{(3t + 10)^3} = 0 \text{ geeft } 3t - 10 = 0 \text{ dus } t = 3\frac{1}{3}$$

Na $3\frac{1}{3}$ minuut is het zuurstofniveau minimaal en dat is om 13.03.20 uur.

16.6 Redeneren met de afgeleide

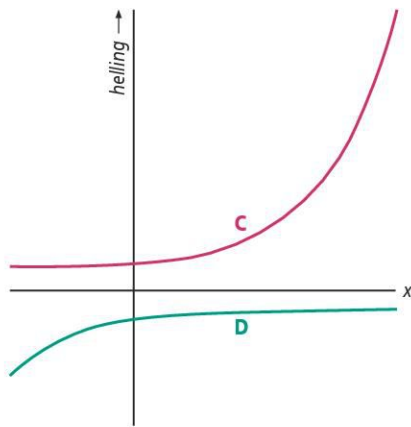
intro Tussen 0 en 10 minuten neemt de temperatuur constant toe met $0,3^\circ\text{C}$ per minuut. Daarna slaat de verwarming af tussen 10 en 30 minuten en daalt de temperatuur. De daling van de temperatuur in deze periode is afnemend. Na 30 minuten herhaalt zich dit proces.

- 39**
- a De grafiek stijgt op dit deel, dus $K'(q) > 0$.
 - b Op het deel vanaf punt A is de grafiek toenemend stijgend.
 - c Op het deel tot punt A is de grafiek afnemend stijgend.
- 40**
- a De grafiek van functie n is afnemend dalend.
 - b De grafiek van functie m is constant stijgend.
 - c De grafiek van functie k is toenemend stijgend en de grafiek van functie l is toenemend dalend.
 - d Er zijn meerdere mogelijkheden, hieronder staat er één.

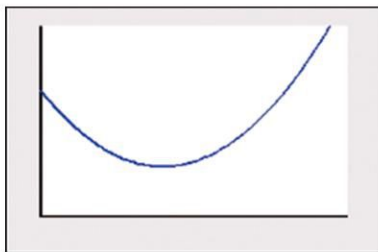


- e Bij grafiek A hoort functie m , want die heeft een constante helling.
Bij grafiek B hoort functie l , want de helling is negatief en wordt steeds meer negatief en dat is een toenemende daling.
- f Er zijn meerdere mogelijkheden.
Grafiek C (zie volgende bladzijde) zou de grafiek van de afgeleide functie van k kunnen zijn, want de helling is positief en wordt steeds groter.
Grafiek D (zie volgende bladzijde) zou de grafiek van de afgeleide functie van n kunnen zijn, want de helling is negatief en wordt steeds minder negatief.

16 Samengestelde functies



- 41 a** $K(q) = 0,01q^3 - 6q^2 + 2000q + 10\,000$
 $K'(q) = 0,01 \cdot 3q^2 - 6 \cdot 2q + 2000$
 $K'(q) = 0,03q^2 - 12q + 2000$
 Invoer: $y_1 = 0,03x^2 - 12x + 2000$
 Venster: $0 \leq x \leq 500, 0 \leq y \leq 3000$



- b** De grafiek van de afgeleide ligt altijd boven de q -as. De helling van de grafiek van K is dus altijd positief, de grafiek van K stijgt voor $q > 0$.
- c** Optie: minimum
 De top van de grafiek ligt bij $q = 200$.
 Bij $q = 200$ is de stijging van de grafiek van K het kleinst.
- d** $K'(200) = 0,03 \cdot 200^2 - 12 \cdot 200 + 2000 = 800$
 Dus bij $q = 200$ is de stijging van de kosten 800 euro per eenheid product.
- e** De grafiek van K is toenemend stijgend als $q > 200$.

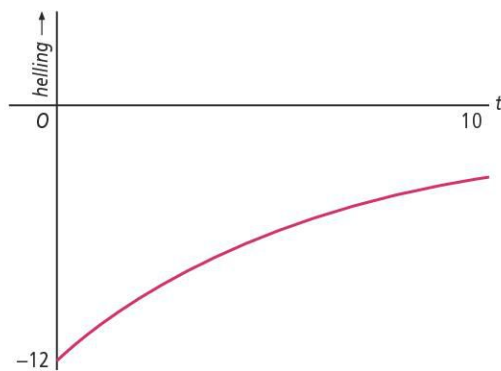
- 42 a** De formule bestaat uit de schakels $y = \frac{120}{u^2}$ en $u = 0,05t + 1$.

- b** Als je voor t steeds grotere waarden invult, wordt u steeds groter en dan wordt de noemer van de breuk steeds groter. Daarmee wordt de uitkomst van de deling steeds kleiner. De inhoud neemt dan af.

$$\begin{aligned} \text{c } I &= \frac{120}{(0,05t + 1)^2} \\ y &= 120u^{-2} \text{ en } u = 0,05t + 1 \\ \frac{dy}{du} &= -240u^{-3} \text{ en } \frac{du}{dt} = 0,05 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -240u^{-3} \cdot 0,05 \\ \frac{dI}{dt} &= -240 \cdot (0,05t + 1)^{-3} \cdot 0,05 \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{-12}{(0,05t + 1)^3} \end{aligned}$$

$$\text{Invoer: } y_1 = \frac{-12}{(0,05x + 1)^3}$$

$$\text{Venster: } 0 \leq x \leq 10, -15 \leq y \leq 0$$



- d Als t groter wordt, dan is wordt de helling steeds minder negatief, maar de helling blijft wel negatief. De waarden van $\frac{dI}{dt}$ zijn negatief maar komen steeds dichterbij 0, dus neemt de inhoud van het reservoir steeds langzamer af.

43 $r = 4\sqrt{t-1} = 4(t-1)^{\frac{1}{2}}$

$$y = 4u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = t - 1$$

$$\frac{dy}{du} = 2u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 2u^{-\frac{1}{2}} \cdot 1$$

$$\frac{dr}{dt} = 2 \cdot (t-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2}{(t-1)^{\frac{1}{2}}}$$

Als je voor t steeds grotere waarden invult, dan wordt de noemer van de breuk steeds groter. De uitkomst van de deling wordt daardoor steeds kleiner, maar blijft positief doordat je een positief getal deelt door een positief getal.

Dus als t toeneemt, neemt r toe, dus een langere tijd levert een hogere opbrengst op.

Dus als t toeneemt, wordt $\frac{dr}{dt} = \frac{2}{(t-1)^{\frac{1}{2}}}$ steeds kleiner, maar blijft positief.

Als t groter wordt, wordt de toename van de opbrengst steeds geringer.

- 041 a** Als de grafiek van f daalt, is de helling negatief en dus f'' negatief.
b Tot $x = 5$ daalt de grafiek van f , want dan is de helling negatief.
c Bij $x = 3$ heeft de grafiek van f' een top. Dat wil zeggen dat de helling bij $x = 3$ het meest negatief is. De grafiek zal bij $x = 3$ het snelst dalen.
d Bij $x = 5$ zal de grafiek van f over gaan van dalen in stijgen.
e De grafiek van f heeft bij $x = 5$ een top, want de grafiek van f gaat daar over van dalen in stijgen. De functie f heeft dan bij $x = 5$ een minimum.

U6 a $K = \frac{1}{6}q^3 - 2q^2 + 10q$

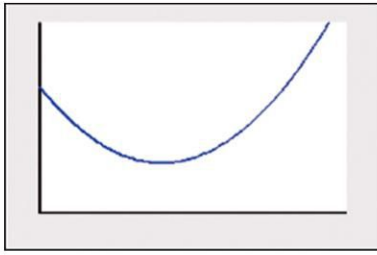
$$\frac{dK}{dq} = \frac{1}{2}q^2 - 4q + 10$$

Invoer: $y_1 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 10$

Venster: $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 50$

Optie: minimum

16 Samengestelde functies



De top van de grafiek van de afgeleide ligt bij $q = 4$.

De grafiek van de afgeleide daalt links van de top.

Als $0 < q < 4$, stijgt de grafiek van K steeds minder snel en is dus afnemend stijgend.

- b** q is in duizendtallen, dus de opbrengst kun je berekenen met de formule $O = 6500 \cdot q$.

De winst kun je berekenen met de formule $W = O - K$.

$$W = 6500q - \left(\frac{1}{6}q^3 - 2q^2 + 10q\right)$$

$$W = 6490q - \frac{1}{6}q^3 + 2q^2$$

$$\frac{dW}{dq} = 6490 - \frac{1}{2}q^2 + 4q$$

Voor een maximale winst geldt $\frac{dW}{dq} = 0$.

Los dit op met de rekenmachine.

$$\text{Invoer: } y_1 = 6490 - \frac{1}{2}x^2 + 4x$$

$$\text{Venster: } 100 \leq x \leq 150, -500 \leq y \leq 500$$

Optie: snijpunt

Dit geeft $x = 118$, dus de winst is maximaal bij 118000 stuks.

De maximale winst is $W = 6500 \cdot 118 - \left(\frac{1}{6} \cdot 118^3 + 2 \cdot 118^2 + 10 \times 118\right)$ ofwel 519829,33 euro.

16.7 Gemengde opdrachten

44 a $f(t) = t \cdot \sqrt{4t} \cdot t^{1,5}$
 $f(t) = t \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{t} \cdot t^{1,5}$
 $f(t) = 2 \cdot t \cdot t^{0,5} \cdot t^{1,5}$
 $f(t) = 2 \cdot t^3$
 $f'(t) = 6t^2$

b $A(p) = \frac{2p^{2,3} + 10p^2 - p^{1,4}}{5p}$
 $A(p) = \frac{2p^{2,3}}{5p} + \frac{10p^2}{5p} - \frac{p^{1,4}}{5p}$
 $A(p) = \frac{2}{5}p^{1,3} + 2p - \frac{1}{5}p^{0,4}$
 $A'(p) = 0,52p^{0,3} + 2 - 0,08p^{-0,6}$
 $A'(p) = 0,52p^{0,3} + 2 - \frac{0,08}{p^{0,6}}$

c $Z(a) = (2a + 7)^2$
 $y = u^2$ en $u = 2a + 7$
 $\frac{dy}{du} = 2u$ en $\frac{du}{da} = 2$
 $\frac{dy}{da} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{da} = 2u \cdot 2$
 $Z'(a) = 2 \cdot (2a + 7) \cdot 2$
 $Z'(a) = 4(2a + 7)$
 $Z'(a) = 8a + 28$

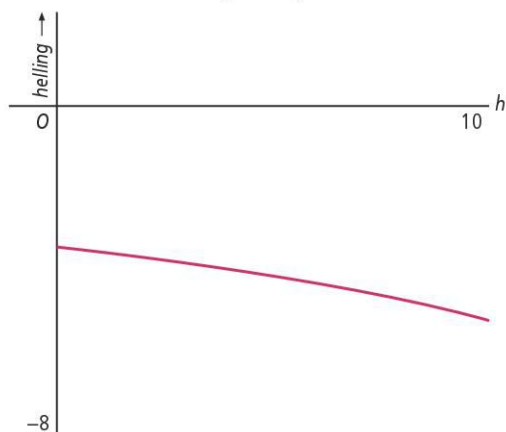
d $f(q) = 7q^2$ dus $f'(q) = 14q$
 $g(q) = \frac{1}{2q^2 + 3}$
 $y = u^{-1}$ en $u = 2q^2 + 3$
 $\frac{dy}{du} = -u^{-2}$ en $\frac{du}{dq} = 4q$
 $\frac{dy}{dq} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dq} = -u^{-2} \cdot 4q$
 $g'(q) = -(2q^2 + 3)^{-2} \cdot 4q$
 $g'(q) = \frac{-4q}{(2q^2 + 3)^2}$
 $K'(q) = 14q - \frac{4q}{(2q^2 + 3)^2}$

$$\begin{aligned}
 \text{45 a } V &= 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{15 - 6,5h}{273}} \\
 V &= 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{15}{273} - \frac{6,5h}{273}} \\
 V &= 331 \cdot \sqrt{1 + 0,05494... - 0,02380... \cdot h} \\
 V &\approx 331 \cdot \sqrt{1,0549 - 0,0238 \cdot h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } 320 &= 331 \cdot \sqrt{1,0549 - 0,0238 \cdot h} \\
 0,96... &= \sqrt{1,0549 - 0,0238 \cdot h} \\
 \sqrt{1,0549 - 0,0238 \cdot h} &= 0,96... \\
 1,0549 - 0,0238 \cdot h &= 0,93... \\
 -0,0238 \cdot h &= -0,12... \\
 h = -0,12... : -0,0238 &\approx 5,053 \\
 \text{Op ongeveer 5,053 km hoogte ofwel 5053 meter is de geluidssnelheid 320} \\
 &\text{meter per seconde.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } V &= 331 \cdot \sqrt{1,0549 - 0,0238 \cdot h} \\
 y &= 331u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = 1,0549 - 0,0238 \cdot h \\
 \frac{dy}{du} &= 165,5 \cdot u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dh} = -0,0238 \\
 \frac{dy}{dh} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dh} = 165,5u^{-\frac{1}{2}} \cdot -0,0238 \\
 \frac{dV}{dh} &= 165,5 \cdot (1,0549 - 0,0238 \cdot h)^{-\frac{1}{2}} \cdot -0,0238 \\
 \frac{dV}{dh} &= \frac{-3,9389}{(1,0549 - 0,0238 \cdot h)^{\frac{1}{2}}} \\
 \text{Invoer: } y_1 &= \frac{-3,9389}{(1,0549 - 0,0238 \cdot x)^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

Venster: $0 \leq x \leq 10$, $-8 \leq y \leq 0$



- d De grafiek van de afgeleide ligt onder de horizontale as en neemt af. Dat wil zeggen dat de grafiek van V daalt en steeds sneller daalt. De geluidssnelheid neemt dus steeds sneller af als h toeneemt.

16 Samengestelde functies

46 a $M = 2,94 \cdot g^{0,67} - g$

$$\frac{dM}{dg} = 2,94 \cdot 0,67 \cdot g^{0,67-1} - 1$$

$$\frac{dM}{dg} = 1,9698 \cdot g^{-0,33} - 1$$

$$\frac{dM}{dg} = \frac{1,9698}{g^{0,33}} - 1$$

b De opbrengst is maximaal als $\frac{dM}{dg} = 0$.

$$\frac{1,9698}{g^{0,33}} - 1 = 0$$

$$\frac{1,9698}{g^{0,33}} = 1$$

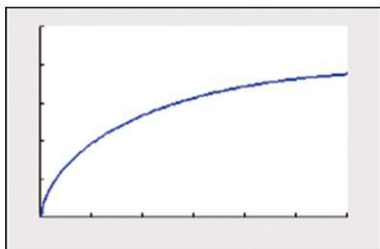
$$g^{0,33} = 1,9698$$

$$g = 1,9698^{\frac{1}{0,33}} = 7,801\dots$$

7,8 gram preparaat levert de grootst mogelijke opbrengst op.

c Invoer: $y_1 = 2,94 \cdot x^{0,67} - x$

Venster: $0 \leq x \leq 6$, $0 \leq y \leq 5$



De extra productie neemt op het interval $[0, 6]$ toe en is maximaal als $g = 6$.

Bij 6 gram preparaat is de extra productie $2,94 \cdot 6^{0,67} - 6 = 3,765\dots$ liter.

De maximale extra productie is $2,94 \cdot 7,8^{0,67} - 7,8 = 3,842\dots$ liter.

Het verlies aan extra productie is $3,842\dots - 3,765\dots \approx 0,08$ liter per keer.

Onderzoekopdrachten

- 47 a** Normaal werken er 1200 mensen. In grafiek 2 kun je aflezen dat de productie dan ongeveer 5200 per dag is. Als de productie 1000 minder is dan normaal, dan is de productie $5200 - 1000 = 4200$ per dag. In grafiek 2 kun je aflezen dat bij een productie van 4200 of minder er ongeveer 650 of minder werknemers aanwezig zijn.

In grafiek 1 kun je aflezen dat het tussen ongeveer 5 februari en 12 februari is.

