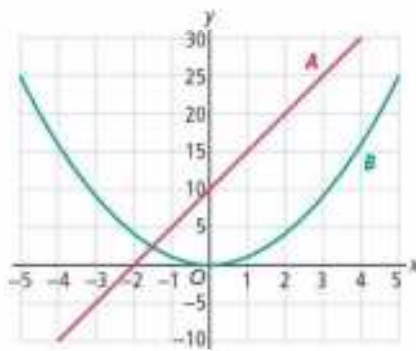


1 Lineaire en exponentiële functies

Voorkennis

V1 a



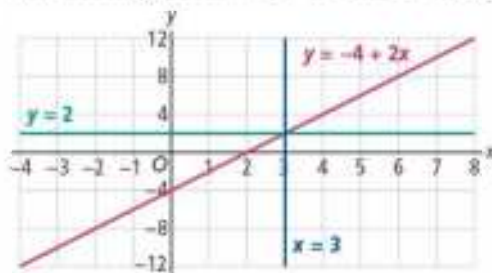
- b De grafiek bij tabel A is een rechte lijn, want telkens als x in de tabel met 1 toeneemt, dan neemt y met 5 toe.
 c Het startgetal is 10 en het hellingsgetal is 5.
 d Een formule bij die tabel is $y = 5x + 10$.
 e Bij de andere tabel hoort een kwadratisch verband.

V2 a

x	-4	-2	0	2	4	6	8
y	-12	-8	-4	0	4	8	12

- b Het hellingsgetal is $4 : 2 = 2$ en het startgetal is -4 .

c



- d Invullen van $x = 15$ geeft $y = -4 + 2 \times 15 = 26$.
 Nee, het punt $(15, 34)$ ligt niet op de grafiek.
 e Zie de tekening bij opdracht V2c.
 f Bij de formule $y = 2$ loopt de grafiek horizontaal.

V3 a

$$2q - 8p = 24$$

$$2q = 8p + 24$$

$$q = 4p + 12$$

b $4q + 6p = 18$

$$4q = -6p + 18$$

$$q = -1\frac{1}{2}p + 4\frac{1}{2}$$

c $2p - 8q = 20$

$$-8q = -2p + 20$$

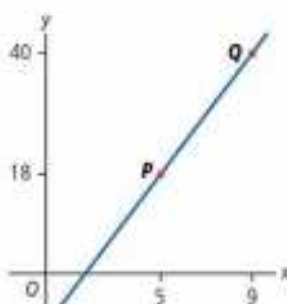
$$q = \frac{1}{4}p - 2\frac{1}{2}$$

d $-12p - 6q = 30$

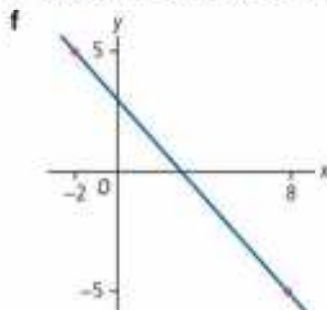
$$-6q = 12p + 30$$

$$q = -2p - 5$$

V4 a



- b De toename van de x -coördinaat is $9 - 5 = 4$.
De toename van de y -coördinaat is $40 - 18 = 22$.
Het hellingsgetal van de lijn PQ is $22 : 4 = 5\frac{1}{2}$.
- c $y = 5\frac{1}{2}x + b$
- d Invullen van $x = 5$ en $y = 18$ geeft $18 = 5\frac{1}{2} \times 5 + b$, oftewel $18 = 27\frac{1}{2} + b$,
dus $b = -9\frac{1}{2}$.
- e De formule bij de lijn is $y = 5\frac{1}{2}x - 9\frac{1}{2}$.



De toename van de x -coördinaat is $8 - (-2) = 10$.
De toename van de y -coördinaat is $-5 - 5 = -10$.
Het hellingsgetal van de lijn is $-10 : 10 = -1$.
Invullen van het hellingsgetal geeft de formule $y = -x + b$.
Invullen van $x = -2$ en $y = 5$ geeft $5 = -(-2) + b$, oftewel $5 = 2 + b$, dus
 $b = 3$. De formule bij de lijn is $y = -x + 3$.

- V5 a $-3x + 12 = 9x$
 $12 = 12x$
 $x = 1$
- c $28x - 12 = 12 - 8x$
 $36x - 12 = 12$
 $36x = 24$
 $x = \frac{2}{3}$
- b $\frac{1}{2}x - 7 = x + 8$
 $-7 = \frac{1}{2}x + 8$
 $\frac{1}{2}x = -15$
 $x = -30$
- d $6 - 1,2x = 0,3x - 9$
 $6 = 1,5x - 9$
 $1,5x = 15$
 $x = 10$

- V6 a De groeifactor in het voorbeeld is 0,6.
b Het gaat om een afname, want de groeifactor zit tussen 0 en 1.
c Bij de tabel hoort geen lineaire groei, want als de tijd met 1 toeneemt, dan neemt het aantal met -80 , -48 en $-28,8$ toe.

- V7 a De groeifactor is $2,6 : 1,3 = 5,2 : 2,6 = 2$.
- | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|------|------|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| h | 1,3 | 2,6 | 5,2 | 10,4 | 20,8 |
- b De groeifactor is $40 : 160 = 10 : 40 = 0,25$.
- | | | | | | |
|-----|-----|----|----|-----|-------|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| h | 160 | 40 | 10 | 2,5 | 0,625 |
- c De groeifactor is $1100 : 1000 = 1210 : 1100 = 1,1$.
- | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|--------|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| h | 1000 | 1100 | 1210 | 1331 | 1464,1 |
- d De groeifactor is $32 : 40 = 0,8$.
- | | | | | | |
|-----|----|----|----|------|-------|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| h | 50 | 40 | 32 | 25,6 | 20,48 |

1 Lineaire en exponentiële functies

1.1 Functies

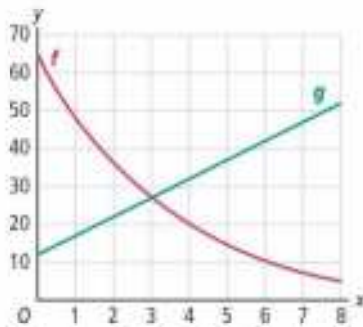
intro Bij grafiek 1 hoort formule A $y = 2x$, bij grafiek 2 hoort formule H $y = -x^2 + 5x$ en bij grafiek 3 hoort formule D $y = 5$.

- 1
 - a $T = 20 - 0,006 \times 1200 = 20 - 7,2 = 12,8 \text{ } ^\circ\text{C}$
 - b Sven berekent de temperatuur voor een hoogte van 1500 meter.
 - c $T(1200) = 20 - 0,006 \times 1200 = 12,8$
 - d $T(1100) = 20 - 0,006 \times 1100 = 13,4$
De temperatuur op 1100 meter hoogte is $13,4 \text{ } ^\circ\text{C}$.
 $T(4500) = 20 - 0,006 \times 4500 = -7$
De temperatuur op 4,5 km hoogte is $-7 \text{ } ^\circ\text{C}$.
- 2
 - a Het functievoorschrift bij deze formule is $v(t) = -3t + 7$.
 - b De variabele v is bij deze functie de afhankelijke variabele. En de variabele t is de onafhankelijke variabele.
 - c $v(3) = -3 \times 3 + 7 = -2$
 - d $v(-1) = -3 \times -1 + 7 = 10$ en $v(0) = -3 \times 0 + 7 = 7$
 - e Bij $t = 6$ hoort de functiewaarde -11 , want $v(6) = -3 \times 6 + 7 = -11$.
- 3
 - a $L(3) = 3 \times 3 + 16 = 25$ en $L(10) = 3 \times 10 + 16 = 46$
 - b Als aan de veer een massa van 3 kg hangt, dan heeft de veer een lengte van 25 cm. En als aan de veer een massa van 10 kg hangt, dan heeft de veer een lengte van 46 cm.
 - c $L(m) = 3m + 16$
 $31 = 3m + 16$
 $3m = 15$
 $m = 5$
 - d $3m + 16 = 17,5$
 $3m = 1,5$
 $m = 0,5$
- 4
 - a $f(10) = \frac{1}{2} \times 10 - 3 = 2$ en $g(8) = -8^2 + 1 = -63$
 - b $\frac{1}{2}x - 3 = -1$
 $\frac{1}{2}x = 2$
 $x = 4$
 - c $\frac{1}{2}x - 3 = 44$
 $\frac{1}{2}x = 47$
 $x = 94$
 - d $g(x) = -3$ als $x = -2$ of $x = 2$
 - e Voor alle punten op de horizontale lijn geldt $y = 1$, dus voor iedere waarde van x geldt $h(x) = 1$.
- 5
 - a $k(0) = 2$, $l(2) = -1$ en $m(-2) = -1$
 - b Functie k is een kwadratische functie.
 - c $k(x) = 0$ als $x = -2$ of $x = 2$
 - d Het hellingsgetal is $-\frac{1}{2}$ en het startgetal is 0.
Het functievoorschrift is $l(x) = -\frac{1}{2}x$.
 - e Het functievoorschrift is $m(x) = -1$.

6 a $f(2) = 64 \times 0,75^2 = 64 \times 0,5625 = 36$

b	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	$f(x)$	64	48	36	27	20,25	15,19	11,39	8,54	6,41

c d



e Het punt (3, 27) is het snijpunt van de grafieken.

7 a $k(2) = 16 \times 0,5^2 = 16 \times 0,25 = 4$ en $l(2) = -1,5 \times 2 + 7 = -3 + 7 = 4$

b De antwoorden kloppen met de grafiek.

c $k(4) = 16 \times 0,5^4 = 16 \times 0,0625 = 1$ en $l(4) = -1,5 \times 4 + 7 = -6 + 7 = 1$
Ja, dat is inderdaad het geval.

04 a $f(3) = 2 \times 3 - 5 = 1$, dus de functiewaarde van f bij $x = 3$ is 1.

b $f(1) = 2 \times 1 - 5 = -3$ en $g(1) = 1^2 - 5 = -4$

c $2x - 5 = 13$

$$2x = 18$$

$$x = 9$$

d $x^2 - 5 = 31$

e $x^2 = 36$

$$x = 6 \text{ of } x = -6$$

f $f(10) = 2 \times 10 - 5 = 15$

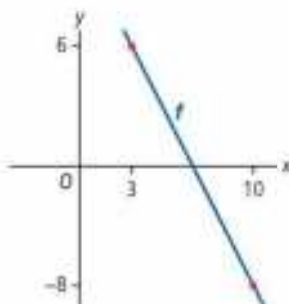
$$2x - 5 = 10$$

$$2x = 15$$

$$x = 7\frac{1}{2}$$

g Het functievoorschrift van h is $h(x) = 2$.

U1 a



De toename van de x -coördinaat is $10 - 3 = 7$.

De toename van de y -coördinaat is $-8 - 6 = -14$.

Het hellingsgetal van de lineaire functie f is $-14 : 7 = -2$.

Invullen van het hellingsgetal geeft het functievoorschrift $f(x) = -2x + b$.

Invullen van $x = 3$ en $y = 6$ geeft $6 = -2 \times 3 + b$, oftewel $6 = -6 + b$, dus

$b = 12$. Het functievoorschrift van f is $f(x) = -2x + 12$.

