

Gemengde Opgaven

1 Formules en grafieken

Bladzijde 198

1 a $m: y = ax + b$ met $a = r_{c_k} = -0,5$

$$\left. \begin{array}{l} y = -0,5x + b \\ \text{door } A(-4, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,5 \cdot -4 + b = 3 \\ 2 + b = 3 \\ b = 1 \end{array}$$

Dus $m: y = -0,5x + 1$.

b Het snijpunt van k met de x -as, dus $y = 0$.
 $-0,5x + 16 = 0$
 $-0,5x = -16$
 $x = 32$
 Dus $B(32, 0)$.

$n: y = ax + b$ met $a = r_{c_l} = 2$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } B(32, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 32 + b = 0 \\ 64 + b = 0 \\ b = -64 \end{array}$$

Dus $n: y = 2x - 64$.

Het snijpunt van n met de y -as is $(0, -64)$.

c Los op $-0,5x + 16 = 2x - 9$
 $-2,5x = -25$
 $x = 10$
 $x = 10$ geeft $y = 2 \cdot 10 - 9 = 11$
 Dus $C(10, 11)$.

d Los op $2x - 9 = -24$
 $2x = -15$
 $x = -7\frac{1}{2}$
 Dus $x_D = -7\frac{1}{2}$.

2 a $x = 31$ geeft bij mannen $L = 2,89 \cdot 31 + 70,6 = 160,19$.
 De man was 160 cm.
 $x = 31$ geeft bij vrouwen $L = 2,75 \cdot 31 + 71,5 = 156,75$.
 De vrouw zou 157 cm geweest zijn.

b Man en $L = 180$ geeft $2,89x + 70,6 = 180$
 $2,89x = 109,4$
 $x \approx 37,9$

De humerus van een man is 37,9 cm.

Vrouw en $L = 80$ geeft $2,75x + 71,5 = 80$
 $2,75x = 108,5$
 $x \approx 39,5$

De humerus van een vrouw is 39,5 cm.

c $x = 10$ geeft $L = 2,75 \cdot 10 + 71,5 = 99$
 $x = 40$ geeft $L = 2,75 \cdot 40 + 71,5 = 181,5$
 De kleinste lengte is 99 cm en de grootste lengte is 181,5 cm.

d Los op $2,89x + 70,6 = 2,75x + 71,5$
 $0,14x = 0,9$
 $x \approx 6,4$

6,4 ligt niet tussen 10 en 40, dus de grafieken hebben geen snijpunt.

e Los op $2,89x + 70,6 - (2,75x + 71,5) = 4$
 $2,89x + 70,6 - 2,75x - 71,5 = 4$
 $0,14x = 4,9$
 $x = 35$

Dus bij een lengte van de humerus van 35 cm is het verschil in lichaamslengte 4 cm.

Bladzijde 199

3 a $T = at + b$ met $a = \frac{\Delta T}{\Delta t}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bij } t = 0 \text{ hoort } T = 9,3. \\ \text{Bij } t = 50 \text{ hoort } T = 11,0. \end{array} \right\} a = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{11,0 - 9,3}{50 - 0} = \frac{1,7}{50} = 0,034$$

Dus $T = 0,034t + 9,3$.

b Los op $0,034t + 9,3 = 12$

$$0,034t = 2,7$$

$$t \approx 79,4$$

Dus in 2050 zal de gemiddelde jaartemperatuur naar verwachting voor het eerst hoger zijn dan 12°C .

c 50 jaar voor 1970 was 0,3 minder, dus 1 jaar daarvoor $\frac{0,3}{50} = 0,006$ minder.

$$1,3 \text{ minder was } \frac{1,3}{0,006} \approx 216,7 \text{ jaar voor 1970.}$$

Dus de gemiddelde jaartemperatuur was minder dan 8°C tot en met 1753.

4 a Afstand a die je aflegt per omwenteling is evenredig met aantal tanden van het voorwiel.

$$\frac{52}{5,46} \mid \frac{39}{a} \text{ dus } a = \frac{5,46 \cdot 39}{52} = 4,095$$

Je legt per omwenteling 4,095 meter af.

b Afstand b die je aflegt per omwenteling is omgekeerd evenredig met aantal tanden van het achterwiel.

$$5,46 \cdot 20 = b \cdot 14 \text{ dus } b = \frac{5,46 \cdot 20}{14} = 7,8$$

Je legt per omwenteling 7,8 meter af.

c Afstand c die je aflegt per omwenteling is evenredig met aantal tanden van het voorwiel.

$$\frac{52}{5,46} \mid \frac{50}{c} \text{ dus } c = \frac{5,46 \cdot 50}{52} = 5,25$$

$$100 \text{ omwentelingen/minuut} = 525 \text{ m/min} = 31\,500 \text{ m/uur} = 31,5 \text{ km/uur}$$

d $v = aw$
 $w = 100 \text{ en } v = 31,5 \left\{ \begin{array}{l} a \cdot 100 = 31,5 \\ a = 0,315 \end{array} \right.$

Dus $v = 0,315w$.

e $v = \frac{a}{n}$
 $n = 20 \text{ en } v = 31,5 \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{20} = 31,5 \\ a = 630 \end{array} \right.$

Dus $v = \frac{630}{n}$.

Bladzijde 200

5 a W is omgekeerd evenredig met x , dus $W = \frac{a}{x}$.

$$\left. \begin{array}{l} W = \frac{a}{x} \\ x = 1200 \text{ en } W = 3 \end{array} \right\} \frac{a}{1200} = 3$$

$$a = 3 \cdot 1200 = 3600$$

Dus $W = \frac{3600}{x}$.

b $x = 250$ geeft $W = \frac{3600}{250} = 14,4$

De waardevermindering is 14,4%.

c $W = \frac{3600}{x}$ en $W = 8$ geeft $8 = \frac{3600}{x}$

$$8x = 3600$$

$$x = 450$$

De afstand is 450 meter.

- d De waardevermindering is $\frac{20\,000}{300\,000} \times 100\% \approx 6,66\ldots\%$.

$$W = \frac{3600}{x} \text{ en } W = 6,66\ldots \text{ geeft } 6,66\ldots = \frac{3600}{x}$$

$$6,66\ldots x = 3600$$

$$x = 540$$

De afstand is 540 meter.

- e $W = \frac{3600}{x}$ en $x = 300$ geeft $W = \frac{3600}{300} = 12$

De waarde na aanleg is $0,88 \cdot 160\,000 = 140\,800$ euro.

- 6 a In 7 jaar 87 kg meer, dus in 1 jaar $\frac{87}{7}$ kg meer.

1992 is 4 jaar na 1988, dus $395 + 4 \cdot \frac{87}{7} \approx 445$ kg per persoon in 1992.

- b In 5 jaar 22 kg minder, dus in 1 jaar $\frac{22}{5} = 4,4$ kg minder.

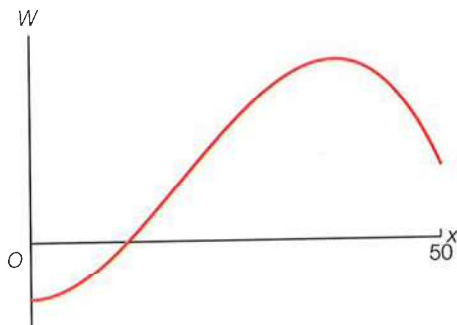
2024 is 7 jaar na 2017, dus $496 - 7 \cdot 4,4 \approx 465$ kg per persoon in 2024.

- c In 13 jaar 65 kg minder, dus in 1 jaar $\frac{65}{13} = 5$ kg minder.

Afname tot 300 kg is $\frac{196}{5} = 39,2$ jaar na 2017, dus in 2057.

Bladzijde 201

- 7 a Voer in $y_1 = -45x^3 + 2500x^2 - 275\,000$.



- b Voer in $y_2 = 600\,000$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 25,4$ en $x \approx 46,6$.

De reclamekosten liggen tussen 254 000 euro en 466 000 euro.

- c De optie maximum geeft $x \approx 37,0$ en $y \approx 868\,118$.

Dus de maximale winst is ongeveer 868 000 euro.

- d $x = 23$ geeft $W = 499\,985$ en $x = 46$ geeft $W = 634\,880$.

$$\frac{634\,880 - 499\,985}{499\,985} \times 100\% \approx 27,0\%$$

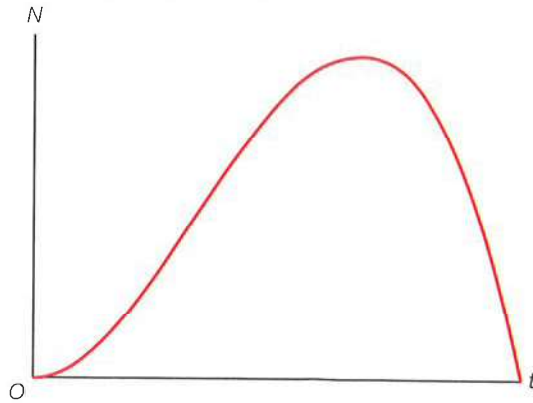
Dus een toename van 27,0%.

- e Voer in $y_3 = 10\,000x$.

De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft $x \approx 15,4$ en $y \approx 154\,129$, en $x \approx 46,3$ en $y \approx 483\,441$.

Dus de winst was ongeveer 154 000 euro of 483 000 euro.

- 8 a** Voer in $y_1 = 0,6x^2 - 0,02x^3$.



- b** De optie maximum geeft $x = 20$ en $y = 80$.
Dus na 20 dagen is het aantal leerlingen met griep maximaal. Er zijn dan 80 leerlingen ziek.
- c** $t = 13$ geeft $N = 57,46$
 $t = 14$ geeft $N = 62,72$
 $t = 25$ geeft $N = 62,5$
 $t = 26$ geeft $N = 54,08$
 Dus van $t = 14$ tot en met $t = 25$, dat zijn 12 dagen.

- 9 a** $\frac{320}{6,4} \mid \frac{128}{y}$ dus $y = \frac{6,4 \cdot 128}{320} = 2,56$.

Dus de bestandsgrootte is 2,56 MB.

- b** M is evenredig met B , dus $M = aB$.
 Bij $B = 320$ hoort $M = 6,4$.

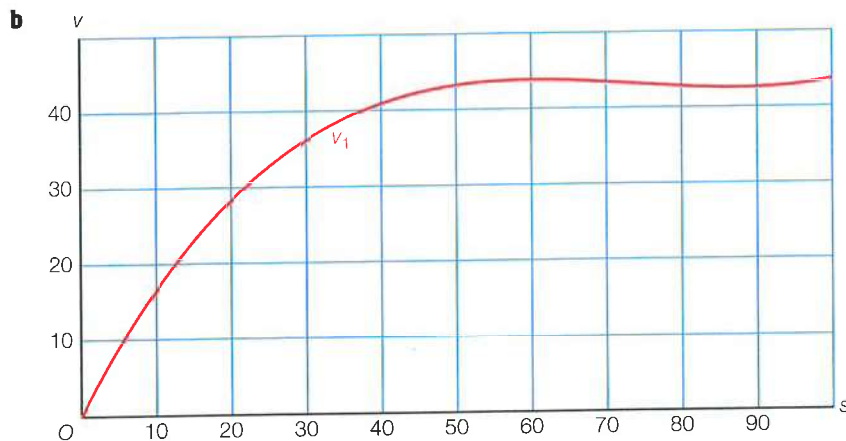
$$\left. \begin{array}{l} a \cdot 320 = 6,4 \\ 320a = 6,4 \\ a = 0,02 \end{array} \right\}$$

Dus $M = 0,02B$.

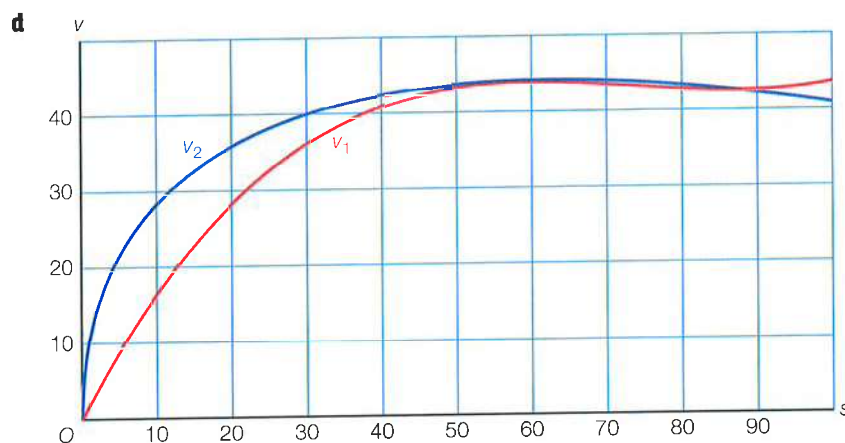
- c** In 3 jaar 43,5 miljoen euro meer, dus in 1 jaar $\frac{43,5}{3} = 14,5$ miljoen euro meer.
 2014 is 2 jaar na 2012, dus in 2014 zijn de inkomsten $17,8 + 2 \cdot 14,5 = 46,8$ miljoen euro.
- d** In 2 jaar 47,3 miljoen euro meer, dus in 1 jaar $\frac{47,3}{2} = 23,65$ miljoen euro meer.
 2020 is 3 jaar na 2017, dus in 2020 zijn de inkomsten $108,6 + 3 \cdot 23,65 \approx 180$ miljoen euro.

Bladzijde 202

- 10 a** Na 5 meter is de snelheid volgens het model
 $v_1 = 0,00012 \cdot 5^3 - 0,02655 \cdot 5^2 + 1,8829 \cdot 5 \approx 8,8$ km/uur.
 Dat is een afwijking van $25 - 8,8 = 16,2$ km/uur van het gegeven.
 Voer in $y_1 = 0,00012x^3 - 0,02655x^2 + 1,88929x$.
 De optie maximum geeft $x \approx 59,9$ en $y \approx 43,7$.
 De maximale snelheid volgens het model is 43,7 km/uur.
 Dat is een afwijking van $44 - 43,7 = 0,3$ km/uur van het gegeven.
 Dus bij de snelheid na 5 meter is de afwijking het grootst.



- c** Voer in $y_2 = 40$. De optie snijpunt geeft $x \approx 37,9$.
Dus de snelheid lag boven de 40 km/uur gedurende $100 - 37,9 \approx 62$ meter.



- e** Na 5 meter is de snelheid volgens het verbeterde model
 $v_2 = 5\sqrt{5 \cdot 5} - 0,71 \cdot 5 = 21,45$ km/u.
 Dat is een afwijking van $25 - 21,45 = 3,55$ km/uur van het gegeven.
 Voer in $y_3 = 5\sqrt{5x} - 0,71x$.
 De optie maximum geeft $x \approx 62,0$ en $y \approx 44,0$.
 De maximale snelheid volgens het verbeterde model is 44 km/uur. Dat komt precies overeen met het gegeven.
 De afwijking van de snelheid in het verbeterde model ten opzichte van de werkelijkheid is voor beide gegevens kleiner geworden, dus het verbeterde model is realistischer.

2 Statistiek

- 11 a** Vraag II gaat uit van een foute veronderstelling, namelijk dat zeedieren sowieso hinder ondervinden.
 Vraag III mondt uit in een advies, namelijk welke maatregelen genomen kunnen worden.
 Bij vraag I is er sprake van een causaal verband, want je wil weten wat de invloed is.
- b** Op welke manier hebben windmolens invloed op dieren die leven in of op zee?
- c** Zijn er zeedieren die hinder ondervinden van windmolens?
- d** Alle vogels in het gebied waar het windmolenpark wordt gebouwd.

Bladzijde 203

- 12 a** provincie, netnummer hoofdstad, waardering leefomgeving
b aantal ziekenhuizen

- c provincie: nominaal
 netnummer hoofdstad: nominaal
 bevolkingsdichtheid: ratio
 aantal ziekenhuizen: ratio
 waardering leefomgeving: ordinaal

d $\hat{p} = \frac{548 + 168 + 34}{1025} \approx 0,732$

- 13 a** Aantal dagen in juli met minder dan 6 uur zon is 13.
 Aantal dagen in augustus met minstens 6 uur zon is 11.
 Aantal dagen in juli met minstens 4 uur, maar minder dan 8 uur zon is $25 - 10 = 15$.
- b** De maand juli was het zonnigst, want hier komen de dagen met veel uren zonneschijn vaker voor.
 De polygoon van juli ligt geheel rechts van die van augustus.
- c** 2,5 uur
- d** In juli was het totaal aantal uren zonneschijn $31 \cdot 5,7 = 176,7$.
 $2 \cdot 176,7 = 353,4$ en omdat het in augustus minder zonnig was dan in juli is het totaal aantal uren zon gelijk aan 315.

Bladzijde 204

- 14 a** De beoordeling is kwalitatief.
- b** Stel dat de helft van de beoordelingen 'helemaal oneens' is en de andere helft 'helemaal eens' dan zou het gemiddelde 'acceptabel' zijn. Dat is dan niet in overeenstemming met de beoordelingen.
- c** De modus.
- d** In totaal hebben $0,4 \cdot 3000 = 1200$ personen die optie gekozen.
- 15 a** Bij de mediaan hoort de middelste staat wanneer deze van klein naar groot zijn gerangschikt. De VS heeft 50 staten. Dat is een even aantal. Er is dus geen middelste staat.
- b** De spreidingsbreedte is $39,6 - 0,6 = 39,0$ miljoen.
 De kwartielafstand is $7,4 - 1,9 = 5,5$ miljoen.
- c** Nebraska ligt precies op het eerste kwartiel. Nebraska is dan de 13^e staat, dus 37 staten hebben meer inwoners dan Nebraska.
- d** Bij de laagste 50% van de inwoneraantallen horen de eerste twee delen van de boxplot.
 Gemiddeld aantal inwoners van de laagste meting tot Q_1 is $\frac{0,6 + 1,9}{2} \approx 1,25$ miljoen.
 Gemiddeld aantal inwoners van Q_1 tot de mediaan is $\frac{1,9 + 4,5}{2} = 3,2$ miljoen.
 Dus in totaal $12,5 \cdot 1,25 + 12,5 \cdot 3,2 \approx 55,6$ miljoen inwoners.
- e** De schatting is $12,5 \cdot 1,25 + 12,5 \cdot 3,2 + 12,5 \cdot \frac{4,5 + 7,4}{2} + 12,5 \cdot \frac{7,4 + 39,6}{2} \approx 424$ miljoen.
 Californië is een staat met heel veel inwoners. Deze uitschieter zorgt voor een heel hoog geschat gemiddelde in de groep van Washington tot Californië.

Bladzijde 205

- 16 a** 1 Alleen studenten die de website van het RSC bezoeken doen mee. Dat zijn veelal sportende studenten.
 2 Alleen studenten die graag hun mening geven doen mee.
 3 De ondervraagde jongeren zijn misschien niet allemaal studenten.
- b** nominaal: Welke sport beoefen je?
 ordinaal: In welk team speel je?
 interval: Hoe laat begint je training?
 ratio: Hoeveel uur heb je al getraind sinds de start van het seizoen?

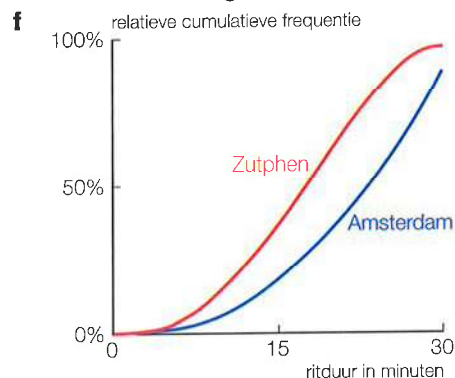
- 17 a** De interkwartielafstand is $10 - 5 = 5$. De spreidingsbreedte is $24 - 0 = 24$.

Dat is $\frac{5}{24} \times 100\% \approx 20,8\%$.

- b** Het geschatte verschil met het streefgewicht is
 $0,25 \cdot 2,5 + 0,25 \cdot 6,5 + 0,25 \cdot 9 + 0,25 \cdot 17 = 8,75$ gram.
 Dus 12 gram is geen redelijke schatting.
- c** Diagram 2, want bij dit diagram is $Q_1 = 5$, de mediaan is 8 en $Q_3 = 10$.

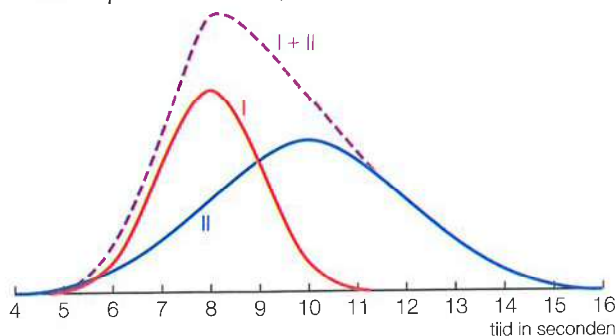
Bladzijde 206

- 18 a** Bij Amsterdam links-scheef en bij Zutphen symmetrisch.
- b** In Amsterdam grotere afstanden en drukker dan in Zutphen. Daardoor in Amsterdam meer langere ritten dan kortere. In Zutphen veel ritten met ongeveer een gemiddelde ritduur, want veel afstanden zijn ongeveer gelijk.
- c** Ik ben het niet met Margot eens, want in de tabel staan relatieve gegevens en geen absolute.
- d** Stel de chauffeur had in totaal 100 ritten.
 In de 29 ritten die tussen 15 en 20 minuten duurden heeft hij dan maximaal
 $29 \cdot 29 \cdot \frac{1}{3} \approx 280$ km gereden.
 In de 22 ritten die tussen 20 en 25 minuten duurden heeft hij dan minimaal
 $22 \cdot 39 \cdot \frac{1}{3} = 286$ km gereden.
 Omdat $280 < 286$ kan de chauffeur geen gelijk hebben.
- e** Boxplot I hoort bij de chauffeur uit Amsterdam, want boxplot I hoort bij een links-scheve verdeling.



Bladzijde 207

- 19 a** Het gemiddelde is bij I lager dan bij II en de spreiding is minder.
- b** $\mu = 10$ en van toenemend stijgend naar afnemend stijgend bij 8 geeft $\sigma = 10 - 8 = 2$ seconden.
- c** Van I is $\mu = 8$ en van toenemend stijgend naar afnemend stijgend bij 7 geeft $\sigma = 8 - 7 = 1$ seconde, dus 2,5% onder de 6 seconden.
- d** Dus boven de 8 seconden.
 Van II is $\mu = 10$ en $\sigma = 2$, dus $34\% + 34\% + 13,5\% + 2,5\% = 84\%$.
- e**



Rechts-scheef. Zie de figuur waarin de grafiek van I + II is geschetst.

Bladzijde 208

20 a $\hat{p} = 0,0472$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,0472 \cdot 0,9528}{233}} = 0,0138\dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,0472 - 2 \cdot 0,0138\dots \approx 0,0194$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,0472 + 2 \cdot 0,0138\dots \approx 0,0750$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,0194; 0,0750]$.

b $p = \frac{512}{7051} \approx 0,0726$ en dit valt binnen het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

Dus op grond hiervan kun je niet concluderen dat de stimuleringsmaatregelen van de gemeente hebben geholpen.

c $\hat{p} = 0,0592$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,0592 \cdot 0,9408}{5000}} = 0,0033\dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,0592 - 2 \cdot 0,0033\dots \approx 0,0525$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,0592 + 2 \cdot 0,0033\dots \approx 0,0659$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,0525; 0,0659]$.

Nu is de populatieproportie $p = \frac{512}{7051} \approx 0,0726 > 0,0659$ en hieruit valt te concluderen dat de stimuleringsmaatregelen wel hebben geholpen.

21 a 4 minuten en 13 seconden is $4 \cdot 60 + 13 = 253$ seconden.

1 minuut en 23 seconden is $60 + 23 = 83$ seconden.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de tijd in seconden is

$$\left[253 - 2 \cdot \frac{83}{\sqrt{31}}, 253 + 2 \cdot \frac{83}{\sqrt{31}} \right] \approx [223, 283].$$

b 3 minuten en 45 seconden is $3 \cdot 60 + 45 = 225$ seconden.

Dit valt binnen het 95%-betrouwbaarheidsinterval, dus er is op basis van dit onderzoek geen reden om aan te nemen dat er een verschil is met de wedstrijden van Kuiper.

c Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $\left[253 - 2 \cdot \frac{83}{\sqrt{41}}, 253 + 2 \cdot \frac{83}{\sqrt{41}} \right] \approx [227, 279]$.

Nu valt de gemiddelde blessuretijd van 3 minuten en 45 seconden, oftewel 225 seconden, niet in het betrouwbaarheidsinterval en hieruit valt te concluderen dat er wel een verschil is met de wedstrijden van Kuiper.

Bladzijde 209

22 a $\hat{p} = \frac{371}{2650} = 0,14$ geeft $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{2650}} = 0,00674\dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,14 - 2 \cdot 0,00674\dots \approx 0,1265$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,14 + 2 \cdot 0,00674\dots \approx 0,1535$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,1265; 0,1535]$.

b $\hat{p} = \frac{530}{2650} = 0,2$ geeft $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{2650}} = 0,00777\dots$

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de proportie oranje M&M's is $4 \cdot 0,00777\dots \approx 0,0311$.

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de proportie rode M&M's is $4 \cdot 0,00674\dots \approx 0,0270$.

$$\frac{0,0311}{0,0270} \times 100\% \approx 115\%. \text{ Dus Kees heeft gelijk.}$$

3 Rekenen en herleiden

23 a $(2x+3)(2x-3) - \frac{(x-2)^2}{4} = 4x^2 - 9 - \frac{x^2 - 4x + 4}{4} = 4x^2 - 9 - \frac{1}{4}x^2 + x - 1 = 3\frac{3}{4}x^2 + x - 10$

b $12 \cdot \frac{a-4}{6a} : \frac{a+4}{a} = 12 \cdot \frac{a-4}{6a} \cdot \frac{a}{a+4} = \frac{12 \cdot (a-4) \cdot a}{6a \cdot (a+4)} = \frac{12a^2 - 48a}{6a^2 + 24a} = \frac{2a-8}{a+4}$

c $(6b+2)(1-6b) - 2(4b^2+1) = 6b - 36b^2 + 2 - 12b - 8b^2 - 2 = -44b^2 - 6b$

$$24 \quad a \quad D = 100 + \frac{400b}{a+20b} = \frac{100(a+20b)}{a+20b} + \frac{400b}{a+20b} = \frac{100a + 2000b + 400b}{a+20b} = \frac{100a + 2400b}{a+20b}$$

$$b \quad A = \frac{6x^2 + 15}{3x^2} + \frac{x^3 + 4x}{2x^3} = 2 + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2} = 2\frac{1}{2} + \frac{7}{x^2}$$

25 a lijn k:

x	0	5
y	-3	0

lijn l:

x	0	3
y	6	2

$$b \quad \begin{aligned} 3x - 5y &= 15 \\ -5y &= -3x + 15 \\ y &= \frac{3}{5}x - 3 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } rc_k = \frac{3}{5}.$$

$$4x + 3y = 18$$

$$3y = -4x + 18$$

$$y = -1\frac{1}{3}x + 6$$

$$\text{Dus } rc_l = -1\frac{1}{3}.$$

$$c \quad \begin{aligned} k: 3x - 5y &= 15 \\ \text{door } A(p, 3) &\left\{ \begin{aligned} 3p - 5 \cdot 3 &= 15 \\ 3p &= 30 \\ p &= 10 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

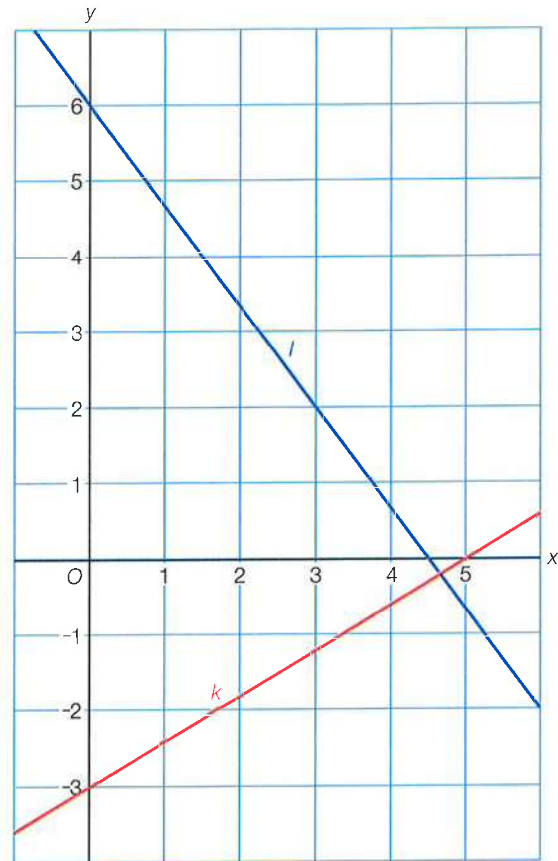
$$B(10, q) \text{ op } l \text{ geeft } q = -1\frac{1}{3} \cdot 10 + 6 = -7\frac{1}{3}.$$

$$d \quad C(2, r) \text{ op } k \text{ geeft } r = \frac{3}{5} \cdot 2 - 3 = 1\frac{1}{5} - 3 = -1\frac{4}{5}.$$

$$l: 4x + 3y = 18 \left\{ \begin{aligned} 4s + 3 \cdot -1\frac{4}{5} &= 18 \\ 4s - 5\frac{2}{5} &= 18 \\ 4s &= 23\frac{2}{5} \end{aligned} \right.$$

$$4s = 23\frac{2}{5}$$

$$s = 5\frac{17}{20} (= 5,85)$$



Bladzijde 210

$$26 \quad a \quad \text{De procentuele toename van het aantal vrouwelijke leden is } \frac{158353 - 131948}{131948} \times 100\% \approx 20\%.$$

Het percentage vrouwen in '12/'13 was $\frac{131948}{1209569} \times 100\% \approx 10,9\%$ en in '17/'18 was dat $\frac{158353}{1205382} \times 100\% \approx 13,1\%$. Dat is dus een toename van $13,1 - 10,9 = 2,2\%$.