- b** In grafiek 1 lees je af dat op 6 februari er ongeveer 550 werknemers zijn.

In grafiek 2 lees je af dat bij 550 werknemers de productie ongeveer 3600 is.

De productie was dan $5200 - 3600 = 1600$ minder dan normaal.

48 a $P = 0,188807 \cdot (a - 210)^{1,41}$

$$y = 0,188807u^{1,41} \text{ en } u = a - 210$$

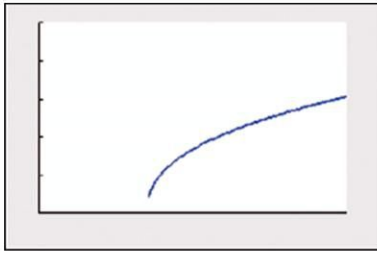
$$\frac{dy}{du} = 0,26621787u^{0,41} \text{ en } \frac{du}{da} = 1$$

$$\frac{dy}{da} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{da} = 0,26621787u^{0,41} \cdot 1$$

$$\frac{dP}{da} = 0,26621787 \cdot (a - 210)^{0,41}$$

Invoer: $y_1 = 0,26621787 \cdot (x - 210)^{0,41}$

Venster: $0 \leq x \leq 600, 0 \leq y \leq 5$



De grafiek van de afgeleide ligt boven de horizontale as en stijgt.

Dat wil zeggen dat als de atlete steeds verder springt het aantal punten steeds sneller toeneemt.

- b** In de praktijk betekent dat als de atlete steeds verder springt, ze voor elke centimeter verder ze meer punten erbij zal krijgen.

Samenvatting

S1 a $f(x) = x^3 \cdot x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{-1\frac{1}{5}}$
 $f(x) = 1 \cdot x^{2\frac{1}{5}} (= x^{2\frac{1}{5}})$

b $f(x) = 9 \cdot (x^4)^{\frac{1}{2}}$
 $f(x) = 9 \cdot x^2$

S2 a $f(x) = 8x \cdot \sqrt{x}$
 $f(x) = 8x \cdot x^{\frac{1}{2}}$
 $f(x) = 8x^{1\frac{1}{2}}$
 $f'(x) = 12x^{\frac{1}{2}}$
 $f'(x) = 12\sqrt{x}$

b $g(x) = \frac{5}{2x^7}$
 $g(x) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x^7}$
 $g(x) = \frac{5}{2} \cdot x^{-7}$
 $g'(x) = \frac{5}{2} \cdot -7x^{-8}$
 $g'(x) = \frac{-35}{2} \cdot \frac{1}{x^8}$
 $g'(x) = \frac{-35}{2x^8}$

c $f(x) = 4x^2 \cdot \frac{2,5}{\sqrt[3]{x}}$
 $f(x) = \frac{10x^2}{x^{\frac{1}{3}}}$
 $f(x) = 10 \cdot x^{1\frac{2}{3}}$
d $f(x) = \frac{x^{2,7} \cdot x^{4,3}}{6x^7}$
 $f(x) = \frac{x^7}{6x^7}$
 $f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^0 (= \frac{1}{6})$

c $h(x) = 6x^{1,4} \cdot x^{-3}$
 $h(x) = 6x^{-1,6}$
 $h'(x) = -9,6 \cdot x^{-2,6}$
 $h'(x) = -9,6 \cdot \frac{1}{x^{2,6}}$
 $h'(x) = \frac{-9,6}{x^{2,6}}$

d $i(x) = \frac{3x^5 + 5x - 1}{x^2}$
 $i(x) = \frac{3x^5}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{1}{x^2}$
 $i(x) = 3x^3 + 5x^{-1} - x^{-2}$
 $i'(x) = 9x^2 - 5x^{-2} + 2x^{-3}$
 $i'(x) = 9x^2 - 5 \cdot \frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x^3}$
 $i'(x) = 9x^2 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

16 Samengestelde functies

S3 a $y = \frac{1}{u}$ en $u = t^2 - 3t$
 $f(t) = \frac{1}{t^2 - 3t}$

b $y = 2\sqrt{u}$ en $u = 3,5 + 2t$
 $g(t) = 2\sqrt{3,5 + 2t}$

S4 a $k(x) = (x^2 - 7)^5$
 $y = u^5$ en $u = x^2 - 7$

b $l(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(2x - 5)}$
 $y = \frac{1}{2}\sqrt{u}$ en $u = 2x - 5$

S5 a $f(x) = 5(x^4 + 6x)^3$
 $y = 5u^3$ en $u = x^4 + 6x$
 $\frac{dy}{du} = 15u^2$ en $\frac{du}{dx} = 4x^3 + 6$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 15u^2 \cdot (4x^3 + 6)$
 $f'(x) = 15 \cdot (x^4 + 6x)^2 \cdot (4x^3 + 6)$
 $f''(x) = (60x^3 + 90)(x^4 + 6x)^2$

b $g(x) = \sqrt{4x^3 + 5x}$
 $y = \sqrt{u} = u^{0,5}$ en $u = 4x^3 + 5x$
 $\frac{dy}{du} = 0,5u^{-0,5}$ en $\frac{du}{dx} = 12x^2 + 5$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 0,5u^{-0,5} \cdot (12x^2 + 5)$
 $g'(x) = 0,5(4x^3 + 5x)^{-0,5} \cdot (12x^2 + 5)$
 $g'(x) = \frac{6x^2 + 2,5}{\sqrt{4x^3 + 5x}}$
 $g'(x) = \frac{12x^2 + 5}{2\sqrt{4x^3 + 5x}}$

S6 a $A(q) = \frac{-2}{3q - 5}$
 $y = -2u^{-1}$ en $u = 3q - 5$
 $\frac{dy}{du} = 2u^{-2}$ en $\frac{du}{dq} = 3$
 $\frac{dy}{dq} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dq} = 2u^{-2} \cdot 3$
 $A'(q) = 2 \cdot (3q - 5)^{-2} \cdot 3$
 $A'(q) = \frac{6}{(3q - 5)^2}$

b $k(p) = \frac{2}{(4p^2 - 1)^3}$
 $y = 2u^{-3}$ en $u = 4p^2 - 1$
 $\frac{dy}{du} = -6u^{-4}$ en $\frac{du}{dp} = 8p$
 $\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dp} = -6u^{-4} \cdot 8p$
 $k'(p) = -6 \cdot (4p^2 - 1)^{-4} \cdot 8p$
 $k'(p) = \frac{-48p}{(4p^2 - 1)^4}$

- S7 a** De grafiek van f daalt als de hellinggrafiek onder de x -as ligt. Dat is op de intervallen $\langle \leftarrow, -4 \rangle$, $\langle -2, 0 \rangle$ en $\langle 2, 4 \rangle$.
- b** De grafiek van f stijgt als de hellinggrafiek boven de x -as ligt. Dat is op de intervallen $\langle -4, -2 \rangle$, $\langle 0, 2 \rangle$ en $\langle 4, \rightarrow \rangle$.
- c** Er is een maximum als de hellinggrafiek overgaat van positief naar negatief. Dat is bij $x = -2$ en $x = 2$.
- d** Er is een minimum als de hellinggrafiek overgaat van negatief naar positief. Dat is bij $x = -4$, $x = 0$ en $x = 4$.
- e** De grafiek van f is toenemend dalend als de hellinggrafiek onder de x -as ligt en steeds verder van nul gaat. Dat is op de intervallen $\langle -2, -1 \rangle$ en $\langle 2; 3,2 \rangle$.

Test jezelf

T1 a $K = p^{-\frac{1}{2}} \cdot p^{\frac{2}{5}}$

$$K = p^{-\frac{1}{10}}$$

$$K = 1 \cdot p^{-\frac{1}{10}}$$

b $K = (4p^{-12})^{-\frac{1}{2}}$

$$K = 4^{-\frac{1}{2}} \cdot (p^{-12})^{-\frac{1}{2}}$$

$$K = 0,5 \cdot p^6$$

c $K = 6p \cdot \frac{(1,5p)^2}{\sqrt[5]{p}}$

$$K = 6p \cdot \frac{(1,5)^2 \cdot p^2}{p^{\frac{1}{5}}}$$

$$K = \frac{13,5p^3}{p^{\frac{1}{5}}}$$

$$K = 13,5 \cdot p^{\frac{24}{5}}$$

T2 a $f(x) = 4x^{-3} - 2x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = -12x^{-4} - 1x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -12 \cdot \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{-12}{x^4} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

c $g(t) = \frac{4t^3 - t^2 \cdot \sqrt{t} + 1}{t}$

$$g(t) = \frac{4t^3 - t^2 \cdot t^{0,5} + 1}{t}$$

$$g(t) = \frac{4t^3 - t^{2,5} + 1}{t}$$

$$g(t) = \frac{4t^3}{t} - \frac{t^{2,5}}{t} + \frac{1}{t}$$

$$g(t) = 4t^2 - t^{1,5} + t^{-1}$$

$$g'(t) = 8t - 1,5t^{0,5} - 1t^{-2}$$

$$g'(t) = 8t - 1,5\sqrt{t} - \frac{1}{t^2}$$

d $p = 3 \cdot K^5$

$$3 \cdot K^5 = p$$

$$K^5 = \frac{1}{3} \cdot p$$

$$K = \left(\frac{1}{3} \cdot p\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$K = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot p^{\frac{1}{5}}$$

$$K \approx 0,803 \cdot p^{\frac{1}{5}}$$

e $p = (16K)^{1,25}$

$$p = 16^{1,25} \cdot K^{1,25}$$

$$16^{1,25} \cdot K^{1,25} = p$$

$$K^{1,25} = \frac{1}{32} \cdot p$$

$$K = \left(\frac{1}{32} \cdot p\right)^{\frac{1}{1,25}}$$

$$K = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{1,25}} \cdot p^{\frac{1}{1,25}}$$

$$K = \frac{1}{16} \cdot p^{0,8}$$

f $K = \frac{\sqrt{p^3} \cdot \left(\frac{1}{2}p\right)^3}{p^2 \cdot \sqrt{p}}$

$$K = \frac{(p^3)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot p^3}{p^2 \cdot p^{\frac{1}{2}}}$$

$$K = \frac{\frac{1}{8} \cdot p^{4\frac{1}{2}}}{p^{2\frac{1}{2}}}$$

$$K = \frac{1}{8} \cdot p^2$$

b $f(x) = \frac{1}{x^2} + 5x$

$$f(x) = x^{-2} + 5x$$

$$f'(x) = -2x^{-3} + 5$$

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3} + 5$$

d $K(p) = \sqrt{2-5p} = (2-5p)^{\frac{1}{2}}$

$$y = u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = 2-5p$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dp} = -5$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dp} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot -5$$

$$K'(p) = \frac{1}{2} \cdot (2-5p)^{-\frac{1}{2}} \cdot -5$$

$$K'(p) = -2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2-5p)^{\frac{1}{2}}}$$

$$K'(p) = \frac{-5}{2\sqrt{2-5p}}$$

16 Samengestelde functies

$$\begin{aligned} \text{e } A(q) &= -\frac{2q^3 - q^{5,8}}{2q} \\ A(q) &= -\frac{2q^3}{2q} + \frac{q^{5,8}}{2q} \\ A(q) &= -q^2 + \frac{1}{2}q^{4,8} \\ A'(q) &= -2q + 2,4q^{3,8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } L(x) &= 45\sqrt{16 - x^2} \\ L(x) &= 45(16 - x^2)^{0,5} \\ y &= 45u^{0,5} \text{ en } u = 16 - x^2 \\ \frac{dy}{du} &= 22,5u^{-0,5} \text{ en } \frac{du}{dx} = -2x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 22,5u^{-0,5} \cdot -2x \\ L'(x) &= 22,5 \cdot (16 - x^2)^{-0,5} \cdot -2x \\ L'(x) &= \frac{-45x}{\sqrt{16 - x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{T3 a } P &= \sqrt{(2t+3)^4} \\ P &= ((2t+3)^4)^{\frac{1}{2}} \\ P &= (2t+3)^2 \\ y &= u^2 \text{ en } u = 2t+3 \\ \frac{dy}{du} &= 2u \text{ en } \frac{du}{dt} = 2 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 2u \cdot 2 \\ \frac{dP}{dt} &= 2 \cdot (2t+3) \cdot 2 \\ \frac{dP}{dt} &= 8t + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } P &= 2(t^2 + 10)^3 \\ y &= 2u^3 \text{ en } u = t^2 + 10 \\ \frac{dy}{du} &= 6u^2 \text{ en } \frac{du}{dt} = 2t \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 6u^2 \cdot 2t \\ \frac{dP}{dt} &= 6 \cdot (t^2 + 10)^2 \cdot 2t \\ \frac{dP}{dt} &= 12t(t^2 + 10)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } P &= \frac{3}{2(t^2 - 1)} \\ P &= \frac{1,5}{t^2 - 1} \\ y &= \frac{1,5}{u} \text{ en } u = t^2 - 1 \\ y &= 1,5u^{-1} \text{ en } u = t^2 - 1 \\ \frac{dy}{du} &= -1,5u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dt} = 2t \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -1,5u^{-2} \cdot 2t \\ \frac{dP}{dt} &= -1,5 \cdot (t^2 - 1)^{-2} \cdot 2t \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{-3t}{(t^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } P &= \frac{1}{2 - 3t} + t^4 \\ f(t) &= \frac{1}{2 - 3t} \\ y &= \frac{1}{u} \text{ en } u = 2 - 3t \\ y &= u^{-1} \text{ en } u = 2 - 3t \\ \frac{dy}{du} &= -1u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dt} = -3 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -1u^{-2} \cdot -3 \\ f'(t) &= 3 \cdot (2 - 3t)^{-2} \\ f'(t) &= \frac{3}{(2 - 3t)^2} \\ g(t) &= t^4 \text{ dus } g'(t) = 4t^3 \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{3}{(2 - 3t)^2} + 4t^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{T4 a } f(x) &= \sqrt{4 - x^{-2,7}} \\ y &= \sqrt{u} \text{ en } u = 4 - x^{-2,7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } u &= 4 - x^{-2,7} \text{ ofwel } u = 4 - \frac{1}{x^{2,7}} \\ \text{Als } x \text{ heel groot wordt, nadert } \frac{1}{x^{2,7}} &\text{ naar de waarde 0.} \end{aligned}$$

De waarde van u nadert naar de waarde $4 - 0 = 4$.

De waarden van $y = \sqrt{u}$ nadert dan naar $y = \sqrt{4} = 2$.

Dus als x heel groot wordt, nadert $f(x)$ naar de waarde 2.

$$\text{c } \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2,7x^{-3,7}$$

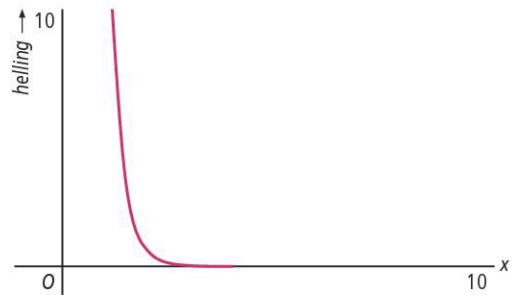
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \cdot (4 - x^{-2,7})^{-\frac{1}{2}} \cdot 2,7x^{-3,7}$$

$$f'(x) = 1,35 \cdot \frac{1}{x^{3,7}} \cdot \frac{1}{(4 - x^{-2,7})^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{1,35}{x^{3,7} \cdot \sqrt{4 - x^{-2,7}}}$$

$$\text{Invoer: } y_1 = \frac{1,35}{x^{3,7} \cdot \sqrt{4 - x^{-2,7}}}$$

$$\text{Venster: } 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10$$



- d Tot $x = 4$ ligt de grafiek van de afgeleide boven de x -as en daalt de grafiek van de afgeleide. Dat betekent dat de grafiek van f tot $x = 4$ afnemend stijgend is en dat grafiek op een gegeven moment bijna niet of niet meer stijgt.

$$\text{T5 a } G = 0,037 \cdot H^{1,5}$$

$$0,037 \cdot H^{1,5} = G$$

$$H^{1,5} = \frac{1}{0,037} \cdot G$$

$$H = \left(\frac{1}{0,037} \cdot G \right)^{\frac{1}{1,5}}$$

$$H = \left(\frac{1}{0,037} \right)^{\frac{1}{1,5}} \cdot G^{\frac{1}{1,5}}$$

$$H \approx 9,006 \cdot G^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{b } \frac{dH}{dG} = 9,006 \cdot 0,667 \cdot G^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dH}{dG} = 6,004 \cdot \frac{1}{G^{\frac{1}{3}}}$$

De huidoppervlakte neemt dan met $6,004 \cdot \frac{1}{7^{\frac{1}{3}}} \approx 3,1 \text{ cm}^2$ per gram toe.