1 Lineaire en exponentiële functies

- b Van de kwadratische functie g is gegeven dat $g(0) = 8$ en $g(5) = 8$, dus de symmetrieas ligt bij $x = 2\frac{1}{2}$.
Invullen van $x = 2\frac{1}{2}$ geeft $k(2\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2} + 4 = 6\frac{1}{2}$.
De coördinaten van de top van de parabool zijn $(2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$.

U2 a $-6 \times 3 + b = 0$
 $-18 + b = 0$
 $b = 18$
 b $-6 \times b + b = 20$
 $-5b = 20$
 $b = -4$

c $-6 \times 5 + b = 5b$
 $-30 + b = 5b$
 $-30 = 4b$
 $b = -7\frac{1}{2}$

1.2 Lineaire functies

Intro $f(23) = 5 \times 23 + 45 = 160$ en $g(23) = 7 \times 23 - 12 = 149$

Bij $x = 23$ ligt de grafiek van f nog steeds boven de grafiek van g , dus het snijpunt ligt rechts van $x = 23$.

Of:

$$5x + 45 = 7x - 12$$

$$45 = 2x - 12$$

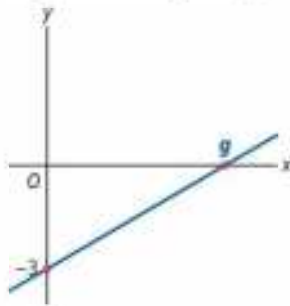
$$2x = 57$$

$$x = 28\frac{1}{2}$$

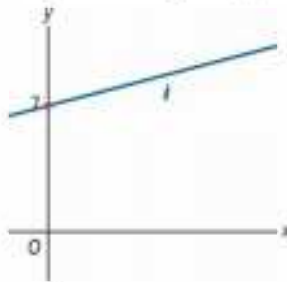
Het snijpunt ligt bij $x = 28\frac{1}{2}$ en dat ligt rechts van de lijn $x = 23$.

- 8 a Het hellingsgetal van de grafiek is -2 .
 b Je leest het hellingsgetal uit de grafiek af, want als x met 1 toeneemt, dan neemt y met -2 toe.
 c Invullen van $x = -2$ geeft $f(-2) = 6 - 2 \times -2 = 10$.
 Nee, het punt $(-2, 11)$ ligt niet op de grafiek van f .
 d De grafiek van g gaat bijvoorbeeld door de punten $(3, 0)$ en $(7, 6)$.
 De toename van de x -coördinaat is $7 - 3 = 4$.
 De toename van de y -coördinaat is $6 - 0 = 6$.
 Het hellingsgetal van de lineaire functie g is $6 : 4 = 1\frac{1}{2}$.
 Invullen van het hellingsgetal geeft het functievoorschrift $g(x) = 1\frac{1}{2}x + b$.
 Invullen van $x = 3$ en $y = 0$ geeft $0 = 1\frac{1}{2} \times 3 + b$, oftewel $0 = 4\frac{1}{2} + b$, dus $b = -4\frac{1}{2}$. Het functievoorschrift van g is $g(x) = 1\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}$.
 e Het functievoorschrift van h is $h(x) = -2x + b$.
 Invullen van $x = 3$ en $y = 9$ geeft $9 = -2 \times 3 + b$, oftewel $9 = -6 + b$, dus $b = 15$. Het functievoorschrift van h is $h(x) = -2x + 15$.
- 9 a De grafiek van k gaat door het punt $(0, 1)$, dus het startgetal is 1.
 Het hellingsgetal is $3 : 2 = 1\frac{1}{2}$, dus het functievoorschrift is $k(x) = 1\frac{1}{2}x + 1$.
 b De grafiek van l gaat door het punt $(0, 3)$, dus het startgetal is 3.
 Het hellingsgetal is $-3 : 6 = -\frac{1}{2}$, dus het functievoorschrift is $l(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.
 De grafiek van m gaat door het punt $(0, 1)$, dus het startgetal is 1.
 Het hellingsgetal is $2 : 4 = \frac{1}{2}$, dus het functievoorschrift is $m(x) = \frac{1}{2}x + 1$.
 De grafiek van n gaat door het punt $(0, 2)$, dus het startgetal is 2.
 Het hellingsgetal is $-2 : 4 = -\frac{1}{2}$, dus het functievoorschrift is $n(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.
 c Invullen van $x = 1$ geeft $m(1) = \frac{1}{2} \times 1 + 1 = 1\frac{1}{2}$ en $n(1) = -\frac{1}{2} \times 1 + 2 = 1\frac{1}{2}$, dus het punt $(1, 1\frac{1}{2})$ ligt zowel op de grafiek van m als op de grafiek van n .

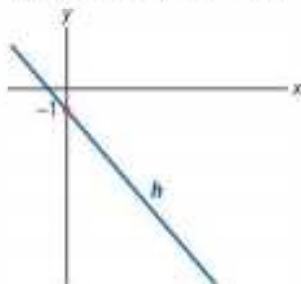
- 10 a** De richtingscoëfficiënt is $\frac{1}{2}$. De grafiek is een stijgende lijn die de y -as in het punt $(0, -3)$ snijdt.



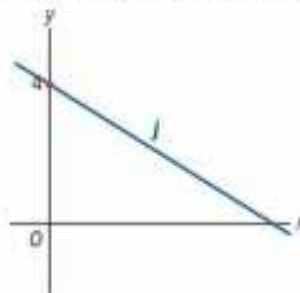
- c** De richtingscoëfficiënt is 0,4. De grafiek is een stijgende lijn die de y -as in het punt $(0, 7)$ snijdt.



- b** De richtingscoëfficiënt is -3 . De grafiek is een dalende lijn die de y -as in het punt $(0, -1)$ snijdt.



- d** De richtingscoëfficiënt is $-\frac{1}{2}$. De grafiek is een dalende lijn die de y -as in het punt $(0, 4)$ snijdt.



- 11 a** $k(2) = 6 \times 2 + 5 = 17$ en $l(2) = 2 \times 2 - 7 = -3$
b Nee, $k(-4)$ en $l(-4)$ zijn niet gelijk, want $k(-4) = 6 \times -4 + 5 = -19$ en $l(-4) = 2 \times -4 - 7 = -15$.
c $6x + 5 = 2x - 7$
 $4x + 5 = -7$
 $4x = -12$
 $x = -3$

- 12 a** Het startgetal is -8 en de richtingscoëfficiënt is 4 .
 Het functievoorschrift bij de grafiek van f is $f(x) = 4x - 8$.
b Het startgetal is 7 en de richtingscoëfficiënt is -2 , dus bij de functie g hoort het functievoorschrift $g(x) = -2x + 7$, oftewel $g(x) = 7 - 2x$.
c $4x - 8 = 7 - 2x$
 $6x - 8 = 7$
 $6x = 15$
 $x = 2\frac{1}{2}$
d Invullen van $x = 2\frac{1}{2}$ geeft $f(2\frac{1}{2}) = 4 \times 2\frac{1}{2} - 8 = 2$.
e Invullen van $x = 2\frac{1}{2}$ geeft $g(2\frac{1}{2}) = 7 - 2 \times 2\frac{1}{2} = 2$.
f Je weet nu zeker dat je de coördinaten van het snijpunt gevonden hebt, omdat de y -coördinaten bij de functies f en g gelijk zijn.

1 Lineaire en exponentiële functies

13 a $-x = 7x + 16$

$$0 = 8x + 16$$

$$8x = -16$$

$$x = -2$$

Invullen geeft $f(-2) = -(-2) = 2$

en $g(-2) = 7 \times -2 + 16 = 2$.

De coördinaten van het snijpunt zijn $(-2, 2)$.

b $3x - 1 = -x + 7$

$$4x - 1 = 7$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

Invullen geeft $h(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$

en $i(2) = -2 + 7 = 5$.

De coördinaten van het snijpunt zijn $(2, 5)$.

c $3x + 3 = x - 3$

$$2x + 3 = -3$$

$$2x = -6$$

$$x = -3$$

Invullen geeft $j(-3) = 3 \times -3 + 3 = -6$

en $k(-3) = -3 - 3 = -6$.

De coördinaten van het snijpunt zijn $(-3, -6)$.

d $-\frac{1}{2}x + 7 = -4x - 7$

$$3\frac{1}{2}x + 7 = -7$$

$$3\frac{1}{2}x = -14$$

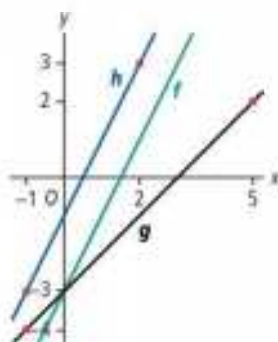
$$x = -4$$

Invullen geeft $l(-4) = -\frac{1}{2} \times -4 + 7 = 9$

en $m(-4) = -4 \times -4 - 7 = 9$.

De coördinaten van het snijpunt zijn $(-4, 9)$.

14 a



b De richtingscoëfficiënt van de lineaire functie g is $6 : 6 = 1$.

Invullen van de richtingscoëfficiënt geeft het functievoorschrift $g(x) = x + b$.

Invullen van $x = -1$ en $y = -4$ geeft $-4 = -1 + b$, dus $b = -3$.

Het functievoorschrift van g is $g(x) = x - 3$.

$$2x - 3 = x - 3$$

$$x - 3 = -3$$

$$x = 0$$

Invullen geeft $f(0) = 2 \times 0 - 3 = -3$ en $g(0) = 0 - 3 = -3$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g zijn $(0, -3)$.

c Zie opdracht 14a.

d De richtingscoëfficiënt van de lineaire functie h is $6 : 3 = 2$.

Invullen van de richtingscoëfficiënt geeft het functievoorschrift $h(x) = 2x + b$.

Invullen van $x = -1$ en $y = -3$ geeft $-3 = 2 \times -1 + b$, oftewel $-3 = -2 + b$, dus

$b = -1$. Het functievoorschrift van h is $h(x) = 2x - 1$.

$$2x - 3 = 2x - 1$$

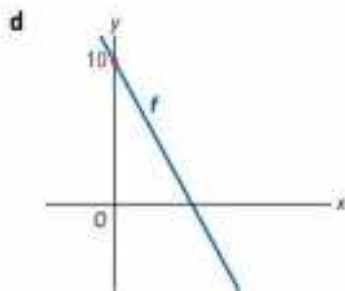
$$-3 = -1$$

Dit kan niet, dus de grafieken bij de functies f en h hebben geen snijpunt.

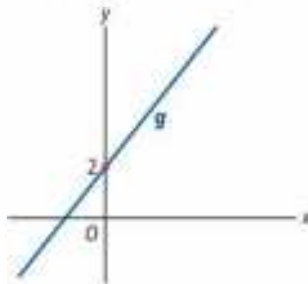
010 a De richtingscoëfficiënt van f is -5 .

b Deze richtingscoëfficiënt is negatief, dus de grafiek van f is dalend.

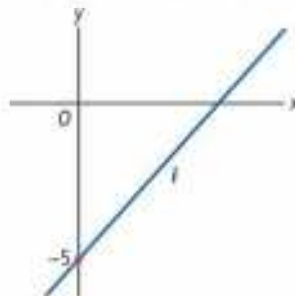
c Het startgetal is 10. De grafiek van f snijdt de y -as in het punt $(0, 10)$.