*

$$b \quad \text{In totaal 8 delen, dus 1 deel is } \frac{1228000}{8} = 153500 \text{ leden.}$$

Er waren dus $153500 \cdot 7 = 1074500$ mannelijke leden en 153500 vrouwelijke leden.

$$c \quad 1,042 \cdot 1,062 \cdot 1,047 = 1,1586\dots, \text{ dus de groei was } 15,9\%.$$

$$27 \quad a \quad \text{Nederland won } 0,0212 \cdot 6138 \approx 130 \text{ gouden medailles.}$$

$$b \quad \text{Denemarken won } 0,01035 \cdot 18845 \approx 195 \text{ medailles.}$$

$$\text{In totaal zijn er } 3 + 5 + 5 = 13 \text{ delen, dus 1 deel is } \frac{195}{13} = 15 \text{ medailles.}$$

$$\text{Denemarken won dus } 5 \cdot 15 = 75 \text{ bronzen medailles.}$$

$$c \quad \text{In totaal haalde Noorwegen } \frac{368}{0,708} \approx 520 \text{ medailles.}$$

Bladzijde 211

$$28 \quad a \quad \text{In totaal } 2 + 3 + 6 = 11 \text{ delen, dus 1 deel is } \frac{200893}{11} = 18263 \text{ leerlingen.}$$

Er zouden dan $2 \cdot 18263 = 36526$ vwo-leerlingen, $3 \cdot 18263 = 54789$ havo-leerlingen en $6 \cdot 18263 = 109578$ vmbo-leerlingen zijn.

- b** Dan $\frac{3}{11}$ is 53 974, dus totaal is $\frac{11}{3} \cdot 53\,974 \approx 197\,905$ leerlingen.
- c** De verhouding is nu 2 : 3 : 6, dus stel dat er nu $200 + 300 + 600 = 1100$ leerlingen zijn.
Een afname van 10%, dus 110 leerlingen minder.
Deze afname komt voor rekening van het vmbo, dus het vmbo heeft dan $600 - 110 = 490$ leerlingen.
Zo krijg je 200, 300 en 490 leerlingen.
Dus $p = 4,9$ en de gevraagde verhouding is 20 : 30 : 49.

29 a 7668 miljoen = $7,668 \cdot 10^9$

b De wereldbevolking in 2050 is $\frac{716}{0,0732} = 9781,4\dots$ miljoen.

Dus de procentuele toename is $\frac{9781,4\dots - 7668}{7668} \times 100\% \approx 27,6\%$.

c $d = \frac{N}{A} = \frac{1,35 \cdot 10^9}{3,29 \cdot 10^6} \approx 410$

De bevolkingsdichtheid in India was ongeveer 410 mensen per km^2 .

- d** Stel de oppervlakte van het land is 2 km^2 . Op de km^2 in de noordelijke helft wonen dan 100 mensen. Op de km^2 in de zuidelijke helft wonen dan 300 mensen.

In totaal 400 mensen, dat is $\frac{400}{2} = 200$ mensen per km^2 .

De bevolkingsdichtheid is dus 200 mensen per km^2 .

- e** In het noordelijke deel wonen x mensen, dus in het zuidelijke deel wonen $3x$ mensen.
In het hele land wonen dus $x + 3x = 4x$ mensen.

De oppervlakte van de helft is $y \text{ km}^2$, dus de oppervlakte van het hele land is $2y \text{ km}^2$.

$N = 4x$ en $A = 2y$ geeft $d = \frac{4x}{2y} = \frac{2x}{y}$.

Bladzijde 212

30 a $\frac{2}{3} \cdot 300\,000 \text{ km/s} = 200\,000 \text{ km/s}$ en $10 \text{ m} = 0,01 \text{ km}$

Het signaal doet er $\frac{0,01}{200\,000} = 5 \cdot 10^{-8}$ seconden over.

b De hoeveelheid regen in het badje is $269 \cdot 175 \cdot 1,2 = 56\,490 \text{ cm}^3 = 56\,490 \text{ mL}$.

Dat zijn $\frac{56\,490}{0,03} = 1,883 \cdot 10^6$ regendruppels.

31 a $w = 10$ geeft $F = 0,0044 \cdot 10^2 - 0,93 \cdot 10 + 34,5 = 25,64$ en $C = \frac{25,64 - 32}{1,8} \approx -3,5$.

Dus de gevoelstemperatuur is $25,6^\circ\text{F}$ of $-3,5^\circ\text{C}$.

b $40 \text{ km/uur} = \frac{40}{1,6} = 25$ mijl per uur, dus $w = 25$.

$w = 25$ geeft $F = 0,0044 \cdot 25^2 - 0,93 \cdot 25 + 34,5 = 14$ en $C = \frac{14 - 32}{1,8} = -10$.

Dus de gevoelstemperatuur is -10°C .

c $15 \text{ m/s} = 15 \cdot 3,6 = 54 \text{ km/uur} = \frac{54}{1,6} = 33,75$ mijl per uur, dus $w = 33,75$.

$w = 33,75$ geeft $F = 0,0044 \cdot 33,75^2 - 0,93 \cdot 33,75 + 34,5 = 8,12\dots$ en $C = \frac{8,12\dots - 32}{1,8} \approx -13,3$.

Dus de gevoelstemperatuur is $-13,3^\circ\text{C}$.

d $C = \frac{F - 32}{1,8}$ geeft $F - 32 = 1,8C$, oftewel $F = 1,8C + 32$.

$v \text{ m/s} = 3,6v \text{ km/uur} = \frac{3,6v}{1,6} = 2,25v$ mijl/uur, dus $w = 2,25v$.

In de formule F vervangen door $1,8C + 32$ en w vervangen door $2,25v$ geeft

$1,8C + 32 = 0,0044 \cdot (2,25v)^2 - 0,93 \cdot 2,25v + 34,5$

$1,8C = 0,022275v^2 - 2,0925v + 2,5$

$C = 0,012375v^2 - 1,1625v + 1,38\dots$

Dus $a \approx 0,0124$, $b \approx -1,16$ en $c \approx 1,4$.

4 Combinatoriek

Bladzijde 213

32 a aantal = $\binom{6}{2} = 15$

b aantal = $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 63$

Alternatieve uitwerking

aantal = $2^6 - 1 = 63$

33 a aantal = $\binom{3}{2} \cdot \binom{6}{1} = 18$

b aantal = $\binom{9}{3} = 84$

c De mogelijke combinaties zijn CDA/PvdA/VVD, CDA/PvdA/GB, CDA/VVD/GB en PvdA/VVD/GB.

aantal = $3 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 39$

d aantal = $7! \cdot 3! = 30\,240$

e aantal = $4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1 = 1728$

34 WISKUNDE bevat 8 verschillende letters.

a aantal = $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$

b aantal = $8^5 = 32\,768$

c aantal = $1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Bladzijde 214

35 a aantal = $\binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \approx 3,1 \cdot 10^{11}$

b aantal = $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 30$

Alternatieve uitwerking aantal = $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$

c mogelijkheden

RBGRB	RBGBR	RBRGB	RBRBG
BRGRB	BRGBR	BRBGR	BRBRG
GBRBR			
BGRBR			
GRBRB			
RGBRB			

aantal = 12

36 a aantal = $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{3} = 560$

Alternatieve uitwerking

aantal = $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$

b Vier cijfers uit de zes cijfers kiezen kan op $\binom{6}{4}$ manieren.

aantal = $\binom{6}{4} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 37\,800$

Alternatieve uitwerking

aantal = $\binom{6}{4} \cdot \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 37\,800$

c Er komt dan één van de cijfers drie keer voor (hiervoor zijn 6 mogelijkheden)

OF twee van de cijfers komen elk twee keer voor (en hiervoor zijn $\binom{6}{2}$ mogelijkheden).

aantal = $6 \cdot \frac{8!}{3!} + \binom{6}{2} \cdot \frac{8!}{2! \cdot 2!} = 40\,320 + 151\,200 = 191\,520$

d Het eerste cijfer is 1 of 2 OF het eerste cijfer is 3 en het tweede cijfer is 1, 2 of 4.

aantal = $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 156$

e Het eerste cijfer is 4, 5 of 6 OF het eerste cijfer is 3 en het tweede cijfer is 5 of 6.

aantal = $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 + 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 = 720$

- 37** Van de drie verschillende cijfers wordt er één drie keer gebruikt OF van de drie verschillende cijfers worden er twee dubbel gebruikt.

Van de drie verschillende cijfers wordt er één drie keer gebruikt:

Stel dat het cijfer 4 driemaal wordt gebruikt, dan zijn er $\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1} = 20$ mogelijkheden.

Dit geldt ook als de cijfers 7 of 8 driemaal worden gebruikt, dus $3 \cdot 20 = 60$ mogelijkheden.

Van de drie verschillende cijfers worden er twee dubbel gebruikt:

Er zijn $\binom{3}{2} = 3$ tweetallen mogelijk die dubbel worden gebruikt (4 en 7 dubbel OF 4 en 8

dubbel OF 7 en 8 dubbel). Elk van deze mogelijkheden levert $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 30$ mogelijkheden.

Dus als twee cijfers dubbel worden gebruikt zijn er 90 mogelijkheden.

Totaal $60 + 90 = 150$ mogelijkheden.

Alternatieve uitwerking

Van de drie verschillende cijfers wordt er één drie keer gebruikt OF van de drie verschillende cijfers worden er twee dubbel gebruikt.

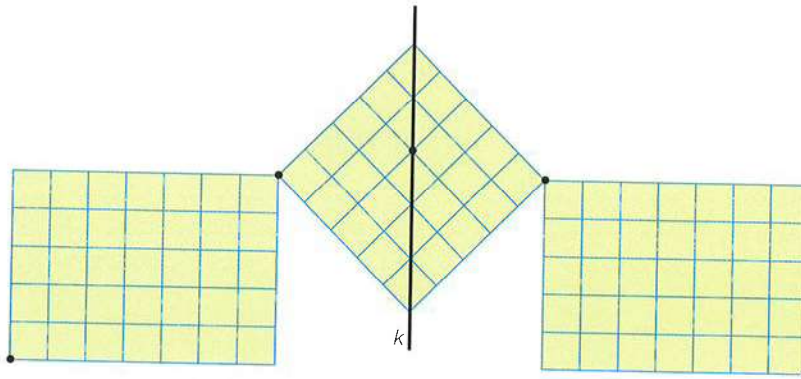
Eén cijfer drie keer gebruikt: $3 \cdot \frac{5!}{3!} = 60$ mogelijkheden.

Twee dubbel gebruikt: $\binom{3}{2} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 90$ mogelijkheden.

Totaal $60 + 90 = 150$ mogelijkheden.

Bladzijde 215

- 38** a aantal = $\binom{12}{5} \cdot \binom{5}{2} = 792 \cdot 10 = 7920$
 b aantal = $\binom{12}{5} \cdot 2^5 = 25\,344$
 c aantal = $\binom{12}{5} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{12}{5} = \left(\binom{12}{5} \cdot \binom{5}{2} \right)^2 = 7920^2 = 62\,726\,400$
 d Spiegel de figuur in de lijn k .



$$\text{aantal} = \binom{12}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{12}{5} = 158\,070\,528$$

- 39** a Noem de teams A en B.
 A wint in vijf wedstrijden $\underbrace{\text{BAAA A}}_{\binom{4}{1} = 4}$

Er zijn dus 4 mogelijkheden voor A om in vijf wedstrijden te winnen.

Dat geldt ook voor B.

Dus bij vijf wedstrijden zijn er $4 + 4 = 8$ mogelijkheden.

Bij zes wedstrijden: $\underbrace{\text{BBAAA A}}_{\binom{5}{2} = 10}$

Dus bij zes wedstrijden zijn er $10 + 10 = 20$ mogelijkheden.

- b** Vier, vijf, zes of zeven wedstrijden.

$$\text{aantal} = 2 + 8 + 20 + 2 \cdot \binom{6}{3} = 70$$

- 40 a** Er zijn $4 \cdot 5 = 20$ vakjes.

$$\text{aantal} = \binom{20}{6} = 38\,760$$

- b** $\text{aantal} = 2^{20} = 1\,048\,576$

c $\text{aantal} = \binom{5}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4} = 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 2500$

d $\text{aantal} = 3^{20} = 3\,486\,784\,401$

Dus $\frac{3\,486\,784\,401}{1\,048\,576} \approx 3325$ keer zoveel.

e $\text{aantal} = \binom{5}{2} \cdot 2^3 \cdot 3^{15} = 1\,147\,912\,560$

Bladzijde 216

41 a $\text{aantal} = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} = 180$

b $\text{aantal} = 3! \cdot 3! = 36$

- c** Voor zowel de kerken als de musea geldt dat er twee manieren zijn waarop de drie gebouwen allemaal op een andere plek liggen dan eerst.

$$\text{aantal} = 2 \cdot 2 = 4$$

- d** Twee van de vijf kandidaten hebben de juiste mol genoemd, de overige drie kandidaten één van de andere vier kandidaten (omdat ze zichzelf niet noemen).

$$\text{aantal} = \binom{5}{2} \cdot 4^3 = 640$$

Gemengde Opgaven

5 Machtsverbanden

Bladzijde 172

1 a $y = 3 \cdot \frac{(2x^{0,6})^3}{x^{-4}} = 3 \cdot \frac{2^3 \cdot (x^{0,6})^3}{x^{-4}} = 3 \cdot \frac{8 \cdot x^{1,8}}{x^{-4}} = 24x^{5,8}$

Dus $y = 24x^{5,8}$.

b $A = 2^{x-3} \cdot 3^{y+2} = 2^x \cdot 2^{-3} \cdot 3^y \cdot 3^2 = 2^{-3} \cdot 3^2 \cdot 2^x \cdot 3^y = \frac{1}{8} \cdot 9 \cdot 2^x \cdot 3^y = \frac{1}{8} \cdot 2^x \cdot 3^y$

Dus $A = \frac{1}{8} \cdot 2^x \cdot 3^y$.

c $N = 5 \cdot \sqrt[3]{64t} + 2 \cdot \sqrt[3]{27t} = 5 \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{t} + 2 \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{t} = 5 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{t} + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{t}$

$= 20 \cdot \sqrt[3]{t} + 6 \cdot \sqrt[3]{t} = 26 \cdot \sqrt[3]{t}$

Dus $N = 26 \cdot \sqrt[3]{t}$.

2 a $A = 4^{2\frac{1}{2}} \cdot x^{-3\frac{1}{4}} \cdot y^{1\frac{1}{2}} = 4^{2\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x^{3\frac{1}{4}}} \cdot y^{1\frac{1}{2}} = 4^{2\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{4}}} \cdot y \cdot y^{\frac{1}{2}} = \frac{32y\sqrt{y}}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}}$

Dus $A = \frac{32y\sqrt{y}}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}}$.

b $\frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{x^4 \cdot \sqrt[5]{x}} = \frac{x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^4 \cdot x^{\frac{1}{5}}} = \frac{x^{3\frac{1}{2}}}{x^{4\frac{1}{5}}} = x^{3\frac{1}{2} - 4\frac{1}{5}} = x^{-\frac{7}{10}}$

c $P = 4 \cdot (243xy)^{0,2} - (32xy)^{0,2} = 4 \cdot 243^{0,2} \cdot (xy)^{0,2} - 32^{0,2} \cdot (xy)^{0,2} = 12 \cdot \sqrt[5]{xy} - 2 \cdot \sqrt[5]{xy} = 10 \cdot \sqrt[5]{xy}$

Dus $P = 10 \cdot \sqrt[5]{xy}$.

3 a $y_1 = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 4$

↓ verschuiving (2, 6)

$y_2 = \frac{1}{2}(x-2-3)^2 + 4 + 6 = \frac{1}{2}(x-5)^2 + 10$

Dus $y_2 = \frac{1}{2}(x-5)^2 + 10$. De top is (5, 10).

b $y_1 = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 4$

↓ vert. herschaling factor 3

$y_3 = 3(\frac{1}{2}(x-3)^2 + 4) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 12$

Dus $y_3 = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 12$.

c $y_1 = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 4$

↓ verschuiving (a, b)

$y_4 = \frac{1}{2}(x-a-3)^2 + 4 + b$

De top is (8, -2), dus $a+3=8$ en $4+b=-2$.

Dit geeft $a=5$ en $b=-6$.

d $y_1 = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 4$

↓ verschuiving (c, c)

$y = \frac{1}{2}(x-c-3)^2 + 4 + c$

↓ vert. herschaling factor d

$y_5 = d(\frac{1}{2}(x-c-3)^2 + 4 + c) = \frac{1}{2}d(x-c-3)^2 + 4d + cd$

De top is (6, 14), dus $c+3=6$ en $4d+cd=14$.

$c+3=6$ geeft $c=3$, dus $4d+3d=14$

$7d=14$

$d=2$

Dus $c=3$ en $d=2$.

Alternatieve uitwerking

De top van y_1 is (3, 4) en de top van y_5 is (6, 14).

3 naar rechts geschoven, dus $c=3$.

De top na verschuiving (c, c) is (6, 7). De top na verticale herschaling met factor d is (6, 14).

Hieruit volgt dat $d \cdot 7 = 14$, dus $d=2$.

4 a $A = 0,4 \cdot \sqrt[3]{p-6}$
 $0,4 \cdot \sqrt[3]{p-6} = A$
 $\sqrt[3]{p-6} = 2,5A$
 $p-6 = (2,5A)^3$
 $p = 15,625A^3 + 6$

b $B = 16(q-5)^2$
 $16(q-5)^2 = B$
 $(q-5)^2 = \frac{1}{16}B$
 $q-5 = \sqrt{\frac{1}{16}B}$
 $q-5 = \sqrt{\frac{1}{16}} \cdot \sqrt{B}$
 $q = \frac{1}{4}\sqrt{B} + 5$

c $C = 12,5(4D)^{-1,5}$
 $12,5(4D)^{-1,5} = C$
 $(4D)^{-1,5} = 0,08C$
 $4D = (0,08C)^{-\frac{1}{1,5}}$
 $D = \frac{1}{4} \cdot 0,08^{-\frac{1}{1,5}} \cdot C^{-\frac{1}{1,5}}$
 $D \approx 1,35C^{-0,67}$
Dus $D = 1,35C^{-0,67}$.

d $y = 0,25\sqrt{6-0,4x}$
 $0,25\sqrt{6-0,4x} = y$
 $\sqrt{6-0,4x} = 4y$
 $6-0,4x = (4y)^2$
 $-0,4x = 16y^2 - 6$
 $x = -40y^2 + 15$
Dus $x = -40y^2 + 15$.

Bladzijde 173

5 a $G = 65$ geeft $0,4d^3 = 65$
 $d^3 = 162,5$
 $d = \sqrt[3]{162,5}$
 $d \approx 5,46$

Dus de diameter is 5,5 cm.

b Neem $2d$ voor d in de formule $G = 0,4d^3$.
Dit geeft $G = 0,4 \cdot (2d)^3 = 0,4 \cdot 2^3 \cdot d^3 = 2^3 \cdot 0,4d^3 = 8 \cdot 0,4d^3$.
Dus G wordt 8 keer zo groot.

c $G = 0,4d^3$
 $0,4d^3 = G$
 $d^3 = 2,5G$
 $d = \sqrt[3]{2,5G}$
Neem $2G$ voor G in deze formule.
Dit geeft $G = \sqrt[3]{2,5 \cdot 2G} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2,5 \cdot G} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2,5G} \approx 1,26 \cdot \sqrt[3]{2,5G}$.
Dus de diameter is 26% groter.

6 a $W = ad^4$
 $d = 5$ en $W = 13,5$ } $a \cdot 5^4 = 13,5$, dus $a = \frac{13,5}{5^4} = 0,0216$.

b $d = 8$ geeft $W = 0,02 \cdot 8^4 = 81,92$
Dus er stroomt 81,92 liter per seconde door de buis, dat is $81,92 \cdot 60 \approx 4915$ liter per minuut.

c In een uur 16 650 liter, dus per seconde $\frac{16\,650}{3600} = 4,625$ liter.

$W = 4,625$ geeft $0,02d^4 = 4,625$
 $d^4 = 231,25$
 $d = \sqrt[4]{231,25}$ (de negatieve waarde van d voldoet niet)
 $d \approx 3,9$

Dus de diameter is ongeveer 3,9 cm.

d Neem $1,3d$ voor d in de formule $W = 0,02d^4$.
Dit geeft $W = 0,02 \cdot (1,3d)^4 = 0,02 \cdot 1,3^4 \cdot d^4 = 1,3^4 \cdot 0,02d^4 \approx 2,9 \cdot 0,02d^4$.
Dus er stroomt ongeveer 2,9 keer zoveel water per seconde door de buis.

e $W = 0,02d^4$
 $0,02d^4 = W$
 $d^4 = 50W$
 $d = \sqrt[4]{50W}$
Neem $2W$ voor W in deze formule.
Dit geeft $d = \sqrt[4]{50 \cdot 2W} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{50W} \approx 1,19 \cdot \sqrt[4]{50W}$.
Dus de diameter van een buis moet 19% groter worden.

7 a $G = 40$ geeft $H = 12 \cdot 40^{0,67} = 142,08...$

Dus $I = \frac{130}{142,08...} \approx 0,91$.

b $G = 70$ geeft $H = 12 \cdot 70^{0,67} = 206,72...$

Dus $I = \frac{1650}{206,72...} \approx 8,0$.

c Er geldt $\frac{1050}{H} = 1,04$, dus $H = \frac{1050}{1,04} \approx 1010$.

Los op $12 \cdot G^{0,67} = 1010$

Voer in $y_1 = 12x^{0,67}$ en $y_2 = 1010$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 747$.

Dus $G = 747$ kg.

d $H = 12 \cdot G^{0,67}$ invullen in $I = \frac{W}{H}$ geeft $I = \frac{W}{12 \cdot G^{0,67}} = \frac{1}{12} \cdot W \cdot \frac{1}{G^{0,67}} \approx 0,083 \cdot W \cdot G^{-0,67}$.

Dus $I = 0,083 \cdot W \cdot G^{-0,67}$.

Bladzijde 174

8 a $G = 25 - \frac{16}{z+1}$

$\frac{16}{z+1} = 25 - G$

$z+1 = \frac{16}{25-G}$

$z = -1 + \frac{16}{25-G}$

$z = \frac{-25+G+16}{25-G}$

$z = \frac{G-9}{25-G}$

Dus $a = -9$ en $b = 25$.

b $\frac{5p}{2p+q} = 10 + 3p$

$2p+q = \frac{5p}{10+3p}$

$q = -2p + \frac{5p}{10+3p}$

9 a $P = 800 \cdot l^{-2,25}$

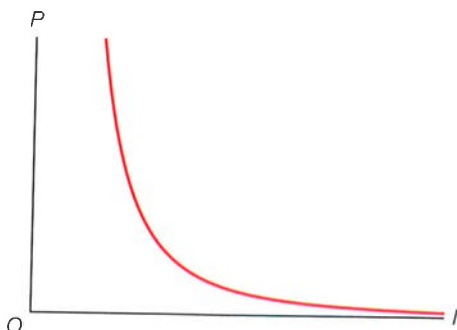
$P = 800 \cdot \frac{1}{l^{2,25}}$

$P = \frac{800}{l^{2,25}}$

Als l groter wordt, dan wordt de noemer van de breuk groter en dan wordt P kleiner. Dat wil zeggen dat er minder organismen per km^2 leven, oftewel dat de organismen gemiddeld verder van elkaar leven. Dus de bewering klopt.

Alternatieve uitwerking

Voer in $y_1 = 800x^{-2,25}$.



Als l groter wordt, dan wordt P kleiner. Dus de bewering klopt.

- b** $P = 1350$ geeft $800 \cdot l^{-2,25} = 1350$
 Voer in $y_1 = 800x^{-2,25}$ en $y_2 = 1350$.
 De optie snijpunt geeft $x = 0,792...$
 De gemiddelde lengte is dus ongeveer 79 cm.
- c** $l = 2,15$ geeft $P = 800 \cdot 2,15^{-2,25} \approx 142,92...$
 In het gebied van 250 km^2 geeft dit $250 \cdot 142,92... = 35\,730,8...$
 Er leven dus ongeveer 35 730 kariboes in dit gebied.
- d** $160\,000$ exemplaren per 5 km^2 geeft $P = \frac{160\,000}{5} = 32\,000$.
 Hieruit volgt $800 \cdot l^{-2,25} = 32\,000$.
 Voer in $y_1 = 800x^{-2,25}$ en $y_2 = 32\,000$.
 De optie snijpunt geeft $x = 0,194...$
 De gemiddelde lengte is dus ongeveer 19 cm.
- e** Neem $1,2l$ voor l in de formule $P = 800 \cdot l^{-2,25}$.
 Dit geeft $P = 800 \cdot (1,2l)^{-2,25} = 800 \cdot 1,2^{-2,25} \cdot l^{-2,25} = 1,2^{-2,25} \cdot 800 \cdot l^{-2,25} \approx 0,66 \cdot 800 \cdot l^{-2,25}$.
 Dus P neemt met 34% af.

- 10 a** $l = 8,6$ geeft $v = 4,8\sqrt{8,6} \approx 14,08 \text{ km/uur}$
 $l = 5,8$ geeft $v = 4,8\sqrt{5,8} \approx 11,56 \text{ km/uur}$
 Dat is dus $\frac{14,08 - 11,56}{11,56} \times 100\% \approx 21,8\%$ hoger.
- b** Bij schip II is $v = 4,8\sqrt{l_{II}}$, dus bij schip I is
 $v = 4,8\sqrt{2l_{II}} = 4,8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{l_{II}} = \sqrt{2} \cdot 4,8\sqrt{l_{II}} \approx 1,4 \cdot 4,8\sqrt{l_{II}}$.
 De rompsnelheid bij schip I is 1,4 keer zo groot als bij schip II.
- c** $v = 4,8\sqrt{l}$
 $4,8\sqrt{l} = v$
 $\sqrt{l} = \frac{1}{4,8}v$
 $l = \left(\frac{1}{4,8}v\right)^2$
 $l \approx 0,0434v^2$
 Dus $l = 0,0434v^2$.
- d** $v = 10$ geeft $l = 0,0434 \cdot 10^2 \approx 4,3$
 $v = 20$ geeft $l = 0,0434 \cdot 20^2 \approx 17,4$
 Die schepen hebben een lengte van de waterlijn tussen 4,3 en 17,4 meter.