- T6 a Als de waarden van t heel groot worden, dan nadert de waarde van elk van de termen $\frac{1000}{t+8}$ en $\frac{5000}{(t+8)^2}$ naar nul. De grafiek van g daalt op den duur naar de waarde $y = 8$.

$$\text{b } f(t) = \frac{1000}{t+8}$$

$$y = 1000u^{-1} \text{ en } u = t+8$$

$$\frac{dy}{du} = -1000u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -1000 \cdot u^{-2} \cdot 1$$

$$f'(t) = -1000 \cdot (t+8)^{-2}$$

$$f'(t) = \frac{-1000}{(t+8)^2}$$

$$i(t) = 8 \text{ dus } i'(t) = 0$$

$$g'(t) = \frac{-1000}{(t+8)^2} + \frac{10000}{(t+8)^3}$$

$$h(t) = -\frac{5000}{(t+8)^2}$$

$$y = -5000u^{-2} \text{ en } u = t+8$$

$$\frac{dy}{du} = 10000u^{-3} \text{ en } \frac{du}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 10000 \cdot u^{-3} \cdot 1$$

$$h'(t) = 10000 \cdot (t+8)^{-3}$$

$$h'(t) = \frac{10000}{(t+8)^3}$$

16 Samengestelde functies

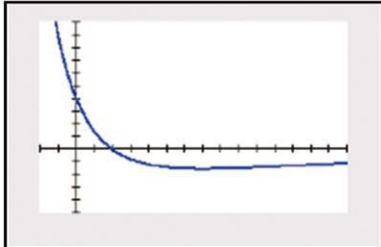
- c Als de grafiek van j afnemend dalend is, moet de grafiek van de afgeleide onder de horizontale as liggen en stijgen.

De grafiek van de afgeleide plotten en de coördinaten van de top vinden.

$$\text{Invoer: } y_1 = \frac{-1000}{(x+8)^2} + \frac{10000}{(x+8)^3}$$

Venster: $-2 \leq x \leq 15$, $-5 \leq y \leq 10$

Optie: minimum



De top ligt bij $t = 7$, dus vanaf $t = 7$ is de grafiek van g afnemend dalend.

T7 a $20000 - \frac{10^7}{q+500} = 10000$

$$\frac{10^7}{q+500} = 10000$$

$$q+500 = \frac{10^7}{10000} = 1000$$

$$q = 500$$

Als $q = 500$ dan is de opbrengst gelijk aan 10 000 euro.

b $TO = 20000 - \frac{10^7}{q+500}$

$$g(q) = -\frac{10^7}{q+500}$$

$$f(q) = 20000$$

$$y = -10^7 \cdot u^{-1} \text{ en } u = q + 500$$

$$f'(q) = 0$$

$$\frac{dy}{du} = 10^7 \cdot u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dq} = 1$$

$$\frac{dy}{dq} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dq} = 10^7 \cdot u^{-2} \cdot 1$$

$$g'(q) = 10^7 \cdot 1 \cdot (q+500)^{-2}$$

$$g'(q) = \frac{10^7}{(q+500)^2} \text{ dus } \frac{dT O}{dq} = \frac{10^7}{(q+500)^2}$$

Bij een opbrengst van 10 000 euro hoort $q = 500$.

Voor $q = 500$ is $\frac{dT O}{dq} = \frac{10^7}{(500+500)^2} = 10$ en dus is de opbrengst nog niet

maximaal, want de afgeleide is geen nul.

- c De uitkomst van een breuk wordt nul als de teller nul is. In de afgeleide is de teller een vast getal, dus de breuk wordt nooit nul.

Er bestaat geen aantal artikelen waarvoor de opbrengst maximaal is.

T8 a $CH = \sqrt{5000^2 + 2000^2} \approx 5385$ meter

De kosten door het bos zijn $25 \cdot 5385 = 134629$ euro.

$$CQ + HQ = 5000 + 2000 = 7000 \text{ meter}$$

De kosten via de weg zijn $20 \cdot 7000 = 140000$ euro.

De oplossing geheel door het bos is goedkoper.

- b** Als $PQ = x$, dan is $CP = 5000 - x$.

$$PH = \sqrt{x^2 + 2000^2} = \sqrt{x^2 + 4\,000\,000}$$

Voor de kosten krijg je dan de formule $AK = 20 \cdot CP + 25 \cdot PH$.

$$AK = 20 \cdot (5000 - x) + 25 \cdot \sqrt{x^2 + 4\,000\,000}$$

$$AK = 100\,000 - 20x + 25 \cdot \sqrt{x^2 + 4\,000\,000}$$

- c** De aanlegkosten zijn minimaal heeft als geldt $\frac{dAK}{dx} = 0$.

$$AK = 100\,000 - 20x + 25 \cdot \sqrt{x^2 + 4\,000\,000}$$

$$AK = 100\,000 - 20x + 25 \cdot (x^2 + 4\,000\,000)^{\frac{1}{2}}$$

$$g(x) = 25 \cdot (x^2 + 4\,000\,000)^{\frac{1}{2}} \quad f(x) = 100\,000 - 20x$$

$$y = 25u^{\frac{1}{2}} \text{ en } u = x^2 + 4\,000\,000 \quad f'(x) = -20$$

$$\frac{dy}{du} = 12\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 12\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$g'(x) = 12\frac{1}{2} \cdot (x^2 + 4\,000\,000)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$g'(x) = \frac{25x}{\sqrt{x^2 + 4\,000\,000}}$$

$$\frac{dAK}{dx} = -20 + \frac{25x}{\sqrt{x^2 + 4\,000\,000}}$$

$$\text{Invoer: } y_1 = -20 + \frac{25x}{\sqrt{x^2 + 4\,000\,000}}$$

Venster: $0 \leq x \leq 5000$, $-5 \leq y \leq 10$

Optie: nulpunt

Het nulpunt ligt bij $x \approx 2667$ en de minimale aanlegkosten zijn dan $100\,000 - 20 \cdot 2667 + 25 \cdot \sqrt{2667^2 + 4\,000\,000} \approx 130\,000$ euro.

Extra oefening

E1 a $f(x) = x^{-3} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{3}{5}}$

$$f(x) = 1 \cdot x^{-3\frac{1}{5}}$$

b $f(x) = (0,5 \cdot x^{1,3})^{-3}$
 $f(x) = 0,5^{-3} \cdot (x^{1,3})^{-3}$
 $f(x) = 8 \cdot x^{-3,9}$

c $f(x) = (3x^{-\frac{3}{2}})^{-\frac{4}{5}}$

$$f(x) = 3^{-\frac{4}{5}} \cdot (x^{-\frac{3}{2}})^{-\frac{4}{5}}$$

$$f(x) \approx 0,42 \cdot x^{1,2}$$

d $f(x) = (2x^8)^{-0,25}$
 $f(x) = 2^{-0,25} \cdot (x^8)^{-0,25}$
 $f(x) \approx 0,84 \cdot x^{-2}$

E2 a $f(x) = 2x^3 - 7x^{-3}$
 $f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 7 \cdot -3x^{-4}$

$$f'(x) = 6x^2 + 21 \cdot \frac{1}{x^4}$$

$$f'(x) = 6x^2 + \frac{21}{x^4}$$

b $f(x) = \frac{x^6 + 2x^4}{x^2}$

$$f(x) = \frac{x^6}{x^2} + \frac{2x^4}{x^2}$$

$$f(x) = x^4 + 2x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 + 4x$$

16 Samengestelde functies

$$\begin{aligned} \text{c} \quad f(x) &= x^{3,5} \cdot \sqrt{x} \\ f(x) &= x^{3,5} \cdot x^{0,5} \\ f(x) &= x^4 \\ f'(x) &= 4x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad f(x) &= \frac{7}{x^3} + 3x^2 \\ f(x) &= 7x^{-3} + 3x^2 \\ f'(x) &= 7 \cdot -3x^{-4} + 3 \cdot 2x \\ f'(x) &= -21 \cdot \frac{1}{x^4} + 6x \\ f'(x) &= \frac{-21}{x^4} + 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E3 a} \quad f(t) &= \frac{1}{4 - t^{-2}} \\ y &= u^{-1} \text{ en } u = 4 - t^{-2} \\ \text{b} \quad g(x) &= \sqrt{7x - 56} \\ y &= \sqrt{u} \text{ en } u = 7x - 56 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E4 a} \quad A(k) &= (3k + 5)^4 \\ y &= u^4 \text{ en } u = 3k + 5 \\ \frac{dy}{du} &= 4u^3 \text{ en } \frac{du}{dk} = 3 \\ \frac{dy}{dk} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dk} = 4u^3 \cdot 3 \\ A'(k) &= 4 \cdot (3k + 5)^3 \cdot 3 \\ A'(k) &= 12(3k + 5)^3 \\ \text{b} \quad Z(p) &= \sqrt{\frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{6}p^2} \\ y &= u^{0,5} \text{ en } u = \frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{6}p^2 \\ \frac{dy}{du} &= 0,5u^{-0,5} \text{ en } \frac{du}{dp} = p^2 - \frac{1}{3}p \\ \frac{dy}{dp} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dp} = 0,5u^{-0,5} \cdot \left(p^2 - \frac{1}{3}p\right) \\ Z'(p) &= 0,5 \cdot \left(\frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{6}p^2\right)^{-0,5} \cdot \left(p^2 - \frac{1}{3}p\right) \\ Z'(p) &= \frac{\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{6}p}{\sqrt{\frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{6}p^2}} \\ Z'(p) &= \frac{3p^2 - p}{6\sqrt{\frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{6}p^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad p(t) &= (-7t - 5)^6 \\ y &= u^6 \text{ en } u = -7t - 5 \\ \frac{dy}{du} &= 6u^5 \text{ en } \frac{du}{dt} = -7 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 6u^5 \cdot -7 \\ p'(t) &= 6 \cdot (-7t - 5)^5 \cdot -7 \\ p'(t) &= -42(-7t - 5)^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad f(x) &= -(x^5 - 1)^2 \\ y &= -u^2 \text{ en } u = x^5 - 1 \\ \frac{dy}{du} &= -2u \text{ en } \frac{du}{dx} = 5x^4 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -2u \cdot 5x^4 \\ f'(x) &= -2 \cdot (x^5 - 1) \cdot 5x^4 \\ f'(x) &= -10x^4(x^5 - 1) \\ f'(x) &= -10x^9 + 10x^4 \end{aligned}$$

E5 a $A = \frac{-5}{\frac{1}{2}p - 4}$

$$y = -5u^{-1} \text{ en } u = \frac{1}{2}p - 4$$

$$\frac{dy}{du} = 5u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dp} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dp} = 5u^{-2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{dA}{dp} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}p - 4\right)^{-2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{dA}{dp} = 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}p - 4\right)^2}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{2\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}p - 4\right)^2}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{5}{2\left(\frac{1}{2}p - 4\right)^2}$$

b $A = \frac{1}{(3p - 4)^2}$

$$y = u^{-2} \text{ en } u = 3p - 4$$

$$\frac{dy}{du} = -2u^{-3} \text{ en } \frac{du}{dp} = 3$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dp} = -2u^{-3} \cdot 3$$

$$\frac{dA}{dp} = -2 \cdot (3p - 4)^{-3} \cdot 3$$

$$\frac{dA}{dp} = -6 \cdot \frac{1}{(3p - 4)^3}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{-6}{(3p - 4)^3}$$

c $A = \frac{2}{7 - 3p}$

$$y = 2u^{-1} \text{ en } u = 7 - 3p$$

$$\frac{dy}{du} = -2u^{-2} \text{ en } \frac{du}{dp} = -3$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dp} = -2u^{-2} \cdot -3$$

$$\frac{dA}{dp} = -2 \cdot (7 - 3p)^{-2} \cdot -3$$

$$\frac{dA}{dp} = 6 \cdot \frac{1}{(7 - 3p)^2}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{6}{(7 - 3p)^2}$$

d $A = \frac{-10}{(5 - p)^2}$

$$y = -10u^{-2} \text{ en } u = 5 - p$$

$$\frac{dy}{du} = 20u^{-3} \text{ en } \frac{du}{dp} = -1$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dp} = 20u^{-3} \cdot -1$$

$$\frac{dA}{dp} = 20 \cdot (5 - p)^{-3} \cdot -1$$

$$\frac{dA}{dp} = -20 \cdot \frac{1}{(5 - p)^3}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{-20}{(5 - p)^3}$$

E6 a $f(x) = \frac{4}{(0,5x^2 + 1)^2}$

$$y = 4u^{-2} \text{ en } u = 0,5x^2 + 1$$

$$\frac{dy}{du} = -8u^{-3} \text{ en } \frac{du}{dx} = x$$

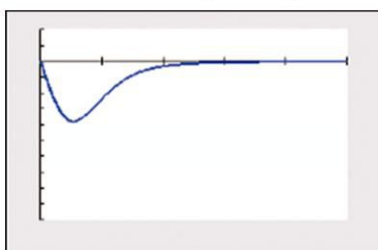
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -8u^{-3} \cdot x$$

$$f'(x) = -8 \cdot (0,5x^2 + 1)^{-3} \cdot x$$

$$f'(x) = \frac{-8x}{(0,5x^2 + 1)^3}$$

$$\text{Invoer: } y_1 = \frac{-8x}{(0,5x^2 + 1)^3}$$

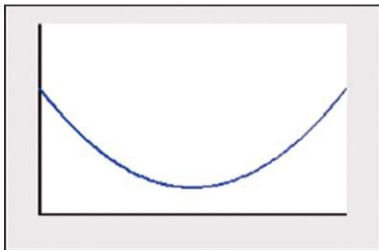
Venster: $0 \leq x \leq 5, -10 \leq y \leq 2$



16 Samengestelde functies

- b** De hellinggrafiek ligt in zijn geheel onder de x -as. De hellingen van de grafiek van f zijn altijd negatief, dus de grafiek van f daalt altijd.
- c** Optie: minimum
De top van de hellinggrafiek ligt bij $x \approx 0,63$.
De grafiek is toenemend dalend tussen $x = 0$ en $x = 0,63$.

- E7** $g(t) = 0,000013t^3 - 0,078t^2 + 200t + 30\,000$
 $g'(t) = 0,000039t^2 - 0,156t + 200$
 Als de grafiek van g overgaat van afnemend stijgend naar toenemend stijgend, heeft $g'(t)$ een minimum.
 Invoer: $y_1 = 0,000039x^2 - 0,156x + 200$
 Venster: $0 \leq x \leq 4000$, $0 \leq y \leq 300$
 Optie: minimum



De top ligt bij $t = 2000$, dus bij $t = 2000$ gaat de grafiek van g over van afnemend stijgend naar toenemend stijgend.