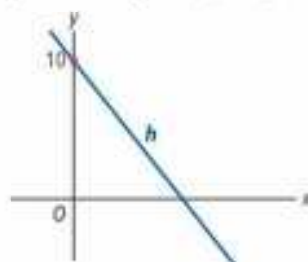
- e** De richtingscoëfficiënt is 3. De grafiek is een stijgende lijn die de y -as in het punt $(0, 2)$ snijdt.



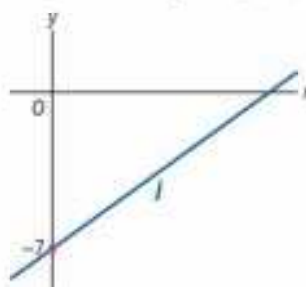
- g** De richtingscoëfficiënt is 1,2. De grafiek is een stijgende lijn die de y -as in het punt $(0, -5)$ snijdt.



- f** De richtingscoëfficiënt is -2 . De grafiek is een dalende lijn die de y -as in het punt $(0, 10)$ snijdt.



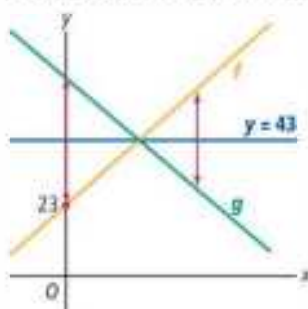
- h** De richtingscoëfficiënt is $\frac{1}{2}$. De grafiek is een stijgende lijn die de y -as in het punt $(0, -7)$ snijdt.



013 a $3x + 12 = -x - 4$
 $4x + 12 = -4$
 $4x = -16$
 $x = -4$

- b** Invullen geeft $f(-4) = 3 \times -4 + 12 = 0$.
c Invullen geeft $g(-4) = -(-4) - 4 = 0$. Ja, je krijgt hetzelfde antwoord.
d De coördinaten van het snijpunt zijn $(-4, 0)$.

U3 Eerst een schets maken van de grafieken.



De richtingscoëfficiënt van f is 4, dus de richtingscoëfficiënt van g is -4 . Het startgetal van f is 23. Het startgetal van g moet dan 63 zijn, want $(63 + 23) : 2 = 43$. Dus $p = -4$ en $q = 63$.

1 Lineaire en exponentiële functies

c Eerst herleiden.

$$2y + x = 40 \quad 2y - 6x = 12$$

$$2y = -x + 40 \quad 2y = 6x + 12$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 20 \quad y = 3x + 6$$

Dan gelijkstellen.

$$-\frac{1}{2}x + 20 = 3x + 6$$

$$20 = 3\frac{1}{2}x + 6$$

$$3\frac{1}{2}x = 14$$

$$x = 4$$

Invullen geeft $y = -\frac{1}{2} \times 4 + 20 = 18$.

De oplossing van het stelsel is $x = 4$ en $y = 18$.

d Eerst herleiden.

$$2y + x = 0 \quad 3y + 15 = x$$

$$2y = -x \quad 3y = x - 15$$

$$y = -\frac{1}{2}x \quad y = \frac{1}{3}x - 5$$

Dan gelijkstellen.

$$-\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}x - 5$$

$$-\frac{3}{6}x = \frac{2}{6}x - 5$$

$$0 = \frac{5}{6}x - 5$$

$$\frac{5}{6}x = 5$$

$$x = 6$$

Invullen geeft $y = -\frac{1}{2} \times 6 = -3$.

De oplossing van het stelsel is $x = 6$ en $y = -3$.

19 a $4(x - 1) + x = 16$

$$4x - 4 + x = 16$$

$$5x - 4 = 16$$

$$5x = 20$$

$$x = 4$$

b $y = 4 - 1 = 3$

c A $5(2 - 2x) + 2x = 14$

$$10 - 10x + 2x = 14$$

$$10 - 8x = 14$$

$$8x = -4$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$y = 2 - 2 \times -\frac{1}{2} = 3$$

B $3(2x - 7) - 2x + 5 = 0$

$$6x - 21 - 2x + 5 = 0$$

$$4x - 16 = 0$$

$$4x = 16$$

$$x = 4$$

$$y = 2 \times 4 - 7 = 1$$

C $4x - 3(4x + 5) = 3$

$$4x - 12x - 15 = 3$$

$$-8x - 15 = 3$$

$$-8x = 18$$

$$x = -2\frac{1}{4}$$

$$y = 4 \times -2\frac{1}{4} + 5 = -4$$

D $5x + 7(-x + 4) = 32$

$$5x - 7x + 28 = 32$$

$$-2x + 28 = 32$$

$$-2x = 4$$

$$x = -2$$

$$y = - -2 + 4 = 6$$

016 a $4x + 2y = 7$

$$2y = -4x + 7$$

$$y = -2x + 3\frac{1}{2}$$

b Het functievoorschrift van f is $f(x) = -2x + 3\frac{1}{2}$.

c $2x + y = 17$

$$y = -2x + 17$$

Het functievoorschrift is

$$f(x) = -2x + 17.$$

De richtingscoëfficiënt is -2 en het startgetal is 17 .

d $3x = 18 - 2y$

$$3x - 18 = -2y$$

$$y = -1\frac{1}{2}x + 9$$

Het functievoorschrift is

$$f(x) = -1\frac{1}{2}x + 9.$$

De richtingscoëfficiënt is $-1\frac{1}{2}$ en het startgetal is 9 .

e $42 - 3y = 12x$

$$-3y = 12x - 42$$

$$y = -4x + 14$$

Het functievoorschrift is $f(x) = -4x + 14$.

De richtingscoëfficiënt is -4 en het startgetal is 14 .

f $5x = 20 - 10y$

$$5x - 20 = -10y$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

Het functievoorschrift is

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2.$$

De richtingscoëfficiënt is $-\frac{1}{2}$ en het startgetal is 2 .

g $4y - x = 16$

$$4y = x + 16$$

$$y = \frac{1}{4}x + 4$$

Het functievoorschrift is

$$f(x) = \frac{1}{4}x + 4.$$

De richtingscoëfficiënt is $\frac{1}{4}$ en het startgetal is 4.

h $0,5y + 25 = x$

$$0,5y = x - 25$$

$$y = 2x - 50$$

Het functievoorschrift is

$$f(x) = 2x - 50.$$

De richtingscoëfficiënt is 2 en het startgetal is -50.

18 a $3x - 4y = 32$

$$-4y = -3x + 32$$

$$y = \frac{3}{4}x - 8$$

b $-4x + 1\frac{1}{2} = \frac{3}{4}x - 8$

c $1\frac{1}{2} = 4\frac{3}{4}x - 8$

$$4\frac{3}{4}x = 9\frac{1}{2}$$

$$x = 2$$

d $y = -4 \times 2 + 1\frac{1}{2} = -6\frac{1}{2}$

e Eerst herleiden.

$$y = 2x - 6 \quad x + 4y = 12$$

$$4y = -x + 12$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 3$$

Dan gelijkstellen.

$$2x - 6 = -\frac{1}{4}x + 3$$

$$2\frac{1}{4}x - 6 = 3$$

$$2\frac{1}{4}x = 9$$

$$x = 4$$

Invullen geeft $y = 2 \times 4 - 6 = 2$.

De oplossing van het stelsel is

$x = 4$ en $y = 2$.

g Eerst herleiden.

$$-4x + 3y = 12 \quad x + y = 18$$

$$3y = 4x + 12 \quad y = -x + 18$$

$$y = 1\frac{1}{3}x + 4$$

Dan gelijkstellen.

$$1\frac{1}{3}x + 4 = -x + 18$$

$$2\frac{1}{3}x + 4 = 18$$

$$2\frac{1}{3}x = 14$$

$$x = 6$$

Invullen geeft $y = 1\frac{1}{3} \times 6 + 4 = 12$.

De oplossing van het stelsel is

$x = 6$ en $y = 12$.

f Eerst herleiden.

$$2,5x + 5y = 5 \quad x = y + 11$$

$$5y = -2,5x + 5 \quad y = x - 11$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

Dan gelijkstellen.

$$-\frac{1}{2}x + 1 = x - 11$$

$$1 = 1\frac{1}{2}x - 11$$

$$1\frac{1}{2}x = 12$$

$$x = 8$$

Invullen geeft $y = -\frac{1}{2} \times 8 + 1 = -3$.

De oplossing van het stelsel is

$x = 8$ en $y = -3$.

h Eerst herleiden.

$$5x - 2y = 13 \quad x + 2y = 5$$

$$-2y = -5x + 13 \quad 2y = -x + 5$$

$$y = 2\frac{1}{2}x - 6\frac{1}{2} \quad y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$$

Dan gelijkstellen.

$$2\frac{1}{2}x - 6\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$$

$$3x - 6\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

Invullen geeft $y = 2\frac{1}{2} \times 3 - 6\frac{1}{2} = 1$.

De oplossing van het stelsel is $x = 3$ en $y = 1$.

U5

$$\begin{cases} A = 2B \\ C = A - 2 \\ A + B + C = 23 \end{cases}$$

$A = 2B$ substitueren in de andere vergelijkingen geeft

$$\begin{cases} C = 2B - 2 \\ 2B + B + C = 23 \end{cases} \text{ oftewel } \begin{cases} C = 2B - 2 \\ 3B + C = 23 \end{cases}$$

$C = 2B - 2$ substitueren in de vergelijking $3B + C = 23$ geeft

$$3B + 2B - 2 = 23$$

1 Lineaire en exponentiële functies

$$5B - 2 = 23$$

$$5B = 25$$

$$B = 5$$

Invullen in $C = 2B - 2$ geeft $C = 2 \times 5 - 2 = 8$.

Invullen in $A = 2B$ geeft $A = 2 \times 5 = 10$.

Abel is 10 jaar, Berdien is 5 jaar en Camiel is 8 jaar.

1.4 Exponentiële functies

intro Na 25 dagen is de vijver helemaal bedekt met deze waterplant.

Na $25 - 3 = 22$ dagen is de vijver voor de helft bedekt.

Na $22 - 3 = 19$ dagen is de vijver voor een kwart bedekt.

- 20 a** De groeifactor per jaar is $260 : 250 = 1,04$; $270,40 : 260 = 1,04$ en $281,22 : 270,40 \approx 1,04$. Janco krijgt 4% rente per jaar.

b

jaartal	bedrag in euro's
2014	250
2015	260
2016	270,40
2017	281,22
2018	292,46
2019	304,16

- c** Er is sprake van exponentiële groei, omdat het bedrag ieder jaar met dezelfde factor vermenigvuldigd wordt. En de groeifactor per jaar is 1,04.
- d** Het functievoorschrift dat bij de tabel hoort is $B(t) = 250 \cdot 1,04^t$.
- e** Na 10 jaar staat er $250 \times 1,04^{10} = 370,06$ euro op de spaarrekening.