Bladzijde 175

- 11 a** $T = -27,4$ geeft $v = 331\sqrt{1 + \frac{-27,4}{273}} \approx 331,95 \text{ m/s}$
 $T = 38,6$ geeft $v = 331\sqrt{1 + \frac{38,6}{273}} \approx 353,63 \text{ m/s}$
 Het verschil in snelheid is dus $353,63 - 331,95 \approx 21,68 \text{ m/s}$.
- b** Los op $331\sqrt{1 + \frac{T}{273}} = 340$.
 Voer in $y_1 = 331\sqrt{1 + \frac{x}{273}}$ en $y_2 = 340$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 15$.
 Dus de temperatuur is 15°C .
- c** $T_0 = 25$ geeft $T = 25 - 6,5 \cdot 2,5 = 8,75$
 $T = 8,75$ geeft $v = 331\sqrt{1 + \frac{8,75}{273}} \approx 336,2... \text{ m/s} \approx 1211 \text{ km/uur}$

$$\begin{aligned} \text{d } T = T_0 - 6,5h \\ h = 2 \text{ en } T = -1 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} T_0 - 6,5 \cdot 2 &= -1 \\ T_0 - 13 &= -1 \\ T_0 &= 12 \end{aligned} \right.$$

$T = 12 - 6,5h$ invullen in $v = 331 \sqrt{1 + \frac{T}{273}}$ geeft

$$v = 331 \sqrt{1 + \frac{12 - 6,5h}{273}} = 331 \sqrt{1 + \frac{12}{273} - \frac{6,5h}{273}} = 331 \sqrt{-\frac{6,5}{273}h + 1 + \frac{12}{273}} \approx 331 \sqrt{-0,0238h + 1,0440}.$$

$$\text{Dus } v = 331 \sqrt{-0,0238h + 1,0440}.$$

6 Kansrekening

12

a

SOM

6						
5						
4	5					
3	4	5				
2	3	4	5			
1	2	3	4	5		
	1	2	3	4	5	6

$$P(\text{som minder dan 6}) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

b

VERSCHIL

6				2		
5			2			
4		2				2
3	2				2	
2				2		
1			2			
	1	2	3	4	5	6

$$P(\text{verschil is 2}) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$\text{c } P(\text{drie keer verschil van 2 ogen}) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^7 \approx 0,227$$

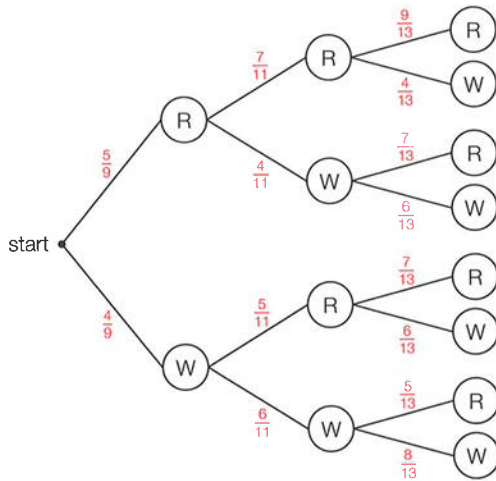
$$\begin{aligned} \text{d } P(\text{minstens 8 keer som minder dan 6}) \\ = P(8 \text{ keer som} < 6) + P(9 \text{ keer som} < 6) + P(10 \text{ keer som} < 6) \\ = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^8 \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^2 + \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^9 \cdot \frac{13}{18} + \left(\frac{5}{18}\right)^{10} \approx 0,001 \end{aligned}$$

e Het aantal mogelijke uitkomsten is $4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$.
Gunstige uitkomsten zijn 113, 131, 311, 122, 212 en 221.

$$P(\text{som is 5}) = \frac{6}{192} = \frac{1}{32}$$

f Gunstige uitkomsten zijn 111, 222, 333 en 444.

$$P(\text{alle dobbelstenen hetzelfde aantal}) = \frac{4}{192} = \frac{1}{48}$$

13 a

b $P(\text{alleen rode}) = P(r r r) = \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{9}{13} \approx 0,245$

c $P(\text{meer rode dan witte}) = P(r r r) + P(r r w) + P(r w r) + P(w r r)$
 $= \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{9}{13} + \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{13} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{13} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{7}{13} \approx 0,571$

Bladzijde 176

14 a $P(3 \text{ appels en 1 kers}) = P(a a a k) + P(a a k a) + P(a k a a) + P(k a a a)$
 $= 0 + 0 + \frac{5}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} \approx 0,003$

b $P(4 \text{ gelijke}) = P(a a a a) + P(p p p p) + P(b b b b) + P(k i k i k i k i)$
 $= \frac{5}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{15} + \frac{1}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{1}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{6}{15} \approx 0,008$

c $P(1 \text{ banaan}) = P(b \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset) + P(\emptyset b \emptyset \emptyset \emptyset) + P(\emptyset \emptyset b \emptyset \emptyset) + P(\emptyset \emptyset \emptyset b \emptyset)$
 $= \frac{1}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{1}{15} \approx 0,442$

d $P(\text{geen kiwi}) = P(k i k i k i k i) = \frac{12}{15} \cdot \frac{13}{15} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{9}{15} \approx 0,305$

15 a $P(\text{geen prijs}) = \frac{\binom{55}{5}}{\binom{65}{6}} \approx 0,421$

b $P(\text{minstens €10}) = 1 - P(\text{hoogstens €5}) = 1 - P(\text{geen prijs}) - P(1 \text{ derde prijs})$
 $= 1 - \frac{\binom{55}{5}}{\binom{65}{5}} - \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{55}{4}}{\binom{65}{5}} \approx 0,331$

c $P(1 \text{ tweede prijs en 1 derde prijs en verder niets}) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{55}{3}}{\binom{65}{5}} \approx 0,057$

d $P(2 \text{ prijzen}) = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{55}{3}}{\binom{65}{5}} \approx 0,143$

16 a $15 + 21 = 36$ meisjes met minder dan 150 euro en $120 - 36 = 84$ overigen.

$$P(5 \text{ meisjes met minder dan 150 euro}) = \frac{\binom{36}{5} \cdot \binom{84}{7}}{\binom{120}{12}} \approx 0,162$$

b $P(8 \text{ meisjes en 4 jongens}) = \frac{\binom{68}{8} \cdot \binom{52}{4}}{\binom{120}{12}} \approx 0,190$

- c $27 + 5 = 32$ meisjes met 150 euro of meer en $47 + 43 + 7 - 32 = 65$ overigen met minder dan 120 euro.

$$P(5 \text{ meisjes met 150 euro of meer en niemand met minder dan 120 euro}) = \frac{\binom{32}{5} \cdot \binom{65}{7}}{\binom{120}{12}} \approx 0,013$$

- d $43 + 7 = 50$ met minstens 150 euro en $120 - 70 = 50$ overigen.

$$\begin{aligned} P(\text{minstens 3 met minstens 150 euro}) &= 1 - P(0) - P(1) - P(2) \\ &= 1 - \frac{\binom{70}{12}}{\binom{120}{12}} - \frac{\binom{50}{1} \cdot \binom{70}{11}}{\binom{120}{12}} - \frac{\binom{50}{2} \cdot \binom{70}{10}}{\binom{120}{12}} \approx 0,943 \end{aligned}$$

- e $21 + 27 = 48$ meisjes met 120 euro of meer, maar minder dan 180 euro en $68 - 48 = 20$ overige meisjes.

$P(6 \text{ jongens én 4, 5 of 6 meisjes met 120 euro of meer en minder dan 180 euro})$

$$= \frac{\binom{52}{6} \cdot \left(\binom{48}{4} \cdot \binom{20}{2} + \binom{48}{5} \cdot \binom{20}{1} + \binom{48}{6} \right)}{\binom{120}{12}} \approx 0,161$$

- f $P(\text{meisje onder voorwaarde heeft minstens 150 euro, maar minder dan 180 euro}) = \frac{27}{43} \approx 0,628$
- $$\left. \begin{aligned} P(\text{meisje}) &= \frac{68}{120} = 0,567 \end{aligned} \right\} 0,628 \neq 0,567$$

De gebeurtenissen 'leerling is meisje' en 'leerling heeft minstens 150 euro, maar minder dan 180 euro per maand' zijn afhankelijk.

Bladzijde 177

- 17 a $P(\text{alle automobilisten houden zich aan de maximumsnelheid}) = 0,68^{10} \approx 0,021$

- b $P(\text{meer dan 70 km per uur}) = \frac{1}{4} \cdot 0,32 = 0,08$

$$P(\text{tussen 50 en 70 km per uur}) = 1 - 0,68 - 0,08 = 0,24$$

$$\text{De gevraagde kans is } \binom{10}{7} \cdot \binom{3}{1} \cdot 0,68^7 \cdot 0,08 \cdot 0,24^2 \approx 0,112.$$

- c $P(\text{minstens 2 te hard}) = 1 - P(0 \text{ of } 1 \text{ te hard}) = 1 - P(0) - P(1)$
- $$= 1 - 0,68^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0,32 \cdot 0,68^9 \approx 0,879$$

- 18 a $P(2 \text{ of } 3 \text{ goed}) = P(2 \text{ goed}) + P(3 \text{ goed})$
- $$= \binom{18}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^{16} + \binom{18}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^{15} \approx 0,266$$

- b $P(\text{minder dan 8 goed}) = P(\text{minder dan 3 goed gegokt})$
- $$\begin{aligned} &= P(0 \text{ goed gegokt}) + P(1 \text{ goed gegokt}) + P(2 \text{ goed gegokt}) \\ &= 0,75^{13} + \binom{13}{1} \cdot 0,25 \cdot 0,75^{12} + \binom{13}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^{11} \approx 0,333 \end{aligned}$$

- c $P(\text{minstens 16 goed}) = P(\text{minstens 3 goed geraden})$
- $$\begin{aligned} &= P(3 \text{ goed geraden}) + P(4 \text{ goed geraden}) + P(5 \text{ goed geraden}) \\ &= \binom{5}{2} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^2 + \binom{5}{1} \cdot 0,25^4 \cdot 0,75 + 0,25^5 \approx 0,104 \end{aligned}$$

- 19 a $P(3 \text{ rode en 3 blauwe}) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{12}\right)^3 \approx 0,023$

- b $P(\text{geen enkele rode in één greep}) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{7}{44}$

$$P(2 \text{ van de 6 keer geen enkele rode}) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \left(\frac{37}{44}\right)^4 \approx 0,190$$

- c $P(\text{evenveel witte als blauwe blijven achter}) = P(\text{één witte meer dan blauwe pakken})$

$$= P(1 \text{ witte en } 3 \text{ rode}) + P(2 \text{ witte, } 1 \text{ blauwe en } 1 \text{ rode}) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{12}{4}} + \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{12}{4}} \approx 0,263$$

Bladzijde 178

- 20 a Ja, als de een bloedgroep A heeft en de ander bloedgroep B.
 b $P(\text{dezelfde bloedgroep}) = P(0 \ 0) + P(A \ A) + P(B \ B) + P(AB \ AB)$
 $= 0,46^2 + 0,43^2 + 0,08^2 + 0,03^2 = 0,4038 \approx 0,404$
 c $P(\text{tenminste één met } 0) = 1 - P(\text{niemand met } 0) = 1 - 0,54^{12} \approx 0,999$
 d $P(\text{dezelfde resusfactor}) = 0,85^2 + 0,15^2 = 0,745$
 $P(\text{dezelfde bloedgroep én dezelfde resusfactor}) = 0,4038 \cdot 0,745 \approx 0,301$

Bladzijde 179

- 21 a $P(2 \text{ plaatsen leeg in kano } 3) = \frac{\binom{24}{4} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{30}{6}} \approx 0,268$

Alternatieve uitwerking

$$P(2 \text{ plaatsen leeg in kano } 3) = \frac{\binom{24}{20} \cdot \binom{6}{4}}{\binom{30}{24}} \approx 0,286$$

- b $P(\text{kano } 1 \text{ en } 2 \text{ geheel vol}) = \frac{\binom{24}{12}}{\binom{30}{12}} \approx 0,031$

Alternatieve uitwerking

$$P(\text{kano } 1 \text{ en } 2 \text{ geheel vol}) = \frac{\binom{18}{12}}{\binom{30}{24}} \approx 0,031$$

- 22 a $P(\text{alle planten links besmet en rechts niet}) = 0,3^5 \cdot 0,7^5 \approx 0,0004$
 b $P(12 \text{ of } 13 \text{ besmet}) = P(12 \text{ besmet}) + P(13 \text{ besmet}) = \binom{40}{12} \cdot 0,3^{12} \cdot 0,7^{28} + \binom{40}{13} \cdot 0,3^{13} \cdot 0,7^{27} \approx 0,263$
 c Stel hij begint met n gezonde planten.
 $P(\text{minstens één onbesmet}) = 1 - P(\text{geen onbesmet}) = 1 - 0,3^n$
 Er moet gelden $1 - 0,3^n > 0,99$.
 Voer in $y_1 = 1 - 0,3^x$ en maak een tabel.
 $x = 3$ geeft $y \approx 0,973$ en $x = 4$ geeft $y \approx 0,9919$.
 Dus hij moet met minimaal 4 planten beginnen.
 d $P(\text{een plant is na twee dagen niet besmet}) = 0,7^2 = 0,49$
 $P(\text{alle planten na twee dagen niet besmet}) = 0,49^{40} \approx 4,1 \cdot 10^{-13}$
 Deze kans is kleiner dan een miljardste $= 10^{-9}$.

Bladzijde 180

- 23 a In een uitdeelzak zitten $14 \cdot 20 = 280$ J&J's.
 20% van 280 is 56
 $P(56 \text{ rood}) = \binom{280}{56} \cdot 0,2^{56} \cdot 0,8^{224} \approx 0,060$
 b Je verwacht $0,3 \cdot 280 = 84$ bruine J&J's.
 $P(84 \text{ bruin}) = \binom{280}{84} \cdot 0,3^{84} \cdot 0,7^{196} \approx 0,052$
 c $P(\text{minstens } 3 \text{ blauw}) = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$
 $= 1 - 0,9^{20} - \binom{20}{1} \cdot 0,1 \cdot 0,9^{19} - \binom{20}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{18} = 0,323...$
 Dus naar verwachting $0,323... \cdot 14 \approx 4,52$, oftewel 5 zakjes.

Gemengde opgaven

8 Differentiaalrekening

Bladzijde 200

- 1 a** Op 16 maart om 0:00 uur is de olieprijs $101,50 + 0,50 - 1 = 101$ dollar per vat.

De tanker bevat $\frac{210\,000\,000}{127,2} \approx 1\,650\,943$ vaten olie.

De totale waarde is $1\,650\,943 \cdot 101 \approx 166,7$ miljoen dollar.

- b** Het grootste prijsverschil is $1,25 + 0,75 = 2$ dollar per vat.
Dus het gevraagde verschil is $1\,650\,943 \cdot 2 \approx 3,3$ miljoen dollar.

- 2 a** Op het interval $\langle 4, 6 \rangle$.

- b** Nee.

Neem $\Delta x = 4$. Je krijgt de toename $\Delta y = 10$ en $\Delta y = -2$.

De gemiddelde toename is dan 4 en dit is meer dan 3.

- c** Op $[0, 8]$ is $\Delta y = 2 + 3 + 3 + 2 + 1 - 1 - 2 + 0 = 8$, dus op $[0, 8]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8}{8} = 1 \neq 0$.

Op $[4, 7]$ is $\Delta y = 1 - 1 - 2 = -2$, dus op $[4, 7]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3} \neq 0$.

Op $[3, 7]$ is $\Delta y = 2 + 1 - 1 - 2 = 0$, dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{4} = 0$.

Op $[3, 8]$ is $\Delta y = 2 + 1 - 1 - 2 + 0 = 0$, dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{5} = 0$.

Dus op $[3, 7]$ en op $[3, 8]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

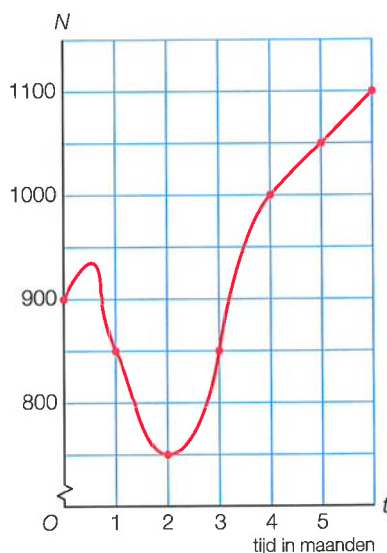
Bladzijde 201

- 3 a** Tussen $t = 1$ en $t = 6$ is $\Delta N = -100 + 100 + 150 + 50 + 50 = 250$.

De gemiddelde snelheid is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{250}{5} = 50$ konijnen per maand.

- b** Maak een tabel.

t	0	1	2	3	4	5	6
N	900	850	750	850	1000	1050	1100



4 a Het differentiequotiënt op $[3, 6]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(6) - N(3)}{6 - 3} = \frac{30 - 27,3}{3} = 0,9$.

Tussen 1 april en 1 juli 2019 is het aantal hotelovernachtingen per dag gemiddeld met 900 per maand toegenomen.

b Van 1 november tot en met 31 december, dus op $[10, 12]$.

Op $[10, 12]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(12) - N(10)}{12 - 10} = \frac{24,6 - 28}{2} = -1,7$.

De gemiddelde afname is 1700 per maand.

c Mei, dus op $[4, 5]$.

Op $[4, 5]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(5) - N(4)}{5 - 4} = \frac{29,5 - 28,6}{1} = 0,9$.

De gemiddelde toename van het aantal hotelovernachtingen per dag is 900 per maand

en dat is $\frac{900}{4\frac{3}{7}} \approx 203$ per week.

d $N = -0,2t^2 + 2,7t + 21$ geeft $\frac{dN}{dt} = -0,4t + 2,7$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} = 0 & \text{ geeft } -0,4t + 2,7 = 0 \\ -0,4t & = -2,7 \\ t & = 6,75 \end{aligned}$$

Dus in de maand juli.

e Augustus, dus van $t = 7$ tot $t = 8$.

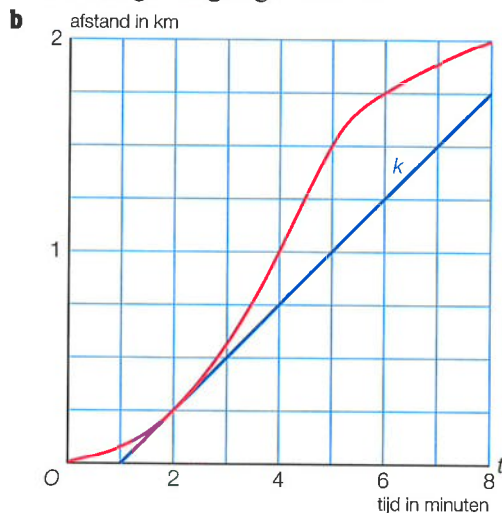
$$N(7) = 30,1 \text{ en } N(8) = 29,8$$

$$31 \cdot 30,1 = 933,1 \text{ en } 31 \cdot 29,8 = 923,8$$

Beide minder dan 1 miljoen, dus dit komt niet overeen met het model.

5 a $\frac{2}{8} = 0,25$ km/minuut, dat is $60 \cdot 0,25 = 15$ km/uur.

Dus de gevraagde gemiddelde snelheid is 15 km/uur.



Raaklijn k door $(1, 0)$ en $(5, 1)$, dus $rc_k = \frac{1 - 0}{5 - 1} = 0,25$.

De snelheid op $t = 2$ is 0,25 km/minuut oftewel 15 km/uur.

c Tussen $t = 4$ en $t = 5$ is de helling van de grafiek het grootst, waarbij de grafiek tussen $t = 4$ en $t = 5$ constant stijgend is.

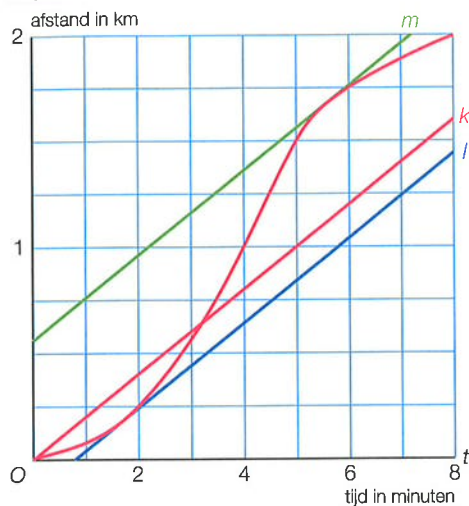
Dus de snelheid is maximaal tussen $t = 4$ en $t = 5$. Deze maximale snelheid is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van het constant stijgende deel van de grafiek.

Op $[4, 5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,5 - 1}{5 - 4} = 0,5$ km/minuut.

Dus de maximale snelheid is $60 \cdot 0,5 = 30$ km/uur.

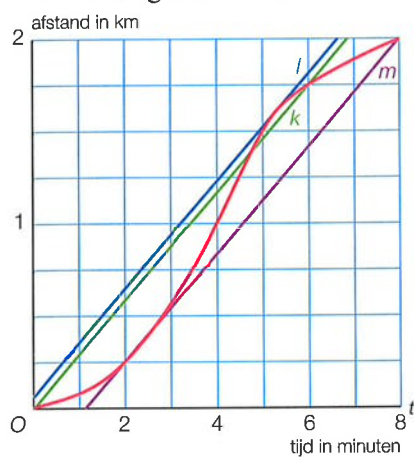
- d $12 \text{ km/uur} = 0,2 \text{ km/minuut}$

Teken een lijn met $rc = 0,2$, dus bijvoorbeeld de lijn k door $(0, 0)$ en $(5, 1)$ in de figuur hieronder.



Teken de lijnen l en m evenwijdig met k , waarbij l en m de tijd-afstandgrafiek raken. l raakt de tijd-afstandgrafiek voor $t \approx 1,5$ en m raakt de tijd-afstandgrafiek voor $t \approx 5,5$. Dus op $t \approx 1,5$ en op $t \approx 5,5$ is de snelheid 12 km/uur .

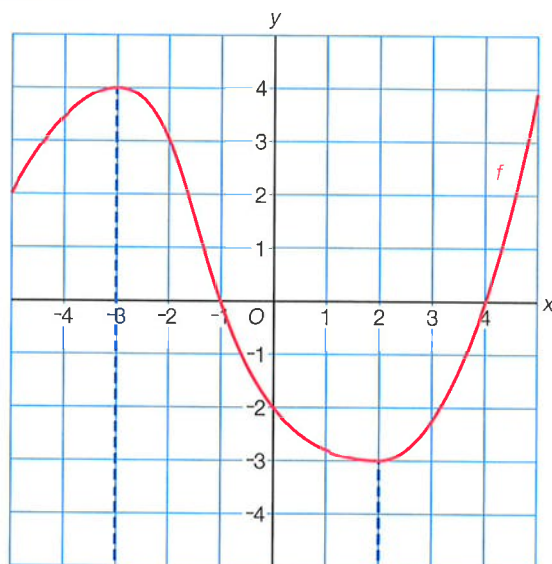
- e De lijn k door $(0, 0)$ en $(6; 1,75)$ geeft de gemiddelde snelheid op het interval $[0, 6]$. Er zijn twee lijnen evenwijdig met k die de tijd-afstandgrafiek raken. Zie de lijnen l en m in de figuur.



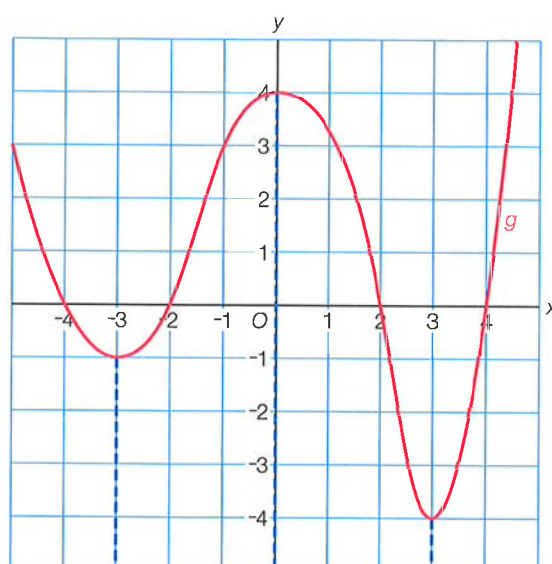
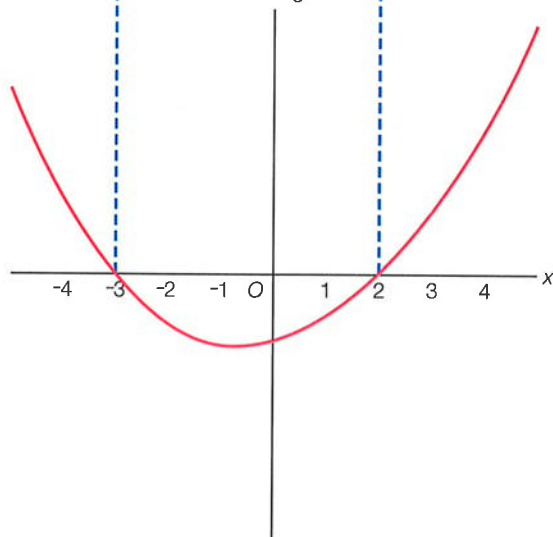
Er zijn dus twee tijdstippen waarop de snelheid hetzelfde is als de gemiddelde snelheid op het interval $[0, 6]$.

Bladzijde 202

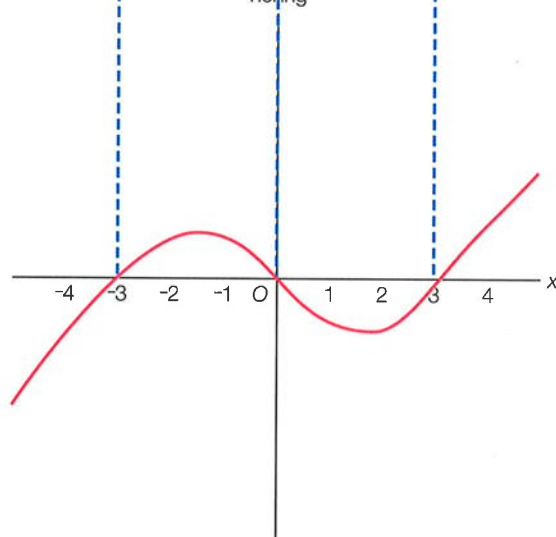
6 a

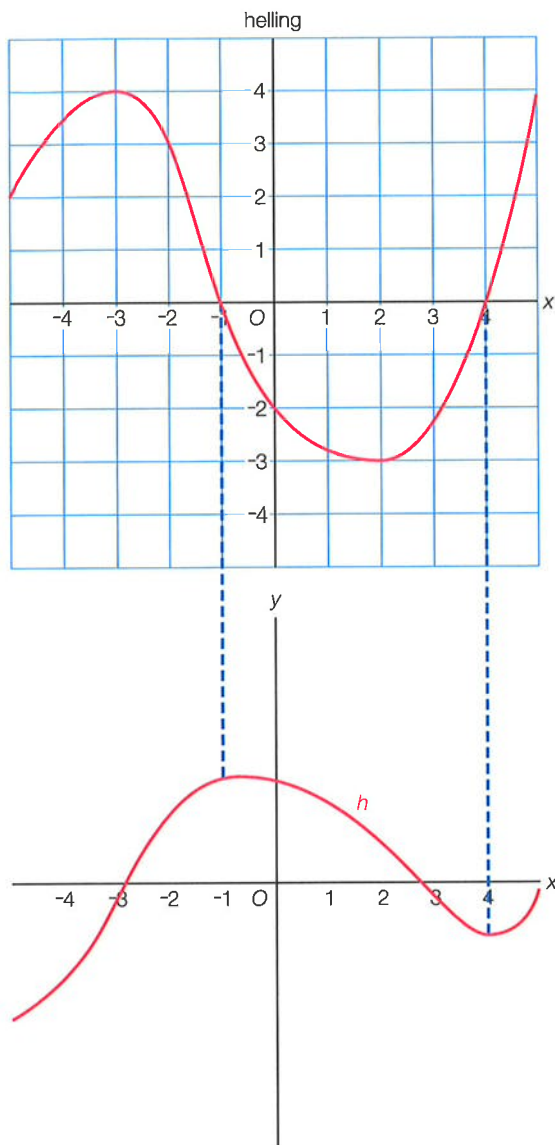


helling



helling



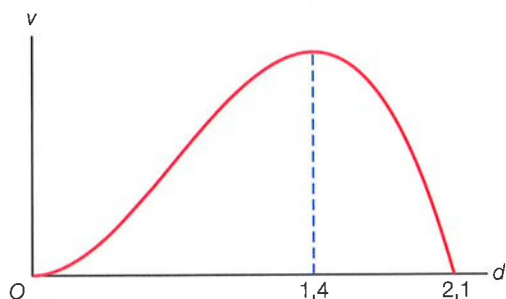
b

c Op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - (-2)}{4 - 0} = \frac{1}{2}$.

d Op $[-2, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4 - 0}{3 - (-2)} = -\frac{4}{5}$.

7 a $v = 20(2,1 - d)d^2 = 20d^2(2,1 - d) = 42d^2 - 20d^3$ geeft $\frac{dv}{dd} = 84d - 60d^2$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dd} = 0 &\text{ geeft } 84d - 60d^2 = 0 \\ d(84 - 60d) &= 0 \\ d = 0 &\text{ of } 84 - 60d = 0 \\ d = 0 &\text{ of } -60d = -84 \\ d = 0 &\text{ of } d = 1,4 \end{aligned}$$



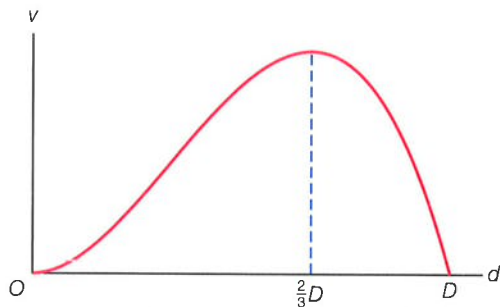
v is maximaal voor $d = 1,4$.

$$v_{\max} = 42 \cdot 1,4^2 - 20 \cdot 1,4^3 = 27,44$$

De maximale snelheid is $27,44 \text{ m/s} = 27,44 \cdot 3,6 \approx 99 \text{ km/uur}$.

b $v = k(D-d)d^2 = kd^2(D-d) = kDd^2 - kd^3$ geeft $\frac{dv}{dd} = 2kDd - 3kd^2$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dd} = 0 &\text{ geeft } 2kDd - 3kd^2 = 0 \\ &kd(2D - 3d) = 0 \\ &kd = 0 \text{ of } 2D - 3d = 0 \\ &d = 0 \text{ of } -3d = -2D \\ &d = 0 \text{ of } d = \frac{2}{3}D\end{aligned}$$



c $v_{\max} = kD \cdot \left(\frac{2}{3}D\right)^2 - k \cdot \left(\frac{2}{3}D\right)^3 = kD \cdot \frac{4}{9}D^2 - k \cdot \frac{8}{27}D^3 = \frac{4}{9}kD^3 - \frac{8}{27}kD^3 = \frac{4}{27}kD^3$

d Neem bijvoorbeeld $D = 2,5$.