- E8 a** De oppervlakte van de bodem is $x \cdot x = x^2$.
 De kosten voor de bodem zijn $K(x) = 36x^2$.
- b** De oppervlakte van één zijkant is $x \cdot y$.
 De kosten voor de vier zijkanten zijn $K = 4 \cdot xy \cdot 27$ of $K = 108 \cdot xy$.
- c** Er geldt dan $36x^2 + 108xy = 432$ ofwel $x^2 + 3xy = 12$
 $3xy = 12 - x^2$
 $y = \frac{12 - x^2}{3x}$
- d** $\text{inhoud} = \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte}$
 $I(x) = x^2 \cdot y$
 $I(x) = x^2 \cdot \frac{12 - x^2}{3x}$
 $I(x) = \frac{x^2(12 - x^2)}{3x}$
 $I(x) = \frac{12x^2 - x^4}{3x}$
 $I(x) = \frac{12x - x^3}{3}$
 $I(x) = \frac{12x}{3} - \frac{x^3}{3}$
 $I(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$
- e** $I'(x) = 4 - x^2$
- f** De inhoud is maximaal als $I'(x) = 0$ dus als $4 - x^2 = 0$ dus $x = 2$.
 De afmetingen zijn 2 bij 2 bij $\frac{12 - 2^2}{3 \cdot 2} = 1\frac{1}{3}$ meter.
 De maximale inhoud is $I(2) = 4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 = 5\frac{1}{3} \text{ m}^3$.
- g** De hellinggrafiek $I'(x) = 4 - x^2$ is een bergparabool met top $(0, 4)$ en nulpunt $(2, 0)$. Dat betekent dat als x toeneemt van 0 tot 2, de hellinggrafiek boven de x -as ligt en dalend is. De grafiek van y is dan afnemend stijgend.

E9 a Elke minuut wordt de lengte 0,5 mm korter, dus in 6 minuten wordt de lengte $6 \cdot 0,5 = 3$ mm korter. De beginlengte is 10 cm = 100 mm, dus na zes minuten is de lengte van een ribbe $100 - 3 = 97$ mm.

b Het volume is $97^3 = 912\,673$ mm³.

c $r = 100 - 0,5t$

d $V = r^3$

$$V = (100 - 0,5t)^3$$

e $y = u^3$ en $u = 100 - 0,5t$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \text{ en } \frac{du}{dt} = -0,5$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 3u^2 \cdot -0,5$$

$$\frac{dV}{dt} = 3 \cdot (100 - 0,5t)^2 \cdot -0,5$$

$$\frac{dV}{dt} = -1,5(100 - 0,5t)^2$$

f $-1,5 \cdot (100 - 0)^2 = -15\,000$

De snelheid van verandering aan het begin is $-15\,000$ mm³ per minuut.

Drie keer zo langzaam is dan $-15\,000 : 3 = -5000$ mm³ per minuut.

Er moet gelden $-1,5(100 - 0,5t)^2 = -5000$.

$$(100 - 0,5t)^2 = 3333\frac{1}{3}$$

$$100 - 0,5t = \sqrt{3333\frac{1}{3}}$$

$$0,5t = 100 - \sqrt{3333\frac{1}{3}}$$

$$t = 200 - 2 \cdot \sqrt{3333\frac{1}{3}}$$

$$t = 84,529\dots$$

Na ongeveer 84,5 minuten verandert het volume drie keer zo langzaam als bij het begin van het proces.

17 Hypothese toetsen

Voorkennis

- V1 a** X is het aantal keren zes gooien. X is $\text{Bin}\left(12, \frac{1}{6}\right)$ -verdeeld.
Op de rekenmachine:
Optie: binomiaal met $n = 12$, $p = \frac{1}{6}$ en $X = 2$
 $P(X = 2) \approx 0,2961$
De kans dat ze twee keer een zes gooit is 0,2961.
- b** X is het aantal keren vijf gooien. X is $\text{Bin}\left(12, \frac{1}{6}\right)$ -verdeeld.
Op de rekenmachine:
Optie: binomiaal cumulatief met $n = 12$, $p = \frac{1}{6}$ en $X = 3$
 $P(X \leq 3) \approx 0,8748$
De kans dat ze hoogstens drie keer vijf gooit is 0,8748.
- c** X is het aantal keren vier ogen.
 X is $\text{Bin}\left(12, \frac{1}{6}\right)$ -verdeeld.
 $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$
Op de rekenmachine:
Optie: binomiaal cumulatief met $n = 12$, $p = \frac{1}{6}$ en $X = 3$
 $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 1 - 0,8748 = 0,1252$
De kans dat ze minstens vier keer twee ogen gooit is 0,1252.
- d** X is het aantal keren vier ogen. X is $\text{Bin}\left(12, \frac{1}{6}\right)$ -verdeeld.
 $E(X) = \frac{1}{6} \times 12 = 2$
Er wordt naar verwachting twee keer vier ogen gegooit.
- V2 a** $E(X) = \frac{1}{3} \times 20 = 6\frac{2}{3}$
- b** Op de rekenmachine:
Optie: binomiaal met $n = 20$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 11$
 $P(X = 11) \approx 0,0247$
- c** $P(X < 8) = P(X \leq 7)$
Op de rekenmachine:
Optie: binomiaal cumulatief met $n = 20$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 7$
 $P(X < 8) \approx 0,6615$
- d** Op de rekenmachine:
Optie: binomiaal cumulatief met $n = 20$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 6$
 $P(X \leq 6) \approx 0,4793$
- e** $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$
Op de rekenmachine:
Optie: binomiaal cumulatief met $n = 20$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 5$
 $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0,29721\dots \approx 0,7028$
- f** $P(5 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 4)$
Op de rekenmachine:
Optie: binomiaal cumulatief met $n = 20$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 10$ en $X = 4$
 $P(5 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 4) = 0,96236\dots - 0,15151\dots \approx 0,8109$
- V3 a** X is het aantal keren raak. X is $\text{Bin}(10; 0,2)$ -verdeeld.
Op de rekenmachine:
Optie: binomiaal met $n = 10$, $p = 0,2$ en $X = 2$
 $P(X = 2) \approx 0,3020$
De kans dat hij twee keer raak schiet is 0,3020.

- b** Y is het aantal keren mis. Y is $\text{Bin}(10; 0,2)$ -verdeeld.

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal met $n = 10$, $p = 0,2$ en $X = 4$

$$P(Y = 4) \approx 0,0881$$

De kans dat hij vier van de tien keer mist is 0,0881.

- c** $P(Y > 8) = 1 - P(Y \leq 8)$

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 10$, $p = 0,2$ en $X = 8$.

$$P(Y > 8) = 1 - P(Y \leq 8) \approx 1 - 0,999996 = 0,000004$$

De kans dat hij meer dan acht keer mist is 0,000004.

- V4 a** X is het aantal mensen met contactlenzen. X is $\text{Bin}(4; 0,12)$ -verdeeld.

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal met $n = 4$, $p = 0,12$ en $X = 1$

$$P(X = 1) \approx 0,3271$$

De kans dat een van de vier personen contactlenzen draagt is 0,3271.

- b** X is het aantal mensen met contactlenzen. X is $\text{Bin}(20; 0,12)$ -verdeeld.

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$$

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 20$, $p = 0,12$ en $X = 4$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0,91728... \approx 0,0827$$

De kans dat minstens vijf van de 20 personen contactlenzen dragen is 0,0827.

- V5 a** X is het gewicht van 14-jarige meisjes.

X is $\text{Norm}(52, 12)$ -verdeeld

Op de rekenmachine.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 65, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 52$ en $\sigma = 12$

$$P(X > 65) = 0,13933...$$

De kans dat een willekeurig 14-jarig meisje meer dan 65 kg weegt is 0,1393.

- b** Op de rekenmachine.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 60, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 52$ en $\sigma = 12$

$$P(X > 60) = 0,25249...$$

De kans dat beide meisjes meer dan 60 kg wegen is $0,25249...^2 \approx 0,0638$.

- V6 a** X is de inhoud van de flessen.

X is $\text{Norm}(3,01; 0,015)$ -verdeeld

Op de rekenmachine.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 3, $\mu = 3,01$ en $\sigma = 0,015$

$$P(X < 3) \approx 0,2525$$

De kans dat een fles minder dan 3 liter bevat is 0,2525.

- b** $\bar{X}$ is de gemiddelde inhoud van de flessen.

De standaardafwijking van de gemiddelde inhoud van 25 flessen is

$$\sigma = 0,015 : \sqrt{25} = 0,003$$

$\bar{X}$ is $\text{Norm}(3,01; 0,003)$ -verdeeld.

Op de rekenmachine.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 3, $\mu = 3,01$ en $\sigma = 0,003$

$$P(\bar{X} < 3) \approx 0,00043$$

De kans dat de gemiddelde inhoud minder is dan 3 liter is 0,0004.

17 Hypothese toetsen

V7 a X is de lengte van de vrouwen.

X is Norm(165, 9)-verdeeld.

Op de rekenmachine:

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 160, bovengrens = 170, $\mu = 165$ en $\sigma = 9$

$P(160 < X < 170) \approx 0,4215$

Van de vrouwen heeft ruim 42% een lengte tussen 160 cm en 170 cm.

b $P(X > g) = 0,05$

Op de rekenmachine:

Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x, 10^{99}, 165, 9)$ en $y_2 = 0,05$

Venster: $165 \leq x \leq 200, 0 \leq y \leq 0,1$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (179,8; 0,05).

De vrouwen met een lengte van 180 cm of meer horen bij de 5% langste vrouwen.

c $\bar{X}$ is de gemiddelde lengte van de vrouwen.

De standaardafwijking van deze lengte is 9 : $\sqrt{100} = 0,9$.

$\bar{X}$ is Norm(165; 0,9)-verdeeld.

Op de rekenmachine:

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 167, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 165$ en $\sigma = 0,9$

$P(\bar{X} > 167) \approx 0,0131$

De kans dat de gemiddelde lengte meer is dan 167 cm is 0,0131.

V8 a T is het gewicht van tien mandarijnen in een netje.

$E(T) = 10 \times 30 = 300$ gram, $\sigma(T) = \sqrt{10} \cdot 6$

T is Norm(300; $6\sqrt{10}$)-verdeeld.

Op de rekenmachine:

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 295, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 300$ en $\sigma = 6\sqrt{10}$

$P(T > 295) \approx 0,6039$.

b A is het aantal netjes met mandarijnen met een gewicht van meer dan 295 gram

A is Bin(8; 0,6039)-verdeeld.

$P(A \geq 5) = 1 - P(A \leq 4)$.

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 8$, $p = 0,6039$ en $X = 4$

$P(A \geq 5) = 1 - P(A \leq 4) \approx 1 - 0,3969 = 0,6031$

De kans dat minstens 5 netjes meer dan 295 gram mandarijnen bevat is 0,6031.

17.1 Hypotheses

intro Je verwacht 100 keer een zes te gooien. 110 is dus iets meer dan verwacht maar het kan alsnog op toeval berusten.

1 a Het is een herhaald kansexperiment met twee mogelijke uitkomsten, wel of geen beschadiging.

Bij elke herhaling is de kans 0,15 dat de sinaasappel een beschadiging heeft.

b Je verwacht $0,15 \times 40 = 6$ sinaasappels met een beschadiging.

- c Vijf is minder dan de fruithandelaar beweert. De groenteboer zal het aanbod van de fruithandelaar accepteren.
- d 15 beschadigde sinaasappels is veel meer dan de verwachte 6 sinaasappels. De groenteboer zal de bewering van de fruithandelaar niet vertrouwen.
- e Bij 15% beschadiging is X is $\text{Bin}(40; 0,15)$ -verdeeld.
 $P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8)$
 Op de rekenmachine:
 Optie: binomiaal cumulatief met $n = 40$, $p = 0,15$ en $X = 8$.
 $P(X \geq 9) \approx 1 - 0,8646 = 0,1354$
 De kans dat de groenteboer het aanbod afwijst terwijl de bewering van de fruithandelaar klopt is 0,1354.
- 2** De toetsingsgrootte X is het aantal sinaasappels met een beschadiging.
 $H_0 : p = 0,15$ en $H_1 : p > 0,15$
- 3** a De toetsingsgrootte X is het aantal klanten uit omliggende plaatsen.
 $H_0 : p = 0,44$ en $H_1 : p < 0,44$
- b X is $\text{Bin}(100; 0,44)$ -verdeeld.
- c Volgens de directie zullen $0,44 \times 100 = 44$ klanten uit de omliggende plaatsen komen.
 46 is iets meer dan het verwachte aantal, dus zeker geen reden om de bewering van de directie te verwerpen.
 36 is veel minder dan de directie beweert, de onderzoeker zal dus twijfelen aan de bewering van de directie.
- d X is $\text{Bin}(100; 0,44)$ -verdeeld.
 Op de rekenmachine:
 Optie: binomiaal cumulatief met $n = 100$, $p = 0,44$ en $X = 30$.
 $P(X \leq 30) = 0,0029$
- e Bij $H_0 : p = 0,44$ is de verwachtingswaarde $X = 44$.
 Dus $P(X \leq 35)$ is groter dan $P(X \leq 30)$.
 Deze kans dat H_0 wordt verworpen is dus groter.
- 4** a Het uitgangspunt is dat $\mu = 46,5$ cm met $\sigma = 1,5$ cm.
 $\bar{X}$ is het gemiddelde van 20 jongetjes, dus ook 46,5 cm.
 Dan geldt dat volgens de $\sqrt{n}$ -wet de standaardafwijking van $\bar{X}$ dus $\frac{1,5}{\sqrt{20}}$ cm is.
- b Volgens Frank is de hoofdomtrek van de jongetjes groter dus $H_1 : \mu > 46,5$ cm.
- 5** a De toetsingsgrootte $\bar{X}$ is het gemiddelde gewicht van tien repen.
 $H_0 : \mu = 101$ en $H_1 : \mu < 101$
- b $\bar{X}$ is $\text{Norm}\left(101; \frac{0,5}{\sqrt{10}}\right)$ -verdeeld.
- c Op de rekenmachine:
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 100,8, $\mu = 101$ en $\sigma = \frac{0,5}{\sqrt{10}}$
 $P(\bar{X} < 100,8) \approx 0,1030$
 De kans dat zij gelijk krijgt, terwijl de fabrikant gelijk heeft is dus 0,1030.
- d Op de rekenmachine:
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 100,5, $\mu = 101$ en $\sigma = \frac{0,5}{\sqrt{10}}$
 $P(\bar{X} < 100,5) \approx 0,0008$
 De kans dat zij gelijk krijgt, terwijl de fabrikant gelijk heeft is dus 0,0008.

17 Hypothese toetsen

- 03 a** Omdat zijn collega denkt dat het percentage lager zal zijn is $H_1 : p < 0,3$.
- b** X is het aantal klanten dat overweegt een elektrische auto te kopen.
Het is een herhaald kansexperiment met twee mogelijke uitkomsten, wel of geen elektrische auto.
Bij elke herhaling is de kans 0,3 dat de klant overweegt een elektrische auto te kopen.
 $n = 50$ en $p = 0,3$
- c** De verwachtingswaarde is $0,3 \times 50 = 15$.
- d** 14 van de 50 wijkt niet veel af van de verwachte 15, dit kan op toeval berusten. Louis zal waarschijnlijk niet in het ongelijk worden gesteld.
- e** X is $\text{Bin}(50; 0,3)$ -verdeeld.
Op de rekenmachine:
Optie: binomiaal cumulatief met $n = 50$, $p = 0,3$ en $X = 10$.
 $P(X \leq 10) \approx 0,0789$
- f** Bij $p = 0,30$ verwacht je 15 klanten die overwegen om een elektrische auto te kopen. $X \leq 8$ is dan minder waarschijnlijk als $X \leq 10$.
Door de grens bij acht te leggen wordt deze kans dus kleiner.

- 04 a** Het gemiddelde gewicht van de eieren is 55 gram.
 $\bar{X}$ is het gemiddelde gewicht van de steekproef.
Dus is de verwachtingswaarde van $\bar{X} = 55$ gram.
- b** De steekproefomvang is 30.
- c** $\sigma(X) = 2,5$ gram en $n = 30$. Dan geldt dat volgens de $\sqrt{n}$ -wet de standaardafwijking van $\bar{X}$ dus $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} = \frac{2,5}{\sqrt{30}}$ gram is.
- d** Zwaarder dan 55 gram betekent $H_1 : \mu > 55$ gram.

- U1** X is $\text{Bin}(n; 0,28)$ -verdeeld.
 $P(X \geq 65) = 1 - P(X \leq 64) = 0,0917$
dus $P(X \leq 64) = 1 - 0,0917 = 0,9083$
Maak een tabel met je rekenmachine.
Invoer: y_1 = binomiaal cumulatief met $n = x$, $p = 0,28$ en $X = 64$
Bij $n = 200$ is de kans gelijk aan 0,9083
De steekproefomvang is dus 200.