- 21 a** $B(12) = 600 \cdot 1,05^{12} = 1078$

Dit betekent dat er na $12 \times 10 = 120$ minuten ongeveer 1078 bacteriën zijn.

b De groeifactor g per tien minuten is 1,05.

c $g^6 = 1,05^6 = 1,34$

Dit betekent dat het aantal bacteriën na $6 \times 10 = 60$ minuten, oftewel na 1 uur ongeveer met de factor 1,34 vermenigvuldigd wordt.

d Het functievoorschrift voor het aantal bacteriën met t de tijd in uren is

$$B(t) = 600 \cdot 1,34^t$$

- 22 a** $P(2) = 120 \times 3^2 = 1080$

b Bij dit groeiproces is de groeifactor per jaar 3.

c De groeifactor per twee jaar is $3^2 = 9$, de groeifactor per vier jaar is $3^4 = 81$ en de groeifactor per zes jaar is $3^6 = 729$.

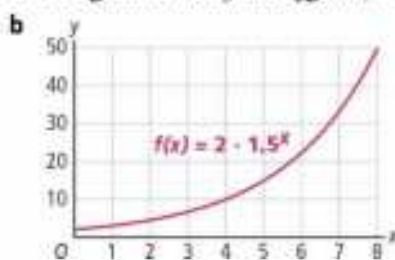
d De groeifactor per half jaar is $\sqrt{3} \approx 1,73$ en de groeifactor per kwartaal is $\sqrt[4]{3} \approx 1,32$.

- 23 a** De groeifactor per drie jaar is $0,96^3 = 0,885$, de groeifactor per zes jaar is $0,96^6 = 0,783$ en de groeifactor per vijftien jaar is $0,96^{15} = 0,542$.

b Het functievoorschrift voor het aantal herten voor een tijdseenheid van drie jaar is $H(t) = 4000 \cdot 0,885^t$, van zes jaar is $H(t) = 4000 \cdot 0,783^t$ en van vijftien jaar is $H(t) = 4000 \cdot 0,542^t$.

- c Na 30 jaar zijn er bij een tijdseenheid van drie jaar $4000 \cdot 0,885^{10} \approx 1179$ herten, bij een tijdseenheid van zes jaar $4000 \cdot 0,783^5 \approx 1177$ herten en bij een tijdseenheid van vijftien jaar $4000 \cdot 0,542^2 \approx 1175$ herten.
- d Het verschil bij de antwoorden van opdracht c komt, omdat de groeifactoren afgerond zijn.
- 24 a** Bij tabel A is de groeifactor $16 : 64 = 4 : 16 = 1 : 4 = 0,25$.
De beginhoeveelheid is 64.
Het functievoorschrift bij tabel A is $f(x) = 64 \cdot 0,25^x$.
Bij tabel B is de groeifactor $180 : 150 = 216 : 180 = 259,2 : 216 = 1,2$.
De beginhoeveelheid is $150 : 1,2 = 125$.
Het functievoorschrift bij tabel B is $g(x) = 125 \cdot 1,2^x$.
Bij tabel C is de richtingscoëfficiënt $137 - 125 = 149 - 137 = 161 - 149 = 12$.
Het startgetal is 125.
Het functievoorschrift bij tabel C is $h(x) = 12x + 125$.
Bij tabel D is de richtingscoëfficiënt $74 - 50 = 98 - 74 = 122 - 98 = 24$.
Het startgetal is $50 - 24 = 26$.
Het functievoorschrift bij tabel D is $i(x) = 24x + 26$.
- b In tabel A komt 0,25 onder 4, in tabel B komt 125 onder 0, in tabel C komt 173 onder 4 en in tabel D komt 26 onder 0.

- 25 a** De grafiek van f is stijgend, want de groeifactor is groter dan 1.



- 26** Bij grafiek 1 hoort de functie D $l(x) = 30 \cdot 1,15^x$, bij grafiek 2 hoort de functie C $h(x) = 30 \cdot 1,1^x$, bij grafiek 3 hoort de functie B $g(x) = 30 \cdot 0,6^x$ en bij grafiek 4 hoort de functie A $f(x) = 30 \cdot 0,75^x$.
- 27 a** Er is sprake van exponentiële groei, omdat je elke maand met dezelfde factor vermenigvuldigt. De groeifactor per maand is 1,13.
- b Het functievoorschrift voor het aantal ratten is $R(t) = 25000 \cdot 1,13^t$.
- c $R(12) = 25000 \times 1,13^{12} \approx 108\,363$
De betekenis is dat er na 12 maanden ongeveer 108 363 ratten zijn.
- d De groeifactor per jaar is $1,13^{12} \approx 4,3345$.
Het aantal ratten neemt per jaar met ongeveer 333% toe.
- 28 a** Na vijf maanden, dus op 1 juni 2016, zijn er $25000 \times 1,13^5 \approx 46061$ ratten en na zes maanden, dus op 1 juli, zijn er $25000 \times 1,13^6 \approx 52049$ ratten.
Men begint hiermee in juni 2016.
- b Je ziet dat het aantal ratten afneemt, omdat de groeifactor tussen 0 en 1 zit.
- c Na twee maanden zijn er $50000 \times 0,74^2 \approx 27\,380$ ratten en na drie maanden zijn er $50000 \times 0,74^3 \approx 20\,261$ ratten.
Na drie maanden zijn er voor het eerst weer minder dan 25 000 ratten.
- d Iedere exponentiële functie met beginhoeveelheid 50 000 waarvan de groeifactor tussen 0 en 0,74 zit voldoet, bijvoorbeeld $R(t) = 50000 \cdot 0,68^t$.

1 Lineaire en exponentiële functies

- 022** a $N(3) = 150 \times 4^3 = 9600$
 b Bij dit groeiproces is de groeifactor per jaar 4.
 c De groeifactor per drie jaar is $4^3 = 64$, de groeifactor per vier jaar is $4^4 = 256$ en de groeifactor per vijf jaar is $4^5 = 1024$.
 d De groeifactor per kwartaal is $\sqrt[4]{2} \approx 1,41$.
 e $K(5) = 2300 \times 2^5 = 73600$
 f De groeifactor per twee jaar is $2^2 = 4$, de groeifactor per drie jaar is $2^3 = 8$, de groeifactor per half jaar is $\sqrt{2} \approx 1,41$ en de groeifactor per kwartaal is $\sqrt[4]{1,414 \dots} \approx 1,19$.

- 026** a De groeifactor van de functie f is 0,8, de groeifactor van de functie g is 1,2 en de groeifactor van de functie h is 1,8.
 b Van de functie f is de groeifactor kleiner dan 1, dus bij deze functie is de grafiek dalend.
 c De grafieken bij de functies g en h zijn stijgend.
 d Van de functie h is de groeifactor het grootst, dus bij deze functie stijgt de grafiek het snelst.

- U6** Het functievoorschrift is van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.
 Invullen van $x = 1$ en $y = 16$ geeft $16 = b \times g^1$, dus $b = \frac{16}{g}$.
 Invullen van $x = 5$ en $y = 81$ geeft $81 = b \times g^5$.
 Invullen van $b = \frac{16}{g}$ geeft $81 = \frac{16}{g} \times g^5$, oftewel $81 = 16 \times g^4$, dus $g^4 = \frac{81}{16}$ en $g = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. Dit invullen geeft $b = \frac{16}{1\frac{1}{2}} = 10\frac{2}{3}$.
 Het functievoorschrift van f is $f(x) = 10\frac{2}{3} \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^x$.
 Of:
 Het functievoorschrift is van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.
 Van $x = 1$ naar $x = 5$ is $g^4 = \frac{81}{16}$, dus $g = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.
 Invullen van $x = 1$, $y = 16$ en $g = 1\frac{1}{2}$ geeft $16 = b \times \left(1\frac{1}{2}\right)^1$, oftewel $16 = 1\frac{1}{2}b$, dus $32 = 3b$ en $b = 10\frac{2}{3}$.
 Het functievoorschrift van f is $f(x) = 10\frac{2}{3} \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^x$.

- U7** In 2021 heeft het eerste dorp $4200 \times 1,03^5 = 4869$ inwoners.
 In 2013 had het eerste dorp $4200 : 1,03^3 = 3844$ inwoners.
 De bevolkingsgroei van het tweede dorp voldoet aan de functie $A(t) = 3844 \cdot 1,035^t$ met t de tijd in jaren na 2013.
 In 2021 heeft het tweede dorp $3844 \times 1,035^8 = 5062$ inwoners.
 In 2021 is het verschil tussen de twee dorpen $5062 - 4869 = 193$ inwoners.

1.5 Rekenen met exponenten

- intro** In het begin zijn er volgens de functie van Freek $2^{3 \times 0 + 2} = 2^2 = 4$ bacteriën en volgens de functie van Eva $4 \times 8^0 = 4 \times 1 = 4$ bacteriën.
 Na 1 week zijn er volgens de functie van Freek $2^{3 \times 1 + 2} = 2^5 = 32$ bacteriën en volgens de functie van Eva $4 \times 8^1 = 4 \times 8 = 32$ bacteriën.
 Na 2 weken zijn er volgens de functie van Freek $2^{3 \times 2 + 2} = 2^8 = 256$ bacteriën en volgens de functie van Eva $4 \times 8^2 = 4 \times 64 = 256$ bacteriën.
 Ja, het kan zijn dat ze allebei gelijk hebben.

- 29** Bewering A is niet juist, want $2^3 \cdot 2^4 = 8 \cdot 16 = 128$, maar $2^{12} = 4096$.
 Bewering B is niet juist, want $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$, maar $2^7 = 128$.
 Bewering C is juist, want $2^3 \cdot 2^4 = 8 \cdot 16 = 128$ en $2^7 = 128$.
 Bewering D is niet juist, want $2^3 \cdot 2^4 = 8 \cdot 16 = 128$, maar $4^7 = 16384$.

- 30** a $2^5 \cdot 2^6 = 2^{11}$
 b $3^7 \cdot 3^8 = 3^{15}$
 c $5 \cdot 5^3 = 5^4$
 d $7^3 \cdot 7^3 = 7^6$

- 31** a $(2^7)^3 = 2^7 \cdot 2^7 \cdot 2^7 = 2^{7+7+7} = 2^{3 \cdot 7} = 2^{21}$ en
 $(1,5^4)^2 = 1,5^4 \cdot 1,5^4 = 1,5^{4+4} = 1,5^{2 \cdot 4} = 1,5^8$
 b A $(4^2)^3 = 4^6$ C $(2^{10})^2 = 2^{20}$
 B $(8^3)^6 = 8^{18}$ D $(10^3)^4 = 10^{12}$

- 32** a $\frac{5^7}{5^3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{1} = 5^4$ en
 $\frac{2^{13}}{2^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{1} = 2^9$

- b Je kunt $\frac{2^{13}}{2^4}$ als één macht schrijven door de exponenten 13 en 4 van elkaar af te trekken. Je krijgt dan $\frac{2^{13}}{2^4} = 2^{13-4} = 2^9$.