$k = 20$ en $D = 2,5$ geeft $v_{\max} = \frac{4}{27} \cdot 20 \cdot 2,5^3 = 46,3$ m/s en dat is $46,3 \cdot 3,6 \approx 167$ km/uur.
Dus 170 km/uur zou wel kunnen.

Bladzijde 203

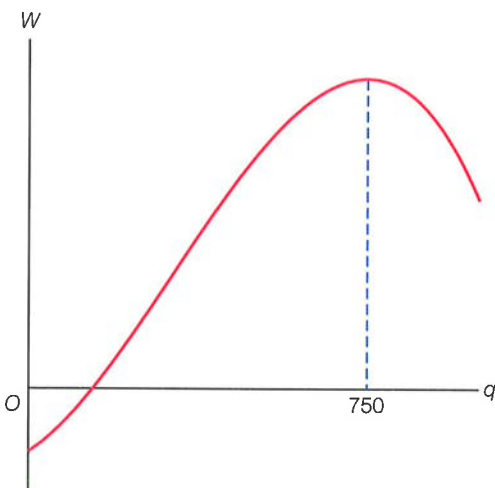
8 a $W(q) = -0,0001q^3 + 0,0975q^2 + 22,5q - 5000$ geeft $W'(q) = -0,0003q^2 + 0,195q + 22,5$

$W'(q) = 0$ geeft $-0,0003q^2 + 0,195q + 22,5 = 0$

$$q^2 - 650q - 75\,000 = 0$$

$$(q + 100)(q - 750) = 0$$

$$q = -100 \text{ of } q = 750$$



Uit de schets volgt dat W maximaal is voor $q = 750$.

$W_{\max} = W(750) = 24\,531,25$, dus de maximale winst is 24 531,25 euro.

b $W'(300) = -0,0003 \cdot 300^2 + 0,195 \cdot 300 + 22,5 = 54$

$W'(400) = -0,0003 \cdot 400^2 + 0,195 \cdot 400 + 22,5 = 52,5$

Omdat $54 > 52,5$ stijgt de winst bij een productie van 300 stuks sneller dan bij een productie van 400 stuks.

- 9 a** Voer in $y_1 = -0,002x^3 + 0,075x^2 - 0,6x + 64$.
Neem x tussen 0 en 30.

Schets (met de coördinaten van de toppen en de randpunten, zie vraag b).

- b** $P(t) = -0,002t^3 + 0,075t^2 - 0,6t + 64$ geeft
 $P'(t) = -0,006t^2 + 0,15t - 0,6$
 $P'(t) = 0$ geeft $-0,006t^2 + 0,15t - 0,6 = 0$
 $t^2 - 25t + 100 = 0$
 $(t - 5)(t - 20) = 0$
 $t = 5$ of $t = 20$

$t = 5$ geeft $P = 62,625$

$t = 20$ geeft $P = 66$

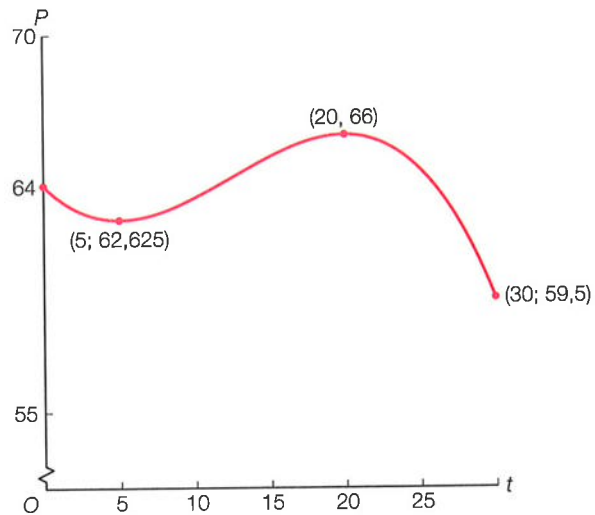
Dus de toppen zijn $(5; 62,625)$ en $(20, 66)$.

Randpunten: $t = 0$ geeft $P = 64$ en $t = 30$

geeft $P = 59,5$ dus $(0, 64)$ en $(30; 59,5)$.

- c** Kopen op 5 juni en verkopen op 20 juni geeft de maximale winst van $66 - 62,625 = 3,375$ euro per aandeel.

De maximale winst die Marceline kan behalen, is dus $50 \cdot 3,375 = 168,75$ euro.



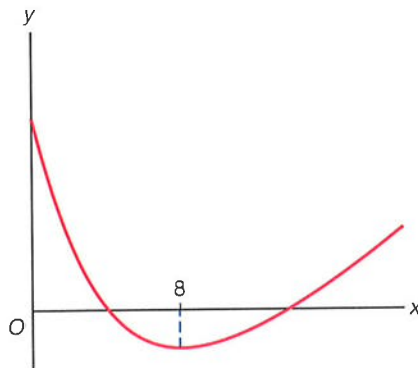
- 10 a** $y = 5\sqrt{x^2 + 36} - 20 - 4x = 5(x^2 + 36)^{\frac{1}{2}} - 20 - 4x$ geeft
 $\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{2}(x^2 + 36)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - 4 = \frac{5x}{(x^2 + 36)^{\frac{1}{2}}} - 4 = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 4$

- b** helling $= \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = \frac{5 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 36}} - 4 = 0 - 4 = -4$

- c** Los op $\frac{5x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 4 = 0$ oftewel $\frac{5x}{\sqrt{x^2 + 36}} = 4$

Voer in $y_1 = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 36}}$ en $y_2 = 4$.

De optie snijpunt geeft $x = 8$.



Uit de schets volgt dat y minimaal is voor $x = 8$.

$x = 8$ geeft $y = -2$, dus het minimum van y is -2 .

9 Kansverdelingen

- 11 a** X = aantal keer 6 ogen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$.
 $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$
 De GR geeft $P(X > 2) \approx 0,225$.

- b** X = aantal keer meer dan 9 ogen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 12$ en
 $p = P(\text{meer dan 9 ogen}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
 $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$
 De GR geeft $P(X \geq 4) \approx 0,125$.

- c** hoogstens 5 ogen, dus 3, 4 of 5
 3 ogen 111
 4 ogen 112, 121, 211
 5 ogen 113, 131, 311, 122, 212, 221
 $P(\text{hoogstens 5 ogen}) = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$

X = aantal keer hoogstens 5 ogen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = \frac{5}{108}$.
 De GR geeft $P(X \leq 2) \approx 0,937$.

- d** $P(\text{minstens één keer 6 ogen}) = 1 - P(\text{niet één keer 6 ogen}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$
 $P(\text{vier keer gooien}) = \left(\frac{25}{36}\right)^3 \cdot \frac{11}{36} \approx 0,102$

		SOM					
		1	2	3	4	5	6
6		7	8	9	10	11	12
5		6	7	8	9	10	11
4		5	6	7	8	9	10
3		4	5	6	7	8	9
2		3	4	5	6	7	8
1		2	3	4	5	6	7

Bladzijde 204

- 12 a** $P(X = 100) = P(333) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{120} \approx 0,008$

- b** $P(X = 20) = P(444) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{120}$

$$P(X = 5) = P(555) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{120}$$

$$P(X = 0) = 1 - P(X = 100) - P(X = 20) - P(X = 5) = 1 - \frac{1}{120} - \frac{4}{120} - \frac{12}{120} = \frac{103}{120}$$

x	0	5	20	100
$P(X = x)$	$\frac{103}{120}$	$\frac{12}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{1}{120}$

- c** $P(Y = 10) = P(334) + P(343) + P(433) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \approx 0,042$

- d** $P(\text{twee keer een 3}) = P(333) + P(333) + P(333) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = 0,1$
 $P(\text{elke keer twee keer het cijfer 3}) = 0,1^4 = 0,0001$

- e** $P(\text{hoofdprijs}) = \frac{1}{120}$ en $P(\text{geen hoofdprijs}) = \frac{119}{120}$

$$P(\text{acht of negen keer spelen}) = P(\text{acht keer spelen}) + P(\text{negentien keer spelen}) \\ = \left(\frac{119}{120}\right)^7 \cdot \frac{1}{120} + \left(\frac{119}{120}\right)^8 \cdot \frac{1}{120} \approx 0,016$$

- 13 a** X = aantal reizen dat niet wordt geannuleerd
 X is binomiaal verdeeld met $n = 1350$ en $p = 0,92$.
 De GR geeft $P(X \leq 1250) \approx 0,802$.

De gevraagde kans is 0,802.

- b** X = aantal annuleringen

X is binomiaal verdeeld met $n = 1300$ en $p = 0,08$.

De verwachtingswaarde is $E(X) = np = 1300 \cdot 0,08 = 104$ en de standaardafwijking is

$$\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1300 \cdot 0,08 \cdot 0,92} \approx 9,8.$$

$$E(X) - \sigma_X \approx 104 - 9,8 = 94,2$$

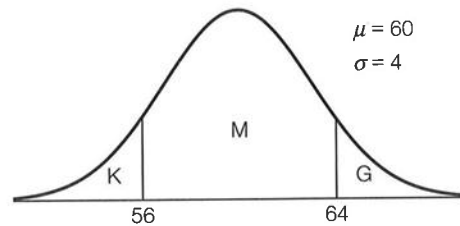
$$E(X) + \sigma_X \approx 104 + 9,8 = 113,8$$

$$P(94,2 < X < 113,8) = P(95 \leq X \leq 113)$$

De GR geeft $P(94,2 < X < 113,8) \approx 0,669$.

- c Stel men verkoopt maximaal n reizen.
 Voor welke n is $P(X \leq 1250) \geq 0,95$?
 Voer bij y_1 een formule in en maak een tabel.
 Op de TI: $y_1 = \text{binomcdf}(x, 0,92, 1250)$.
 Op de Casio: $y_1 = \text{BinomialCD}(1250, x, 0,92)$.
 Op de NW: $y_1 = \text{binomcdf}(1250, x, 0,92)$.
 Op de HP: $y_1 = \text{BINOMIAL_CDF}(x, 0,92, 1250)$.
 Je leest af voor $n = 1341$ is $P(X \leq 1250) \approx 0,957$
 voor $n = 1342$ is $P(X \leq 1250) \approx 0,947$.
 Dus maximaal 1341 reizen verkopen.

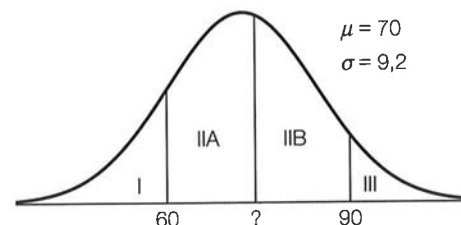
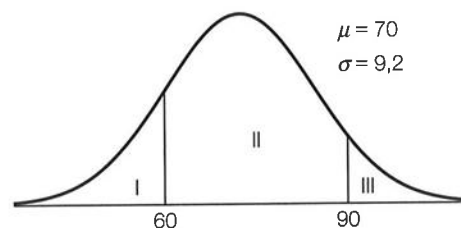
- 14 a $X =$ gewicht ei in gram
 X is normaal verdeeld met $\mu = 60$ en $\sigma = 4$.
 Bij $l = -10^{99}$ en $r = 56$ geeft de GR opp $= 0,1586...$
 Tot de klasse K behoren naar verwachting
 $5000 \cdot 0,1586... \approx 793$ eieren.
 Bij $l = 56$ en $r = 64$ geeft de GR opp $= 0,6826...$
 Tot de klasse M behoren naar verwachting
 $5000 \cdot 0,6826... \approx 3414$ eieren.
 b In klasse G zitten naar verwachting $5000 - 3414 - 793 = 793$ eieren.
 De verwachte opbrengst is $793 \cdot 0,09 + 3414 \cdot 0,10 + 793 \cdot 0,11 = 500$ euro.
 De kosten zijn dan $300 + 5000 \cdot 0,015 = 375$ euro.
 Dus de verwachte winst is $500 - 375 = 125$ euro.



Bladzijde 205

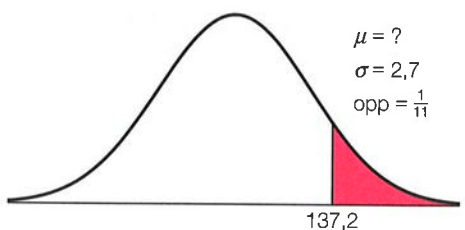
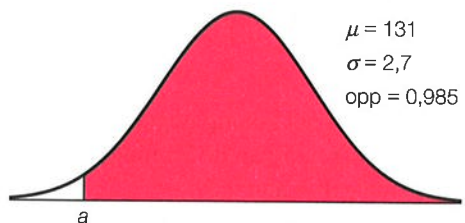
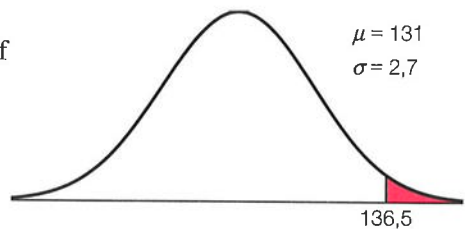
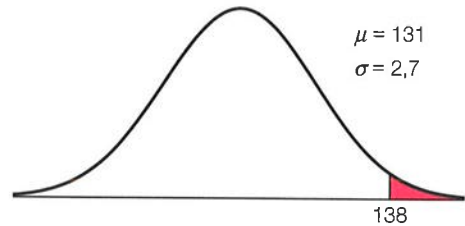
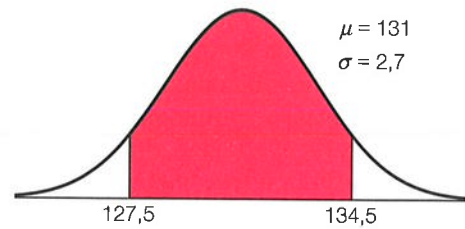
- 15 a Er wordt net zolang gegooid totdat rood of geel heeft gewonnen. Bij zowel rood als geel leiden 5 van de 36 mogelijkheden tot winst. Dus deze kansen zijn gelijk en dus beide gelijk aan 0,5.
 b Je wint 5 euro met dubbel 1 (voor rood) of dubbel 6 (voor geel).
 Dubbel 1 is één van de 5 mogelijkheden op winst van rood.
 Deze kans is dus $\frac{1}{5} \cdot 0,5 = 0,1$.
 c $P(W = 5) = 0,1$
 $P(W = 10) = \frac{4}{5} \cdot 0,5 = 0,4$
 $P(W = -10) = P(\text{andere kleur wint}) = 0,5$
- | | | | |
|------------|-----|-----|-----|
| w | 5 | 10 | -10 |
| $P(W = w)$ | 0,1 | 0,4 | 0,5 |
- $E(W) = 5 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,4 + (-10) \cdot 0,5 = -0,5$
 De verwachtingswaarde van de winst per spel is -50 cent.

- 16 a Normale verdeling met $\mu = 70$ en $\sigma = 9,2$.
 Bij $l = -10^{99}$ en $r = 60$ geeft de GR opp (I) $= 0,1385... \approx 0,139$.
 Bij $l = 60$ en $r = 90$ geeft de GR opp (II) $= 0,8466... \approx 0,847$.
 Bij $l = 90$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp (III) $= 0,0148 \approx 0,015$.
 Dus tot groep I behoort 13,9%, tot II 84,7% en tot III 1,5%.
 b opp links van a is $0,1385... + \frac{1}{2} \cdot 0,8466... = 0,5618...$
 De GR geeft $a \approx 71,43$.
 Dus de grens ligt bij 71.

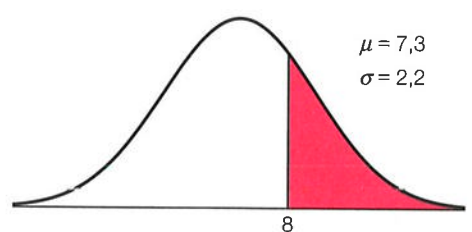


Bladzijde 206

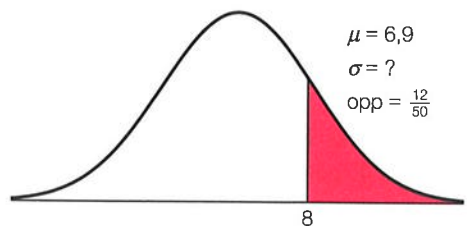
- 17 a** Normale verdeling met $\mu = 131$ en $\sigma = 2,7$.
 Bij $l = 127,5$ en $r = 134,5$ geeft de GR opp $\approx 0,805$.
 Dus van 80,5%.
- b** Bij $l = 138$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp = 0,004...
 Dus $P(\text{meer dan } 138 \text{ }^\circ\text{Oe}) = 0,004...$
 $P(\text{minstens één}) = 1 - P(\text{geen}) = 1 - (1 - 0,004...) ^5 \approx 0,024$
- c** Bij $l = 136,5$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp $\approx 0,021$.
 2,1% heeft een suikergehalte groter dan 136,5 $^\circ\text{Oe}$, dus de druif met een suikergehalte van 136,5 $^\circ\text{Oe}$ behoort niet tot de twee procent druiven met het hoogste suikergehalte.
- d** opp links van a is $1 - 0,985 = 0,015$
 De GR geeft $a \approx 125,14$.
 Dus deze ondergrens is 125,14 $^\circ\text{Oe}$ of meer.
- e** Normale verdeling met $\mu = x$, $\sigma = 2,7$, $l = 137,2$ en $r = 10^{99}$.
 Los op opp = $\frac{1}{11}$.
 Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = \frac{1}{11}$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 133,595$.
 Dus gemiddeld 133,6 $^\circ\text{Oe}$.



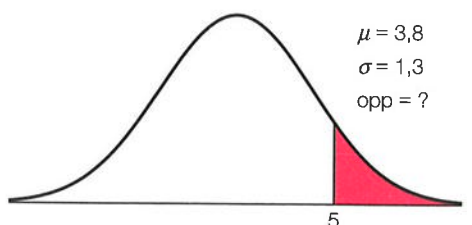
- 18 a** Vetpercentage is normaal verdeeld met $\mu = 7,3$ en $\sigma = 2,2$.
 Bij $l = 8$ en $r = 10^{99}$ geeft GR opp = 0,375...
 X = aantal bollen met een vetpercentage van meer dan 8%
 X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = 0,375...$
 $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$
 De GR geeft $P(X > 4) \approx 0,306$.



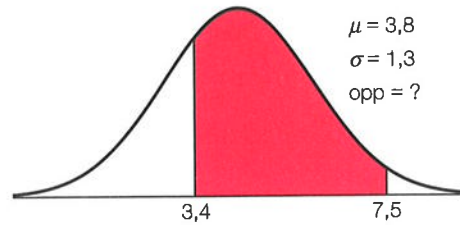
- b** Normale verdeling met $\mu = 6,9$, $\sigma = x$, $l = 8$ en $r = 10^{99}$.
 Los op opp = $\frac{12}{50}$.
 Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = \frac{12}{50}$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 1,557$.
 Dus de standaardafwijking is 1,6%.

**Bladzijde 207**

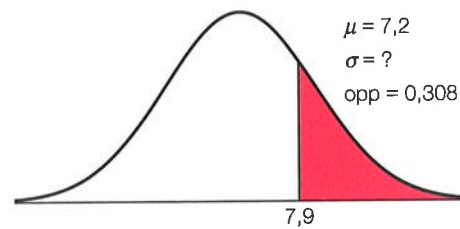
- 19 a** Normale verdeling met $\mu = 3,8$ en $\sigma = 1,3$.
 Bij $l = 5$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp = 0,177...
 Dus $0,177... \cdot 24 \cdot 365 \approx 1559$ uur.



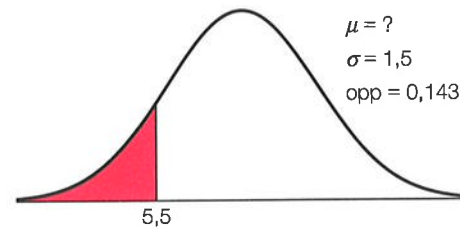
- b** Bij $l = 3,4$ en $r = 7,5$ geeft de GR opp = 0,618...
Dus $0,618... \cdot 24 \cdot 365 \approx 5420$ uur.



- c** Normale verdeling met $\mu = 7,2$, $\sigma = x$, $l = 7,9$ en $r = 10^{99}$.
Los op opp = 0,308.
Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,308$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 1,4$, dus $\sigma = 1,4$ m/s.



- d** Normale verdeling met $\mu = x$, $\sigma = 1,5$, $l = -10^{99}$ en $r = 5,5$.
Los op opp = 0,143.
Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,143$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 7,1$, dus $\mu = 7,1$ m/s.



10 Exponenten en logaritmen

- 20 a** $g_{\text{jaar}} = 1,096$, dus $g_{10 \text{ jaar}} = 1,096^{10} \approx 2,501$.
De toename per 10 jaar is 150,1%.
- b** $g_{\text{jaar}} = 1,096$, dus $g_{\text{maand}} = 1,096^{\frac{1}{12}} \approx 1,008$.
De toename per maand is 0,8%.
- c** Los op $1,096^t = 2$.
Voer in $y_1 = 1,096^x$ en $y_2 = 2$.
De optie snijpunt geeft $x = 7,56...$
De hoeveelheid is na ongeveer 91 maanden verdubbeld.
- d** Los op $1,096^t = 10$.
Voer in $y_1 = 1,096^x$ en $y_2 = 10$.
De optie snijpunt geeft $x = 25,11...$
De hoeveelheid is na ongeveer 25 jaar vertienvoudigd.
- 21 a** $g_{\text{dag}} = 0,83$, dus $g_{\text{week}} = 0,83^7 \approx 0,271$.
De afname per week is 72,9%.
- b** $g_{\text{dag}} = 0,83$, dus $g_{\text{uur}} = 0,83^{\frac{1}{24}} \approx 0,992$.
De afname per uur is 0,8%.
- c** Los op $0,83^t = \frac{1}{2}$.
Voer in $y_1 = 0,83^x$ en $y_2 = 0,5$.
De optie snijpunt geeft $x = 3,72...$
De hoeveelheid is na ongeveer 89 uur gehalveerd.
- d** Los op $0,83^t = \frac{1}{4}$.
Voer in $y_1 = 0,83^x$ en $y_2 = 0,25$.
De optie snijpunt geeft $x = 7,44...$
Na ongeveer 7,4 dagen is nog een kwart van de beginhoeveelheid over.

- 22 a** $y = 40 e^{0,6x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 40 e^{0,6x} \cdot 0,6 = 24 e^{0,6x}$
- b** $y = 18,5(1 + e^{2x})$ geeft $\frac{dy}{dx} = 18,5 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 37 e^{2x}$
- c** $N = 34 \cdot 5^{t^2-7}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 34 \cdot 5^{t^2-7} \cdot \ln(5) \cdot 2t = 68t \cdot \ln(5) \cdot 5^{t^2-7}$
- d** $P = 600(1 + 8^{1,5q})$ geeft $\frac{dP}{dq} = 600 \cdot 8^{1,5q} \cdot \ln(8) \cdot 1,5 = 900 \cdot \ln(8) \cdot 8^{1,5q}$

- 23 a** $N = {}^4\log(3x) = {}^4\log(3) + {}^4\log(x) = {}^4\log(3) + \frac{\log(x)}{\log(4)} = {}^4\log(3) + \frac{1}{\log(4)} \cdot \log(x) \approx 0,79 + 1,66 \cdot \log(x)$
 Dus $N = 0,79 + 1,66 \cdot \log(x)$.
- b** $N = 5 + 2 \cdot \log(3t) = 5 + 2(\log(3) + \log(t)) = 5 + 2 \cdot \log(3) + 2 \cdot \log(t) = 5 + 2 \cdot \log(3) + 2 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(10)}$
 $= 5 + 2 \cdot \log(3) + \frac{2}{\ln(10)} \cdot \ln(t) \approx 5,95 + 0,87 \cdot \ln(t)$
 Dus $N = 5,95 + 0,87 \cdot \ln(t)$.
- c** $Q = 3 + {}^4\log(2x + 1)$
 ${}^4\log(2x + 1) = Q - 3$
 $2x + 1 = 4^{Q-3}$
 $2x = -1 + 4^{Q-3}$
 $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4^{Q-3}$
 Dit is eventueel nog te herleiden tot $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{128} \cdot 4^Q$.
- d** $P = 3 - 2^{3t+1}$
 $2^{3t+1} = 3 - P$
 $3t + 1 = {}^2\log(3 - P)$
 $3t = -1 + {}^2\log(3 - P)$
 $t = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(3 - P)$

Bladzijde 208

- 24 a** $g_{5 \text{ dagen}} = 2$ geeft $g_{\text{dag}} = 2^{\frac{1}{5}} = 1,148...$
 Dus de oppervlakte van het meer is $20 \cdot 1,148...^{42} \approx 6756 \text{ m}^2$.
- b** Los op $20 \cdot (2^{\frac{1}{5}})^t = 0,3 \cdot 6756$.
 Voer in $y_1 = 20 \cdot (2^{\frac{1}{5}})^x$ en $y_2 = 0,3 \cdot 6756$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 33,3$.
 $t = 0$ op 1 mei om 0:00 uur en $t = 30$ op 31 mei om 0:00 uur, dus $t = 33,3$ is op 3 juni.
- 25 a** $N = b \cdot g^t$ met $g_{4 \text{ dagen}} = \frac{272}{160}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{272}{160}\right)^{\frac{1}{4}} = 1,1418...$
 $N = b \cdot 1,1418...^t$
 $t = 4$ en $N = 160$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} b \cdot 1,1418...^4 = 160$
 $b = \frac{160}{1,1418...^4} \approx 94$
 Dus $N = 94 \cdot 1,142^t$.
- b** $P = b \cdot g^t$ met $g_{12 \text{ dagen}} = 0,84$, dus $g_{\text{dag}} = 0,84^{\frac{1}{12}} \approx 0,986$.
 $P = b \cdot g^t$ met $b = 100$ en $g = 0,986$ geeft $P = 100 \cdot 0,986^t$.
- c** Stel in de laatste 4 jaar is g de vermenigvuldigingsfactor per jaar.
 Er geldt dan $1,092^6 \cdot g^4 = 1,85$.
 Voer in $y_1 = 1,092^6 \cdot x^4$ en $y_2 = 1,85$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 1,022$, dus $g \approx 1,022$.
 Het jaarlijkse toenamepercentage voor de laatste vier jaar is 2,2%.
- 26 a** $N = b \cdot g^t$ met $g_{45 \text{ jaar}} = \frac{109,5}{3,4}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{109,5}{3,4}\right)^{\frac{1}{45}} \approx 1,080$.
 $t = 0$ in 1970, dus $b = 3,4$.
 Dit geeft de formule $N = 3,4 \cdot 1,080^t$.
- b** Los op $1,080^t = 2$.
 Voer in $y_1 = 1,080^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 9,00...$, dus de verdubbelingstijd is 9 jaar.
- c** Los op $3,4 \cdot 1,080^t = 18,6 \cdot \ln(t + 10) + 19,1$.
 Voer in $y_1 = 3,4 \cdot 1,080^x$ en $y_2 = 18,6 \cdot \ln(x + 10) + 19,1$.
 De optie snijpunt geeft $x = 42,98...$
 Dus in $1970 + 43 = 2013$.

- d** Hoeveelheden gevangen en gekweekte vis:
 in 1970 was dat $61,9 + 3,4 = 65,9$ miljoen ton en
 in 2015 was dat $93,6 + 109,5 = 203,1$ miljoen ton.
 Dat is $\frac{203,1}{65,9} \approx 3,11$ keer zo veel.

Dus de gemiddelde wereldburger is in deze periode $\frac{3,11}{2} \approx 1,6$ keer zoveel vis gaan eten.

- e** $N = 18,6 \cdot \ln(t + 10) + 19,1 = 18,6 \cdot \frac{\log(t + 10)}{\log(e)} + 19,1 = \frac{18,6}{\log(e)} \cdot \log(t + 10) + 19,1$
 $\approx 42,8 \cdot \log(t + 10) + 19,1$
 Dus $N = 42,8 \cdot \log(t + 10) + 19,1$.