X	Y1				
195	0.941				
196	0.9353				
197	0.9292				
198	0.9226				
199	0.9157				
200	0.9083				
201	0.9005				
202	0.8923				
203	0.8836				
204	0.8744				
205	0.8648				
Y1=0.90831885725042					

17.2 Fouten van de eerste en tweede soort

intro Hier mag iedereen zijn eigen mening over hebben.

- 6 a** Als er 6 keer of minder zes ogen wordt gegooid wordt H_0 niet verworpen.
- b** X is $\text{Bin}(36, \frac{1}{6})$ -verdeeld.
 H_0 wordt niet verworpen als $X \leq 6$.
Op de rekenmachine:
Optie: binomiaal cumulatief met $n = 36$, $p = \frac{1}{6}$ en $X = 6$.
 $P(X \leq 6) \approx 0,6067$
De kans dat H_0 niet wordt verworpen is 0,6067.
- c** $P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) \approx 1 - 0,6067 = 0,3933$
De kans dat H_0 wordt verworpen terwijl H_0 wel waar is, is 0,3933.
- d** Sandra krijgt gelijk, terwijl Dagmar gelijk heeft.

7 $P(X \geq 68)$ is de kans op een fout van de 1e soort.

8 a Dan heeft Dagmar gelijk, maar ze krijgt geen gelijk.

b $p = \frac{1}{6}$ hoort bij H_0 . Bij een fout van de eerste soort is H_0 waar.

c Bij een fout van de 2e soort heeft Sandra gelijk, maar krijgt geen gelijk.

d Omdat je niet weet hoe groot de kans precies is die bij de alternatieve hypothese hoort.

e X is $\text{Bin}(36, \frac{1}{6})$ -verdeeld.

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 36$, $p = \frac{1}{6}$ en $X = 6$.

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) \approx 1 - 0,6067 = 0,3933$$

f De kans op een fout van de 1e soort is vrij groot, dus geen sterk argument om H_0 te verwerpen.

g Maak een tabel met de rekenmachine.

Invoer: y_1 = binomiaal cumulatief met $n = 36$, $p = \frac{1}{6}$ en $X = x$

	kans dat H_0 niet wordt verworpen	kans op fout van de 1e soort
$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6)$	0,6067	0,3933
$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$	0,7575	0,2425
$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8)$	0,8668	0,1332
$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$	0,9348	0,0652
$P(X \geq 11) = 1 - P(X \leq 10)$	0,9715	0,0285
$P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11)$	0,9889	0,0111

h Bij 11 keer of meer zes ogen gooien besluiten ze dat de dobbelsteen niet zuiver is en dus de nulhypothese te verwerpen.

9 X is $\text{Bin}(50; 0,5)$ -verdeeld.

Maak een tabel op de rekenmachine.

Invoer: y_1 = binomiaal cumulatief met $n = 50$, $p = 0,5$ en $X = x$.

g	17	18	19	20
$P(X \leq g)$	0,0164	0,0325	0,0595	0,1013

Layla zal de munt als oneerlijk bestempelen bij hoogstens 18 keer munt.

10 a De toetsingsgrootte X is het aantal batterijen dat minstens 10 dagen goed functioneert.

$H_0 : p = 0,9$ en $H_1 : p < 0,9$

b X is $\text{Bin}(150; 0,9)$ -verdeeld.

Maak een tabel op de rekenmachine.

Invoer: y_1 = binomiaal cumulatief met $n = 150$, $p = 0,9$ en $X = x$.

g	125	126	127	128	129
$P(X \leq g)$	0,0076	0,0143	0,0256	0,044	0,0721

$$P(X \leq 125) < 0,01$$

c Bij 125 of minder batterijen die minstens 10 dagen meegaan wordt de nulhypothese verworpen.

d Bij een waarde van 0,05 wordt de nulhypothese verworpen bij 128 of minder batterijen. Er wordt dus minder snel aan de bewering van de fabrikant getwijfeld.

17 Hypothese toetsen

010 a $H_0 : p = \frac{1}{4}$ en $H_1 : p < \frac{1}{4}$

b X is $\text{Bin}(80, \frac{1}{4})$ -verdeeld. De verwachtingswaarde is $80 \times \frac{1}{4} = 20$.

c 19 is iets minder dan de verwachtingswaarde, maar geen reden om te twijfelen aan de eerlijkheid van de dobbelsteen.
10 wijkt wel erg veel van de verwachtingswaarde af, dus wel reden om te twijfelen aan de eerlijkheid van de dobbelsteen.

d Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 80$, $p = \frac{1}{4}$ en $X = 19$.

$$P(X \leq 19) \approx 0,4572$$

e Maak een tabel op de rekenmachine.

Invoer: y_1 = binomiaal cumulatief met $n = 80$, $p = \frac{1}{4}$ en $X = x$.

X	Y1			
9	0.0018			
10	0.0047			
11	0.0106			
12	0.0221			
13	0.0421			
14	0.074			
15	0.1208			
16	0.1841			
17	0.2636			
18	0.3563			
19	0.4572			
Y1=0.04209669855361				

f Fatima zal bij hoogstens 13 keer drie gooien de conclusie trekken dat de dobbelsteen oneerlijk is.

U2 De toetsingsgrootheid X is aantal keren vijf gooien.

$$H_0 : p = \frac{1}{8} \text{ en } H_1 : p > \frac{1}{8}$$

X is $\text{Bin}(160, \frac{1}{8})$ -verdeeld.

$$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq g - 1)$$

De verwachtingswaarde is $160 \times \frac{1}{8} = 20$, g zal dus groter zijn dan 20.

Maak een tabel op de rekenmachine.

Invoer: $y_1 = 1 -$ binomiaal cumulatief met $n = 160$, $p = \frac{1}{8}$ en $X = x$.

g	25	26	27	28
$P(X \geq g)$	0,0973	0,0644	0,0411	0,0253

Het vermoeden van Jayden zal niet worden bevestigd als er maximaal 26 keer een vijf gegooit zal worden.

17.3 Het kritieke gebied

intro Toeval speelt hier een belangrijke rol. Waar leg je de grens? Bij minder dan 25, of minder dan 20, of ...?

11 a $H_0 : p = 0,2$ en $H_1 : p > 0,2$

b X is $\text{Bin}(50; 0,2)$ -verdeeld.

$$P(X \geq 11) = 1 - P(X \leq 10)$$

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 50$, $p = 0,2$ en $X = 10$.

$$P(X \geq 11) \approx 1 - 0,5836 = 0,4164$$

c De nulhypothese zal verworpen worden bij $x \geq 16$.

Bij 16 of meer rollen met gebroken beschuiten zal Ahmed twijfelen aan de bewering van de supermarktmanager.

- 12 a** $H_1 : \mu < 100$ gram
- b** De standaardafwijking van $\bar{X}$ is $\sigma = 8 : \sqrt{16} = 2$ gram.
- c** De hoeveelheid spijs is normaal verdeeld met een gemiddelde $\mu = 100$.
 $P(\bar{X} < g) = 0,05$. In het rode gebied liggen de 5% stollen met de minste spijs.
- d** Op de rekenmachine:
 Invoer: $y_1 =$ normaal cumulatief $(-10^{99}, x, 100, 2)$
 $y_2 = 0,5$
 Venster: $80 < x < 100, 0 < y < 0,1$
 Optie: snijpunt
 $x = 96,710\dots$
 g is dus ongeveer 96,7 gram
- e** Steekproefresultaten waarbij $\bar{X} \leq 96,7$ vallen in het rode gebied.
- 13** De toetsingsgrootheid X is aantal deelnemers dat na een jaar niet meer rookt.
 $H_0 : p = 0,85$ en $H_1 : p < 0,85$
 X is $\text{Bin}(120; 0,85)$ -verdeeld.
 Voor het kritieke gebied geldt: $P(X \leq g) < 0,10$
 Maak een tabel op de rekenmachine.
 Invoer: $y_1 =$ binomiaal cumulatief met $n = 120$, $p = 0,85$ en $X = x$.
- | g | 94 | 95 | 96 | 97 |
|---------------|-------|--------|--------|--------|
| $P(X \leq g)$ | 0,032 | 0,0528 | 0,0835 | 0,1265 |
- De onderzoeker zal bij 96 of minder mensen die na een jaar niet roken concluderen dat de bewering van de therapeut niet klopt.
- 14 a** X is $\text{Bin}(230; 0,1)$ verdeeld.
 $H_0 : p = 0,1$ want de teler beweert dat 1 op de 10 bollen niet ontkiemt.
 $H_1 : p > 0,1$ want Jimmy vermoedt dat meer dan 1 op de 10 bollen niet ontkiemt.
- b** De verwachtingswaarde van X is $230 \times 0,1 = 23$.
 $H_1 : p > 0,1$ dus het kritieke gebied ligt hoger dan 23.
- c** Maak een tabel op de rekenmachine.
 Invoer: $y_1 =$ binomiaal cumulatief met $n = 230$, $p = 0,1$ en $X = x$.
- | g | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $P(X \leq g)$ | 0,9197 | 0,9459 | 0,9646 | 0,9776 | 0,9862 | 0,9918 |
- d** Bij een steekproefresultaat van 0 tot en met 30 is de kans op een fout van de 1e soort $P(X \geq 31) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - 0,9459 = 0,0541$.
 Deze kans is groter dan α .
- e** $P(X \geq 32) = 1 - P(X \leq 31) = 1 - 0,9646 = 0,0354$
 Bij steekproefresultaten van 32 of meer is de kans op een fout van de 1e soort kleiner dan α .
 Jimmy zal de bewering van de teler verwerpen bij tenminste 32 bollen die niet ontkiemen.
- 15 a** 37 van de 40 is meer dan 90%, dus geen reden om het productieproces bij te stellen.
- b** 90 % moet van eerste kwaliteit zijn dus $H_0 : p = 0,9$.
 Bij minder dan 90% wordt het productieproces bijgesteld, dus $H_1 : p < 0,9$.
 X is $\text{Bin}(40; 0,9)$ -verdeeld.
 Voor het kritieke gebied geldt $P(X \leq g) < 0,05$.
 Maak een tabel op de rekenmachine.
 Invoer: $y_1 =$ binomiaal cumulatief met $n = 40$, $p = 0,9$ en $X = x$.

17 Hypothese toetsen

g	30	31	32	33	34
$P(X \leq g)$	0,0051	0,0155	0,0419	0,0995	0,2063

$$P(X \leq 32) < 0,05$$

Het productieproces zal worden bijgesteld bij 32 of minder artikelen van onvoldoende kwaliteit.

- 16** De toetsingsgrootte $\bar{X}$ is de gemiddelde spreektijd bij 70 patiënten.

$$H_0 : \mu = 10 \text{ minuten en } H_1 : \mu > 10 \text{ minuten}$$

De standaardafwijking van $\bar{X}$ is $\sigma = 4 : \sqrt{70}$.

$$P(\bar{X} > g) = 0,05$$

Op de rekenmachine:

$$\text{Invoer: } y_1 = \text{normaal cumulatief } (x; 10^{99}; 10; 4 : \sqrt{70})$$

$$y_2 = 0,05$$

$$\text{Venster: } 10 \leq x \leq 15, 0 \leq y \leq 0,1$$

Optie: snijpunt

$$x \approx 10,79$$

Bij een steekproefgemiddelde van 10,8 minuten of meer zal de assistente concluderen dat de huisarts meer dan 10 minuten per patiënt nodig heeft.

- 013 a** De huisarts volgt 100 mensen en bij deze mensen zijn er twee uitkomsten mogelijk, wel of geen effect. Bij iedereen is er volgens de nulhypothese een kans van 0,7 op succes.

X is $\text{Bin}(100; 0,7)$ -verdeeld.

- b** De huisarts vermoedt dat dit er minder zijn.

$$\mathbf{c} \quad H_1 : p < 0,7$$

- d** Bij $p < 0,7$ verwacht je dat het aantal patiënten waarbij het dieet succes heeft kleiner dan is 70.

- e** Maak een tabel op de rekenmachine.

Invoer: $y_1 = \text{binomiaal cumulatief met } n = 100, p = 0,7 \text{ en } X = x.$

g	60	61	62	63	64	65	66	67	68
$P(X \leq g)$	0,021	0,034	0,053	0,0799	0,1161	0,1629	0,2207	0,2893	0,3669

- f** $P(X \leq 61) < 0,05$

Het kritieke gebied bevat de steekproefresultaten met 61 of minder patiënten waar het dieet succes heeft gehad. Dus bij 61 of minder patiënten krijgt de huisarts gelijk.

- U3** De toetsingsgrootte X is het aantal mensen dat nooit vlees eet.

$$H_0 : p = 0,05 \text{ en } H_1 : p > 0,05$$

X is $\text{Bin}(n; 0,05)$ -verdeeld.

Voor het kritieke gebied geldt: $P(X \geq 39) = 1 - P(X \leq 38) < 0,01$

Maak een tabel op de rekenmachine.

Invoer: $y_1 = 1 - \text{binomiaal cumulatief met } n = x, p = 0,05 \text{ en } X = 38.$

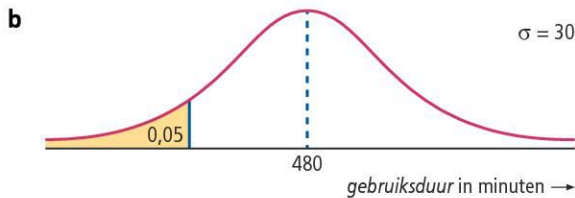
X	Y_1			
520	0.0086			
521	0.0088			
522	0.0091			
523	0.0094			
524	0.0097			
525	0.0099			
526	0.0102			
527	0.0105			
528	0.0108			
529	0.0111			
530	0.0115			
$Y_1 = 0.0099360629279$				

Marijke ondervraagt maximaal 525 inwoners.

17.4 Eenzijdige toets van het gemiddelde

intro Dit hangt af van de standaardafwijking van het gewicht van de bloemkolen.
Het gemiddelde alleen zegt niet zoveel over het gewicht van één bloemkool.

17 a X is Norm(480, 30)-verdeeld.



c 6 uur en 30 minuten is $6 \times 60 + 30 = 390$ minuten.

Op de rekenmachine:

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 390; $\mu = 480$; $\sigma = 30$

$P(X \leq 390) \approx 0,0013$

d Het valt in het kritieke gebied omdat deze kans kleiner is dan 0,05.

e Ja, dit steekproefresultaat geeft voldoende aanleiding om H_0 te verwerpen en aan de bewering van de fabrikant te twijfelen.

18 a $H_0 : \mu = 480$ minuten en $H_1 : \mu < 480$ minuten

b $E(\bar{X}) = 480$ minuten en $\sigma(\bar{X}) = 30 : \sqrt{20}$ minuten

c 7 uur en 41 minuten is $7 \times 60 + 41 = 461$ minuten

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 461)$ en $\alpha = 0,05$.

Op de rekenmachine:

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 461, $\mu = 480$, $\sigma = 30 : \sqrt{20}$

$P(\bar{X} \leq 461) \approx 0,0023$

d $0,0023 < \alpha$, dit geeft voldoende aanleiding om H_0 te verwerpen en te twijfelen aan de bewering van de fabrikant.

19 Onder H_0 is $\bar{X}$ Norm $\left(755; \frac{10}{\sqrt{100}}\right)$ -verdeeld.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 756,6)$ en $\alpha = 0,05$.

Op de rekenmachine:

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 756,6; bovengrens = 10^{99} ; $\mu = 755$; $\sigma = 1$

$P(\bar{X} \geq 756,6) \approx 0,0548$.

$0,0548 > 0,05$, dus H_0 wordt niet verworpen.

Er zit niet meer dan 755 mL in de flessen.

20 a De toetsingsgrootte $\bar{X}$ is de gemiddelde tijd in seconden bij 60 auto's.

$H_0 : \mu = 180$ seconden en $H_1 : \mu > 180$ seconden.

b De eigenaar denkt dat de tijd meer dan 180 seconden is, het is dus een rechtszijdige toets.