- 33** a $2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^2 = 2^{12}$ d $3^2 \cdot 3 \cdot (3^3)^3 = 3^2 \cdot 3 \cdot 3^9 = 3^{12}$
 b $4^2 \cdot (4^3)^5 = 4^2 \cdot 4^{15} = 4^{17}$ e $(3^2)^3 \cdot (3^5)^3 = 3^6 \cdot 3^{15} = 3^{21}$
 c $\frac{(7^2)^3 \cdot 7}{7^4} = \frac{7^6 \cdot 7}{7^4} = \frac{7^7}{7^4} = 7^3$ f $5^3 \cdot \frac{5^2 \cdot 5^8}{(5^3)^2} = 5^3 \cdot \frac{5^7}{5^6} = 5^3 \cdot 5 = 5^4$

- 34** a $y = (3^4)^2 \cdot 3^x$

$$y = 3^8 \cdot 3^x$$

$$y = 3^{8+x}$$

- b A $b = 5^x \cdot 5^{3x} \cdot 5^{4x}$
 $b = 5^{8x}$

B $k = 3^x \cdot 3^7$
 $k = 3^{x+7}$

C $m = \frac{6^3}{6^{2x}}$
 $m = 6^{3-2x}$

$$y = \frac{7^5 \cdot 7^x}{7^2}$$

$$y = \frac{7^{5+x}}{7^2}$$

$$y = 7^{3+x}$$

D $y = 4^x \cdot 4^2 \cdot (4^3)^x$
 $y = 4^x \cdot 4^2 \cdot 4^{3x}$
 $y = 4^{4x+2}$

E $p = 2^{3x} \cdot 2^x \cdot (2^{x-3})^2$
 $p = 2^{3x} \cdot 2^x \cdot 2^{2x-6}$
 $p = 2^{8x-6}$

F $k = \frac{9^{2x} \cdot 9^3 \cdot (9^x)^8}{9 \cdot 9^{4x}}$

$$k = \frac{9^{2x} \cdot 9^3 \cdot 9^{8x}}{9 \cdot 9^{4x}}$$

$$k = \frac{9^{7x+3}}{9^{4x+1}}$$

$$k = 9^{3x+2}$$

1 Lineaire en exponentiële functies

35 a

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	8	16	32	64	128	256	512

b

x	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	8	16	32	64	128	256	512

Het valt op dat de tabellen bij de functies f en g hetzelfde zijn.

- c** Je kunt het niet met zekerheid zeggen, want je hebt alleen maar aangetoond dat voor de waarden $x = 0$ tot en met $x = 6$ de functiewaarden van f en g hetzelfde zijn. Voor een andere waarde van x zouden de functiewaarden van f en g verschillend kunnen zijn.

d

$$y = 2^{x+3}$$

$$y = 2^x \cdot 2^3$$

$$y = 2^x \cdot 8$$

$$y = 8 \cdot 2^x$$

- e** Je weet nu wel zeker dat voor elke waarde van x geldt dat de functiewaarden van f en g hetzelfde zijn, want de rekenregels gelden voor elke waarde van x .

36 a

x	0	1	2	3	4	5	6
$k(x)$	1	9	81	729	6561	59 049	531 441

x	0	1	2	3	4	5	6
$m(x)$	1	9	81	729	6561	59 049	531 441

Het valt op dat de tabellen bij de functies k en m hetzelfde zijn.

b

$$y = 3^{2x}$$

$$y = (3^2)^x$$

$$y = 9^x$$

- c** Ja, de functies k en m zijn hetzelfde.

37 a

$f(x) = 25 \cdot 5^x$	of	$h(x) = 5^{x+2}$
$f(x) = 5^2 \cdot 5^x$		$h(x) = 5^x \cdot 5^2$
$f(x) = 5^{x+2}$		$h(x) = 5^x \cdot 25$
		$h(x) = 25 \cdot 5^x$

b

$k(x) = 3^{2x+1}$	of	$l(x) = 3 \cdot 9^x$
$k(x) = 3^{2x} \cdot 3$		$l(x) = 3 \cdot (3^2)^x$
$k(x) = (3^2)^x \cdot 3$		$l(x) = 3 \cdot 3^{2x}$
$k(x) = 9^x \cdot 3$		$l(x) = 3^{2x+1}$
$k(x) = 3 \cdot 9^x$		

c

$m(x) = 5 \cdot 4^{x+2}$	of	$n(x) = 80 \cdot 4^x$
$m(x) = 5 \cdot 4^x \cdot 4^2$		$n(x) = 5 \cdot 16 \cdot 4^x$
$m(x) = 5 \cdot 4^x \cdot 16$		$n(x) = 5 \cdot 4^2 \cdot 4^x$
$m(x) = 80 \cdot 4^x$		$n(x) = 5 \cdot 4^{x+2}$

38 A $f(x) = 3^{1+x}$
 $f(x) = 3 \cdot 3^x$ en dat is E $f(x) = 3 \cdot 3^x$

B $g(x) = 2^{3x+5}$
 $g(x) = 2^{3x} \cdot 2^5$
 $g(x) = (2^3)^x \cdot 32$
 $g(x) = 32 \cdot 8^x$ en dat is C $h(x) = 32 \cdot 8^x$

D $i(x) = 4^{2x}$
 $i(x) = (4^2)^x$
 $i(x) = 16^x$ en dat is F $k(x) = 16^x$

- 034 a** Bij stap 2 gebruikt ze de rekenregel $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$.
- b** Bij stap 3 gebruikt ze de rekenregel $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$.
- c** Bij stap 4 neemt ze $3x$ en $-2x$ samen tot x .
- d** $w = 4^x \cdot 4^5$
 $w = 4^{x+5}$
- e** $r = 3^m \cdot 3^{4m} \cdot 3^{2m}$
 $r = 3^{7m}$
- f** $l = \frac{7^9}{7^{4x}}$
 $l = 7^{9-4x}$
- g** $y = 5^x \cdot 5^3 \cdot (5^2)^x$
 $y = 5^x \cdot 5^3 \cdot 5^{2x}$
 $y = 5^{3x+3}$
- h** $q = 8^x \cdot 8^{3x} \cdot (8^{x-1})^2$
 $q = 8^x \cdot 8^{3x} \cdot 8^{2x-2}$
 $q = 8^{6x-2}$
- i** $m = \frac{2^{2a} \cdot 2^3 \cdot (2^a)^4}{2 \cdot 2^{3a}}$
 $m = \frac{2^{2a} \cdot 2^3 \cdot 2^{4a}}{2 \cdot 2^{3a}}$
 $m = \frac{2^{6a+3}}{2^{3a+1}}$
 $m = 2^{3a+2}$

- 037 a** $f(x) = 3^{4x+2}$ is te schrijven als $f(x) = 3^{4x} \cdot 3^2$.
- b** Je kunt 3^{4x} schrijven als $(3^4)^x$ en dat is 81^x .
- c** $f(x) = 3^{4x+2}$
 $f(x) = 3^{4x} \cdot 3^2$
 $f(x) = (3^4)^x \cdot 9$
 $f(x) = 9 \cdot 81^x$
- U8 a** $\frac{3^5}{3^7} = 3^{5-7} = 3^{-2}$ en $\frac{3^5}{3^7} = \frac{1}{3^2}$, dus $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
- b** $5^{-1} = \frac{1}{5}$, $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$, $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$ en $(\frac{1}{2})^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$
- c** $f(x) = 2^x \cdot 4^x \cdot 8^x \cdot 16^x$
 $f(x) = 2^x \cdot (2^2)^x \cdot (2^3)^x \cdot (2^4)^x$
 $f(x) = 2^x \cdot 2^{2x} \cdot 2^{3x} \cdot 2^{4x}$
 $f(x) = 2^{10x}$
- d** $g(x) = \frac{3 \cdot 3^{3x} \cdot 9^{9x}}{3^{ax+b}}$
 $g(x) = \frac{3 \cdot 3^{3x} \cdot (3^2)^{9x}}{3^{ax+b}}$
 $g(x) = \frac{3 \cdot 3^{3x} \cdot 3^{18x}}{3^{ax+b}}$
 $g(x) = \frac{3^{21x+1}}{3^{ax+b}}$
- De functie $g(x) = \frac{3 \cdot 3^{3x} \cdot 9^{9x}}{3^{ax+b}}$ is een constante functie als $a = 21$ en $b = 1$.

1.6 Gemengde opdrachten

- 39 a** Op een diepte van 200 meter is de temperatuur $20 + 0,03 \times 200 = 26$ graden Celsius.
- b** Het functievoorschrift voor deze mijn is $T(d) = 20 + 0,03d$.

1 Lineaire en exponentiële functies

- c Voor die mijn geldt $T(d) = b + 0,03d$ met b de buitentemperatuur.
Invullen van $d = 400$ en $T = 30$ geeft $30 = b + 0,03 \times 400$, oftewel
 $30 = b + 12$, dus $b = 18$.
Bij die mijn is de buitentemperatuur 18 graden Celsius.

40 a $4x + y = 18$

$$y = -4x + 18$$

Het functievoorschrift bij lijn l is $f(x) = -4x + 18$.

- b Eerst herleiden.

$$8x - 3y = 6$$

$$-3y = -8x + 6$$

$$y = 2\frac{2}{3}x - 2$$

Dan gelijkstellen.

$$-4x + 18 = 2\frac{2}{3}x - 2$$

$$18 = 6\frac{2}{3}x - 2$$

$$6\frac{2}{3}x = 20$$

$$x = 3$$

Invullen geeft $y = -4 \times 3 + 18 = 6$.

De oplossing van het stelsel is $x = 3$ en $y = 6$.

- c De oplossing van het stelsel betekent dat de lijnen l en m elkaar in het punt $(3, 6)$ snijden.

- d Invullen van $y = 0$ geeft $8x - 3 \times 0 = 6$, oftewel $8x = 6$, dus $x = \frac{3}{4}$.

De coördinaten van het snijpunt van lijn m met de x -as zijn $(\frac{3}{4}, 0)$.

Invullen van $x = 0$ geeft $8 \times 0 - 3y = 6$, oftewel $-3y = 6$, dus $y = -2$.

De coördinaten van het snijpunt van lijn m met de y -as zijn $(0, -2)$.

41 a $y = 7^{2x} \cdot 7^4 \cdot 7^{4x-1}$

$$y = 7^{6x+3}$$

b $h = \frac{5^{3u} \cdot 5^u \cdot 5}{5^{2u}}$

$$h = \frac{5^{4u+1}}{5^{2u}}$$

$$h = 5^{2u+1}$$

c $p = 3^{8r} \cdot 3^{r+1} \cdot (3^{3r})^2$

$$p = 3^{8r} \cdot 3^{r+1} \cdot 3^{6r}$$

$$p = 3^{15r+1}$$

d $m = \frac{10^{x+1} \cdot 10^x \cdot (10^x)^3}{10^{x-3}}$

$$m = \frac{10^{x+1} \cdot 10^x \cdot 10^{3x}}{10^{x-3}}$$

$$m = \frac{10^{5x+1}}{10^{x-3}}$$

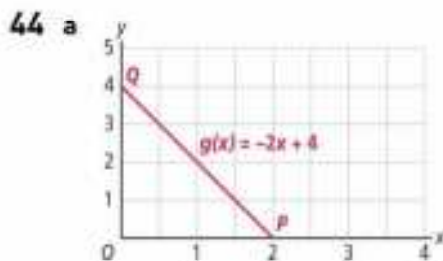
$$m = 10^{4x+4}$$

- 42 a Het functievoorschrift is $V(t) = 24\,000 \cdot 1,045^t$ met V het aantal vluchten en t de tijd in jaren.