Bladzijde 209

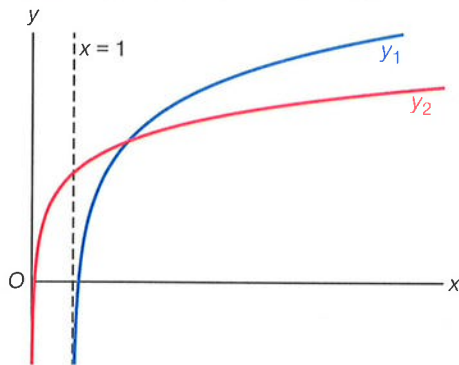
- 27 a** In april 2005 waren er 500 damherten en in april 2015 waren er 3000 damherten.
 Dus $\frac{3000}{500} = 6$ keer zoveel.
- b** Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.
 Neem $t = 0$ in 2004, dus $b = 400$.
 Lijn ook door (2013, 2000).
 $g_{9, \text{jaar}} = \frac{2000}{400} = 5$, dus $g_{\text{jaar}} = 5^{\frac{1}{9}} \approx 1,196$.
 De formule is $N = 400 \cdot 1,196^t$.
 Bij april 2025 hoort $t = 21$.
 $t = 21$ geeft $N = 400 \cdot 1,196^{21} \approx 17\,156$, dus dan zouden er ongeveer 17 160 damherten zijn.
- c** $3319 \text{ ha} = 33,19 \text{ km}^2$
 Dus er waren toen $40 \cdot 33,19 \approx 1328$ damherten.
 Los op $400 \cdot 1,196^t = 1328$.
 Voer in $y_1 = 400 \cdot 1,196^x$ en $y_2 = 1328$.
 De optie snijpunt geeft $x = 6,70\dots$
 Dit artikel verscheen ongeveer 6,7 jaar na april 2004, dus dat was begin 2011.

Bladzijde 210

- 28 a** $0,67 \cdot \log(0,5E) - 3 = 0$
 $0,67 \cdot \log(0,5E) = 3$
 $\log(0,5E) = \frac{3}{0,67} = 4,47\dots$
 $0,5E = 10^{4,47\dots}$
 $E = 2 \cdot 10^{4,47\dots} \approx 60\,000$
 De formule geldt voor waarden van E vanaf 60 000.
- b** $M = 0,67 \cdot \log(0,5 \cdot 2 \cdot 10^{18}) - 3 = 9,06$, dus een beving van 9,1 op de schaal van Richter.
- c** Los op $0,67 \cdot \log(0,5E) - 3 = 3,4$
 $0,67 \cdot \log(0,5E) = 6,4$
 $\log(0,5E) = 9,55\dots$
 $0,5E = 10^{9,55\dots}$
 $E = 2 \cdot 10^{9,55\dots} \approx 7,1 \cdot 10^9$ joule
- d** $M(E) = 0,67 \cdot \log(0,5E) - 3$
 $M(2E) = 0,67 \cdot \log(0,5E \cdot 2) - 3$
 $= 0,67(\log(0,5E) + \log(2)) - 3$
 $= 0,67 \cdot \log(0,5E) + 0,67 \cdot \log(2) - 3$
 $= M(E) + 0,67 \cdot \log(2)$
 $\approx M(E) + 0,20$
 Dus het getal is 0,20.

- e** $M = 0,67 \cdot \log(0,5E) - 3 = 0,67(\log(0,5) + \log(E)) - 3$
 $= 0,67 \cdot \log(0,5) + 0,67 \cdot \log(E) - 3$
 $= 0,67 \cdot \frac{\ln(E)}{\ln(10)} + 0,67 \cdot \log(0,5) - 3$
 $= \frac{0,67}{\ln(10)} \cdot \ln(E) + 0,67 \cdot \log(0,5) - 3$
 $\approx 0,29 \cdot \ln(E) - 3,20$
Dus $M = 0,29 \cdot \ln(E) - 3,20$.
- f** $0,67 \cdot \log(0,5E) - 3 = M$
 $0,67 \cdot \log(0,5E) = M + 3$
 $\log(0,5E) = \frac{M+3}{0,67} = 1,49...M + 4,47...$
 $0,5E = 10^{1,49...M + 4,47...}$
 $E = 2 \cdot (10^{1,49...})^M \cdot 10^{4,47...}$
 $E \approx 60\,000 \cdot 31^M$
Dus $E = 60\,000 \cdot 31^M$.
- g** $E(M) = 60\,000 \cdot 31^M$
 $E(M+1) = 60\,000 \cdot 31^{M+1} = 60\,000 \cdot 31^M \cdot 31 = 31 \cdot E(M)$
Dus het getal is 31.

- 29 a** Voer in $y_1 = 3 + {}^2\log(x-1)$ en $y_2 = 2 + {}^3\log(2x)$.



- b** De optie snijpunt geeft $x \approx 2,315$.
- c** $y = 3 + {}^2\log(x-1)$
 ${}^2\log(x-1) = y - 3$
 $x - 1 = 2^{y-3}$
 $x = 1 + 2^y \cdot 2^{-3}$
 $x = 1 + \frac{1}{8} \cdot 2^y$
- d** $y = 2 + {}^3\log(2x) = 2 + {}^3\log(2) + {}^3\log(x) = 2 + {}^3\log(2) + \frac{\ln(x)}{\ln(3)}$
 $= 2 + {}^3\log(2) + \frac{1}{\ln(3)} \cdot \ln(x) \approx 2,63 + 0,91 \cdot \ln(x)$
Dus $y = 2,63 + 0,91 \cdot \ln(x)$

Bladzijde 211

- 30 a** g_{35} weerkaatsingen $= 0,90$, dus g_1 weerkaatsing $= 0,90^{\frac{1}{35}} = 0,9969...$
 $P = b \cdot g^n$ met $b = 100$ en $g = 0,997$ geeft $P = 100 \cdot 0,997^n$.
- b** $n = 15$ geeft $P = 95,6$, dus 95,6%.
- c** $n = 20$ geeft $P = 94,2$, dus er wordt 5,8% geabsorbeerd.

11 Het toetsen van hypothesen

- 31 a** 8 minuten en 24 seconden = 8,4 minuten
2 minuten en 3 seconden = 2,05 minuten
 X is de tijd per adres

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 8,4$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{2,05}{\sqrt{10}}$.

De GR geeft $P(\bar{X} < 8) \approx 0,269$.

- b** 8 minuten en 24 seconden = 504 seconden
2 minuten en 3 seconden = 123 seconden
De bezorgtijd T van 10 adressen is normaal verdeeld met $\mu_T = 10 \cdot 504 = 5040$ seconden
en $\sigma_T = \sqrt{10} \cdot 123 = 123\sqrt{10}$ seconden.
Tussen 18:37 uur en 19:50 uur zit 1 uur en 13 minuten, dat is 4380 seconden.
De GR geeft $P(T > 4380) \approx 0,955$.
De gevraagde kans is 0,955.

- 32** X = gewicht van een chocolaatje
Stel er zitten n chocolaatjes in een doosje.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 15$ gram en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{1,3}{\sqrt{n}}$ gram.

Los op $P(\bar{X} > 14,5) > 0,90$.

Voer bij y_1 de normale verdeling in.

De tabel geeft

bij $x = 11$ is $y_1 = 0,898\dots$

bij $x = 12$ is $y_1 = 0,908\dots$

Dus er zitten minstens 12 chocolaatjes in een doosje.

Bladzijde 212

- 33 a** X = tijd in uren die een student per week aan bijbaantjes kwijt is
 $H_0: \mu_X = 10,5$, $H_1: \mu_X \neq 10,5$ en $\alpha = 0,05$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 10,5$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3,2}{\sqrt{60}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 9,8)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 9,8) \approx 0,045$.

$P(\bar{X} \leq 9,8) > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

Er is geen aanleiding om te twijfelen aan de bewering van het onderzoeksbureau.

- b** $H_0: \mu_X = 10,5$, $H_1: \mu_X \neq 10,5$ en $\alpha = 0,10$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 10,5$ en

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3,2}{\sqrt{200}}$$

opp links = opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,10 = 0,05$

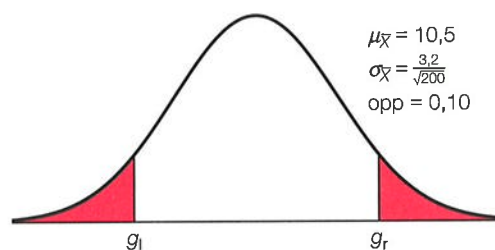
$P(\bar{X} \leq g_l) = 0,05$

De GR geeft $g_l \approx 10,128$.

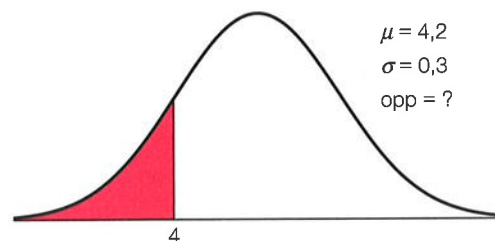
$P(\bar{X} \leq g_r) = 1 - 0,05 = 0,95$

De GR geeft $g_r \approx 10,872$.

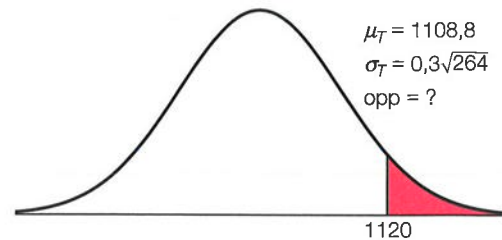
Men zal het onderzoeksbureau gelijk geven bij steekproefresultaten van 10,13 tot en met 10,87 uur.



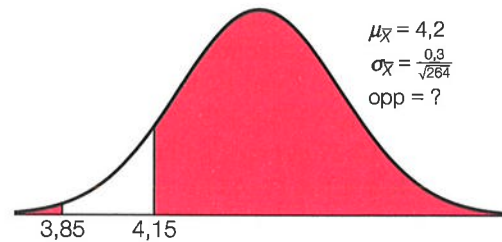
- 34 a** X = inhoud van een zakje in gram
 X is normaal verdeeld met $\mu_X = 4,2$ en $\sigma_X = 0,3$.
De GR geeft $P(X < 4) = 0,252\dots$.
Dus naar verwachting $0,252\dots \cdot 264 \approx 67$ zakjes.



- b** De inhoud T van 264 zakjes is normaal verdeeld met $\mu_T = 264 \cdot 4,2 = 1108,8$ gram en $\sigma_T = \sqrt{264} \cdot 0,3 = 0,3\sqrt{264}$ gram. De GR geeft $P(T > 1120) \approx 0,011$.

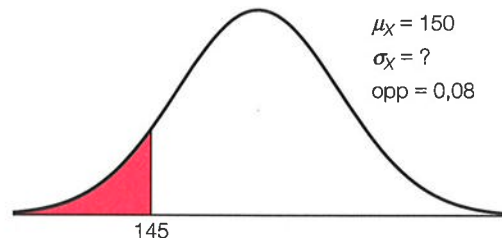


- c** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 4,2$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,3}{\sqrt{264}}$.
 $P(\bar{X} < 3,85 \text{ of } \bar{X} > 4,15) = P(\bar{X} < 3,85) + P(\bar{X} > 4,15)$.
 De GR geeft $P(\bar{X} < 3,85 \text{ of } \bar{X} > 4,15) \approx 0,997$.
 Dus van 99,7%.



- d** Het bruto gewicht B is normaal verdeeld met $\mu_B = 4,2 + 1,5 = 5,7$ gram en $\sigma_B = \sqrt{0,3^2 + 0,2^2} = \sqrt{0,13}$ gram. De GR geeft $P(B > 6) = 0,202\dots$.
 X = aantal zakjes dat minimaal 6 gram weegt
 X is binomiaal verdeeld $n = 30$ en $p = 0,202\dots$
 $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$
 De GR geeft $P(X \geq 5) \approx 0,756$.

- 35 a** X = gewicht zakje pinda's in gram
 X is normaal verdeeld met $\mu_X = 150$ en onbekende σ .
 Los op $P(X < 145) = 0,08$.
 Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,08$.
 De optie snijpunt geeft $x = 3,5585\dots$.
 Dus $\sigma = 3,559$ gram.



- b** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 150$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3,56}{\sqrt{10}}$.
 De GR geeft $P(\bar{X} < 148) \approx 0,287$.
- c** S is normaal verdeeld met $\mu_S = 30 \cdot 150 = 4500$ gram en $\sigma_S = \sqrt{30} \cdot 3,56 = 3,56\sqrt{30}$ gram. De GR geeft $P(S < 4470) = 0,061\dots$.
 Y = aantal dozen dat minder dan 4470 gram bevat
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 3$ en $p = 0,061\dots$
 $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$
 De GR geeft $P(Y \geq 1) \approx 0,175$.

Bladzijde 213

- 36** X = aantal bewoners dat een huisdier heeft
 $H_0: p = 0,47$, $H_1: p < 0,47$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 60$ en $p = 0,47$.
 38 geen huisdier, dus $60 - 38 = 22$ wel een huisdier.
 De overschrijdingskans is $P(X \leq 22)$.
 De GR geeft $P(X \leq 22) \approx 0,069$.
 $P(X \leq 22) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Er kan niet geconcludeerd worden dat de gemeenteambtenaar gelijk heeft.

- 37 a** $P(\text{gratis fles}) = 4! \cdot P(r \text{ b g o}) = 4! \cdot 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,15 \cdot 0,05 = 0,027$
- b** $P(\text{twee gratis flessen}) = \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 0,5^2 \cdot 0,3^2 \cdot 0,15^2 \cdot 0,05^2 \approx 0,003$
- c** X = aantal flessen met een oranje dop
 X is binomiaal verdeeld $n = 30$ en $p = 0,05$.
 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$
 De GR geeft $P(X \geq 1) \approx 0,785$.

- d** X = aantal flessen met een rode dop

$$H_0 : p = 0,50, H_1 : p > 0,50 \text{ en } \alpha = 0,10.$$

X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,50$.

De overschrijdingskans is $P(X \geq 57) = 1 - P(X \leq 56)$.

De GR geeft $P(X \geq 57) \approx 0,097$.

$P(X \geq 57) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .

Je moet Ronny gelijk geven.

- e** X = aantal flessen met een oranje dop

$$H_0 : p = 0,05, H_1 : p < 0,05 \text{ en } \alpha = 0,10.$$

X is binomiaal verdeeld met $n = 200$ en $p = 0,05$.

De GR geeft $\alpha = 6$.

Dus men moet minstens 6 doppen in de steekproef aantreffen, opdat de bewering van de fabrikant niet wordt verworpen.

- 38** T = totale gewicht van de 10 medewerkers

T is normaal verdeeld met $\mu_T = 5 \cdot 84 + 5 \cdot 70 = 770$ kg en $\sigma_T = \sqrt{5 \cdot 8^2 + 5 \cdot 7^2} = \sqrt{565}$ kg.

De GR geeft $P(T > 800) \approx 0,103$.

Bladzijde 214

- 39 a** X = tijd in minuten die voor een patiënt nodig is

X is normaal verdeeld met $\mu_X = 10$ en $\sigma_X = 4$.

$$P(\text{tijdrovende patiënt}) = P(X \geq 15)$$

De GR geeft $P(X \geq 15) = 0,1056...$

De huisarts verwacht $0,1056... \cdot 12 \approx 1,27$ tijdrovende patiënten tijdens een spreekuur.

- b** $P(\text{gemakkelijke patiënt}) = P(X \leq 5)$

De GR geeft $P(X \leq 5) = 0,1056...$

$$P(\text{gewone patiënt}) = P(5 < X < 15)$$

De GR geeft $P(5 < X < 15) = 0,7887...$

$$P(2 \text{ gemakkelijke en } 10 \text{ gewone patiënten}) = \binom{12}{2} \cdot 0,1056...^2 \cdot 0,7887...^{10} \approx 0,069$$

- c** Y = aantal patiënten dat meer dan 10 minuten kost

Y is binomiaal verdeeld $n = 12$ en $p = 0,5$.

$$P(Y \geq 6) = 1 - P(Y \leq 5)$$

De GR geeft $P(Y \geq 6) \approx 0,613$.

- d** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 10$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{12}}$.

De GR geeft $P(\bar{X} \geq 14) \approx 0,0003$.

- e** T = tijd in minuten die huisarts tijdens spreekuur voor 60 patiënten nodig heeft

$$H_0 : \mu_T = 600, H_1 : \mu_T > 600 \text{ en } \alpha = 0,05.$$

T is normaal verdeeld met $\mu_T = 60 \cdot \mu_X = 60 \cdot 10 = 600$ en $\sigma_T = \sqrt{60} \cdot 4 = 4\sqrt{60}$.

De overschrijdingskans is $P(T \geq 654)$.

De GR geeft $P(T \geq 654) \approx 0,041$.

$P(T \geq 654) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

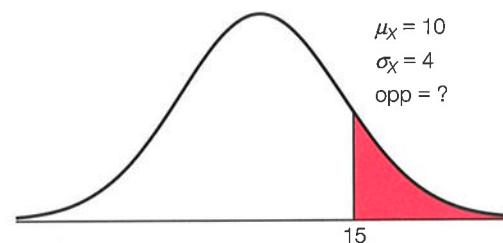
Er is voldoende aanleiding om de gemiddelde tijd van 10 minuten te verhogen.

- f** X = aantal patiënten dat is doorverwezen

X is binomiaal verdeeld $n = 50$ en $p = 0,3$.

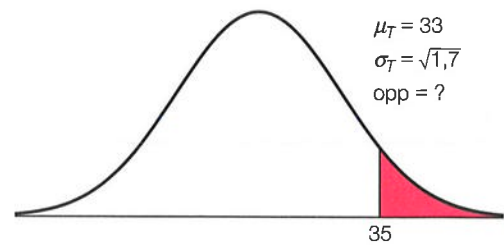
$$P(X < 10) = P(X \leq 9)$$

De GR geeft $P(X < 10) \approx 0,040$.

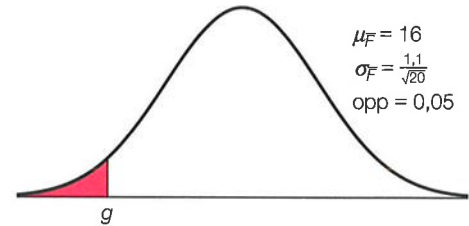


Bladzijde 215

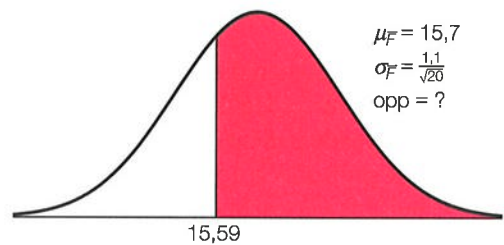
- 40 a** D = aantal gram deeg in een reep
 F = aantal gram fruitvulling in een reep
 Het totale gewicht is $T = D + F$.
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 17 + 16 = 33$ en
 $\sigma_T = \sqrt{0,7^2 + 1,1^2} = \sqrt{1,7}$.
 De GR geeft $P(T > 35) \approx 0,063$.



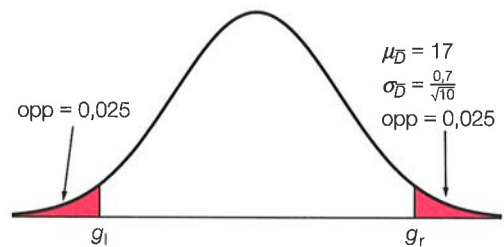
- b** $H_0 : \mu_F = 16, H_1 : \mu_F < 16$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{F}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{F}} = \mu_F = 16$ en
 $\sigma_{\bar{F}} = \frac{\sigma_F}{\sqrt{n}} = \frac{1,1}{\sqrt{20}}$.
 $P(\bar{F} \leq g) = 0,05$
 De GR geeft $g \approx 15,59$.
 Dus bij steekproefgemiddelden van 15,59 gram of minder zal men de machine bijstellen.



- c** $\bar{F}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{F}} = 15,7$ en $\sigma_{\bar{F}} = \frac{\sigma_F}{\sqrt{n}} = \frac{1,1}{\sqrt{20}}$.
 De GR geeft $P(\bar{F} > 15,59) 0,673$.



- d** $H_0 : \mu_D = 17, H_1 : \mu_D \neq 17$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{D}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{D}} = \mu_D = 17$ en
 $\sigma_{\bar{D}} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} = \frac{0,7}{\sqrt{10}}$.
 $P(\bar{D} \leq g_l) = 0,025$
 De GR geeft $g_l \approx 16,566$.
 $P(\bar{D} \leq g_r) = 1 - 0,025 = 0,975$
 De GR geeft $g_r \approx 17,434$.
 Dus bijstellen als $\bar{D} \leq 16,56$ of als $\bar{D} \geq 17,44$.



Gemengde opgaven

12 Rijen

Bladzijde 224

- 1 a** rr met $A_0 = 1000$ en $v = -23$, dus $A_n = 1000 - 23 \cdot n$.
 Los op $1000 - 23n = 0$
 $-23n = -1000$
 $n = 43,4\dots$
 $A_{43} = 11$ en $A_{44} = -12$
 Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
 De som van de positieve termen is $\sum_{k=0}^{43} (1000 - 23k) = 22\,242$.
- b** mr met $v(0) = 1000$ en $r = 0,96$, dus $v(n) = 1000 \cdot 0,96^n$.
 Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
 $v(16) \approx 520,4$ en $v(17) \approx 499,6$
 De som van de termen die groter zijn dan 500 is $\sum_{k=0}^{16} 1000 \cdot 0,96^k \approx 12\,510$.
- c** Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $a(2) = -13$, $a(3) = 0$, $a(4) = 11$, ..., $a(14) = 11$, $a(15) = 0$, $a(16) = -13$.
 De som van de termen die groter zijn dan nul is $\sum_{k=4}^{14} (-k^2 + 18k - 45) = 286$.
- 2 a** u_n is een rr met $u_1 = 300$ en $v = 6$, dus $u_n = 300 + 6 \cdot (n - 1)$.
 De recursieve formule is $u_n = u_{n-1} + 6$ met $u_1 = 300$.
 v_n is een mr met $v_1 = 0,1$ en $r = 2$, dus $v_n = 0,1 \cdot 2^{n-1}$.
 De recursieve formule is $v_n = 2 \cdot v_{n-1}$ met $v_1 = 0,1$.
- b** Voer de rijen in op het rijen-invoerscherm.
 $u_{12} = 366$ en $v_{12} = 204,8$, dus $u_{12} > v_{12}$.
 $u_{13} = 372$ en $v_{13} = 409,6$, dus $u_{13} < v_{13}$.
 Vanaf $n = 13$ is $v_n > u_n$.
- c** Voer ook de somrij van u_n in op het rijen-invoerscherm.
 Lees af in de tabel $\sum_{k=1}^{14} u_k = 4746$ en $\sum_{k=1}^{15} u_k = 5130$, dus vanaf $n = 15$ is $\sum_{k=1}^n u_k > 5000$.
- 3 a** Afname 10%, dus er blijft 90% over.
 $V(t) = 0,9 \cdot V(t-1) + 500$ met $V(0) = 10\,000$
- b** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $V(8) \approx 7152$ en $V(9) \approx 6937$, dus na 9 dagen zit er voor het eerst minder dan 7000 m^3 water in de vijver.
- c** Vanaf $t = 103$ is $V(t) \approx 5000$, dus de grenswaarde is 5000 m^3 .
- 4 a** $B(n) = 1,0075 \cdot B(n) + 500$ met $B(0) = 500$
- b** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 Bij 1 januari 2030 hoort $n = 10$.
 De tabel geeft $B(10) \approx 5710,96$.
 Dus op 1 januari 2025 is het saldo €5710,96.
- c** $B(17) \approx 9597,36$ en $B(18) \approx 10\,169,34$
 $2020 + 18 = 2038$, dus in 2038 is het saldo op 1 januari voor het eerst meer dan 10 000 euro.
 Nova heeft dan in totaal $19 \cdot 500 = 9500$ euro op het deposito gestort.

Bladzijde 225

- 5 a** 3 minuten en 55 seconden is 235 seconden.
De tijden per kilometer vormen een rr met directe formule $T(n) = 235 + 3 \cdot (n - 1)$,
oftewel $T(n) = 3n + 232$ met beginterm $T(1) = 235$.
Zijn eindtijd is $\sum_{k=1}^{15} (3k + 232)$.
 $S(n) = S(n-1) + 3n + 232$ met $S(1) = 235$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $\sum_{k=1}^{15} (3k + 232) = 3840$.
Dus de eindtijd van Stijn is 3840 seconden = 1 uur en 4 minuten.
- b** De tabel bij de formule van vraag a geeft $\sum_{k=1}^{10} (3k + 232) = 2485$.
4 minuten en 20 seconden is 260 seconden.
De tijden per kilometer vormen een rr met directe formule $T(n) = 260 - 2 \cdot (n - 1)$,
oftewel $T(n) = -2n + 262$ met beginterm $T(1) = 260$.
Zijn tijd na 10 km is $\sum_{k=1}^{10} (-2k + 262)$.
 $S(n) = S(n-1) - 2n + 262$ met $S(1) = 260$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $\sum_{k=1}^{10} (-2k + 262) = 2512$.
Omdat $2512 > 2485$ ligt Stijn met dit trainingsschema achter.
Het scheelt $2512 - 2485 = 27$ seconden.
- 6 a** $u_6 = 1,5 \cdot 6^2 + 0,5 \cdot 6 = 57$, dus een kaartenhuis met zes rijen bestaat uit 57 kaarten.
- b** $5 \cdot 54 = 270$ kaarten
Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $u_{13} = 260$ en $u_{14} = 301$.
Dus maximaal 13 rijen.
- c** $u_{10} = 155$ en $u_9 = 126$, dus de tiende rij bestaat uit $155 - 126 = 29$ kaarten.
- d** $u_{12} = 222$ en $u_{13} = 260$, dus de 13^e rij bestaat uit 38 kaarten.
Het kaartenhuis bestaat dan uit 260 kaarten.
- 7 a** Van B_n is
de recursieve formule $B_n = B_{n-1} + 2$ met $B_1 = 4$
en de directe formule $B_n = 4 + 2 \cdot (n - 1)$, oftewel $B_n = 2n + 2$.
Van H_n is
de recursieve formule $H_n = H_{n-1} + 2$ met $H_1 = 3$
en de directe formule $H_n = 3 + 2 \cdot (n - 1)$, oftewel $H_n = 2n + 1$.
- b** $O_n = \frac{1}{2} \cdot B_n \cdot H_n$
 $= \frac{1}{2} \cdot (2n + 2) \cdot (2n + 1)$
 $= \frac{1}{2} \cdot (4n^2 + 2n + 4n + 2)$
 $= 2n^2 + 3n + 1$
- c** Voer in $y_1 = 2x^2 + 3x + 1$.
Uit de tabel volgt $O_{10} = 231$ en $O_{11} = 276$.
Vanaf $n = 11$ is $O_n > 250$.
- d** $O_{n-1} = 2(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$
 $= 2(n^2 - 2n + 1) + 3n - 3 + 1$
 $= 2n^2 - 4n + 2 + 3n - 2$
 $= 2n^2 - n$
 $O_n - O_{n-1} = 2n^2 + 3n + 1 - (2n^2 - n)$
 $= 2n^2 + 3n + 1 - 2n^2 + n$
 $= 4n + 1$
Dus $O_n = O_{n-1} + 4n + 1$ met $O_1 = 6$.

Bladzijde 226

- 8 a** $B_n = 1,0025 \cdot B_{n-1} + 1000$ met $B_0 = 10\,000$
b Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 Bij 1 januari 2025 hoort $n = 5$.
 De tabel geeft $B_5 \approx 15\,150,69$.
 Dus op 1 januari 2025 is het saldo € 15 150,69.
c $B_9 \approx 19\,318$ en $B_{10} \approx 20\,366$
 $2020 + 10 = 2030$, dus in 2030 is het saldo op 1 januari voor het eerst meer dan 20 000 euro.
d $B_n = 1,0025 \cdot B_{n-1} - 2500$ met $B_0 = 25\,711$
e Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $B_{10} \approx 1077,92$ en $B_{11} \approx -1419,38$.
 Maya kan dus 10 keer 2500 euro opnemen.
f Maya heeft $10\,000 + 15 \cdot 1000 = 25\,000$ euro gestort.
 Ze kan $10 \cdot 2500$ euro opnemen. Verder kan ze op 1 januari 2047 nog $1,0025 \cdot 1077,92 \approx 1081$ euro opnemen.
 Ze kan dus uiteindelijk 1081 euro meer opnemen dan ze heeft gestort.

- 9 a** Het twaalfde gecentreerde vierkantsgetal is $V_{12} = 2 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12 + 1 = 265$.
b Voer in $y_1 = 2x^2 - 2x + 1$ en maak een tabel.
 Uit de tabel volgt $V_{32} = 1985$, dus het 32^e vierkantsgetal is 1985.
c $V_{n-1} = 2(n-1)^2 - 2(n-1) + 1$
 $= 2(n^2 - 2n + 1) - 2n + 2 + 1$
 $= 2n^2 - 4n + 2 - 2n + 3$
 $= 2n^2 - 6n + 5$
 $V_n - V_{n-1} = 2n^2 - 2n + 1 - (2n^2 - 6n + 5)$
 $= 2n^2 - 2n + 1 - 2n^2 + 6n - 5$
 $= 4n - 4$
 Dus $V_n = V_{n-1} + 4n - 4$ met $V_1 = 1$.
d De vierkante rand aan de buitenkant bestaat uit vier zijden van n stippen. Als je de zijden optelt, tel je de vier hoekpunten dubbel, dus er komen steeds $4n - 4$ stippen bij.
 Dus $V_n = V_{n-1} + 4n - 4$ met $V_1 = 1$.