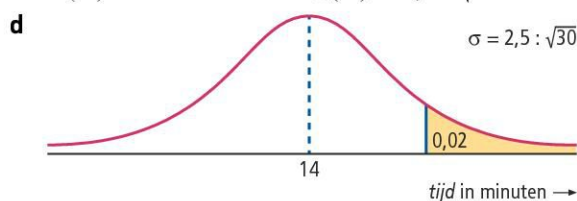
17 Hypothese toetsen

- c $\sigma(\bar{X}) = 30 : \sqrt{60}$
 $\bar{X}$ is Norm(180; $30 : \sqrt{60}$)-verdeeld.
 De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 190)$ en $\alpha = 0,05$.
 Op de rekenmachine:
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 190; bovengrens = 10^{99} ; $\mu = 180$; $\sigma = 30 : \sqrt{60}$
 $P(X \geq 190) \approx 0,0049$
 $0,0049 < \alpha$ dus H_0 wordt verworpen.
 De medewerker is inderdaad langer dan 3 minuten bezig.

- 21 a De toetsingsgrootte X is het aantal liters per 100 km.
 $H_0 : \mu = 5,41$ liter en $H_1 : \mu < 5,41$ liter
 X is Norm(5,41; 0,34) verdeeld.
 De overschrijdingskans is $P(X \leq 5,02)$ en $\alpha = 0,05$.
 Op de rekenmachine:
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} ; bovengrens = 5,02; $\mu = 5,41$; $\sigma = 0,34$
 $P(X \leq 5,02) \approx 0,1257$
 $0,1257 > \alpha$, dit is dus geen reden om H_0 te verwerpen.
 Het verbruik van Chantal is niet lager met het andere merk.
- b De toetsingsgrootte $\bar{X}$ is het gemiddelde verbruik over 10 weken.
 $\sigma(\bar{X}) = 0,34 : \sqrt{10}$
 $\bar{X}$ is Norm(5,41; 0,108) verdeeld.
 De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 5,19)$ en $\alpha = 0,05$.
 Op de rekenmachine:
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} ; bovengrens = 5,19; $\mu = 5,41$; $\sigma = 0,34 : \sqrt{10}$
 $P(\bar{X} \leq 5,19) \approx 0,0204$
 $0,0204 < \alpha$, dit is dus reden om H_0 te verwerpen.
 Chantal verbruikt met het andere merk minder brandstof.

- 020 a $H_0 : \mu = 14$ minuten en $H_1 : \mu > 14$ minuten
 b Dit is een rechtszijdige toets want Karlijn denkt dat de tijd langer is dan de nulhypothese.

- c $E(\bar{X}) = 14$ minuten en $\sigma(\bar{X}) = 2,5 : \sqrt{30}$



- e 45 seconden is $45 : 60 = 0,75$ minuut.
 f De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 14,75)$.
 g Op de rekenmachine:
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 14,75; bovengrens = 10^{99} ; $\mu = 14$; $\sigma = 2,5 : \sqrt{30}$
 $P(\bar{X} \geq 14,75) \approx 0,0502$
 $\alpha = 0,02$ en $0,0502 > \alpha$
 h Dit is dus geen reden om H_0 te verwerpen.
 Karlijn krijgt geen gelijk.

- U4** De toetsingsgrootheid T is het totale gewicht van 20 pakken bloem.
 $H_0 : T = 20\,200$ en $H_1 : T < 20\,200$
 $\sigma(T) = 10 \times \sqrt{20}$
 T is Norm($20\,200$; $10\sqrt{20}$)-verdeeld.
 De overschrijdingskans is $P(T \leq 20\,128)$ en $\alpha = 0,05$.
 Op de rekenmachine:
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = $20\,128$; $\mu = 20\,200$; $\sigma = 10\sqrt{20}$
 $P(T \leq 20\,128) \approx 0,0537$
 $0,0537 > \alpha$
 Dit is dus geen reden om H_0 te verwerpen.
 Er is geen reden om te twijfelen aan de bewering van de fabrikant.

17.5 Eenzijdig binomiaal toetsen

- intro** 80 procent van 50 kleuters zijn 40 kleuters.
 Bij 44 kinderen zal meester Gerrit waarschijnlijk gelijk hebben en bij 39 kinderen juf Anita.
- 22 a** X is het aantal vrouwen dat het geslacht van het kind wil beïnvloeden.
 $H_0 : p = 0,7$ en $H_1 : p < 0,7$
- b** Bij iedere vrouw is de kans dat ze het geslacht van het kind wil beïnvloeden 0,7. Er zijn twee mogelijkheden wel of niet.
 X is Bin(227 ; $0,7$)-verdeeld.
- c** Op de rekenmachine:
 Optie: binomiaal cumulatief met $n = 227$, $p = 0,7$ en $X = 150$
 $P(X \leq 150) \approx 0,1127$
- d** Als in een steekproef van 227 vrouwen er 150 het geslacht van het kind willen beïnvloeden is er geen reden om aan de bewering van de socioloog te twijfelen.
- 23** X is Bin(300 , $0,03$)-verdeeld.
 $P(X \geq 18) = 1 - P(X \leq 17)$
 Optie: binomiaal cumulatief met $n = 300$, $p = 0,03$ en $X = 17$
 $P(X \geq 18) \approx 1 - 0,9954 = 0,0046$
 $0,0046 < \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.
 Er zijn te veel pakken met een te laag gewicht.
- 24** De toetsingsgrootheid X is het aantal patiënten met bloedgroep A.
 $H_0 : p = 0,424$ en $H_1 : p > 0,424$
 X is onder H_0 Bin(238 ; $0,424$)-verdeeld.
 De overschrijdingskans is $P(X \geq 117) = 1 - P(X \leq 116)$ en $\alpha = 0,025$.
 Op de rekenmachine:
 Optie: binomiaal cumulatief met $n = 238$, $p = 0,424$ en $X = 116$.
 $P(X \geq 117) = 1 - P(X \leq 116) \approx 1 - 0,9791 = 0,0209$
 $0,0209 < \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.
 Het percentage patiënten met bloedgroep A is groter onder de lijdens met de maagziekte.

17 Hypothese toetsen

- 25** De toetsingsgrootte X is het aantal keren groen.

$$H_0 : p = \frac{1}{6} \text{ en } H_1 : p < \frac{1}{6}$$

X is onder H_0 $\text{Bin}\left(60; \frac{1}{6}\right)$ -verdeeld.

Het significantieniveau $\alpha = 0,1$.

De overschrijdingskans $P(X \leq g)$ is kleiner dan 0,1.

Maak een tabel op de rekenmachine.

Invoer: $y_1 = \text{binomiaal cumulatief}\left(60; \frac{1}{6}, x\right)$

Bij hoogstens vijf keer groen is er voldoende aanleiding om te twifelen aan de eerlijkheid van de dobbelsteen.

X	Y1			
0	1.8E-5			
1	2.3E-4			
2	0.0015			
3	0.0063			
4	0.0202			
5	0.0512			
6	0.1081			
7	0.1958			
8	0.312			
9	0.4464			
10	0.5834			
Y1=0.05120828972015				

- 26 a** Dit is een linkszijdige toets want het decanaat denkt dat het percentage lager ligt.

- b** De toetsingsgrootte X is het aantal leerlingen wat nog niet weet wat ze willen gaan studeren..

$$H_0 : p = \frac{2}{3} \text{ en } H_1 : p < \frac{2}{3}$$

X is onder H_0 $\text{Bin}\left(15; \frac{2}{3}\right)$ -verdeeld.

Het significantieniveau $\alpha = 0,05$.

De overschrijdingskans is $P(X \leq 7)$.

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 15$, $p = \frac{2}{3}$ en $X = 7$.

$$P(X \leq 7) = 0,0882$$

$0,0882 > \alpha$, H_0 wordt niet verworpen.

Er is geen reden om te twifelen aan de bewering in de krant.

- c** X is onder H_0 $\text{Bin}\left(60; \frac{2}{3}\right)$ -verdeeld.

Het significantieniveau $\alpha = 0,05$.

De overschrijdingskans is $P(X \leq 31)$.

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 60$, $p = \frac{2}{3}$ en $X = 31$.

$$P(X \leq 31) = 0,0114$$

$0,0114 < \alpha$, H_0 wordt nu wel verworpen.

Dan is er reden om te twifelen aan de bewering in de krant.

- 27 a** De toetsingsgrootte X is het aantal keer 'jackpot'.

$$H_0 : p = \frac{1}{8} \text{ en } H_1 : p < \frac{1}{8}$$

Het is een linkszijdige toets. 10 van de 56 keer is meer dan de verwachte $\frac{1}{8} \times 56 = 7$ keer 'jackpot'.

Deze uitslag geeft dus geen reden om te twifelen aan H_0 .

- b** X is onder H_0 $\text{Bin}\left(56; \frac{1}{8}\right)$ -verdeeld.

Het significantieniveau $\alpha = 0,05$.

De overschrijdingskans is $P(X \leq 3)$.

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 56$, $p = \frac{1}{8}$ en $X = 3$.

$$P(X \leq 3) \approx 0,0686$$

$0,0686 > \alpha$, H_0 wordt niet verworpen.

Er is geen reden om te twifelen aan de eerlijkheid van het rad.

- 024 a** $H_1 : p > 0,35$

- b** De verwachtingswaarde is $0,35 \times 300 = 105$ klanten.

- c** De chef-kok verwacht dat er meer zijn dan 105 klanten die kiezen voor het lopend buffet, het kritieke gebied ligt dus ook boven 105.

Bij 116 klanten bereken je dus de kans $P(X \geq 116)$.

d $P(X \geq 116) = 1 - P(X \leq 115)$

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 300$, $p = 0,35$ en $X = 115$.

$$P(X \geq 116) \approx 1 - 0,8975 = 0,1025$$

Deze kans is groter dan 0,05.

- e Er is niet genoeg aanleiding om de bewering van de restauranteigenaar in twijfel te trekken.

U5 X is $\text{Bin}(n; 0,65)$ -verdeeld.

Voor het kritieke gebied geldt: $P(X \geq 143) = 1 - P(X \leq 142) < 0,05$

Maak een tabel op de rekenmachine.

Invoer: y_1 = binomiaal cumulatief met $n = x$, $p = 0,65$ en $X = 142$.

$y_2 = 1 - \text{binomiaal cumulatief met } n = x, p = 0,65 \text{ en } X = 142$.

X	Y ₁	Y ₂		
200	0.9695	0.0305		
201	0.9616	0.0384		
202	0.9522	0.0478		
203	0.9411	0.0589		
204	0.9282	0.0718		
205	0.9133	0.0867		
206	0.8963	0.1037		
207	0.8772	0.1228		
208	0.8559	0.1441		
209	0.8325	0.1675		
210	0.8068	0.1932		
Y ₂ =0.04778251823264				

De maximale steekproef is dus 202.

17.6 Tweezijdig toetsen

intro Je weet niet of het eten van bananen misschien een positief of negatief effect heeft. Dus beide alternatieve hypothesen kunnen waar zijn.

- 28 a** 95% heeft een gewicht tussen $\mu - 2 \cdot \sigma$ en $\mu + 2 \cdot \sigma$.

$$\mu - 2 \cdot \sigma = 515 - 2 \times 8 = 499 \text{ gram en } \mu + 2 \cdot \sigma = 515 + 2 \times 8 = 531 \text{ gram}$$

- b** De medewerker weet niet of na de storing er te veel of te weinig rijst in de pakken wordt gedaan.
c In beide gevallen is de instelling van de machine niet goed.
d Het significantie niveau van kritieke gebied is 0,05. Dus elk van de delen heeft een significantieniveau van $\frac{1}{2} \times 0,05 = 0,025$.

- 29** $H_0 : p = 0,4$ en $H_1 : p \neq 0,4$

X is $\text{Bin}(80; 0,4)$ -verdeeld.

Het significantieniveau is $\alpha = 0,05$.

24 is minder dan verwacht.

De overschrijdingskans is $P(X \leq 24)$

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 80$, $p = 0,4$ en $X = 24$.

$$P(X \leq 24) \approx 0,0417$$

$0,0417 > \frac{1}{2} \alpha$, de conclusie is nu dat de kans op bull's eye niet is veranderd.

17 Hypothese toetsen

- 30** De toetsingsgrootte $\bar{X}$ is de gemiddelde hoek van 80 koplampen.

$H_0 : \mu = 2$ graden en $H_1 : \mu \neq 2$ graden

De standaardafwijking van $\bar{X}$ is $\sigma = 0,25 : \sqrt{80}$

$\bar{X}$ is Norm(2; $0,25 : \sqrt{80}$) verdeeld.

Het significantieniveau is $\alpha = 0,1$

$1,94^\circ$ is minder dan 2° , de overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 1,94)$.

Op de rekenmachine:

Optie: Normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 1,94; $\mu = 2$; $\sigma = 0,25 : \sqrt{80}$

$P(\bar{X} \leq 1,94) \approx 0,0159$

$0,0159 < \frac{1}{2} \alpha$, dit is dus reden om H_0 te verwerpen.

De gemiddelde hoek is niet gelijk aan 2° .

- 31** De toetsingsgrootte X is het aantal roze bloemen.

$H_0 : p = 0,25$ en $H_1 : p \neq 0,25$

X is Bin(76; 0,25)-verdeeld.

Het significantieniveau is $\alpha = 0,1$.

Het is een tweezijdige toets dus voor het kritieke gebied geldt dat

$P(X \leq g_{links}) < 0,05$ en $P(X \geq g_{rechts}) < 0,05$

Maak een tabel op de rekenmachine.

Invoer: $y_1 =$ binomiaal cumulatief (76, 0,25, x)

$P(X \leq 12) < 0,05$

$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) \approx 1 - 0,9246 = 0,0754$

$P(X \geq 26) = 1 - P(X \leq 25) \approx 1 - 0,9541 = 0,0459$

Het kritieke gebied is dus $X \leq 12$ en $X \geq 26$.

Bij 13 tot en met 25 roze bloemen trekt hij de conclusie dat de wet van Mendel geldt.

X	Y1				
10	0.0088				
11	0.0192				
12	0.0378				
13	0.0685				
14	0.1144				
15	0.1777				
16	0.2581				
17	0.3527				
18	0.4561				
19	0.5612				
20	0.6612				
Y1=0.03783690735956					

X	Y1				
20	0.6612				
21	0.75				
22	0.824				
23	0.8819				
24	0.9246				
25	0.9541				
26	0.9735				
27	0.9854				
28	0.9923				
29	0.9962				
30	0.9982				
Y1=0.95412561510197					

- 32 a** De toetsingsgrootte A is het aantal korrels van stof A.

Van de korrels hoort 20% stof A te zijn.

$H_0 : p = 0,2$ en $H_1 : p \neq 0,2$

Het totaal aantal korrels is $114 + 43 = 157$.

A is Bin(157; 0,2)-verdeeld.

Het significantieniveau is $\alpha = 0,05$.

De verwachtingswaarde is $0,2 \times 157 = 31,4$

43 is meer dan verwacht, de overschrijdingskans is $P(X \geq 43)$.

$P(X \geq 43) = 1 - P(X \leq 42)$

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 157$, $p = 0,2$ en $X = 42$.

$P(X \geq 43) \approx 1 - 0,9842 = 0,0158$

$0,0158 < \frac{1}{2} \alpha$, de mengverhouding is dus niet goed.

- b** De toetsingsgrootte B is het aantal korrels B.

Van de korrels hoort 80% stof B te zijn.

$H_0 : p = 0,8$ en $H_1 : p \neq 0,8$

B is Bin(120; 0,8)-verdeeld.

Het significantieniveau is $\alpha = 0,05$.

Het is een tweezijdige toets dus voor het kritieke gebied geldt dat

$P(B \leq g_{links}) < 0,025$ en $P(B \geq g_{rechts}) < 0,025$

Maak een tabel op de rekenmachine.