- b Het functievoorschrift is $B(t) = 1\,000\,000 \cdot 0,02^t$ met B het aantal bacteriën en t de tijd in kwartieren.

- c Het functievoorschrift is $D(t) = 2500 \cdot 2,5^t$ met D het aantal downloads en t de tijd in dagen na 15 augustus.

- 43 a** Bij soort A is $142 : 75 = 1,89$; $270 : 142 = 1,90$; $515 : 270 = 1,91$ en $979 : 515 = 1,90$, dus de groeifactor is ongeveer 1,9.
 Bij soort B is $121 : 58 = 2,09$; $255 : 121 = 2,11$; $536 : 255 = 2,10$ en $1126 : 536 = 2,10$, dus de groeifactor is ongeveer 2,1.
- b** Soort B heeft de grootste groeifactor, dus soort B lijkt het snelst te groeien.
- c** De groeifactor per half uur voor het aantal van soort A is $1,9^3 = 6,859 = 6,9$.
 Of:
 De groeifactor per half uur voor het aantal van soort A is $515 : 75 = 6,9$.
- d** De groeifactor per half uur voor het aantal van soort B is $2,1^2 = 4,41$.
 Of:
 De groeifactor per half uur voor het aantal van soort B is $255 : 58 = 4,40$.
 Nee, het antwoord bij soort B klopt niet, want soort A groeit het snelst.



- b** Invullen van $y = 0$ geeft $0 = -2x + 4$, oftewel $-2x = -4$, dus $x = 2$.
 De coördinaten van het snijpunt P met de x -as zijn $(2, 0)$.
 Invullen van $x = 0$ geeft $g(x) = -2 \times 0 + 4 = 4$.
 De coördinaten van het snijpunt Q met de y -as zijn $(0, 4)$.
 De oppervlakte van $\triangle OPQ$ is $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$.
- c** Invullen van $y = 0$ geeft $0 = -2x + a$, oftewel $-2x = -a$, dus $x = \frac{1}{2}a$.
 De coördinaten van het snijpunt P met de x -as zijn $(\frac{1}{2}a, 0)$.
 Invullen van $x = 0$ geeft $g(x) = -2 \times 0 + a = a$.
 De coördinaten van het snijpunt Q met de y -as zijn $(0, a)$.
 De oppervlakte A van $\triangle OPQ$ is $A = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a \times a$, oftewel $A = \frac{1}{4}a^2$.
- d** $\frac{1}{4}a^2 = 36$
 $a^2 = 144$
 $a = 12$ of $a = -12$ (voldoet niet)
 De oppervlakte van $\triangle OPQ$ is precies 36 als $a = 12$.
- e** De coördinaten van punt P zijn dan $(6, 0)$ en de coördinaten van punt Q zijn dan $(0, 12)$.

- 45** De toename van de x -coördinaat is $6 - 2 = 4$.
 De toename van de y -coördinaat is $37 - 17 = 20$.
 Het hellingsgetal van de lineaire functie f is $20 : 4 = 5$.
 Het functievoorschrift van f is van de vorm $f(x) = 5x + b$.
 Invullen van $x = 2$ en $y = 17$ geeft $17 = 5 \times 2 + b$, oftewel $17 = 10 + b$, dus $b = 7$.
 Het functievoorschrift van f is $f(x) = 5x + 7$.
 De exponentiële functie h gaat door het punt $(0, 2)$, dus de beginhoeveelheid is 2.
 Het functievoorschrift van h is van de vorm $h(x) = 2 \cdot g^x$.
 Invullen van $x = 2$ en $y = 3$ geeft $3 = 2 \cdot g^2$, oftewel $g^2 = 1,5$, dus $g = \sqrt{1,5}$.
 Het functievoorschrift van h is $h(x) = 2 \cdot (\sqrt{1,5})^x$.
 Invullen van $x = 20$ geeft $f(20) = 5 \times 20 + 7 = 107$ en
 $h(20) = 2 \cdot (\sqrt{1,5})^{20} \approx 115,33$.
 De grafiek van f gaat door het punt $(2, 17)$ en de grafiek van h gaat door het punt $(2, 3)$, dus bij $x = 2$ ligt de grafiek van f boven de grafiek van h .

1 Lineaire en exponentiële functies

De grafiek van f gaat door het punt $(20, 107)$ en de grafiek van h gaat door het punt $(20; 115,33\dots)$, dus bij $x = 20$ ligt de grafiek van f onder de grafiek van h . De grafieken snijden elkaar links van de lijn $x = 20$.

46 a $2\left(\frac{1}{2}x + 20\right) - x = 50$

$$x + 40 - x = 50$$

$$40 = 50$$

Dit kan niet, dus het stelsel vergelijkingen heeft geen oplossingen.

b $2y - x = 50$

$$2y = x + 50$$

$$y = \frac{1}{2}x + 25$$

Het lukt niet het stelsel vergelijkingen op te lossen, omdat de lijnen bij de vergelijkingen $y = \frac{1}{2}x + 20$ en $y = \frac{1}{2}x + 25$ evenwijdig lopen.

Samenvatting

S1 a De functie p is een constante functie, q is een exponentiële functie, r is een lineaire functie en s is een kwadratische functie.

b $p(1) = 9$, $q(2) = 12 \times 0,5^2 = 3$, $r(3) = 6 \times 3 + 5 = 23$ en $s(4) = 25 - 2 \times 4^2 = -7$

c $6x + 5 = 17$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

d Bij de functie $q(x) = 12 \cdot 0,5^x$ is q de afhankelijke variabele.

S2 a $5x - 8y = -24$

$$-8y = -5x - 24$$

$$y = \frac{5}{8}x + 3$$

b De richtingscoëfficiënt is $\frac{5}{8}$ en het startgetal van de lijn is 3.

S3 $7x + 42 = 3x - 38$

$$4x + 42 = -38$$

$$4x = -80$$

$$x = -20$$

Invullen bij $f(x)$ geeft $f(-20) = 7 \times -20 + 42 = -98$.

Invullen bij $g(x)$ geeft $g(-20) = 3 \times -20 - 38 = -98$. Klopt.

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g zijn $(-20, -98)$.

S4 Eerst herleiden,

$$2x + 3y = 18$$

$$3y = -2x + 18$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 6$$

Dan gelijkstellen.

$$-\frac{2}{3}x + 6 = 6x - 24$$

$$6 = 6\frac{2}{3}x - 24$$

$$6\frac{2}{3}x = 30$$

$$x = 4\frac{1}{2}$$

Invullen geeft $y = -\frac{2}{3} \times 4\frac{1}{2} + 6 = 3$.

De oplossing van het stelsel is $x = 4\frac{1}{2}$ en $y = 3$.

$$6x - y = 24$$

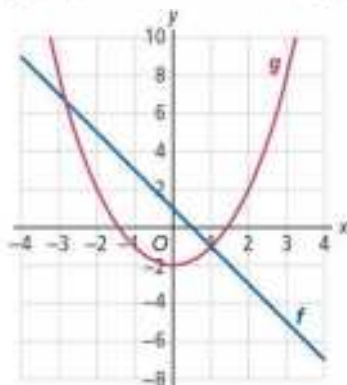
$$-y = -6x + 24$$

$$y = 6x - 24$$

- S5** a De beginhoeveelheid is 65.
 b De groeifactor per uur is 0,81.
 c De groeifactor per tien uur is $0,81^{10} = 0,12$.
 d De groeifactor per 30 minuten is $\sqrt[10]{0,81} = 0,9$.
- S6** a $7^2 \cdot 7^6 \cdot 7 = 7^9$
 b $\frac{(3^4)^5 \cdot 3}{3^6} = \frac{3^{20} \cdot 3}{3^6} = \frac{3^{21}}{3^6} = 3^{15}$
 c $4^5 \cdot (4^2)^3 \cdot 4 \cdot 4^4 = 4^5 \cdot 4^6 \cdot 4 \cdot 4^4 = 4^{16}$
 d $\frac{2^5 \cdot (2^3)^2 \cdot 2}{2^4 \cdot 2^3} = \frac{2^5 \cdot 2^6 \cdot 2}{2^4 \cdot 2^3} = \frac{2^{12}}{2^7} = 2^5$
- S7** $m(x) = 10 \cdot 5^{2x+1}$ of $n(x) = 50 \cdot 25^x$
 $m(x) = 10 \cdot 5^{2x} \cdot 5$ $n(x) = 50 \cdot (5^2)^x$
 $m(x) = 50 \cdot (5^2)^x$ $n(x) = 10 \cdot 5 \cdot 5^{2x}$
 $m(x) = 50 \cdot 25^x$ $n(x) = 10 \cdot 5^{2x+1}$

Test jezelf

- T1** a Bij formule A is de variabele y de afhankelijke variabele. En de variabele x is de onafhankelijke variabele.
 b Het functievoorschrift bij formule A is $f(x) = -2x + 1$.
 c Het functievoorschrift bij formule B is $g(x) = x^2 - 2$.
 d $f(-2) = -2 \times -2 + 1 = 5$, $f(1) = -2 \times 1 + 1 = -1$ en $g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = -1\frac{3}{4}$
 e



- f De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(-3, 7)$ en $(1, -1)$.
 Invullen van $x = -3$ geeft $f(-3) = -2 \times -3 + 1 = 7$ en
 $g(-3) = (-3)^2 - 2 = 7$ en dat klopt.
 Invullen van $x = 1$ geeft $f(1) = -2 \times 1 + 1 = -1$ en $g(1) = 1^2 - 2 = -1$ en dat klopt.
- T2** a Invullen van bijvoorbeeld $x = 0$ geeft $2y + 0 = 3$, oftewel $2y = 3$, dus $y = 1\frac{1}{2}$.
 Grafiek B hoort bij de formule $2y + x = 3$.
 b $2y + x = 3$
 $2y = -x + 3$
 $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$
 c De richtingscoëfficiënt van grafiek A is -2 en de richtingscoëfficiënt van grafiek B is $-\frac{1}{2}$.
 d $15 - 2x = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$
 $15 = 1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$
 $1\frac{1}{2}x = 13\frac{1}{2}$
 $x = 9$
 Invullen geeft $y = 15 - 2 \times 9 = -3$ en $y = -\frac{1}{2} \times 9 + 1\frac{1}{2} = -3$.
 De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn $(9, -3)$.

1 Lineaire en exponentiële functies

e $2(15 - 2x) + x = 3$

$$30 - 4x + x = 3$$

$$30 - 3x = 3$$

$$3x = 27$$

$$x = 9$$

Invullen geeft $y = 15 - 2 \times 9 = -3$.

De oplossing van het stelsel vergelijkingen is $x = 9$ en $y = -3$.

T3 a $6^3 \cdot 6^2 \cdot 6 = 6^6$ en $\frac{3^3 \cdot (3^2)^3}{3^4} = \frac{3^3 \cdot 3^6}{3^4} = \frac{3^{11}}{3^4} = 3^7$

b $y = 5^x \cdot 5 \cdot (5^x)^6$

$$y = 5^x \cdot 5 \cdot 5^{6x}$$

$$y = 5^{7x+1}$$

$$h = (7^w)^2 \cdot 7^{5w} \cdot 7^4$$

$$h = 7^{2w} \cdot 7^{5w} \cdot 7^4$$

$$h = 7^{7w+4}$$

T4 a Over één jaar is de boom $1,40 \times 1,12 = 1,57$ meter of 157 cm hoog.

b Het functievoorschrift waarmee je de hoogte van de boom in cm kunt betekenen is $H(t) = 140 \times 1,12^t$.

c Over zes jaar zal de boom $140 \times 1,12^6 = 276$ cm hoog zijn.

d De groeifactor van de hoogte van de boom per vijf jaar is $1,12^5 = 1,7623$.

e Over tien jaar is de hoogte van de boom $140 \times 1,12^{10} = 435$ cm.

f Na acht jaar is de boom $140 \times 1,12^8 = 347$ cm hoog.