Bladzijde 227

- 10 a** Los op $0,08447n^2 - 7,095n + 152 = 152$
 $0,08447n^2 - 7,095n = 0$
 $n(0,08447n - 7,095) = 0$
 $n = 0$ of $0,08447n = 7,095$
 $n = 0$ of $n \approx 84$
 Bij de torens hoort dus $n = 0$ en $n = 84$.
 Dus de horizontale afstand tussen de hangers is $\frac{1280}{84} \approx 15,24$ m.
b De totale lengte van de 83 verticale lijnen tussen de torens is
 $\sum_{k=1}^{83} (0,08447k^2 - 7,095k + 152)$.
 $S_n = S_{n-1} + 0,08447n^2 - 7,095n + 152$ met $S_1 = L_1 \approx 144,99$
 Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $\sum_{k=1}^{83} (0,08447k^2 - 7,095k + 152) \approx 4274,57$.
 Elke verticale lijn staat voor $2 \cdot 2 = 4$ hangers.
 Dus de totale lengte van alle hangers tussen de torens is $4 \cdot 4274,57 \approx 17\,098$ m.
c $v = \frac{152}{22} \approx 6,91$ en $L_1 = 152 - 6,91 = 145,09$, dus de recursieve formule is
 $L_m = L_{m-1} - 6,91$ met $L_1 = 145,09$.
 De directe formule is $L_m = 152 - 6,91 \cdot m$.

- d De hoeveelheid verf die nodig is, is evenredig met de lengte van de hangers.

De totale lengte van de 21 verticale lijnen bij één oever is $\sum_{k=1}^{21} (152 - 6,91 \cdot k)$.

$$S_m = S_{m-1} + 152 - 6,91 \cdot m \text{ met } S_1 = 145,09$$

Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.

$$\text{De tabel geeft } \sum_{k=1}^{21} (152 - 6,91 \cdot k) = 1595,79.$$

Elke verticale lijn staat voor $2 \cdot 2 = 4$ hangers, en ze zijn hetzelfde bij de 2 oevers.

De totale lengte van alle hangers bij de oevers is $2 \cdot 4 \cdot 1595,79 \approx 12768$ m.

Dus $\frac{17098}{12768 + 17098} \times 100\% \approx 57,2\%$ van de verf is nodig voor de hangers tussen de twee torens.

13 Allerlei formules

Bladzijde 228

$$11 \quad a \quad 10 + \frac{6}{a} - \frac{5}{b-1} = \frac{10a(b-1)}{a(b-1)} + \frac{6(b-1)}{a(b-1)} - \frac{5a}{a(b-1)} = \frac{10ab - 10a + 6b - 6 - 5a}{a(b-1)} = \frac{10ab - 15a + 6b - 6}{a(b-1)}$$

$$b \quad B = 20 + \frac{10x}{x + \frac{x^2}{y}} = 20 + \frac{10xy}{\left(x + \frac{x^2}{y}\right)y} = \frac{20}{1} + \frac{10xy}{xy + x^2} = \frac{20(y+x)}{y+x} + \frac{10y}{y+x} = \frac{20(y+x) + 10y}{y+x} \\ = \frac{20y + 20x + 10y}{y+x} = \frac{20x + 30y}{x+y}$$

Dus $a = 20$ en $b = 30$.

$$c \quad C = \frac{2p^2 + 6}{p} - \frac{3}{2p} = \frac{2p^2}{p} + \frac{6}{p} - \frac{3}{2p} = 2p + \frac{12}{2p} - \frac{3}{2p} = 2p + \frac{9}{2p}$$

Dus $a = 2$ en $b = 9$.

$$d \quad D = \frac{3x^2 + xy + 10y}{5x^2y} = \frac{3x^2}{5x^2y} + \frac{xy}{5x^2y} + \frac{10y}{5x^2y} = \frac{3}{5y} + \frac{1}{5x} + \frac{2}{x^2}$$

$$12 \quad a \quad \left. \begin{array}{l} 5s - 2t = 10 \\ 5s = 2t + 10 \\ s = \frac{2}{5}t + 2 \\ P = 3t - 4s + 35 \end{array} \right\} \begin{array}{l} P = 3t - 4\left(\frac{2}{5}t + 2\right) + 35 \\ P = 3t - 1\frac{3}{5}t - 8 + 35 \\ P = 1\frac{2}{5}t + 27 \end{array}$$

$$b \quad \left. \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ -y = -2x + 1 \\ y = 2x - 1 \\ B = 3xy - 2x + 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} B = 3x(2x - 1) - 2x + 4 \\ B = 6x^2 - 3x - 2x + 4 \\ B = 6x^2 - 5x + 4 \end{array}$$

Dus $a = 6$, $b = -5$ en $c = 4$.

$$13 \quad a \quad P = \frac{3 - 2T}{3T + 5} \\ p(3T + 5) = 3 - 2T \\ 3pT + 5p = 3 - 2T \\ 3pT + 2T = 3 - 5p \\ T(3p + 2) = 3 - 5p \\ T = \frac{3 - 5p}{3p + 2}$$

$$b \quad y = 3\sqrt{5 - 2x} \\ \sqrt{5 - 2x} = \frac{1}{3}y \\ 5 - 2x = \left(\frac{1}{3}y\right)^2 \\ -2x = \frac{1}{9}y^2 - 5 \\ x = -\frac{1}{18}y^2 + 2\frac{1}{2}$$

- c** $N = 10 \cdot \ln(t) - 22,5$
 $10 \cdot \ln(t) = N + 22,5$
 $\ln(t) = 0,1N + 2,25$
 $t = e^{0,1N + 2,25}$
 $t = e^{0,1N} \cdot e^{2,25}$
 $t = e^{2,25} \cdot (e^{0,1})^N$
 $t \approx 9,5 \cdot 1,105^N$
Dus $t = 9,5 \cdot 1,105^N$.
- d** $N = 40 \cdot 1,06^t$
 $1,06^t = 0,025N$
 $\log(1,06^t) = \log(0,025N)$
 $t \cdot \log(1,06) = \log(0,025N)$
 $t = \frac{1}{\log(1,06)} \cdot \log(0,025N)$
 $t \approx 39,5 \cdot \log(0,025N)$
Dus $t = 39,5 \cdot \log(0,025N)$.
- e** $g = e^{0,55} \approx 1,73$, dus de formule is $N = 54 \cdot 1,73^t$.
- f** $e^c = 1,28$ geeft $c = \ln(1,28) \approx 0,25$, dus de formule is $N = 720 \cdot e^{0,25t}$.

- 14 a** $t = 2 \cdot \ln(V) - 15,2$
 $2 \cdot \ln(V) = t + 15,2$
 $\ln(V) = 0,5t + 7,6$
 $V = e^{0,5t + 7,6}$
 $V = e^{7,6} \cdot (e^{0,5})^t$
 $V \approx 1998 \cdot 1,649^t$
Dus $V = 1998 \cdot 1,649^t$.
- b** $p^2 = \frac{15}{q^{3,5}}$
 ${}^2\log(p^2) = {}^2\log\left(\frac{15}{q^{3,5}}\right)$
 $2 \cdot {}^2\log(p) = {}^2\log(15) - {}^2\log(q^{3,5})$
 $2 \cdot {}^2\log(p) = {}^2\log(15) - 3,5 \cdot {}^2\log(q)$
 ${}^2\log(p) = \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(15) - 1,75 \cdot {}^2\log(q)$
 ${}^2\log(p) \approx 1,95 - 1,75 \cdot {}^2\log(q)$
Dus ${}^2\log(p) = 1,95 - 1,75 \cdot {}^2\log(q)$.
- c** $\ln(R) - 8,3 \cdot \ln(S) = 2,07$
 $\ln(R) = 2,07 + 8,3 \cdot \ln(S)$
 $\ln(R) = \ln(e^{2,07}) + \ln(S^{8,3})$
 $\ln(R) = \ln(e^{2,07} \cdot S^{8,3})$
 $R = e^{2,07} \cdot S^{8,3}$
 $R \approx 7,92 \cdot S^{8,3}$
Dus $R = 7,92 S^{8,3}$.
- d** $N = 1200 \cdot 3^{0,2t+1}$
 $\log(N) = \log(1200 \cdot 3^{0,2t+1})$
 $\log(N) = \log(1200) + \log(3^{0,2t+1})$
 $\log(N) = (0,2t + 1) \cdot \log(3) + \log(1200)$
 $\log(N) = 0,2t \cdot \log(3) + \log(3) + \log(1200)$
 $\log(N) \approx 0,095t + 3,556$
Dus $\log(N) = 0,095t + 3,556$.

Bladzijde 229

- 15 a** maximum – minimum = $6500 - 1500 = 5000$
Dat is dus 5000 cm^3 .
- b** In figuur G.6 is de periode 6 seconden, dus er zijn 10 ademhalingen per minuut.
Het minuutvolume is $10 \cdot 500 = 5000 \text{ cm}^3$.
In figuur G.7 is de periode 15 seconden, dus er zijn 4 ademhalingen per minuut.
Het minuutvolume is $4 \cdot 5000 = 20000 \text{ cm}^3$.
De verhouding is $5000 : 20000 = 1 : 4$.

c $V = a + b \sin(c(t - d))$

$$a = \frac{4000 + 3500}{2} = 3750$$

$$b = 4000 - 3750 = 250$$

De periode is 6, dus $c = \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 0$, dus $d = 0$.

Je krijgt $V = 3750 + 250 \sin(\frac{1}{3}\pi t)$.

d $V = a + b \sin(c(t - d))$

$$a = \frac{6500 + 1500}{2} = 4000$$

$$b = 6500 - 4000 = 2500$$

De periode is 15, dus $c = \frac{2\pi}{15} = \frac{2}{15}\pi$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 0$, dus $d = 0$.

Je krijgt $V = 4000 + 2500 \sin(\frac{2}{15}\pi t)$.

e $V = a + b \sin(c(t - d))$

$$a = 4200 \text{ (gegeven)}$$

$$b = 2500$$

De periode is $\frac{60}{40} = 1\frac{1}{2}$ seconde, dus $c = \frac{2\pi}{1\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\pi$.

Op $t = 0$ helemaal uitgeademd, dus grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand

bij $t = \frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

Je krijgt $V = 4200 + 2500 \sin(\frac{4}{3}\pi(t - \frac{3}{8}))$.

f Voer in $y_1 = 4200 + 2500 \sin(\frac{4}{3}\pi(x - \frac{3}{8}))$ en $y_2 = 6000$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,566...$ en $x = 0,933...$.

Per ademhaling $0,933... - 0,566... = 0,366...$ seconde, dus per minuut

$$40 \cdot 0,366... \approx 14,6 \text{ seconden.}$$

Bladzijde 230

16 a $c = 0,506$ geeft periode $= \frac{2\pi}{0,506} = 12,417... \text{ uur} = 12 \text{ uur en } 0,417... \cdot 60 \approx 25 \text{ minuten.}$

Dus de periode is 12 uur en 25 minuten.

b De amplitude is 110 cm, dus het verschil tussen hoog- en laagwater is

$$2 \cdot 110 = 220 \text{ cm.}$$

c De evenwichtsstand is 0, dus de waterhoogte bij hoogwater is $0 + 110 = 110 \text{ cm.}$

2 september loopt van $t = 24$ tot $t = 48$.

Los op $110 \sin(0,506(t - 6,74)) = 110$.

Voer in $y_1 = 110 \sin(0,506(x - 6,74))$ en $y_2 = 110$.

De optie snijpunt geeft $x = 34,679...$ en $x = 47,096...$

$0,679...$ uur is ongeveer 41 minuten en $0,096...$ uur is ongeveer 6 minuten.

Dus het was op 2 september hoogwater om 10:41 uur en om 23:06 uur.

d $a = \text{evenwichtsstand} = 0$

$$b = \frac{12}{2} = 6$$

$$c = 0,506$$

Stijgend door de evenwichtsstand een kwart periode nadat het laagwater was,

$$\text{dus } d = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{0,506} \approx 3,104.$$

Dus de formule is $S = 6 \sin(0,506(t - 3,104))$.

e De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Dat is

bij $t = 3,104$.

De maximale snelheid is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3,104} \approx 3,036 \text{ m/uur} \approx 5 \text{ cm/minuut.}$

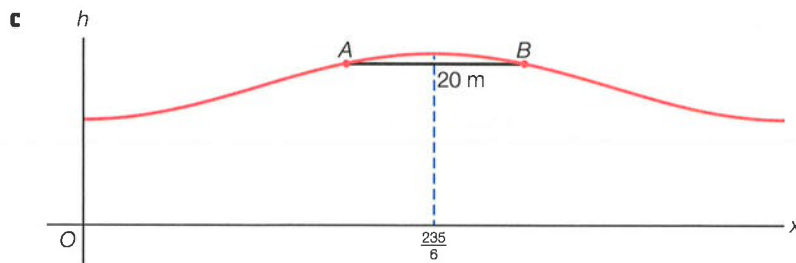
- 17 a** $l = 60$ geeft $\log(g) = -2,37 + 3,38 \cdot \log(60) = 3,64\dots$
 $\log(g) = 3,64\dots$ geeft $g = 10^{3,64\dots} \approx 4370$
 Dus 4370 gram.
 Opmerking: de vergelijking $\log(g) = -2,37 + 3,38 \cdot \log(60)$ mag ook grafisch-numeriek worden opgelost.
- b** $\log(g) = -2,37 + 3,38 \cdot \log(l)$
 $\log(g) = \log(10^{-2,37}) + \log(l^{3,38})$
 $\log(g) = \log(10^{-2,37} \cdot l^{3,38})$
 $g = 10^{-2,37} \cdot l^{3,38}$
 $g \approx 0,0043 \cdot l^{3,38}$
 Dus $a = 0,0043$ en $b = 3,38$.
- c** Neem $3l$ voor l in de formule $g = 0,004l^{3,4}$.
 Je krijgt $g = 0,004 \cdot (3l)^{3,4} = 0,004 \cdot 3^{3,4} \cdot l^{3,4} = 3^{3,4} \cdot 0,004 \cdot l^{3,4} \approx 42 \cdot 0,004 \cdot l^{3,4}$.
 Het vaste getal is 42.
- d** Invullen van $g = 1000G$ en $l = 100L$ geeft $\log(1000G) = -2,37 + 3,38 \cdot \log(100L)$
 $\log(1000) + \log(G) = -2,37 + 3,38 \cdot (\log(100) + \log(L))$
 $3 + \log(G) = -2,37 + 3,38 \cdot 2 + 3,38 \cdot \log(L)$
 $\log(G) = 1,39 + 3,38 \cdot \log(L)$.

Bladzijde 231

- 18 a** Lees af: bij $t = 0$ hoort $B = 10^3$ en bij $t = 9$ hoort $B = 10^6$.
 Dus $\frac{10^6}{10^3} = 1000$ keer zoveel.
- b** Lees af: bij $t = 12$ hoort $B = 10^7 = 10$ miljoen bacteriën.
 Dus na 12 dagen mag de kip nog gegeten worden.
- c** $B = 50 \cdot 10^6$ geeft $\frac{1}{3}t + 3 = \log(50 \cdot 10^6)$
 $\frac{1}{3}t + 3 = 7,69\dots$
 $\frac{1}{3}t = 4,69\dots$
 $t \approx 14,1$
 Dus na 14,1 dagen.
- d** $\log(B) = \frac{1}{3}t + 3$
 $B = 10^{\frac{1}{3}t + 3}$
 $B = 10^{\frac{1}{3}t} \cdot 10^3$
 $B = 10^3 \cdot (10^{\frac{1}{3}})^t$
 $B \approx 1000 \cdot 2,154^t$
 Dus $B = 1000 \cdot 2,154^t$.

Bladzijde 232

- 19 a** $a = \frac{9,53 + 5,85}{2} = 7,69$
 $b = 9,53 - 7,69 = 1,84$
 3 periodes is 235 meter, dus 1 periode is $\frac{235}{3}$ meter en $c = \frac{2\pi}{(\frac{235}{3})} = \frac{6\pi}{235} \approx 0,08$.
- Stijgend door de evenwichtsstand voor $x = 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{235}{3} \approx 19,58$, dus $d = 19,58$.
- b** De formule is $h = 7,69 + 1,84 \sin(0,08(x - 19,58))$ en de hoogte van het dak moet minimaal $8 + 1 = 9$ meter zijn.
 Dus los op $7,69 + 1,84 \sin(0,08(x - 19,58)) = 9$.
 Voer in $y_1 = 7,69 + 1,84 \sin(0,08(x - 19,58))$ en $y_2 = 9$.
 De optie snijpunt geeft $x = 29,483\dots$ en $x = 48,946\dots$
 Omdat $48,946\dots - 29,483\dots = 19,46\dots$, kan het bouwwerk maximaal 19,5 meter lang worden.



Het maximum ligt bij $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{235}{3} = \frac{235}{6}$.

Dit geeft $x_A = \frac{235}{6} - \frac{1}{2} \cdot 20 \approx 29,17$.

$x = 29,17$ geeft $h \approx 8,97$, dus het bouwwerk kan maximaal $8,9 - 1 = 7,9$ meter hoog worden.

14 Toepassingen van de differentiaalrekening

Bladzijde 233

20 a $y = 2x + 21,65 \cdot \ln(x + 10)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2 + 21,65 \cdot \frac{1}{x + 10} = 2 + \frac{21,65}{x + 10}$.

b $y = {}^3\log(5x - 2)$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(5x - 2) \cdot \ln(3)} \cdot 5 = \frac{5}{(5x - 2) \cdot \ln(3)}$.

c $y = \frac{3x}{15 - \ln(5x)}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(15 - \ln(5x)) \cdot 3 - 3x \cdot -\frac{1}{5x} \cdot 5}{(15 - \ln(5x))^2} = \frac{45 - 3 \cdot \ln(5x) + 3}{(15 - \ln(5x))^2} = \frac{48 - 3 \cdot \ln(5x)}{(15 - \ln(5x))^2}$.

d $y = 0,3^x \cdot \log(0,6x)$ geeft

$$\frac{dy}{dx} = 0,3^x \cdot \ln(0,3) \cdot \log(0,6x) + 0,3^x \cdot \frac{1}{0,6x \cdot \ln(10)} \cdot 0,6 = 0,3^x \cdot \ln(0,3) \cdot \log(0,6x) + \frac{0,3^x}{x \cdot \ln(10)}.$$

e $y = \frac{e^{2x}}{x^2 + 2} + 8x$ geeft

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 2) \cdot e^{2x} \cdot 2 - e^{2x} \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} + 8 = \frac{2x^2 \cdot e^{2x} + 4 \cdot e^{2x} - 2x \cdot e^{2x}}{(x^2 + 2)^2} + 8 = \frac{2x^2 \cdot e^{2x} - 2x \cdot e^{2x} + 4 \cdot e^{2x}}{(x^2 + 2)^2} + 8.$$

f $y = x \cdot \ln(x + 3)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \ln(x + 3) + x \cdot \frac{1}{x + 3} = \ln(x + 3) + \frac{x}{x + 3}$.

21 a stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt x^2 toe, dus dan neemt $x^2 + 1$ toe en dan neemt $\frac{3}{x^2 + 1}$ af en

dan neemt $100 - \frac{3}{x^2 + 1}$ toe.

Dus de grafiek van y is stijgend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan wordt x^2 heel groot, dus dan wordt $x^2 + 1$ heel groot. Dan

nadert $\frac{3}{x^2 + 1}$ tot 0 en dan wordt $100 - \frac{3}{x^2 + 1} \approx 100 - 0 = 100$.

De grenswaarde is 100.

b stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt $0,77^x$ af, dus dan neemt $10 \cdot 0,77^x$ af.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe, dus dan neemt $\sqrt{x} + 5$ toe.

Van $\frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5}$ neemt de teller af en de noemer toe, dus $\frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5}$ neemt af en dan

neemt $55 - \frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5}$ toe.

De grafiek van y is stijgend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan nadert $0,77^x$ tot 0, dus dan nadert $10 \cdot 0,77^x$ tot 0.

Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot, dus dan wordt $\sqrt{x} + 5$ heel groot.

Als van $\frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5}$ de teller nadert tot 0 en de noemer heel groot wordt, dan nadert

$$\frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5} \text{ tot } 0 \text{ en dan wordt } 55 - \frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5} \approx 55 - 0 = 55.$$

De grenswaarde is 55.

c stijgen of dalen

Omdat $e^{-t} = (e^{-1})^t \approx 0,37^t$ geldt: als t toeneemt, dan neemt e^{-t} af, dus dan neemt $16 \cdot e^{-t}$

af en dan neemt $24 - 16 \cdot e^{-t}$ toe. Daarom neemt $\frac{78}{24 - 16 \cdot e^{-t}}$ af.

De grafiek van N is dalend.

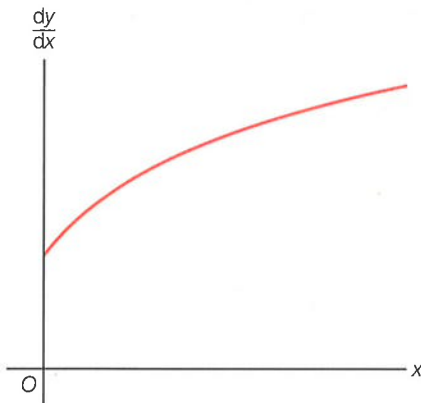
grenswaarde

Omdat $e^{-t} \approx 0,37^t$ geldt: als t heel groot wordt, dan nadert e^{-t} tot 0, dus dan nadert $16 \cdot e^{-t}$

tot 0 en dan wordt $24 - 16 \cdot e^{-t} \approx 24 - 0 = 24$. Dan wordt $\frac{78}{24 - 16 \cdot e^{-t}} \approx \frac{78}{24} = 3,25$.

De grenswaarde is 3,25.

22 a $y = 3x \cdot \ln(x + 4)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3 \cdot \ln(x + 4) + 3x \cdot \frac{1}{x + 4} = 3 \ln(x + 4) + \frac{3x}{x + 4}$.

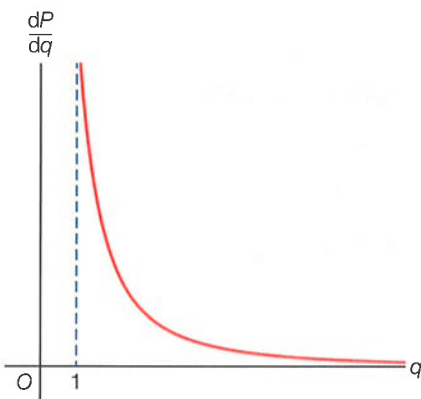


De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is toenemend stijgend.

b $P = \frac{q + 20}{q - q^2}$ geeft $\frac{dP}{dq} = \frac{(q - q^2) \cdot 1 - (q + 20) \cdot (1 - 2q)}{(q - q^2)^2} = \frac{q - q^2 - (q - 2q^2 + 20 - 40q)}{(q - q^2)^2}$

$$= \frac{q - q^2 - q + 2q^2 - 20 + 40q}{(q - q^2)^2} = \frac{q^2 + 40q - 20}{(q - q^2)^2}$$



De grafiek van $\frac{dP}{dq}$ ligt geheel boven de q -as, dus de grafiek van P is stijgend.

De grafiek van $\frac{dP}{dq}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van P is afnemend stijgend.

c $y = 7e^{-0,3x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 7e^{-0,3x} \cdot -0,3 = -2,1e^{-0,3x}$.

$e^{-0,3x}$ is positief, dus $-2,1e^{-0,3x}$ is negatief.

De grafiek van y is dus dalend.

$e^{-0,3x} = (e^{-0,3})^x \approx 0,74^x$, dus $\frac{dy}{dx} \approx -2,1 \cdot 0,74^x$.

Als t toeneemt, dan neemt $0,74^x$ af en dan neemt $-2,1 \cdot 0,74^x$ toe.

De grafiek van y is afnemend dalend.

d $N = 100(1 - 0,5^t)$ geeft $\frac{dN}{dt} = 100 \cdot -0,5^t \cdot \ln(0,5) = -100 \cdot 0,5^t \cdot \ln(0,5) \approx 69 \cdot 0,5^t$.

$0,5^t$ is positief, dus $69 \cdot 0,5^t$ is positief.

De grafiek van N is dus stijgend.

Als t toeneemt, dan neemt $0,5^t$ af en dan neemt $69 \cdot 0,5^t$ af.

De grafiek van N is afnemend stijgend.

23 a De breedte van de uitslag is $4x + 0,7$ cm.

De hoogte van de uitslag is $h + 0,5x + 0,6x + 2 \cdot 0,7 = 1,4 + 1,1x + h$ cm.

$$\left. \begin{array}{l} I = x^2 h \\ I = 1000 \text{ cm}^3 \end{array} \right\} x^2 h = 1000, \text{ dus } h = \frac{1000}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } O(x) &= (4x + 0,7)(1,4 + 1,1x + h) \\ &= (4x + 0,7)(1,4 + 1,1x + \frac{1000}{x^2}) \end{aligned}$$

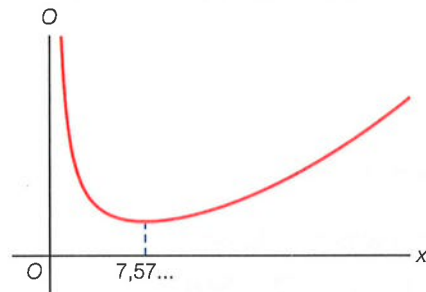
b $O(x) = (4x + 0,7)(1,4 + 1,1x + \frac{1000}{x^2}) = 5,6x + 4,4x^2 + \frac{4000}{x} + 0,98 + 0,77x + \frac{700}{x^2}$
 $= 4,4x^2 + 6,37x + 0,98 + 4000x^{-1} + 700x^{-2}$ geeft

$$O'(x) = 8,8x + 6,37 - 4000x^{-2} - 1400x^{-3} = 8,8x + 6,37 - \frac{4000}{x^2} - \frac{1400}{x^3}$$

c Los op $O'(x) = 0$.

Voer in $y_1 = 8,8x + 6,37 - \frac{4000}{x^2} - \frac{1400}{x^3}$.

De optie nulpunt geeft $x = 7,57...$



Uit de schets blijkt dat de oppervlakte minimaal is voor $x = 7,57...$

$O(7,57...) \approx 842$, dus er wordt 842 cm^2 karton gebruikt.

Bladzijde 234

24 $K = \text{aanlegkosten } PE + \text{aanlegkosten } BP$

$$K = 140\,000 \cdot \sqrt{x^2 + 25} + 100\,000(10 - x)$$

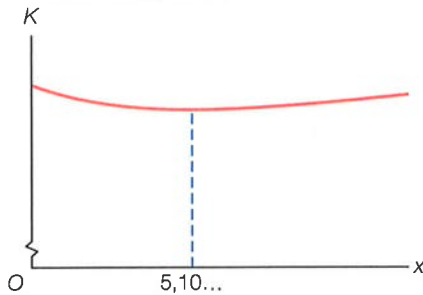
$$K = 140\,000\sqrt{x^2 + 25} - 100\,000x + 1\,000\,000 = 140\,000(x^2 + 25)^{0,5} - 100\,000x + 1\,000\,000$$

$$\frac{dK}{dx} = 70\,000(x^2 + 25)^{-0,5} \cdot 2x - 100\,000 = \frac{140\,000x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 100\,000$$

$$\frac{dK}{dx} = 0 \text{ geeft } \frac{140\,000x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 100\,000 = 0 \text{ oftewel } \frac{140\,000x}{\sqrt{x^2 + 25}} = 100\,000 \text{ oftewel } \frac{1,4x}{\sqrt{x^2 + 25}} = 1.$$

Voer in $y_1 = \frac{1,4x}{\sqrt{x^2 + 25}}$ en $y_2 = 1$.

De optie snijpunt geeft $x = 5,10\dots$



De aanlegkosten zijn minimaal voor $x = 5,10\dots$

De minimale aanlegkosten zijn ongeveer 1 489 900 euro.

25 a $t = 10$ geeft $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot e^{-0,21 \cdot 10}} \approx 0,6$

Dus 0,6% is besmet (geweest).

b Los op $\frac{100}{1 + 1450 \cdot e^{-0,21t}} = 25$.

Voer in $y_1 = \frac{100}{1 + 1450 \cdot e^{-0,21x}}$ en $y_2 = 25$.

De optie snijpunt geeft $x = 29,43\dots$

Dus na 30 dagen.

c Omdat $e^{-0,21t} = (e^{-0,21})^t \approx 0,81^t$ geldt: als t toeneemt, dan neemt $e^{-0,21t}$ af, dus dan neemt $500 \cdot e^{-0,21t}$ af en $1 + 500 \cdot e^{-0,21t}$ neemt af. Dus $\frac{100}{1 + 500 \cdot e^{-0,21t}}$ neemt toe.