Invoer: y_1 = binomiaal cumulatief (120, 0,8, x)

X	Y_1			
80	4.2E-4			
81	8.6E-4			
82	0.0017			
83	0.0032			
84	0.0059			
85	0.0105			
86	0.0179			
87	0.0296			
88	0.047			
89	0.0721			
90	0.1067			
$Y_1=0.01794187334636$				

X	Y_1			
100	0.8483			
101	0.8981			
102	0.9353			
103	0.9612			
104	0.9782			
105	0.9886			
106	0.9944			
107	0.9975			
108	0.999			
109	0.9996			
110	0.9999			
$Y_1=0.97821062767032$				

$$P(B \leq 86) < 0,025$$

$$P(B \geq 104) = 1 - P(B \leq 103) \approx 1 - 0,9612 = 0,0388$$

$$P(B \geq 105) = 1 - P(B \leq 104) \approx 1 - 0,9782 = 0,0218$$

Het kritieke gebied is dus $B \leq 86$ en $B \geq 105$,

Bij 87 tot en met 104 korrels van stof B wordt de mengverhouding goedgekeurd.

33 a De toetsingsgrootheid $\bar{X}$ is de gemiddelde weerstand van 30 exemplaren.

$$H_0: \mu = 12000 \text{ ohm en } H_1: \mu \neq 12000 \text{ ohm}$$

$$\text{De standaardafwijking van } \bar{X} \text{ is } \sigma = 0,005 \times 12000 : \sqrt{30}$$

$\bar{X}$ is Norm(12000; $60 : \sqrt{30}$)-verdeeld.

Het significantieniveau is $\alpha = 0,03$

De gemiddelden zijn hoger dan verwacht, de hoogste waarde is 12019,1.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 12019,1)$.

Op de rekenmachine:

Optie: normaal cumulatief

$$\text{ondergrens} = 12019,1, \text{bovengrens} = 10^{99}; \mu = 12000; \sigma = 60 : \sqrt{30}$$

$$P(\bar{X} \geq 12019,1) \approx 0,0406$$

$$0,0406 > \frac{1}{2} \alpha, \text{ dit is dus geen reden om } H_0 \text{ te verwerpen.}$$

Er is geen enkel uur reden geweest de machine opnieuw af te stellen.

b De toetsingsgrootheid $\bar{Y}$ is de gemiddelde weerstand van 90 exemplaren.

Het gemiddelde van de 90 geteste weerstanden is

$$(12019,1 + 12011,6 + 12012,8) : 3 = 12014,5.$$

$$\text{De standaardafwijking van } \bar{Y} \text{ is } \sigma = 0,005 \times 12000 : \sqrt{90}$$

$\bar{Y}$ is Norm(12000; $60 : \sqrt{90}$)-verdeeld.

Het significantieniveau is $\alpha = 0,03$

De overschrijdingskans is $P(\bar{Y} \geq 12014,5)$.

Op de rekenmachine:

Optie: normaal cumulatief

$$\text{ondergrens} = 12014,5, \text{bovengrens} = 10^{99}; \mu = 12000; \sigma = 60 : \sqrt{90}$$

$$P(\bar{Y} \geq 12014,5) \approx 0,0109$$

$$0,0109 < \frac{1}{2} \alpha, \text{ dit is dus reden om } H_0 \text{ te verwerpen.}$$

Nu is de conclusie dat het gemiddelde afwijkt van de aangegeven 12000 ohm.

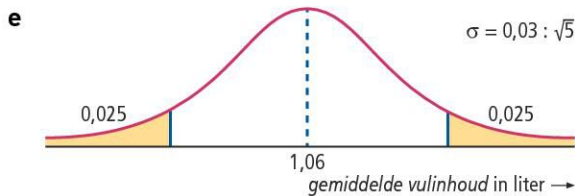
030 a Het vermoeden is dat het gemiddelde niet klopt. Er is geen sprake van meer of minder dan 1,06 liter.

b $H_0: \mu = 1,06 \text{ liter en } H_1: \mu \neq 1,06 \text{ liter}$

c De nulhypothese wordt verworpen bij te veel en bij te weinig verf.

d Het significantieniveau van het kritieke gebied is 0,05. Dus elk van de delen heeft een significantieniveau van $\frac{1}{2} \times 0,05 = 0,025$.

17 Hypothese toetsen



- f De standaardafwijking van $\bar{X}$ is $\sigma = 0,03 : \sqrt{5}$.
- g 1,03 liter is minder dan 1,06 liter.
De overschrijdingskans is dus $P(\bar{X} \leq 1,03)$.
- h Op de rekenmachine:
Optie: normaal cumulatief
ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 1,03; $\mu = 1,06$; $\sigma = 0,03 : \sqrt{5}$
 $P(\bar{X} \leq 1,03) \approx 0,0127$
- i $0,0127 < \frac{1}{2} \alpha$, dit is dus reden om H_0 te verwerpen.
Het aangegeven gemiddelde klopt niet.

U6

Mart:

De toetsingsgrootte $\bar{X}$ is de gemiddelde inhoud van 25 pakken.

$H_0 : \mu = 504$ gram en $H_1 : \mu > 504$ gram

De standaardafwijking van $\bar{X}$ is $\sigma = 2 : \sqrt{25} = 0,4$ gram.

$\bar{X}$ is Norm(504; 0,4) verdeeld.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 504,5)$.

Op de rekenmachine:

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 504,5, bovengrens = 10^{99} ; $\mu = 504$; $\sigma = 0,4$

Dit geeft 0,1056 en deze kans moet groter zijn dan α .

Conclusie van Mart: $\alpha \leq 0,10$.

Gijs:

De toetsingsgrootte $\bar{Y}$ is de gemiddelde inhoud van 75 pakken.

$H_0 : \mu = 504$ gram en $H_1 : \mu \neq 504$ gram

De standaardafwijking van $\bar{Y}$ is $\sigma = 2 : \sqrt{75}$

$\bar{X}$ is Norm(504; $2 : \sqrt{75}$) verdeeld.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 504,5)$.

Op de rekenmachine:

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 504,5, bovengrens = 10^{99} ; $\mu = 504$; $\sigma = 2 : \sqrt{75}$

Dit geeft 0,0152 en deze kans moet kleiner zijn dan $\frac{1}{2} \alpha$.

Dus $\alpha \geq 0,03$.

Het significantieniveau lag tussen 0,03 en 0,10.

17.7 Gemengde opdrachten

- 34 a De toetsingsgrootte X is Bin(200; 0,6)-verdeeld.
Het kritieke gebied is $P(X \geq 132)$.
 $P(X \geq 132) = 1 - P(X \leq 131)$
Op de rekenmachine:
Optie: binomiaal cumulatief met $n = 131$, $p = 0,6$ en $X = 131$.
 $P(X \geq 132) \approx 1 - 0,9525 = 0,0475$
De kans op een fout van de 1e soort is 0,0475.

- b Maak een tabel op de rekenmachine.

Invoer: $y_1 = 1 - \text{binomiaal cumulatief } (200, 0.6, x)$

X	Y1			
125	0.2142			
126	0.1742			
127	0.1393			
128	0.1094			
129	0.0844			
130	0.0639			
131	0.0475			
132	0.0346			
133	0.0247			
134	0.0173			
135	0.0119			
$Y_1=0.06390257180619$				

$$P(X \geq 130) = 1 - P(X \leq 129) \approx 0,0844$$

$$P(X \geq 131) = 1 - P(X \leq 130) \approx 0,0639$$

Dus bij $g = 130$ is het significantieniveau 8%.

- 35 a De toetsingsgrootheid X is het aantal inwoners dat voor de milieuzone is.

$$H_0 : p = 0,7 \text{ en } H_1 : p < 0,7$$

X is $\text{Bin}(500; 0,7)$ -verdeeld.

Het significantieniveau is 0,05.

De overschrijdingskans is $P(X \leq 337)$.

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 500$, $p = 0,7$ en $X = 337$.

$$P(X \leq 337) \approx 0,1118$$

Er is geen reden om H_0 te verwerpen. De automobiellclub krijgt geen gelijk.

- b De toetsingsgrootheid Y is het aantal leden van de winkeliersvereniging die tegen het voorstel van de gemeente is.

$$H_0 : p = 0,6 \text{ en } H_1 : p < 0,6$$

Y is $\text{Bin}(40; 0,6)$ -verdeeld.

De overschrijdingskans $P(X \leq g) < 0,1$.

Maak een tabel op de rekenmachine.

Invoer: $y_1 = \text{binomiaal cumulatief } (40, 0.6, x)$

X	Y1			
13	4E-4			
14	0.0012			
15	0.0034			
16	0.0083			
17	0.0189			
18	0.0392			
19	0.0744			
20	0.1298			
21	0.2089			
22	0.3115			
23	0.4319			
$Y_1=0.07435155708477$				

Bij 19 of minder tegenstanders zal het bestuur geen verder onderzoek doen.

- 36 De toetsingsgrootheid $\bar{X}$ is het gemiddeld aantal nesten.

$$H_0 : \mu = 143 \text{ nesten en } H_1 : \mu \leq 143 \text{ nesten}$$

De standaardafwijking van $\bar{X}$ is $\sigma = 19 : \sqrt{4} = 9,5$.

$\bar{X}$ is $\text{Norm}(143; 9,5)$ -verdeeld.

Het significantieniveau is $\alpha = 0,10$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 129,5)$.

Op de rekenmachine:

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 129,5; $\mu = 143$; $\sigma = 9,5$

$$P(\bar{X} \leq 129,5) \approx 0,0777$$

$0,0777 < \alpha$, dit is dus reden om H_0 te verwerpen.

Het aantal nesten is afgenomen, de openstelling heeft een negatieve invloed gehad.

17 Hypothese toetsen

Onderzoeksoopdrachten

- 37 a** Het is een meisjeslijst dus $\mu = 168,0$.
 De standaardafwijking bij $n = 25$ is $\sigma = 7 : \sqrt{25} = 1,4$.
 Bij een gemiddelde groter dan 171 cm besluit de statisticus tot een jongenslijst. Dus je berekent $P(\bar{X} > 171)$.
 Op de rekenmachine:
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 171, bovengrens = 10^{99} ; $\mu = 168$; $\sigma = 1,4$
 $P(\bar{X} > 171) \approx 0,0161$
- b** Het is nu een jongenslijst dus $\mu = 174$
 De standaardafwijking bij $n = 25$ is ook $\sigma = 7 : \sqrt{25} = 1,4$
 Bij een gemiddelde kleiner dan 171 cm besluit de statisticus (ten onrechte) dat het een jongenslijst is. Dus je berekent $P(\bar{X} < 171)$.
 Op de rekenmachine:
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 171; $\mu = 174$; $\sigma = 1,4$
 $P(\bar{X} < 171) \approx 0,0161$
- c** Vanwege symmetrie zijn beide kansen gelijk.
 Op de rekenmachine:
 Invoer: $y_1 = \text{normaalcumulatief}(-10^{99}, 171, 174, s)$
 $y_2 = 0,01$
 Venster: $0,5 \leq x \leq 1,5$, $0 \leq y \leq 0,02$
 Optie: snijpunt
 $x \approx 1,29$
 $6 : \sqrt{n} = 1,29$
 $\sqrt{n} = 6 : 1,29$
 $n = (6 : \sqrt{1,29})^2 \approx 27,9$
 n moet dus minimaal 28 zijn om de kans op een foute beslissing kleiner dan 0,01 te maken.
- 38** Totaal zijn er $335 + 76 = 411$ proefpersonen die geen vitamine C hebben geslikt.
 De kans dat je niet verkouden wordt is dus $\frac{76}{411}$.
 $H_0 : p = \frac{76}{411}$ en $H_1 : p > \frac{76}{411}$
 Er zijn 407 proefpersonen die vitamine C hebben gebruikt.
 Van deze proefpersonen zijn er 105 niet verkouden geworden.
 De vraag is hier of die 105 significant meer is dan het verwachte aantal.
 X is het aantal proefpersonen met vitamine C die niet verkouden zijn geworden.
 X is $\text{Bin}\left(407, \frac{76}{411}\right)$ -verdeeld.
 het significantieniveau is 0,05.
 $P(X \geq 105) = 1 - P(X \leq 104)$
 Op de rekenmachine:
 Optie: binomiaal cumulatief met $n = 407$, $p = \frac{76}{411}$ en $X = 104$.
 $P(X \geq 105) \approx 1 - 0,9998 = 0,0002$
 $0,0002 < \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.
 Er is voldoende reden om aan te nemen dat vitamine C helpt bij het voorkomen van verkoudheid.

Samenvatting

- S1 a** Toetsingsgrootheid X is het aantal keren 10 tot en met 16 gooien.
- b** X is $\text{Bin}(100, \frac{7}{16})$ -verdeeld, met $H_0 : p = \frac{7}{16}$ en $H_1 : p > \frac{7}{16}$.
- S2 a** De kans op een rode knikker is $\frac{1}{2}$ maar je besluit op grond van de steekproef dat de kans op een rode knikker groter is dan $\frac{1}{2}$.
- b** Bij een fout van de tweede soort besluit je dat H_0 waar is dus de kans op een rode knikker is $\frac{1}{2}$ terwijl de kans op een rode knikker groter is dan $\frac{1}{2}$.

- S3** De toetsingsgrootheid X is het aantal keren met antwoord C.

$$H_0 : p = \frac{1}{4} \text{ en } H_1 : p > \frac{1}{4}$$

X is $\text{Bin}(83, \frac{1}{4})$ -verdeeld.

$$P(X \geq g) < 0,05$$

Maak een tabel met de rekenmachine.

Invoer: y_1 = binomiaal cumulatief met $n = 83$, $p = 0,25$ en $X = x$

X	Y1			
21	0.5833			
22	0.6773			
23	0.7605			
24	0.8297			
25	0.8842			
26	0.9247			
27	0.9533			
28	0.9723			
29	0.9843			
30	0.9915			
31	0.9956			
Y1=0.9532584317123				

$$P(X \geq 27) = 1 - 0,9247 = 0,0753 \text{ en } P(X \geq 28) = 1 - 0,9533 = 0,0467$$

Bij 28 of meer zal Karlijn de conclusie trekken dat antwoord C vaker voorkomt.

- S4** De toetsingsgrootheid X is het aantal kiezers dat op de DPI gaat stemmen.

$$H_0 : p = 0,40 \text{ en } H_1 : p < 0,40$$

X is $\text{Bin}(1000; 0,4)$ -verdeeld.

De overschrijdingskans is $P(X \leq 369)$.

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 1000$, $p = 0,4$ en $X = 369$

$$P(X \leq 369) = 0,0241$$

De overschrijdingskans bij 369 DPI-stemmers is 0,0241.

- S5** De toetsingsgrootheid X is de gemiddelde snelheid van 100 automobilisten.

$$H_0 : \mu = 80,6 \text{ km per uur en } H_1 : \mu > 80,6 \text{ km per uur}$$

De standaardafwijking van $\bar{X}$ is $3,8 : \sqrt{100} = 0,38 \text{ km per uur}$.

$\bar{X}$ is $\text{Norm}(80,6; 0,38)$ - verdeeld.

Het significantieniveau is 0,05.

Op de rekenmachine:

Optie: normaal cumulatief

$$\text{ondergrens} = 81,5, \text{ bovengrens} = 10^{99}, \mu = 80,6 \text{ en } \sigma = 0,38$$

$$P(X > 81,5) = 0,0089$$

Deze kans is kleiner dan 0,05.

Dit geeft dus voldoende aanleiding om te veronderstellen dat er harder dan 80,6 km per uur wordt gereden.