Na negen jaar is de boom $140 \times 1,12^9 = 388$ cm hoog.

Over iets meer dan acht jaar is de boom 3,50 meter hoog.

T5 a De twee vergelijkingen die bij de gegevens horen zijn $2a + 3p = 190$ en $6a + 5p = 410$.

b Eerst herleiden.

$$2a + 3p = 190$$

$$6a + 5p = 410$$

$$2a = -3p + 190$$

$$6a = -5p + 410$$

$$a = -1\frac{1}{2}p + 95$$

$$a = -\frac{5}{6}p + 68\frac{1}{3}$$

Dan gelijkstellen.

$$-1\frac{1}{2}p + 95 = -\frac{5}{6}p + 68\frac{1}{3}$$

$$-\frac{9}{6}p + 95 = -\frac{5}{6}p + 68\frac{1}{3}$$

$$95 = \frac{4}{6}p + 68\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3}p = 26\frac{2}{3}$$

$$p = 40$$

Invullen geeft $a = -1\frac{1}{2} \times 40 + 95 = 35$.

De oplossing van het stelsel vergelijkingen is $a = 35$ en $p = 40$.

c Een appel kost 35 cent en een peer kost 40 cent.

- T6**
- A** $f(x) = 2^{3x+1}$
 $f(x) = 2^{3x} \cdot 2$
 $f(x) = (2^3)^x \cdot 2$
 $f(x) = 2 \cdot 8^x$ en dat is **G** $l(x) = 2 \cdot 8^x$.
- B** $g(x) = 8 \cdot 2^{4x}$
 $g(x) = 8 \cdot (2^4)^x$
 $g(x) = 8 \cdot 16^x$ en dat is nog niet te zien.
- C** $h(x) = 4^{2x+1}$
 $h(x) = 4^{2x} \cdot 4$
 $h(x) = (4^2)^x \cdot 4$
 $h(x) = 4 \cdot 16^x$ en dat is nog niet te zien.
- D** $i(x) = 2^{4x+4}$
 $i(x) = 2^{4x} \cdot 2^4$
 $i(x) = (2^4)^x \cdot 16$
 $i(x) = 16 \cdot 16^x$ en dat is **E** $j(x) = 16 \cdot 16^x$.
- F** $k(x) = (2 \cdot 4^x)^2$
 $k(x) = 2^2 \cdot (4^x)^2$
 $k(x) = 4 \cdot 4^{2x}$
 $k(x) = 4 \cdot (4^2)^x$
 $k(x) = 4 \cdot 16^x$ en dat is **C**.
- H** $m(x) = \frac{1}{2} \cdot 16^{x+1}$
 $m(x) = \frac{1}{2} \cdot 16^x \cdot 16$
 $m(x) = 8 \cdot 16^x$ en dat is **B**.
- Hetzelfde zijn **A** en **G**, **B** en **H**, **C** en **F**, en **D** en **E**.

- T7 a** Bij tabel A is de richtingscoëfficiënt $63 - 24 = 102 - 63 = 141 - 102 = 39$.
Het startgetal is 24.
Het functievoorschrift bij tabel A is $f(x) = 39x + 24$.
Bij tabel B is de groeifactor $240 : 320 = 180 : 240 = 135 : 180 = 0,75$.
De beginhoeveelheid is 320.
Het functievoorschrift bij tabel B is $g(x) = 320 \cdot 0,75^x$.
Bij tabel C is de groeifactor $1,8 : 0,3 = 10,8 : 1,8 = 64,8 : 10,8 = 6$.
De beginhoeveelheid is $0,3 : 6 = 0,05$.
Het functievoorschrift bij tabel C is $h(x) = 0,05 \cdot 6^x$.
Bij tabel D is de richtingscoëfficiënt $-39 - -53 = -25 - -39 = -11 - -25 = 14$.
Het startgetal is $-53 - 14 = -67$.
Het functievoorschrift bij tabel D is $j(x) = 14x - 67$.
- b** In tabel A komt $141 + 39 = 180$ onder 4, in tabel B komt 101,25 onder 4, in tabel C komt 0,05 onder 0 en in tabel D komt -67 onder 0.

- T8 a** $f(-2) = -5 \times -2 + 23 = 33$
- b** $-5x + 23 = 38$
 $-5x = 15$
 $x = -3$
- c** $-5x + 23 = 3x + 11$
 $23 = 8x + 11$
 $8x = 12$
 $x = 1\frac{1}{2}$
- d** $3x + 11 = 0$
 $3x = -11$
 $x = -3\frac{2}{3}$
- De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de x -as zijn $(-3\frac{2}{3}, 0)$.

1 Lineaire en exponentiële functies

- e De coördinaten van punt A zijn $(p, -5p + 23)$ en de coördinaten van punt B zijn $(p, 3p + 11)$.
 Verder geldt dat $AB = 3p + 11 - (-5p + 23)$, oftewel $AB = 3p + 11 + 5p - 23$,
 dus $AB = 8p - 12$.
 Oplossen van $AB = 20$ geeft $8p - 12 = 20$, oftewel $8p = 32$, dus $p = 4$.

Extra oefening

E1 $\frac{1}{4}x + 7 = -\frac{1}{2}x + 4$

$$\frac{3}{4}x + 7 = 4$$

$$\frac{3}{4}x = -3$$

$$x = -4$$

Invullen bij $f(x)$ geeft $f(-4) = \frac{1}{4} \times -4 + 7 = 6$.

Invullen bij $g(x)$ geeft $g(-4) = -\frac{1}{2} \times -4 + 4 = 6$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g zijn $(-4, 6)$.

E2 a $3x + 4 = -x + 12$

$$4x + 4 = 12$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

Invullen bij $f(x)$ geeft $f(2) = 3 \times 2 + 4 = 10$.

Invullen bij $g(x)$ geeft $g(2) = -2 + 12 = 10$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g zijn $(2, 10)$.

b $-1\frac{1}{2}x + 8 = 14 - 3x$

$$1\frac{1}{2}x + 8 = 14$$

$$1\frac{1}{2}x = 6$$

$$x = 4$$

Invullen bij $k(x)$ geeft $k(4) = -1\frac{1}{2} \times 4 + 8 = 2$.

Invullen bij $l(x)$ geeft $l(4) = 14 - 3 \times 4 = 2$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken van k en l zijn $(4, 2)$.

c $7 - 5x = 28 - 8x$

$$7 + 3x = 28$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

Invullen bij $m(x)$ geeft $m(7) = 7 - 5 \times 7 = -28$.

Invullen bij $n(x)$ geeft $n(7) = 28 - 8 \times 7 = -28$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken van m en n zijn $(7, -28)$.

d $0,1x = x + 18$

$$0 = 0,9x + 18$$

$$0,9x = -18$$

$$x = -20$$

Invullen bij $i(x)$ geeft $i(-20) = 0,1 \times -20 = -2$.

Invullen bij $j(x)$ geeft $j(-20) = -20 + 18 = -2$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken van i en j zijn $(-20, -2)$.

E3 a Eerst herleiden.

$$\begin{aligned}x + y &= 18 & \text{en} & & 5x - y &= -6 \\y &= -x + 18 & & & -y &= -5x - 6 \\& & & & y &= 5x + 6\end{aligned}$$

Dan gelijkstellen.

$$-x + 18 = 5x + 6$$

$$18 = 6x + 6$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

Invullen geeft $y = -2 + 18 = 16$.De oplossing van het stelsel vergelijkingen is $x = 2$ en $y = 16$.**b** Eerst herleiden.

$$\begin{aligned}3x + 2y &= 1 & \text{en} & & x - 5y &= 6 \\2y &= -3x + 1 & & & -5y &= -x + 6 \\y &= -1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & & & y &= \frac{1}{5}x - 1\frac{1}{5}\end{aligned}$$

Dan gelijkstellen.

$$-1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{5}x - 1\frac{1}{5}$$

$$-\frac{15}{10}x + \frac{5}{10} = \frac{2}{10}x - \frac{12}{10}$$

$$\frac{5}{10} = \frac{17}{10}x - \frac{12}{10}$$

$$\frac{17}{10}x = \frac{17}{10}$$

$$x = 1$$

Invullen geeft $y = -1\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = -1$.De oplossing van het stelsel vergelijkingen is $x = 1$ en $y = -1$.**c** Eerst herleiden.

$$\begin{aligned}3y - x &= 8 & \text{en} & & x + y &= 4 \\3y &= x + 8 & & & y &= -x + 4 \\y &= \frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Dan gelijkstellen.

$$\frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3} = -x + 4$$

$$1\frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3} = 4$$

$$1\frac{1}{3}x = 1\frac{1}{3}$$

$$x = 1$$

Invullen geeft $y = \frac{1}{3} \times 1 + 2\frac{2}{3} = 3$.De oplossing van het stelsel vergelijkingen is $x = 1$ en $y = 3$.**d** Eerst herleiden.

$$\begin{aligned}7x + 2y &= 0 & \text{en} & & 4x + y &= -1 \\2y &= -7x & & & y &= -4x - 1 \\y &= -3\frac{1}{2}x\end{aligned}$$

Dan gelijkstellen.

$$-3\frac{1}{2}x = -4x - 1$$

$$\frac{1}{2}x = -1$$

$$x = -2$$

Invullen geeft $y = -3\frac{1}{2} \times -2 = 7$.De oplossing van het stelsel vergelijkingen is $x = -2$ en $y = 7$.**e** Eerst herleiden.

$$\begin{aligned}5y - 10x &= 15 & \text{en} & & 6x + 2y &= 11 \\5y &= 10x + 15 & & & 2y &= -6x + 11 \\y &= 2x + 3 & & & y &= -3x + 5\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Dan gelijkstellen.

$$2x + 3 = -3x + 5\frac{1}{2}$$

$$5x + 3 = 5\frac{1}{2}$$

$$5x = 2\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Invullen geeft $y = 2 \times \frac{1}{2} + 3 = 4$.De oplossing van het stelsel vergelijkingen is $x = \frac{1}{2}$ en $y = 4$.**f** Eerst herleiden.

$$\begin{aligned}10x + 2y &= -9 & \text{en} & & 3x + 8y &= 1 \\2y &= -10x - 9 & & & 8y &= -3x + 1 \\y &= -5x - 4\frac{1}{2} & & & y &= -\frac{3}{8}x + \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Dan gelijkstellen.

$$-5x - 4\frac{1}{2} = -\frac{3}{8}x + \frac{1}{8}$$

$$-4\frac{1}{2} = 4\frac{5}{8}x + \frac{1}{8}$$

$$4\frac{5}{8}x = -4\frac{5}{8}$$

$$x = -1$$

Invullen geeft $y = -5 \times -1 - 4\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.De oplossing van het stelsel vergelijkingen is $x = -1$ en $y = \frac{1}{2}$.