De grafiek van P is dus stijgend.

d Omdat $e^{-0,21t} \approx 0,81^t$ geldt: als t heel groot wordt, dan nadert $e^{-0,21t}$ tot 0.

Dan wordt $1450 \cdot e^{-0,21t} \approx 0$ en $1 + 1450 \cdot e^{-0,21t} \approx 1$.

Dus dan wordt $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot e^{-0,21t}} \approx \frac{100}{1} = 100$.

De grenswaarde is 100%, dus uiteindelijk zal de gehele bevolking besmet zijn (geweest).

e $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot e^{-0,21t}}$ geeft

$$\frac{dP}{dt} = \frac{(1 + 1450 \cdot e^{-0,21t}) \cdot 0 - 100 \cdot 1450 \cdot e^{-0,21t} \cdot -0,21}{(1 + 1450 \cdot e^{-0,21t})^2} = \frac{30450 \cdot e^{-0,21t}}{(1 + 1450 \cdot e^{-0,21t})^2}$$

Voer in $y_1 = \frac{30450 \cdot e^{-0,21x}}{(1 + 1450 \cdot e^{-0,21x})^2}$.

De optie maximum geeft $x \approx 35$, dus voor $t = 35$ is de toename maximaal.

Bladzijde 235

26 a $C = 10$ geeft $100 - 21,6t^{0,35} = 10$

$$21,6t^{0,35} = 90$$

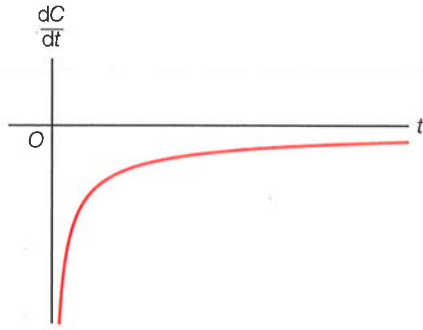
$$t^{0,35} = \frac{90}{21,6}$$

$$t = \left(\frac{90}{21,6}\right)^{\frac{1}{0,35}} \approx 59$$

De levensduur is 59 jaar.

Opmerking: de vergelijking $100 - 21,6t^{0,35} = 10$ mag ook grafisch-numeriek worden opgelost.

b $C = 100 - 21,6t^{0,35}$ geeft $\frac{dC}{dt} = -7,56t^{-0,65}$.



De grafiek van $\frac{dC}{dt}$ ligt geheel onder de t -as, dus de grafiek van C is dalend.

De grafiek van $\frac{dC}{dt}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van C is afnemend dalend.

Hieruit volgt dat de conditie van het viaduct steeds minder snel afneemt.

- 27 a** Omdat $e^{-0,0015f} = (e^{-0,0015})^f \approx 0,9985^f$ geldt: als f heel groot wordt, dan nadert $e^{-0,0015f}$ tot 0 en dan nadert $b \cdot e^{-0,0015f}$ tot 0 en dan wordt $1 + b \cdot e^{-0,0015f} \approx 1 + 0 = 1$.

Dus dan wordt $\frac{a}{1 + b e^{-0,0015f}} \approx \frac{a}{1} = a$.

De grenswaarde is dus a .

Omdat de maximale demping 44 dB is, geldt dat $a = 44$.

$f = 250$ en $D = 12,5$ invullen in $D = \frac{44}{1 + b e^{-0,0015f}}$ geeft $\frac{44}{1 + b e^{-0,0015 \cdot 250}} = 12,5$.

Voer in $y_1 = \frac{44}{1 + x e^{-0,0015 \cdot 250}}$ en $y_2 = 12,5$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 3,67$, dus $b = 3,67$.

- b** $f = 1000$ invullen in de formule geeft $D = 24,10\dots$

Het model wijkt $\frac{25 - 24,10\dots}{25} \times 100\% \approx 3,6\%$ af.

- c** Los op $\frac{44}{1 + 3,7 e^{-0,0015f}} = 30$.

Voer in $y_1 = \frac{44}{1 + 3,7 e^{-0,0015x}}$ en $y_2 = 30$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1380$, dus een toon van 1380 Hz.

- d** Omdat $e^{-0,0015f} = (e^{-0,0015})^f \approx 0,9985^f$ geldt: als f toeneemt, dan neemt $e^{-0,0015f}$ af, dus

dan neemt $1 + 3,7 e^{-0,0015f}$ af en dan neemt $\frac{44}{1 + 3,7 e^{-0,0015f}}$ toe.

De grafiek van D is dus stijgend.

- e** $D = \frac{44}{1 + 3,7 e^{-0,0015f}}$ geeft

$$\frac{dD}{df} = \frac{(1 + 3,7 e^{-0,0015f}) \cdot 0 - 44 \cdot 3,7 e^{-0,0015f} \cdot -0,0015}{(1 + 3,7 e^{-0,0015f})^2} = \frac{0,2442 e^{-0,0015f}}{(1 + 3,7 e^{-0,0015f})^2}$$

$f = 2500$ geeft $\frac{dD}{df} = 0,00486\dots$

De demping per 1000 Hz is ongeveer 4,9 dB.

- f** Voer in $y_1 = \frac{0,2442 e^{-0,0015x}}{(1 + 3,7 e^{-0,0015x})^2}$.

De optie maximum geeft $x \approx 872$ en $y \approx 0,0165$.

De toename van de demping is maximaal bij een toonhoogte van 872 Hz.

Bladzijde 236

- 28 a** Los op $487 \cdot 2^{0,10t} = 4000$.

Voer in $y_1 = 487 \cdot 2^{0,10x}$ en $y_2 = 4000$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 30,4$.

In het jaar $1963 + 30 = 1993$.

b $N = 487 \cdot 2^{0,10t}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 487 \cdot 2^{0,10t} \cdot \ln(2) \cdot 0,10 = 48,7 \cdot \ln(2) \cdot 2^{0,10t}$.

Bij 2005 hoort $t = 42$.

$t = 42$ geeft $\frac{dN}{dt} = 48,7 \cdot \ln(2) \cdot 2^{4,2} \approx 620$

Het aantal broedparen nam toe met 620 per jaar.

c $\frac{dN}{dt} = 48,7 \cdot \ln(2) \cdot 2^{0,10t} \approx 33,8 \cdot 2^{0,01t}$

$2^{0,01t}$ is positief, dus $33,8 \cdot 2^{0,01t}$ is positief.

De grafiek van N is dus stijgend.

$2^{0,01t} \approx 1,007^t$, dus als t toeneemt, dan neemt $2^{0,01t}$ toe en dan neemt $33,8 \cdot 2^{0,01t}$ toe.

De grafiek van N is toenemend stijgend.

d Bij 2016 hoort $t = 53$.

De formule geeft $N \approx 19186$.

De schatting van Joe is $\frac{19186 - 13000}{19186} \times 100\% \approx 32,2\%$ lager.

e Omdat $e^{-0,18t} = (e^{-0,18})^t \approx 0,84^t$ geldt: als t toeneemt, dan neemt $e^{-0,18t}$ af, dus dan neemt ook $0,76 + e^{-0,18t}$ af en dan neemt $\frac{11200}{0,76 + e^{-0,18t}}$ toe.

De grafiek van N is stijgend, dus neemt het aantal broedparen voortdurend toe.

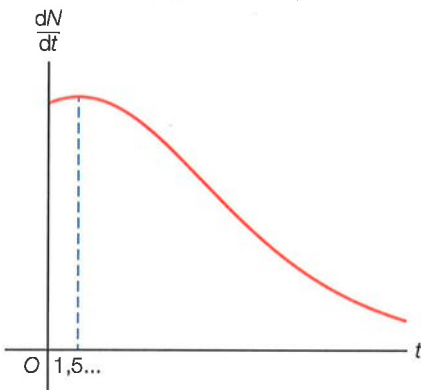
f Omdat $e^{-0,18t} \approx 0,84^t$ geldt: als t heel groot is, dan nadert $e^{-0,18t}$ tot 0 en dan wordt $0,76 + e^{-0,18t} \approx 0,76 + 0 = 0,76$. Dus $N \approx \frac{11200}{0,76 + 0} \approx 14737$.

De grenswaarde is 14737.

g $N = \frac{11200}{0,76 + e^{-0,18t}}$ geeft

$$\frac{dN}{dt} = \frac{(0,76 + e^{-0,18t}) \cdot 0 - 11200 \cdot e^{-0,18t} \cdot -0,18}{(0,76 + e^{-0,18t})^2} = \frac{2016e^{-0,18t}}{(0,76 + e^{-0,18t})^2}$$

Voer in $y_1 = \frac{2016e^{-0,18x}}{(0,76 + e^{-0,18x})^2}$.



De optie maximum geeft $x = 1,5...$

Bij 2002 hoort $t = 2$ en voor $t > 2$ geldt

- de grafiek van $\frac{dN}{dt}$ ligt geheel boven de t -as, dus de grafiek van N is stijgend
- de grafiek van $\frac{dN}{dt}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van N is afnemend stijgend.

Bladzijde 237

29 a $L = 168,0$, dus $S = \frac{168,0}{170,0}$.

Los op $\ln(-0,00216t + 2,7183) = \frac{168}{170}$.

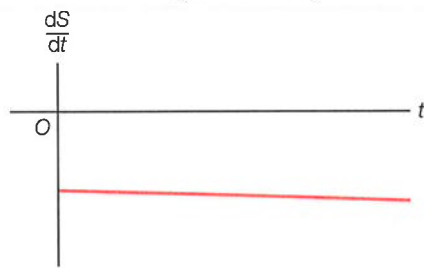
Voer in $y_1 = \ln(-0,00216x + 2,7183)$ en $y_2 = \frac{168}{170}$.

De optie snijpunt geeft $x = 14,72...$

Na 14 uur en 44 minuten (oftewel na 884 minuten).

b $S = \ln(-0,00216t + 2,7183)$ geeft $\frac{dS}{dt} = \frac{-0,00216}{-0,00216t + 2,7183}$.

Voer in $y_1 = \frac{-0,00216}{-0,00216x + 2,7183}$.



De grafiek van $\frac{dS}{dt}$ ligt geheel onder de t -as, dus de grafiek van S is dalend.

De grafiek van $\frac{dS}{dt}$ is bovendien dalend, dus er is sprake van toenemende daling.

c Voor het verschil geldt $V = \ln(-0,00216t + 2,7183) - (-0,0008t + 1,0000)$.

Voer in $y_1 = \ln(-0,00216x + 2,7183) - (-0,0008x + 1,0000)$.

De optie maximum geeft $x = 8,472\dots$ en $y \approx 2,9551 \cdot 10^{-5}$.

Het maximum van V is $2,9551 \cdot 10^{-5}$.

Het maximale verschil tussen de twee formules voor de lengte van meneer

Jansen is dus $170,0 \cdot 2,9551 \cdot 10^{-5} \approx 0,005$ cm.

15 Examentraining

Bladzijde 238

30 $(4a - 1) \cdot \frac{2b}{4a - 1} = 2b$

31 $E = 15 \cdot (2N)^{-1,5}$
 $(2N)^{-1,5} = \frac{1}{15} E$
 $2N = (\frac{1}{15} E)^{-\frac{1}{1,5}}$
 $N = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{15})^{-\frac{1}{1,5}} \cdot E^{\frac{1}{1,5}}$
 $N \approx 3,04E^{-0,67}$
 Dus $N = 3,04E^{-0,67}$.

32 Voer in $y_1 = -0,005x^2 + 23x$.
 De optie maximum geeft $x = 2300$ en $y = 26450$.
 De maximale waarde van P is 26450.

33 totaal = $\frac{649}{0,0564} \approx 11\,507$

34 $N = \frac{500}{1 + 2e^{-0,2t}}$ geeft $\frac{dN}{dt} = \frac{(1 + 2e^{-0,2t}) \cdot 0 - 500 \cdot 2e^{-0,2t} \cdot -0,2}{(1 + 2e^{-0,2t})^2} = \frac{200e^{-0,2t}}{(1 + 2e^{-0,2t})^2}$.

Voer in $y_1 = \frac{200e^{-0,2x}}{(1 + 2e^{-0,2x})^2}$.

De optie maximum geeft $x = 3,46\dots$ en $y = 25$.

Bij $t = 3,46\dots$ hoort halverwege 2013.

Dus in 2013 was de toename van het aantal leden het grootst.

35 $3(P - 5) + 4(3Q + 1) = 61$
 $3P - 15 + 12Q + 4 = 61$
 $3P = -12Q + 72$
 $P = -4Q + 24$

36 aantal = $5! = 120$

37 Stel $u_n = u_0 \cdot r^n$.

$$r^5 = \frac{u_7}{u_2} = \frac{45,5625}{6}, \text{ dus } r = \left(\frac{45,5625}{6}\right)^{\frac{1}{5}} = 1,5.$$

$$u_n = u_0 \cdot 1,5^n \text{ en } u_2 = 6 \text{ geeft } u_0 \cdot 1,5^2 = 6, \text{ dus } u_0 = 2\frac{2}{3}.$$

$$\text{De directe formule is } u_n = 2\frac{2}{3} \cdot 1,5^n.$$

38 $\frac{2}{p} + 3p \cdot \frac{5q}{2p^2} = \frac{2}{p} + \frac{15pq}{2p^2} = \frac{2}{p} + \frac{15q}{2p} = \frac{4}{2p} + \frac{15q}{2p} = \frac{15q+4}{2p}$

39 $30\,689 \text{ km}^2 = 30\,689 \cdot 10^6 \text{ m}^2$

$$\text{De oppervlakte per inwoner is } \frac{30\,689 \cdot 10^6}{11,46 \cdot 10^6} \approx 2678 \text{ m}^2.$$

40 $A = 0,18 \cdot (2x - 3) \cdot \frac{x}{0,06} = \frac{0,18}{0,06} \cdot x(2x - 3) = 3x(2x - 3) = 6x^2 - 9x$

$$\text{Dus } a = 6 \text{ en } b = -9.$$

41 y is evenredig met x , dus $y = ax$.

$$x = 12 \text{ en } y = 69 \text{ geeft } 12a = 69, \text{ dus } a = 5,75.$$

$$x = 42 \text{ invullen in } y = 5,75x \text{ geeft } y = 5,75 \cdot 42 = 241,5.$$

42 $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30 - 18}{10 - 2} = 1\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, 18) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 18 \\ 3 + b = 18 \\ b = 15 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = 1\frac{1}{2}x + 15.$$

Bladzijde 239

43 $5p \cdot \frac{3}{q} \cdot \frac{1-q}{q} = \frac{5p \cdot 3 \cdot (1-q)}{q^2} = \frac{15p - 15pq}{q^2}$

44 Dat is $45\,486 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \approx 3,9 \cdot 10^9$ dollar per dag.

45 $y = 2ax^2 - 3x^3 + 5$ geeft $\frac{dy}{dx} = 4ax - 9x^2$.

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ geeft } 4ax - 9x^2 = 0$$

$$x(4a - 9x) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 4a - 9x = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 9x = 4a$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{4}{9}a$$

$$y \text{ is maximaal voor } x = \frac{4}{9}a.$$

$$y_{\max} = 2a \cdot \left(\frac{4}{9}a\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{4}{9}a\right)^3 + 5 = 2a \cdot \frac{16}{81}a^2 - 3 \cdot \frac{64}{729}a^3 + 5 = \frac{32}{243}a^3 + 5$$

46 $\frac{750 - 820}{820} \times 100\% \approx -8,5\%$, dus de afname is 8,5%.

47 Dat is $1167 \cdot 1,61^2 \approx 3025 \text{ km}^2$.

48 De winst in 2020 was $31,25 \cdot 1,085 \cdot 0,847 \approx 28,72$ miljoen euro.

49 $(2a - 1)^2 - 4(3a - 1) = 4a^2 - 4a + 1 - 12a + 4 = 4a^2 - 16a + 5$

- 50 a** $y = 5 + 3 \sin(x)$
De periode is 2π , de evenwichtsstand is 5 en de amplitude is 3.
- b** $y = 3 \sin(2x) + 1$
De periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$, de evenwichtsstand is 1 en de amplitude is 3.
- c** $y = 5 \sin(\frac{1}{4}\pi x)$
De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$, de evenwichtsstand is 0 en de amplitude is 5.

51 aantal = $7^5 = 16\,807$

52 $z = 20 + 4^{x-2}$
 $20 + 4^{x-2} = z$
 $4^{x-2} = z - 20$
 $x - 2 = {}^4\log(z - 20)$
 $x = {}^4\log(z - 20) + 2$

- 53** 4 delen is gelijk aan 25 euro, dus 1 deel is gelijk aan 6,25 euro.
In totaal werden $2 + 3 + 7 = 12$ delen verdeeld.
Er werd dus $12 \cdot 6,25 = 75$ euro verdeeld.

Bladzijde 240

- 54 a** In 11 jaar $1165 - 840 = 325$ erbij, dus per jaar $\frac{325}{11}$ erbij.
In 2010 was het aantal $840 + 7 \cdot \frac{325}{11} \approx 1047$.
- b** In 6 jaar $1390 - 1165 = 225$ erbij, dus per jaar $\frac{225}{6} = 37,5$ erbij.
In 2025 is het aantal $1390 + 5 \cdot 37,5 \approx 1578$.
- c** $840 - 520 = 320$ erbij in 8 jaar, dus 1 erbij in $\frac{8}{320}$ jaar.
 $760 - 520 = 240$, dus bij 760 hoort het jaar $1995 + 240 \cdot \frac{8}{320} = 2001$.

- 55 a** $y = \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x} = 4x^{-3} + 5x^{-1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -12x^{-4} - 5x^{-2} = -\frac{12}{x^4} - \frac{5}{x^2}$.
- b** $y = 6x^2 \cdot \sqrt{x} = 6x^{2\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 15x^{1\frac{1}{2}} = 15x\sqrt{x}$.
- c** $y = \frac{2}{3x} + \frac{3x}{2} = \frac{2}{3}x^{-1} + \frac{1}{2}x$ geeft $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}x^{-2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{3x^2} + \frac{1}{2}$.

56 $\frac{6x+10}{x+3} - 2x = \frac{6x+10}{x+3} - \frac{2x(x+3)}{x+3} = \frac{6x+10-2x^2-6x}{x+3} = \frac{-2x^2+10}{x+3}$

57 De procentuele toename is $\frac{145-115}{115} \times 100\% \approx 26,1\%$.

58 $6a - 5b = 18$
 $-5b = -6a + 18$
 $b = \frac{1}{5}a - 3\frac{3}{5}$

- 59 a** Als x toeneemt, dan neemt $3x$ toe, dus $3x + 1$ neemt toe, dus $\frac{10}{3x+1}$ neemt af en $75 - \frac{10}{3x+1}$ neemt toe.
Dus de grafiek van y is stijgend.
Als x heel groot wordt, dan wordt $3x$ heel groot, dus dan wordt $3x + 1$ heel groot en dan nadert $\frac{10}{3x+1}$ tot 0. Dus dan wordt $75 - \frac{10}{3x+1} \approx 75 - 0 = 75$.
Dus de grenswaarde is 75.

- b** Als x toeneemt, dan neemt $2x^2$ toe, dus $2x^2 + 1$ neemt toe, dus $\frac{50}{2x^2 + 1}$ neemt af en

$$\frac{50}{2x^2 + 1} + 30 \text{ neemt af.}$$

Dus de grafiek van y is dalend.

Als x heel groot wordt, dan wordt $2x^2$ heel groot, dus dan wordt $2x^2 + 1$ heel groot en

$$\text{dan nadert } \frac{50}{2x^2 + 1} \text{ tot } 0. \text{ Dus dan wordt } \frac{50}{2x^2 + 1} + 30 \approx 0 + 30 = 30.$$

Dus de grenswaarde is 30.

- c** Als x toeneemt, dan neemt $0,75^x$ af en $100 \cdot 0,75^x$ neemt af.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe en $3\sqrt{x}$ neemt toe.

$$\text{Van } \frac{100 \cdot 0,75^x}{3\sqrt{x}} \text{ neemt de teller af en de noemer toe, dus } \frac{100 \cdot 0,75^x}{3\sqrt{x}} \text{ neemt af.}$$

Dus de grafiek van y is dalend.

Als x heel groot wordt, dan nadert $0,75^x$ tot 0. Dan wordt $100 \cdot 0,75^x \approx 0$.

Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot en $3\sqrt{x}$ wordt heel groot.

$$\text{Van } \frac{100 \cdot 0,75^x}{3\sqrt{x}} \text{ nadert de teller tot } 0 \text{ en de noemer wordt heel groot, dus } \frac{100 \cdot 0,75^x}{3\sqrt{x}} \text{ nadert tot } 0.$$

Dus de grenswaarde is 0.

60 a $q = 400$ geeft $W = -0,01 \cdot 400^2 + 7,5 \cdot 400 - 650 = 750$

$$\text{De winst per artikel is } \frac{75000}{400} = 187,50 \text{ euro.}$$

- b** Voer in $y_1 = -0,01x^2 + 7,5x - 650$.

De optie maximum geeft $x = 375$ en $y = 756,25$.

De maximale winst is 75 625 euro per jaar.

61 $\frac{2}{3}a^{-4}b^2 = \frac{2b^2}{3a^4}$

Bladzijde 241

62 $A = at + b$ met $a = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{22 - 78}{28 - 12} = -3\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} A = -3\frac{1}{2}t + b \\ t = 12 \text{ en } A = 78 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3\frac{1}{2} \cdot 12 + b = 78 \\ -42 + b = 78 \\ b = 120 \end{array}$$

$$\text{Dus } A = -3\frac{1}{2}t + 120.$$

63 a $y = x^2 \cdot e^{3x+1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2x \cdot e^{3x+1} + x^2 \cdot e^{3x+1} \cdot 3 = 2xe^{3x+1} + 3x^2 \cdot e^{3x+1}$.

b $y = \frac{2x-1}{3x+4}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(3x+4) \cdot 2 - (2x-1) \cdot 3}{(3x+4)^2} = \frac{6x+8-6x+3}{(3x+4)^2} = \frac{11}{(3x+4)^2}$.

64 $(a^{-2})^4 \cdot a^5 = a^{-8} \cdot a^5 = a^{-3}$

- 65** Bij codes met vijf letters 3, 4 of 5 A's.

$$\text{Het aantal mogelijke codes met vijf letters is } \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 10 + 5 + 1 = 16.$$

Bij codes met zes letters 4, 5 of 6 A's.

$$\text{Het aantal mogelijke codes met zes letters is } \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 15 + 6 + 1 = 22.$$

Bij codes met zeven letters 4, 5, 6 of 7 A's.

$$\text{Het aantal mogelijke codes met zeven letters is } \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 35 + 21 + 7 + 1 = 64.$$

Het totale aantal codes met meer A's dan B's is $16 + 22 + 64 = 102$.

66 $67,13 \text{ km}^2 = 67,13 \cdot 10^8 \text{ dm}^2$

$$55 \text{ mm} = 55 \cdot 10^{-2} \text{ dm}$$

Dus er viel die dag $67,13 \cdot 10^8 \cdot 55 \cdot 10^{-2} \approx 3,69 \cdot 10^9$ liter regen.

$$67 \quad y = 5 - \frac{6}{3-2x} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = 0 - \frac{(3-2x) \cdot 0 - 6 \cdot -2}{(3-2x)^2} = \frac{-12}{(3-2x)^2}.$$

De teller van $\frac{dy}{dx}$ is negatief en de noemer is positief voor $x > 1\frac{1}{2}$, dus $\frac{dy}{dx} < 0$ voor elke $x > 1\frac{1}{2}$.

Hieruit volgt dat de grafiek van y dalend is $x > 1\frac{1}{2}$.

- 68 a Meetkundige rij met $u_0 = 800$ en $r = 1,05$, dus
 recursieve formule $u_n = 1,05 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 800$
 en directe formule $u_n = 800 \cdot 1,05^n$.
 b Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $u_{12} \approx 1436,7$ en $u_{13} \approx 1508,5$.
 Er zijn 13 termen kleiner dan 1500.

- 69 $g_{\text{jaar}} = 0,942$
 Los op $0,942^t = \frac{1}{2}$.
 Voer in $y_1 = 0,942^x$ en $y_2 = \frac{1}{2}$.
 De optie snijpunt geeft $x = 11,60\dots$
 De halveringstijd is ongeveer 11 jaar en 7 maanden (139 maanden).

- 70 $y = 0,08(x-5)^2 + 1$
 $\downarrow$ verschuiving (2, 4)
 $y = 0,08(x-7)^2 + 5$
 $\downarrow$ herschaling in verticale richting met factor 3
 $y = 3 \cdot (0,08(x-7)^2 + 5) = 0,24(x-7)^2 + 15$
 De formule van de beeldgrafiek is $y = 0,24(x-7)^2 + 15$.
 De top is (7, 15).

- 71 De oorspronkelijke hoeveelheid was $\frac{3015}{1,184} \approx 2546$.

- 72 aantal = $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

- 73 $y = 0,4 \cdot \sqrt[3]{x} + 2$
 $0,4 \cdot \sqrt[3]{x} = y - 2$
 $\sqrt[3]{x} = \frac{y-2}{0,4} = 2,5y - 5$
 $x = (2,5y - 5)^3$

- 74 $y = -\frac{1}{3}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 6 + b = 9 \\ -2 + b = 9 \end{array} \right.$
 $b = 11$
 Dus $l: y = -\frac{1}{3}x + 11$.

Bladzijde 242

- 75 $y = \frac{108}{(3x^2)^3} = \frac{108}{3^3 \cdot (x^2)^3} = \frac{108}{27x^6} = 4x^{-6}$
 Dus $y = 4x^{-6}$.

- 76 a $f(x) = (x^2 - 2)(2x + 5) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 10$ geeft $f'(x) = 6x^2 + 10x - 4$.
 b $K(q) = \frac{1}{3}q^3 + 2q(q-2) + 5 = \frac{1}{3}q^3 + 2q^2 - 4q + 5$ geeft $K'(q) = q^2 + 4q - 4$.
 c $L(p) = 2p^5 - 3a^2p^2 + 2a - 3p + 4$ geeft $L'(p) = 10p^4 - 6a^2p - 3$.

- 77 q neemt toe van 100 tot 200.
 De gemiddelde toename is $\frac{K(200) - K(100)}{100} = \frac{129,6 - 117,2}{100} = 0,124$ euro per stuk.

- 78** Neem $2x$ voor x in de formule $A = 20x^{1,7}$.
 Je krijgt $A = 20(2x)^{1,7} = 20 \cdot 2^{1,7} \cdot x^{1,7} = 2^{1,7} \cdot 20x^{1,7} \approx 3,25 \cdot 20x^{1,7}$.
 Dus A wordt ongeveer 3,25 keer zo groot.

79 $\frac{5}{6}a^{-4}b^{\frac{2}{3}} = \frac{5b^{\frac{2}{3}}}{6a^4} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{b^2}}{6a^4}$

80 aantal = $\binom{16}{3} \cdot \binom{13}{2} = 43\,680$

81 a $y = 5 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} = 5 - 3x^{-2} + 2x^{-1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 6x^{-3} - 2x^{-2} = \frac{6}{x^3} - \frac{2}{x^2}$.

$\frac{dy}{dx} = 0$ geeft $\frac{6}{x^3} - \frac{2}{x^2} = 0$.

Voer in $y_1 = \frac{6}{x^3} - \frac{2}{x^2}$.

De optie nulpunt geeft $x = 3$.

$x = 3$ geeft $y = 5 - \frac{3}{3^2} + \frac{2}{3} = 5 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$, dus $A(3, 5\frac{1}{3})$.

b De snelheid is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = \frac{6}{1^3} - \frac{2}{1^2} = 6 - 2 = 4$.

82 a $g_{\text{dag}} = 1,086$, dus $g_{\text{week}} = 1,086^7 \approx 1,782$.
 De toename is 78,2% per week.

b $g_{\text{dag}} = 1,086$, dus $g_{10 \text{ uur}} = 1,086^{\frac{10}{24}} \approx 1,035$.
 Dus de toename is 3,5% per tien uur.

83 $N(x) = 84 + 43,2 \cdot \log(x)$, dus $N(2x) = 84 + 43,2 \cdot \log(2x)$.

$N(2x) = 84 + 43,2 \cdot (\log(2) + \log(x))$

$N(2x) = 84 + 43,2 \cdot \log(2) + 43,2 \cdot \log(x)$

$N(2x) = 84 + 43,2 \cdot \log(x) + 43,2 \cdot \log(2)$

$N(2x) \approx N(x) + 13,00$

Hiermee is aangetoond dat N steeds met 13 toeneemt als x verdubbelt.

84 $y = \frac{6\sqrt{x}}{2x \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{2x \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{4}{3}}} = 3x^{-\frac{5}{6}}$

Dus $y = 3x^{-\frac{5}{6}}$.

85 2 micrometer = $2 \cdot 10^{-3}$ mm = $2 \cdot 10^{-6}$ meter

De diameter van het virusdeeltje is $\frac{2 \cdot 10^{-6}}{50}$ m = $4 \cdot 10^{-8}$ m.