17 Hypothese toetsen

- S6** De toetsingsgrootte X is het aantal keren dat het balletje op groen komt.
 $H_0 : p = \frac{1}{37}$ en $H_1 : p > \frac{1}{37}$
 X is $\text{Bin}\left(180, \frac{1}{37}\right)$ -verdeeld.
 Het significantieniveau is 0,02.
 $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$
 Op de rekenmachine:
 Optie: binomiaal cumulatief met $n = 180$, $p = \frac{1}{37}$ en $X = 7$
 $P(X \geq 8) = 1 - 0,8832... \approx 0,1167$
 $0,1167 > \alpha$, er is dus geen reden om te veronderstellen dat het balletje te vaak op groen komt.
- S7** De toetsingsgrootte X is het gewicht van de inhoud van de zakjes puddingpoeder.
 $H_0 : \mu = 100,5$ gram en $H_1 : \mu \neq 100,5$ gram
 De standaardafwijking van $\bar{X} = 3 : \sqrt{100} = 0,3$ gram.
 $\bar{X}$ is $\text{Norm}(100,5; 0,3)$ -verdeeld.
 Het significantieniveau is 0,05.
 101,1 gram is meer dan 100,5 gram dus je berekent de overschrijdingskans $P(\bar{X} > 101,1)$.
 Op de rekenmachine:
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 101,1; bovengrens = 10^{99} , $\mu = 100,5$ en $\sigma = 0,3$
 $P(\bar{X} > 101,1) = 0,0227... \text{ en } 0,0227... < \frac{1}{2} \alpha$.
 De kans dat het gemiddelde gewicht 101,1 gram is, is kleiner dan $\frac{1}{2} \alpha$.
 Er is dus reden om de bewering van de productie-leider in twijfel te trekken.
- Test jezelf**
- T1** **a** $H_0 : p = 0,8$ en $H_1 : p < 0,8$
b X is $\text{Bin}(50; 0,8)$ -verdeeld.
c 42 van de 50 is meer dan 80%, er is dus geen reden om te veronderstellen dat minder dan 80% de voorkeur geeft aan wit brood.
d De overschrijdingskans is $P(X \leq 35)$.
 Op de rekenmachine:
 Optie: binomiaal cumulatief met $n = 50$, $p = 0,8$ en $X = 35$
 $P(X \leq 35) = 0,0607$
 De kans dat er ten onrechte minder wit brood wordt geserveerd is 0,0607.
- T2** De toetsingsgrootte $\bar{X}$ is de gemiddelde lengte van de vuilniszakken.
 $H_0 : \mu = 40$ cm en $H_1 : \mu \neq 40$ cm
 De standaardafwijking van $\bar{X}$ is $0,4 : \sqrt{30}$ cm.
 $\bar{X}$ is $\text{Norm}(40; 0,0730...)$ -verdeeld.
 Het significantieniveau is 0,05.
 39,86 cm is minder dan 40 cm, dus je berekent de overschrijdingskans $P(\bar{X} < 39,86)$.

Op de rekenmachine:

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 39,86, $\mu = 40$ en $\sigma = 0,4 : \sqrt{30}$

$P(\bar{X} < 39,86) \approx 0,0276$ en $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} \cdot 0,05 = 0,025$

$P(\bar{X} < 39,86)$ is groter dan $\frac{1}{2}\alpha$, dus geen reden om te twijfelen aan het gemiddelde waarop van de machine is ingesteld.

T3 a De toetsingsgrootte is het aantal ondeugdelijke producten.

Dus daarom is $H_0 : p = 0,06$ en $H_1 : p > 0,06$.

b Onder H_0 is $X \text{ Bin}(100; 0,06)$ -verdeeld.

De kans op een fout van de eerste soort is $P(X \geq 10)$ onder H_0 .

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 100$, $p = 0,06$ en $X = 10$

$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - 0,9225 = 0,0775$

De kans dat H_0 ten onrechte wordt verworpen is 0,0775.

c Bij een fout van de tweede soort krijgt de fabrikant gelijk terwijl de consument gelijk heeft. Er zijn dus meer dan 6% producten ondeugdelijk.

d $P(X \geq g) < 0,05$

Maak een tabel met de rekenmachine.

Invoer: y_1 = binomiaal cumulatief met $n = 100$, $p = 0,06$ en $X = x$

X	Y_1			
5	0.4407			
6	0.6064			
7	0.7483			
8	0.8537			
9	0.9225			
10	0.9624			
11	0.9832			
12	0.9931			
13	0.9974			
14	0.9991			
15	0.9997			
$Y_1=0.96239322745985$				

$P(X \leq 9) = 0,9225$ dus $P(X \geq 10) = 0,0775$

$P(X \leq 10) = 0,9624$ dus $P(X \geq 11) = 0,0376$

Het kritieke gebied is dus bij $X \geq 11$.

e Acht ligt niet in het kritieke gebied, er is dus geen reden om H_0 te verwerpen.

De fabrikant krijgt gelijk.

T4 De toetsingsgrootte $\bar{X}$ is de gemiddelde lengte van 16 jonge mannen..

$H_0 : \mu = 180,1$ cm en $H_1 : \mu > 180,1$ cm

De standaardafwijking van $\bar{X}$ is $7,2 : \sqrt{16} = 1,8$ cm.

$\bar{X}$ is Norm(180,1; 1,8)- verdeeld.

Het significantieniveau is 0,05.

Op de rekenmachine:

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 182,6, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 180,1$ en $\sigma = 1,8$

$P(X > 182,6) = 0,0824$

$0,0824 > \alpha$, dit geeft geen aanleiding om de onderzoeker gelijk te geven.

17 Hypothese toetsen

- T5** $H_0 : \mu = 199$ en $H_1 : \mu \neq 199$
 De standaardafwijking van $\bar{X} = 8,5 : \sqrt{60}$.
 $\bar{X}$ is Norm(199; 8,5 : $\sqrt{60}$).
 Het significantieniveau is 0,04.
 196,8 is kleiner dan 199, de overschrijdingskans is $P(\bar{X} < 196,8)$.
 Op de rekenmachine:
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 196,8; $\mu = 199$ en $\sigma = 8,5 : \sqrt{60}$
 $P(\bar{X} < 196,8) = 0,0224\dots$
 $0,0224\dots > \frac{1}{2} \alpha$, H_0 zal dus niet verworpen worden.
- T6 a** Deze toets is eenzijdig want je toetst of er minder dan 90% van de ballen goed zijn.
- b** $H_0 : p = 0,9$ en $H_1 : p < 0,9$
- c** Het verwachte aantal goede ballen is $0,9 \times 140 = 126$.
 Er worden $140 - 23 = 117$ ballen goedgekeurd.
 De toetsingsgrootte X is het aantal goedgekeurde ballen.
 X is Bin(140; 0,9)-verdeeld.
 Het significantieniveau is 0,05.
 De overschrijdingskans is $P(X \leq 117)$
 Op de rekenmachine:
 Optie: binomiaal cumulatief met $n = 140$, $p = 0,9$ en $X = 117$
 $P(X \leq 117) = 0,0120$
 $0,0120 < \alpha$, H_0 wordt verworpen.
 Er is reden om actie te ondernemen.
- d** Nu worden er $140 - 18 = 122$ ballen goedgekeurd.
 De overschrijdingskans is $P(X \leq 122)$.
 Op de rekenmachine:
 Optie: binomiaal cumulatief met $n = 140$, $p = 0,9$ en $X = 122$
 $P(X \leq 122) = 0,1613$
 $0,1613 > \alpha$, H_0 wordt nu niet verworpen.
 Er is dus geen reden om actie te ondernemen.

Extra oefening

- E1** De toetsingsgrootte $\bar{X}$ is het gemiddelde vulgewicht van de kuipjes.
 $H_0 : \mu = 250,5$ gram en $H_1 : \mu < 250,5$ gram
 De standaardafwijking van $\bar{X}$ is $2,5 : \sqrt{100} = 0,25$ gram.
 $\bar{X}$ is Norm(250,5; 0,25)- verdeeld.
 Het significantieniveau is 0,01.
 De overschrijdingskans is $P(\bar{X} < 249,5)$.
 Op de rekenmachine:
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 249,5, $\mu = 250,5$ en $\sigma = 0,25$
 $P(\bar{X} < 249,5) = 0,00003$
 $0,00003 < \alpha$
 Dit geeft dus aanleiding om te twijfelen aan het opgegeven gemiddelde.

E2 De toetsingsgrootte X is het aantal cliënten dat ten onrechte een uitkering krijgt.

$$H_0 : p = 0,1 \text{ en } H_1 : p > 0,1$$

X is $\text{Bin}(400; 0,1)$ -verdeeld.

Het significantieniveau is 0,05.

De overschrijdingskans is $P(X \geq 48) = 1 - P(X \leq 47)$.

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 400$, $p = 0,1$ en $X = 47$

$$P(X \geq 48) = 1 - 0,8924 = 0,1076$$

$$0,1076 > \alpha$$

Er is dus geen aanleiding om te twijfelen aan de bewering van de uitkeringsinstantie.

E3 De toetsingsgrootte X is het aantal keren acht gooien.

$$H_0 : p = \frac{1}{12} \text{ en } H_1 : p \neq \frac{1}{12}$$

X is $\text{Bin}(300; \frac{1}{12})$ -verdeeld.

Het significantieniveau is 0,075.

Het verwachte aantal keren acht is $\frac{1}{12} \times 300 = 25$.

De overschrijdingskans is dus $P(X \geq 34) = 1 - P(X \leq 33)$

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 300$, $p = \frac{1}{12}$ en $X = 33$

$$P(X \geq 34) = 1 - 0,9575 = 0,0425$$

$$\frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \times 0,075 = 0,0375$$

$$0,0425 > \frac{1}{2} \alpha$$

Er is dus geen reden om te denken dat de kans op een acht niet gelijk is aan $\frac{1}{12}$.

E4 a Je verwacht $0,02 \times 1000 = 20$ indianen met psoriasis.

b De toetsingsgrootte X is het aantal indianen met psoriasis.

$$H_0 : p = 0,02 \text{ en } H_1 : p < 0,02$$

X is $\text{Bin}(1000; 0,02)$ -verdeeld.

$$P(X \leq g) < 0,05$$

Maak een tabel met de rekenmachine.

Invoer: y_1 = binomiaal cumulatief met $n = 1000$, $p = 0,02$ en $X = x$

X	Y1			
10	0.0102			
11	0.0204			
12	0.0376			
13	0.0642			
14	0.1025			
15	0.1539			
16	0.2185			
17	0.2947			
18	0.3797			
19	0.4694			
20	0.5591			
Y1=0.03760480992731				

$$P(X \leq 12) = 0,0376$$

$$P(X \leq 13) = 0,0642$$

Het kritieke gebied is $X \leq 12$.

Dit betekent dat bij 12 of minder indianen zonder psoriasis in de steekproef ervan uit gegaan mag worden dat psoriasis minder vaak voorkomt.

17 Hypothese toetsen

E5 De toetsingsgrootte X is het aantal voorspellingen met droog weer.

$$H_0 : p = 0,8 \text{ en } H_1 : p \neq 0,8$$

X is $\text{Bin}(30; 0,8)$ -verdeeld.

Het kritieke gebied bestaat uit twee delen. Het percentage kan kleiner of groter zijn dan 80%. Voor beide delen geldt dat de overschrijdingskans $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} \times 0,10 = 0,05$ is.

Voor het linker gebied geldt $P(X \leq g_l) < 0,05$ en voor het rechter gebied geldt $P(X \geq g_r) < 0,05$.

Maak een tabel met de rekenmachine.

Invoer: y_1 = binomiaal cumulatief met $n = 30$, $p = 0,8$ en $X = x$

X	Y1			
19	0.0256			
20	0.0611			
21	0.1287			
22	0.2392			
23	0.393			
24	0.5725			
25	0.7448			
26	0.8773			
27	0.9558			
28	0.9895			
29	0.9988			
Y1=0.02561625563045				

$$P(X \leq 19) = 0,0256 \text{ en } P(X \leq 20) = 0,0611$$

Voor het linker kritieke gebied geldt dus $X \leq 19$.

$$P(X \geq 27) = 1 - P(X \leq 26) = 1 - 0,8773 = 0,1227$$

$$P(X \geq 28) = 1 - P(X \leq 27) = 1 - 0,9558 = 0,0442$$

Voor het rechter kritieke gebied geldt dus $X \geq 28$.

Dit betekent dat bij 19 of minder en bij 28 of meer goede voorspellingen met droog weer de nulhypothese verworpen zal worden.

E6 De toetsingsgrootte X is het aantal keren dat er bij Frans meer onvoldoendes zijn dan bij Duits.

$$H_0 : p = 0,5 \text{ en } H_1 : p \neq 0,5$$

X is $\text{Bin}(16; 0,5)$ -verdeeld.

Het significantieniveau is 0,05.

De overschrijdingskans is dus $P(X \geq 11) = 1 - P(X \leq 10)$.

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 16$, $p = 0,5$ en $X = 10$

$$P(X \geq 11) = 1 - 0,8949 = 0,1051$$

De kans dat er 11 keer meer onvoldoendes bij Frans dan bij Duits zijn is groter dan $\frac{1}{2}\alpha$.

Er is dus geen reden om te concluderen dat er bij Frans meer onvoldoendes vallen.

E7 a De toetsingsgrootte X is het aantal Nederlanders dat in mei geboren is.

$$H_0 : p = \frac{1}{12} \text{ en } H_1 : p \neq \frac{1}{12}$$

b X is $\text{Bin}(80; \frac{1}{12})$ -verdeeld.

Het significantieniveau is 0,1.

11 van de 80 is meer dan $\frac{1}{12}$ deel.

De overschrijdingskans is dus $P(X \geq 11) = 1 - P(X \leq 10)$.

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 80$, $p = \frac{1}{12}$ en $X = 10$

$$P(X \geq 11) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - 0,9322 = 0,0678$$

$0,0678 > \frac{1}{2}\alpha$, dus geen reden om te twijfelen aan het uitgangspunt.

- c 2 van de 80 is minder dan $\frac{1}{12}$ deel.

De overschrijdingskans is dus $P(X \leq 2)$.

Op de rekenmachine:

Optie: binomiaal cumulatief met $n = 80$, $p = \frac{1}{12}$ en $X = 2$

$$P(X \leq 2) = 0,0326$$

$0,0326 < \frac{1}{2} \alpha$, dus wel reden om te twijfelen aan het uitgangspunt.

- d Het is een tweezijdige toets. $\frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \times 0,10 = 0,05$.

Voor het linker gebied geldt $P(X \leq g_l) < 0,05$ en voor het rechter gebied geldt

$$P(X \geq g_r) < 0,05.$$

Maak een tabel met de rekenmachine.

Invoer: y_1 = binomiaal cumulatief met $n = 140$, $p = \frac{1}{12}$ en $X = x$

$$P(X \leq 6) = 0,048$$

$$P(X \leq 7) = 0,0952$$

Voor het linker kritieke gebied geldt dus $X \leq 6$.

$$P(X \geq 17) = 1 - P(X \leq 16) = 1 - 0,9248 = 0,0752$$

$$P(X \geq 18) = 1 - P(X \leq 17) = 1 - 0,9564 = 0,0436$$

Voor het rechter kritieke gebied geldt dus $X \geq 18$.

Dit betekent dat bij 7 tot en met 17 Nederlanders die geboren zijn in mei er niet voldoende aanleiding is om te twijfelen aan de bewering dat $\frac{1}{12}$ deel geboren is in mei.

- E8 De toetsingsgrootheid $\bar{X}$ is de gemiddelde snelheid van de proefpersonen.

$H_0 : \mu = 82,3$ km per uur en $H_1 : \mu \neq 82,3$ gram

Het is een tweezijdige toets. De proefpersonen kunnen langzamer of sneller rijden dan 82,3 km per uur.

De standaardafwijking van $\bar{X} = 3,8 : \sqrt{100} = 0,38$ km per uur.

$\bar{X}$ is Norm(82,3; 0,38)-verdeeld.

Het significantieniveau is 0,05.

83,1 km per uur is meer dan 82,3 km per uur dus je berekent de overschrijdingskans $P(\bar{X} > 83,1)$.

Op de rekenmachine:

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 83,1; bovengrens = 10^{99} , $\mu = 82,3$ en $\sigma = 0,38$

$$P(\bar{X} > 83,1) = 0,0176 \text{ en } 0,0176 < \frac{1}{2} \alpha$$

De kans dat de gemiddelde snelheid groter is dan 83,1 km per uur, is kleiner dan $\frac{1}{2} \alpha$.

Er is dus voldoende aanleiding om te concluderen dat alcohol invloed heeft op het rijgedrag.