Bladzijde 243

86 a $y_{\text{max}} = 3 + 15 = 18$

periode = $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$

y_{max} voor $x = 0,1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 0,35$.

b $y_{\text{min}} = 3 - 15 = -12$

y_{min} voor $x = 0,1 + \frac{3}{4} \cdot 1 = 0,85$.

c Voer in $y_1 = 3 + 15 \sin(2\pi(x - 0,1))$.

De helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0,5} \approx -76,25$.

87 a $y = 5(x^2 - 4x)^{0,6}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3(x^2 - 4x)^{-0,4} \cdot (2x - 4)$.

b $y = 10\sqrt{3-x} = 10(3-x)^{0,5}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 5(3-x)^{-0,5} \cdot -1 = -\frac{5}{\sqrt{3-x}}$.

- 88 a** $g_{8 \text{ uur}} = 0,891$, dus $g_{50 \text{ uur}} = (0,891)^{\frac{50}{8}} \approx 0,486$.
De afname is 51,4% per 50 uur.
- b** $g_{8 \text{ uur}} = 0,891$, dus $g_{\text{uur}} = (0,891)^{\frac{1}{8}} \approx 0,986$.
De afname is 1,4% per uur.

89 $\frac{x^5}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{x^5}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^5}{x^{\frac{13}{4}}} = x^{\frac{7}{4}}$

90 Ze doet er $\frac{6,5}{14,6} = 0,445\dots$ uur = 26,71... minuten $\approx$ 26 minuten en 43 seconden over.

91 $N = -t^3 + 10t^2 + 3t$ geeft $\frac{dN}{dt} = -3t^2 + 20t + 3$.

Voer in $y_1 = -3x^2 + 20x + 3$.

De optie maximum geeft $x = 3,333\dots$ en $y = 36,333\dots$

Bij $t = 3,333\dots$ hoort 12:20 uur, dus om 12:20 uur was de toename van het aantal bezoekers het grootst.

92 a $y = 250e^{4x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 250e^{4x} \cdot 4 = 1000e^{4x}$.

b $P = 16e^{0,3q^2}$ geeft $\frac{dP}{dq} = 16e^{0,3q^2} \cdot 0,6q = 9,6qe^{0,3q^2}$.

c $y = 12 \cdot 3^{2x-4}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 12 \cdot 3^{2x-4} \cdot \ln(3) \cdot 2 = 24 \cdot \ln(3) \cdot 3^{2x-4}$.

93 In de formule h vervangen door $100H$ en m vervangen door $12j$ geeft

$$\begin{aligned} 100H &= 0,02 \cdot (12j)^3 + 0,4 \cdot (12j)^2 \\ 100H &= 0,02 \cdot 1728j^3 + 0,4 \cdot 144j^2 \\ 100H &= 34,56j^3 + 57,6j^2 \\ H &= 0,3456j^3 + 0,576j^2 \end{aligned}$$

Dus $H = 0,3456j^3 + 0,576j^2$.

94 $\left. \begin{aligned} M &= 25t^b \\ t &= 5 \text{ en } M = 70 \end{aligned} \right\} 25 \cdot 5^b = 70$

Voer in $y_1 = 25 \cdot 5^x$ en $y_2 = 70$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 0,64$, dus $b \approx 0,64$.

95 $N = 75 \cdot 2^{\log(t)} = 75 \cdot \frac{\log(t)}{\log(2)} = \frac{75}{\log(2)} \cdot \log(t) \approx 249 \cdot \log(t)$

Dus $N = 249 \cdot \log(t)$.

96 $N = b \cdot g^t$, met $g_{8 \text{ jaar}} = \frac{77}{326}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{77}{326}\right)^{\frac{1}{8}} = 0,8349\dots$

$$\left. \begin{aligned} N &= b \cdot 0,8349\dots^t \\ t &= 3 \text{ en } N = 326 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} b \cdot 0,8349\dots^3 &= 326 \\ b &= \frac{326}{0,8349\dots^3} \approx 560 \end{aligned}$$

Dus $N = 560 \cdot 0,835^t$.

97 $N = 4\sqrt{2a-3}$

$$\sqrt{2a-3} = \frac{1}{4}N$$

$$2a-3 = \left(\frac{1}{4}N\right)^2$$

$$2a = \frac{1}{16}N^2 + 3$$

$$a = \frac{1}{32}N^2 + 1\frac{1}{2}$$

Bladzijde 244

- 98** Voor prijs p in euro's en verkoop q in stuks geldt $p \cdot q = 0,80 \cdot 135 = 108$.

$$q = \frac{108}{p} \text{ met } p = 1,10 \text{ geeft } q \approx 98.$$

Dus hij verkoopt 98 meloenen.

99
$$N = 12 - \frac{150}{2S - 1}$$

$$N - 12 = -\frac{150}{2S - 1}$$

$$12 - N = \frac{150}{2S - 1}$$

$$2S - 1 = \frac{150}{12 - N}$$

$$2S = \frac{150}{12 - N} + 1$$

$$S = \frac{75}{12 - N} + \frac{1}{2}$$

- 100 a** Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

Bij $t = 2$ hoort $N = 20$ en bij $t = 8$ hoort $N = 500$.

$$g_{6 \text{ jaar}} = \frac{500}{20} = 25, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = 25^{\frac{1}{6}} = 1,7099...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,7099...^t \\ t = 2 \text{ en } N = 20 \end{array} \right\} b \cdot 1,7099...^2 = 20$$

$$b = \frac{20}{1,7099...^2} \approx 7$$

Dus $N = 7 \cdot 1,710^t$.

- b** Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

Bij $t = 3$ hoort $N = 800$ en bij $t = 7$ hoort $N = 60$.

$$g_{4 \text{ jaar}} = \frac{60}{800} = 0,075, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = 0,075^{\frac{1}{4}} = 0,5233...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,5233...^t \\ t = 3 \text{ en } N = 800 \end{array} \right\} b \cdot 0,5233...^3 = 800$$

$$b = \frac{800}{0,5233...^3} \approx 5580$$

Dus $N = 5580 \cdot 0,523^t$.

- 101 a** $y = 2x - 4\sqrt{x} = 2x - 4x^{0,5}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2 - 2x^{-0,5} = 2 - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

De snelheid is $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=4} = 2 - \frac{2}{\sqrt{4}} = 2 - 1 = 1$.

- b** $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1} = 2 - \frac{2}{\sqrt{1}} = 2 - 2 = 0$ en $x = 1$ geeft $y = 2 - 4 = -2$.

Dus de raaklijn in het punt $A(1, -2)$ is horizontaal.

102 aantal = $\binom{11}{1} \cdot \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 1\,663\,200$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{11!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 1\,663\,200$$

103 $A = 20 \cdot \sqrt[3]{30x} = 20 \cdot \sqrt[3]{30} \cdot \sqrt[3]{x} \approx 62,1 \cdot \sqrt[3]{x}$

Dus $A = 62,1 \cdot \sqrt[3]{x}$.

- 104 a** Rekenkundige rij met beginterm $u_0 = 980$ en $v = -17$, dus
 recursieve formule $u_n = u_{n-1} - 17$ met $u_0 = 980$
 en directe formule $u_n = 980 - 17n$.

b $u_n = 0$ geeft $980 - 17n = 0$

$$17n = 980$$

$$n \approx 57,6$$

$u_{57} = 11$ en $u_{58} = -6$, dus de rij heeft 58 positieve termen.

- 105 a** Als t heel groot wordt, dan nadert $0,96^t$ tot 0. Dan wordt $14 \cdot 0,96^t \approx 0$ en

$$3 + 14 \cdot 0,96^t \approx 3. \text{ Dus dan wordt } \frac{600}{3 + 14 \cdot 0,96^t} \approx \frac{600}{3} = 200, \text{ dus het}$$

verzadigingsniveau is 200.

- b** Als t heel groot wordt, dan nadert $0,81^t$ tot 0. Dan wordt $3 - 0,81^t \approx 3$, dus dan wordt
 $450(3 - 0,81^t) \approx 450 \cdot 3 = 1350$, dus het verzadigingsniveau is 1350.

- c** Als t heel groot wordt, dan nadert $\frac{30}{t+2}$ tot 0, dus dan wordt $50 - \frac{30}{t+2} \approx 50 - 0 = 50$,

dus het verzadigingsniveau is 50.

- 106** $N = 15 \cdot 1,15^{2t-1} = 15 \cdot 1,15^{2t} \cdot 1,15^{-1} = 15 \cdot 1,15^{-1} \cdot (1,15^2)^t = 15 \cdot 1,15^{-1} \cdot (e^{\ln(1,15^2)})^t \approx 13,0 \cdot (e^{0,280})^t$
 Dus $N = 13,0 \cdot e^{0,280t}$.

- 107** $y = 0,3x^4$
 $\downarrow$ verschuiving $(0,16; 2,2)$
 $y = 0,3(x - 0,16)^4 + 2,2$
 De top is $(0,16; 2,2)$.

- 108** $N = b \cdot g^t$ met $g_{8 \text{ dagen}} = \frac{161}{101}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{161}{101}\right)^{\frac{1}{8}} = 1,0600\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,0600\dots^t \\ t = 4 \text{ en } N = 101 \end{array} \right\} b \cdot 1,0600\dots^4 = 101$$

$$b = \frac{101}{1,0600\dots^4} \approx 79,996$$

$$\text{Dus } N = 80 \cdot 1,060^t.$$

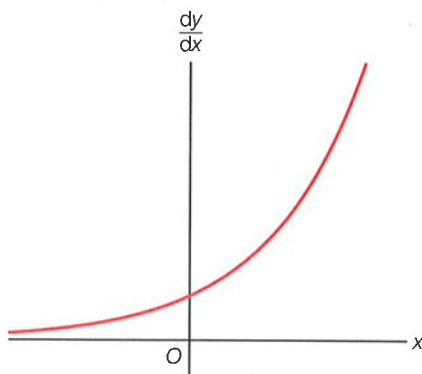
Bladzijde 245

- 109** $N = 40 + {}^3\log(2t) = 40 + \frac{\ln(2t)}{\ln(3)} = 40 + \frac{1}{\ln(3)} \cdot (\ln(2) + \ln(t)) = 40 + \frac{\ln(2)}{\ln(3)} + \frac{1}{\ln(3)} \cdot \ln(t) \approx 40,6 + 0,91 \ln(t)$

$$\text{Dus } N = 40,6 + 0,91 \cdot \ln(t).$$

- 110 a** $y = 0,5(1 + 2e^{0,6x})$ geeft $\frac{dy}{dx} = 0,5 \cdot 2e^{0,6x} \cdot 0,6 = 0,6e^{0,6x}$.

$$\text{Voer in } y_1 = 0,6e^{0,6x}.$$

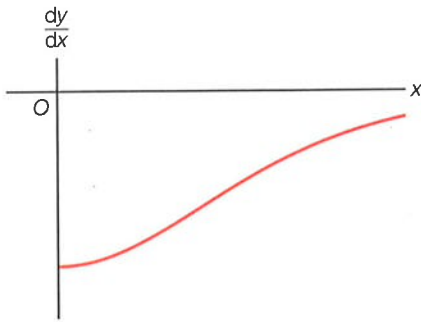


De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is toenemend stijgend.

$$\text{b } y = \frac{15}{1 + e^{0,2x}} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = \frac{(1 + e^{0,2x}) \cdot 0 - 15 \cdot e^{0,2x} \cdot 0,2}{(1 + e^{0,2x})^2} = \frac{-3 e^{0,2x}}{(1 + e^{0,2x})^2}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{-3 e^{0,2x}}{(1 + e^{0,2x})^2}.$$



De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel onder de x -as, dus de grafiek van y is dalend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is afnemend dalend.

$$111 \quad K = 16(p - 4)^2$$

$$(p - 4)^2 = \frac{1}{16}K$$

$$p - 4 = \sqrt{\frac{1}{16}K}$$

$$p = \frac{1}{4}\sqrt{K} + 4$$

$$112 \quad W = -0,2q^3 + 9q^2 - 250 \text{ geeft } \frac{dW}{dq} = -0,6q^2 + 18q.$$

Maximum, dus oplossen $-0,6q^2 + 18q = 0$

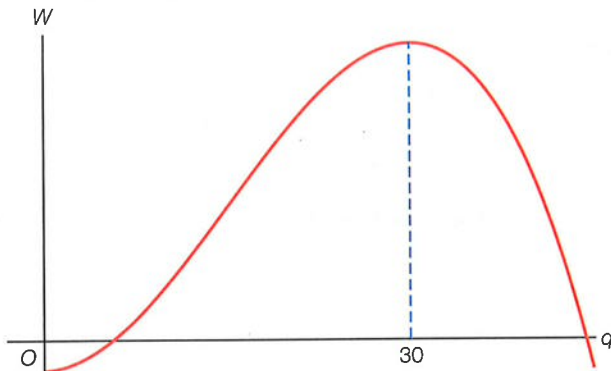
$$q(-0,6q + 18) = 0$$

$$q = 0 \text{ of } -0,6q + 18 = 0$$

$$q = 0 \text{ of } -0,6q = -18$$

$$q = 0 \text{ of } q = 30$$

Voer in $y_1 = -0,2x^3 + 9x^2 - 250$.



Uit de schets volgt dat W maximaal is voor $q = 30$.

$q = 30$ geeft $W = 2450$, dus de maximale winst is 2450 euro per week.

$$113 \quad N = 35 \cdot e^{0,15t-3}$$

$$\ln(N) = \ln(35 \cdot e^{0,15t-3})$$

$$\ln(N) = \ln(35) + \ln(e^{0,15t-3})$$

$$\ln(N) = \ln(35) + 0,15t - 3$$

$$\ln(N) \approx 0,15t + 0,56$$

$$\text{Dus } \ln(N) = 0,15t + 0,56.$$

- 114** Stel de hoogte van de goot is x cm, dan is de breedte van de goot $100 - 2x$ cm.
Voor de oppervlakte O geldt dan $O = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$.

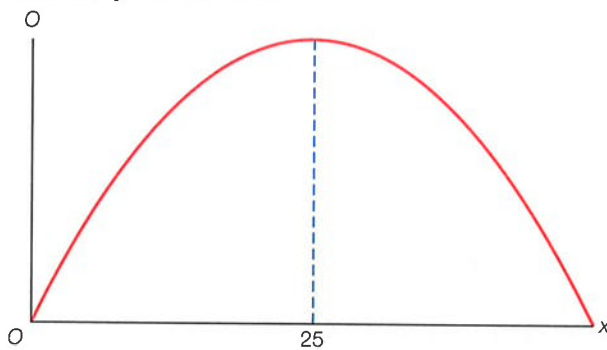
Hieruit volgt $\frac{dO}{dx} = 100 - 4x$.

Maximum, dus oplossen $100 - 4x = 0$

$$-4x = -100$$

$$x = 25$$

Voer in $y_1 = 100x - 2x^2$.



Uit de schets volgt dat O maximaal is voor $x = 25$.

$x = 25$ geeft $O = 1250$, dus de maximale oppervlakte is 1250 cm^2

115 $P = \frac{2a+1}{3a-1}$

$$P(3a-1) = 2a+1$$

$$3aP - P = 2a+1$$

$$3aP - 2a = P+1$$

$$a(3P-2) = P+1$$

$$a = \frac{P+1}{3P-2}$$

116 $y = 16 \cdot 3^{4-x} = 16 \cdot 3^4 \cdot 3^{-x} = 16 \cdot 81 \cdot (3^{-1})^x = 1296 \cdot (\frac{1}{3})^x$
Dus $y = 1296 \cdot (\frac{1}{3})^x$.

117 $N(k) = 12,5 + 4,55 \cdot \ln(k)$, dus $N(3k) = 12,5 + 4,55 \cdot \ln(3k)$.

$$N(3k) = 12,5 + 4,55 \cdot (\ln(3) + \ln(k))$$

$$N(3k) = 12,5 + 4,55 \cdot \ln(3) + 4,55 \cdot \ln(k)$$

$$N(3k) = 12,5 + 4,55 \cdot \ln(k) + 4,55 \cdot \ln(3)$$

$$N(3k) \approx N(k) + 5$$

Hiermee is aangetoond dat N steeds met 5 toeneemt als k drie keer zo groot wordt.

118 Er geldt $g^{5\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per jaar.

$$g^{5\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{ geeft } g = (\frac{1}{2})^{\frac{2}{5}} \approx 0,878.$$

De afname is 12,2% per jaar.

119 a Als t toeneemt, dan neemt $0,91^t$ af, dus ook $20 \cdot 0,91^t$ neemt af, dus ook $1 + 20 \cdot 0,91^t$ neemt af, dus neemt $\frac{1500}{1 + 20 \cdot 0,91^t}$ toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

b Als t toeneemt, dan neemt $0,98^t$ af, dus $1 - 0,98^t$ neemt toe, dus $20(1 - 0,98^t)$ neemt toe, dus $10 + 20(1 - 0,98^t)$ neemt toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

c Als t toeneemt, dan neemt $0,75^t$ af, dus dan neemt $3 - 0,75^t$ toe, dus $\frac{10}{3 - 0,75^t}$ neemt af, dus $25 - \frac{10}{3 - 0,75^t}$ neemt toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

Bladzijde 246

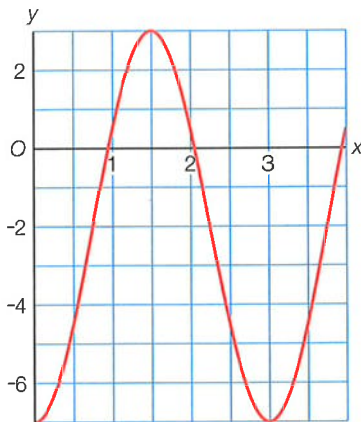
120 $y = -x^2 + 2x - 3$ geeft $\frac{dy}{dx} = -2x + 2$

Dus de helling van de grafiek in het punt A is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=-3} = -2 \cdot -3 + 2 = 8$.

121 $y = -\frac{1}{2}(x+4)^3 + 5$
 $\downarrow$ verschuiving $(6, 2)$
 $y = -\frac{1}{2}(x-2)^3 + 7$

122 $y = -2 + 5 \sin\left(\frac{2}{3}\pi(x - \frac{3}{4})\right)$
 evenwichtsstand -2
 amplitude 5
 periode $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$

stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{3}{4}$



123 $N = 25 \cdot 1,85^{t-2}$
 $1,85^{t-2} = 0,04N$
 $t - 2 = {}^{1,85}\log(0,04N)$
 $t = 2 + {}^{1,85}\log(0,04N)$

124 $A(n)$ is een rij bij een lineair verband met $A(0) = 750$ en $v = 12$, dus de directe formule is $A(n) = 750 + 12n$.

$B(n)$ is een rij bij een exponentieel verband met $B(0) = 100$ en $r = 1,2$, dus de directe formule is $B(n) = 100 \cdot 1,2^n$.

Voer in $y_1 = 750 + 12x$ en $y_2 = 100 \cdot 1,2^x$ en maak een tabel.

Uit de tabel volgt $A(12) = 894$ en $B(12) \approx 891,6$ en $A(13) = 906$ en $B(13) \approx 1069,9$.

Dus vanaf $n = 13$, dat is de 14^e term, is $B(n) > A(n)$.

125 $N = 110e^{2t} - 55t$ geeft $\frac{dN}{dt} = 110e^{2t} \cdot 2 - 55 = 220e^{2t} - 55$.

$t = 0$ geeft $\frac{dN}{dt} = 220 - 55 = 165$ en voor $t > 0$ is $220e^{2t} - 55 > 165$.

Dus voor $t \geq 0$ is $\frac{dN}{dt}$ positief en dus is de grafiek van N stijgend.

126 $5a^2 - \frac{3}{a^2} = \frac{5a^4}{a^2} - \frac{3}{a^2} = \frac{5a^4 - 3}{a^2}$

127 $g_{\text{jaar}} = 1,073$, dus los op $1,073^t = 2$.

Voer in $y_1 = 1,073^x$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x = 9,83\dots$

De verdubbelingstijd is ongeveer 9 jaar en $0,83\dots \cdot 12 \approx 10$ maanden.

128 $\log(N) = 2,36 + 1,5 \cdot \log(t)$
 $\log(N) = \log(10^{2,36}) + \log(t^{1,5})$
 $\log(N) = \log(10^{2,36} \cdot t^{1,5})$
 $N = 10^{2,36} \cdot t^{1,5}$
 $N \approx 229 \cdot t^{1,5}$
Dus $N = 229t^{1,5}$.

129 $2p + 3q = 60$
 $3q = -2p + 60$
 $q = -\frac{2}{3}p + 20$
 $K = 5p + 4q + 120$ $\left. \begin{array}{l} K = 5p + 4(-\frac{2}{3}p + 20) + 120 \\ K = 5p - 2\frac{2}{3}p + 80 + 120 \\ K = 2\frac{1}{3}p + 200 \end{array} \right\}$
Dus $K = 2\frac{1}{3}p + 200$.

130 $u_n = n^2 + 3n$ en $S_n = S_{n-1} + n^2 + 3n$ met $S_1 = 4$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $\sum_{k=1}^{15} (k^2 + 3k) = 1600$.

131 a $K = aq^{1,15}$
 $q = 60$ en $K = 499$ $\left. \begin{array}{l} a \cdot 60^{1,15} = 499, \text{ dus } a = \frac{499}{60^{1,15}} = 4,500... \\ q = 100 \text{ geeft } K = 4,5 \cdot 100^{1,15} \approx 898 \end{array} \right\}$
b $K = 4,5q^{1,15}$
 $4,5q^{1,15} = K$
 $q^{1,15} = \frac{1}{4,5} K$
 $q = (\frac{1}{4,5} K)^{\frac{1}{1,15}}$
 $q = (\frac{1}{4,5})^{\frac{1}{1,15}} \cdot K^{\frac{1}{1,15}}$
 $q \approx 0,27K^{0,87}$
Dus $q = 0,27K^{0,87}$.

132 66 63 4 keer
66 54 $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ keer
65 55 4 keer
Dus het aantal mogelijkheden is $4 + 12 + 4 = 20$.

133 $N = 4 \cdot e^{0,4t}$
 $e^{0,4t} = 0,25N$
 $0,4t = \ln(0,25N)$
 $t = 2,5 \cdot \ln(0,25N)$

Bladzijde 247

134 49 minuten en 40 seconden is $\frac{49\frac{2}{3}}{60}$ uur.

De gemiddelde snelheid is $\frac{9,8}{(\frac{49\frac{2}{3}}{60})} \approx 11,84$ km/uur.

135 Er geldt $g^3 = 2$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^3 = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{3}} \approx 1,260$
Het groeipcentage per jaar is 26,0%.

$$136 \quad a = \frac{2,5 + -0,5}{2} = 1$$

$$b = 2,5 - 1 = 1,5$$

$$\text{De periode} = 6,5 - 2,5 = 4, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi.$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 1,5$, dus $d = 1,5$.

$$\text{Dus } y = 1 + 1,5 \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 1,5)\right).$$

$$137 \quad \text{a Als } t \text{ heel groot wordt, dan nadert } \frac{40}{t} \text{ tot } 0. \text{ Dan wordt } \frac{40}{t} + 6 \approx 0 + 6 = 6.$$

Dus de grenswaarde is 6.

$$\text{b Als } t \text{ toeneemt, dan neemt } \frac{40}{t} \text{ af, dus } \frac{40}{t} + 6 \text{ neemt af.}$$

Dus de grafiek van N is dalend.

$$138 \quad 5 \cdot \log(N) = 1,215t + 13,7$$

$$\log(N) = 0,243t + 2,74$$

$$N = 10^{0,243t + 2,74}$$

$$N = 10^{2,74} \cdot (10^{0,243})^t$$

$$N \approx 550 \cdot 1,75^t$$

$$\text{Dus } N = 550 \cdot 1,75^t.$$

$$139 \quad T = \frac{t^2 - 2}{t} + \frac{10}{\left(\frac{3}{t}\right)} + \frac{7}{2t} = t - \frac{2}{t} + \frac{10t}{3} + \frac{7}{2t} = t + 3\frac{1}{3}t - \frac{4}{2t} + \frac{7}{2t} = 4\frac{1}{3}t + \frac{3}{2t}$$

$$\text{Dus } T = 4\frac{1}{3}t + \frac{3}{2t}.$$

$$140 \quad \text{a Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.}$$

De tabel geeft $u(10) = 516$.

$$\text{b De tabel geeft } u(17) = 65\,540 \text{ en } u(18) = 131\,076, \text{ dus vanaf } n = 18 \text{ is } u(n) \text{ meer dan } 100\,000.$$

$$141 \quad 2p - 5q = 40$$

$$-5q = -2p + 40$$

$$\left. \begin{array}{l} q = \frac{2}{5}p - 8 \\ F = 3pq + 40 \end{array} \right\} \begin{array}{l} F = 3p\left(\frac{2}{5}p - 8\right) + 40 \\ F = 1\frac{1}{5}p^2 - 24p + 40 \end{array}$$

$$\text{Dus } a = 1\frac{1}{5}, b = -24 \text{ en } c = 40.$$

Bladzijde 248

$$142 \quad \text{a } y = \ln(3x - 7) \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x - 7} \cdot 3 = \frac{3}{3x - 7}.$$

$$\text{b } y = 2x - 4 \cdot \ln(x^2 + 2x) \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{4}{x^2 + 2x} \cdot (2x + 2) = 2 - \frac{8x + 8}{x^2 + 2x}.$$

$$\text{c } y = 2x - 3\log(4x) \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{1}{4x \ln(3)} \cdot 4 = 2 - \frac{1}{x \ln(3)}.$$

$$143 \quad \frac{7}{2x} - \frac{5}{3x} = \frac{21}{6x} - \frac{10}{6x} = \frac{11}{6x}$$

$$144 \quad P = \log(2x - 500) - 3$$

$$\log(2x - 500) = P + 3$$

$$2x - 500 = 10^{P+3}$$

$$2x = 500 + 10^3 \cdot 10^P$$

$$x = 250 + 500 \cdot 10^P$$

$$\text{Dus } a = 250 \text{ en } b = 500.$$

145 $P = n \cdot \ln(2n+1)$ geeft $\frac{dP}{dn} = 1 \cdot \ln(2n+1) + n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot 2 = \ln(2n+1) + \frac{2n}{2n+1}$

Voor $n > 0$ is $\ln(2n+1) > 0$ en $\frac{2n}{2n+1} > 0$, dus voor $n > 0$ is $\frac{dP}{dn} > 0$.

De grafiek van P is dus stijgend voor $n > 0$.

146 aantal = $\binom{9}{2} \cdot \binom{6}{3} = 105$

Alternatieve uitwerking

aantal = $\frac{7!}{2! \cdot 4!} = 105$

147 $N = 25 \cdot 1,85^{t-2} = 25 \cdot 1,85^t \cdot 1,85^{-2} = 25 \cdot 1,85^{-2} \cdot 1,85^t \approx 7,3 \cdot 1,85^t$
Dus $N = 7,3 \cdot 1,85^t$.

148 a $y = \frac{-5}{2x+4}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(2x+4) \cdot 0 - (-5) \cdot 2}{(2x+4)^2} = \frac{10}{(2x+4)^2}$.

Omdat de teller positief is en de noemer voor $x \geq 0$ positief, is $\frac{10}{(2x+4)^2}$ positief.

Dus de grafiek van y is stijgend.

Als x toeneemt, dan neemt $2x+4$ toe en dan neemt $(2x+4)^2$ toe voor $x \geq 0$.

Dus dan neemt $\frac{10}{(2x+4)^2}$ af.

De grafiek van y is dus afnemend stijgend.

b $y = 7,5 - 1,15^x$ geeft $\frac{dy}{dx} = -1,15^x \cdot \ln(1,15) \approx -0,14 \cdot 1,15^x$.

Omdat $1,15^x$ positief is voor alle x , is $-0,14 \cdot 1,15^x$ negatief.

Dus de grafiek van y is dalend.

Als x toeneemt, dan neemt $1,15^x$ toe. Dus dan neemt $-0,14 \cdot 1,15^x$ af.

Dus de grafiek van y is toenemend dalend.

149 a $N_{\max} = 500 + 150 = 650$

periode = $\frac{2\pi}{0,01\pi} = 200$

$N_{\max}$ voor $t = 0 + \frac{1}{4} \cdot 200 = 50$

b $N_{\min} = 500 - 150 = 350$

$N_{\min}$ voor $t = 0 + \frac{3}{4} \cdot 200 = 150$

c Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 0$.

Voer in $y_1 = 500 + 150 \sin(0,01\pi x)$.

De maximale helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} \approx 4,71$.

150 rr met beginterm $u(0) = 150$ en $v = 6$, dus $u(n) = 150 + 6n$ en

$S(n) = S(n-1) + 150 + 6n$ met $S(0) = 150$.

Voer zowel de rij $u(n)$ als de somrij in op het rijen-invoerscherm.

De tabel geeft $\sum_{k=0}^{19} (150 + 6k) = 4140$.