1 Lineaire en exponentiële functies

E4 Eerst herleiden.

$$5x - 2y = 14 \quad \text{en} \quad x + y = 0$$

$$-2y = -5x + 14 \quad y = -x$$

$$y = 2\frac{1}{2}x - 7$$

Dan gelijkstellen.

$$2\frac{1}{2}x - 7 = -x$$

$$3\frac{1}{2}x - 7 = 0$$

$$3\frac{1}{2}x = 7$$

$$x = 2$$

Invullen geeft $y = 2\frac{1}{2} \times 2 - 7 = -2$.

De coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en m zijn $(2, -2)$.

E5 a De beginhoeveelheid is 14.

b De groeifactor per dag is $0,77^{24} = 0,0019$.

c De groeifactor per half uur is $\sqrt[24]{0,77} = 0,88$.

d De groeifactor per kwartier is $\sqrt[48]{0,877 \dots} \approx 0,94$.

E6 a De groeifactor voor een tijdseenheid van twee jaar is $1,04^2 = 1,082$ en voor een tijdseenheid van tien jaar is $1,04^{10} = 1,480$.

b Het functievoorschrift voor het aantal wolven voor een tijdseenheid van twee jaar is $W(t) = 200 \cdot 1,082^t$ en voor het aantal wolven voor een tijdseenheid van tien jaar is $W(t) = 200 \cdot 1,480^t$.

c Bij een tijdseenheid van twee jaar zijn er $200 \cdot 1,082^{30} = 2127$ wolven en bij een tijdseenheid van tien jaar zijn er $200 \cdot 1,480^6 = 2102$ wolven.

d Het verschil bij de antwoorden van opdracht c komt, omdat de groeifactoren afgerond zijn.

E7 a $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 = 3^9$

b $(7^4)^2 = 7^8$

c $\frac{(5^3)^4 \cdot 5^2 \cdot 5}{5^6} = \frac{5^{12} \cdot 5^2 \cdot 5}{5^6} = \frac{5^{15}}{5^6} = 5^9$

d $\frac{8^5 \cdot 8^2 \cdot 8}{(8^2)^3} = \frac{8^8}{8^6} = 8^2$

e $2 \cdot 2 \cdot (2^3)^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2^9 = 2^{11}$

f $(6^4)^2 \cdot (6^3)^3 = 6^8 \cdot 6^9 = 6^{17}$

g $9^2 \cdot \frac{9^3 \cdot 9^4}{(9^2)^2} = 9^2 \cdot \frac{9^8}{9^4} = 9^2 \cdot 9^4 = 9^6$

h $\frac{(4^6)^4 \cdot 4}{4^6 \cdot 4^7} \cdot 4^3 = \frac{4^{24} \cdot 4}{4^{13}} \cdot 4^3 = \frac{4^{25}}{4^{13}} \cdot 4^3 = 4^{12} \cdot 4^3 = 4^{15}$

E8 a $y = 3^x \cdot 3^{x+7}$
 $y = 3^{2x+7}$

b $p = 2^6 \cdot 2^{5r}$
 $p = 2^{5r+6}$

c $m = \frac{4^{2a+3}}{4^{6a}}$
 $m = 4^{-4a+3}$

d $k = (5^3)^t \cdot 5^r \cdot 5^{t+3}$
 $k = 5^{3t} \cdot 5^r \cdot 5^{t+3}$
 $k = 5^{5t+r+3}$

e $d = (7^6)^4 \cdot 7^2 \cdot (7^{6+2})^3$
 $d = 7^{24} \cdot 7^2 \cdot 7^{36+6}$
 $d = 7^{74}$

f $y = \frac{6^{3x} \cdot 6 \cdot (6^3)^{2x}}{6^x \cdot 6^x}$
 $y = \frac{6^{3x} \cdot 6 \cdot 6^{6x}}{6^x \cdot 6^x}$
 $y = \frac{6^{9x+1}}{6^{2x}}$
 $y = 6^{7x+1}$

E9 a $k(x) = 3^{x+4}$
 $k(x) = 3^x \cdot 3^4$
 $k(x) = 3^x \cdot 81$
 $k(x) = 81 \cdot 3^x$

b $k(x) = 7 \cdot 5^{2x}$
 $k(x) = 7 \cdot (5^2)^x$
 $k(x) = 7 \cdot 25^x$

c $k(x) = 0,5 \cdot 2^{x+6}$
 $k(x) = 0,5 \cdot 2^x \cdot 2^6$
 $k(x) = 0,5 \cdot 2^x \cdot 64$
 $k(x) = 32 \cdot 2^x$

d $k(x) = 3^{2x}$
 $k(x) = (3^2)^x$
 $k(x) = 9^x$

E10 a $f(x) = 16 \cdot 2^x$ of
 $f(x) = 2^4 \cdot 2^x$
 $f(x) = 2^{x+4}$

$g(x) = 2^{x+4}$
 $g(x) = 2^x \cdot 2^4$
 $g(x) = 2^x \cdot 16$
 $g(x) = 16 \cdot 2^x$

b $h(x) = 5^{x+3}$ of
 $h(x) = 5^x \cdot 5^3$
 $h(x) = 5^x \cdot 125$
 $h(x) = 125 \cdot 5^x$

$i(x) = 125 \cdot 5^x$
 $i(x) = 5^3 \cdot 5^x$
 $i(x) = 5^{x+3}$

c $j(x) = 2 \cdot 3^{2x+1}$ of
 $j(x) = 2 \cdot 3^{2x} \cdot 3$
 $j(x) = 6 \cdot (3^2)^x$
 $j(x) = 6 \cdot 9^x$

$k(x) = 6 \cdot 9^x$
 $k(x) = 6 \cdot (3^2)^x$
 $k(x) = 2 \cdot 3 \cdot 3^{2x}$
 $k(x) = 2 \cdot 3^{2x+1}$

d $l(x) = 4 \cdot 8^{x+1}$ of
 $l(x) = 4 \cdot 8^x \cdot 8$
 $l(x) = 32 \cdot 8^x$
 $l(x) = 32 \cdot (2^3)^x$
 $l(x) = 32 \cdot 2^{3x}$

$m(x) = 32 \cdot 2^{3x}$
 $m(x) = 32 \cdot (2^3)^x$
 $m(x) = 32 \cdot 8^x$
 $m(x) = 4 \cdot 8 \cdot 8^x$
 $m(x) = 4 \cdot 8^{x+1}$

2 Parabolen

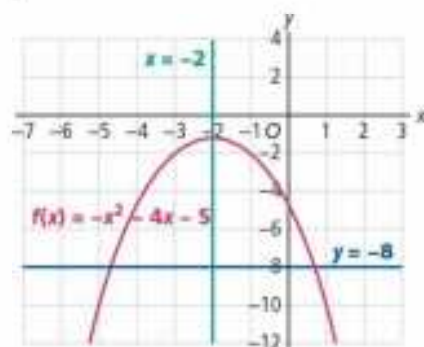
Voorkennis

V1 a $f(-2) = -(-2)^2 - 4 \times -2 - 5 = -4 + 8 - 5 = -1$

b

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	-10	-5	-2	-1	-2	-5	-10

c d



e De lijn $x = -2$ is de symmetrieas van de parabool.

f Zie opdracht V1cd.

g Deze lijn heeft twee snijpunten met de parabool.

V2 a $y = 3(2x - 5)$

$\times$	$2x$	-5
3	$6x$	-15

$y = 6x - 15$

b $y = 9(-4x - 2)$

$\times$	$-4x$	-2
9	$-36x$	-18

$y = -36x - 18$

c $y = x(5x - 7)$

$\times$	$5x$	-7
x	$5x^2$	$-7x$

$y = 5x^2 - 7x$

d $y = 8 + 3(6 - 4x)$

$\times$	6	$-4x$
3	18	$-12x$

$y = 8 + 18 - 12x$
 $y = 26 - 12x$

e $y = 7(2 + 4x) - 6x$

$\times$	2	$+4x$
7	14	$+28x$

$y = 14 + 28x - 6x$
 $y = 14 + 22x$

f $y = 6(2x + 1) - 12x$

$\times$	$2x$	$+1$
6	$12x$	$+6$

$y = 12x + 6 - 12x$
 $y = 6$

V3 a $y = (x + 4)(x + 3)$

$\times$	x	$+3$
x	x^2	$+3x$
$+4$	$+4x$	$+12$

$y = x^2 + 7x + 12$

b $y = (x - 6)(x + 6)$

$\times$	x	$+6$
x	x^2	$+6x$
-6	$-6x$	-36

$y = x^2 - 36$

c $y = (x + 6)^2$

$\times$	x	$+6$
x	x^2	$+6x$
$+6$	$+6x$	$+36$

$y = x^2 + 12x + 36$

d $y = (x - 8)(x - 9) + 3x$

$\times$	x	-9
x	x^2	$-9x$
-8	$-8x$	$+72$

$y = x^2 - 17x + 72 + 3x$
 $y = x^2 - 14x + 72$

e $y = (8x + 3)(-x + 4) - 2x^2$

$\times$	$-x$	$+4$
$8x$	$-8x^2$	$+32x$
$+3$	$-3x$	$+12$

$$y = -8x^2 + 29x + 12 - 2x^2$$

$$y = -10x^2 + 29x + 12$$

f $y = (4 - 2x)^2 + 7x$

$\times$	4	$-2x$
4	16	$-8x$
$-2x$	$-8x$	$+4x^2$

$$y = 4x^2 - 16x + 16 + 7x$$

$$y = 4x^2 - 9x + 16$$

V4 a Het product is -22 en de som is -9 .

product	getallen	som
-22	-1 en 22	$+21$
-22	-2 en 11	$+9$
-22	-11 en 2	-9
-22	-22 en 1	-21

$$f = (h - 11)(h + 2)$$

d Het product is -20 en de som is -1 .

product	getallen	som
-20	-1 en 20	$+19$
-20	-2 en 10	$+8$
-20	-4 en 5	$+1$
-20	-5 en 4	-1
-20	-10 en 2	-8
-20	-20 en 1	-19

$$y = (x - 5)(x + 4)$$

b Het product is $+2$ en de som is -3 .

product	getallen	som
$+2$	1 en 2	$+3$
$+2$	-1 en -2	-3

$$q = (p - 1)(p - 2)$$

e Het product is $+64$ en de som is $+16$.

product	getallen	som
$+64$	1 en 64	$+65$
$+64$	2 en 32	$+34$
$+64$	4 en 16	$+20$
$+64$	8 en 8	$+16$

$$k = (a + 8)(a + 8)$$

c Het product is $+20$ en de som is $+12$.

product	getallen	som
$+20$	1 en 20	$+21$
$+20$	2 en 10	$+12$
$+20$	4 en 5	$+9$

$$v = (d + 2)(d + 10)$$

f Het product is -26 en de som is -11 .

product	getallen	som
-26	-1 en 26	$+25$
-26	-2 en 13	$+11$
-26	-13 en 2	-11
-26	-26 en 1	-25

$$m = (t - 13)(t + 2)$$

V5 a De vergelijking $A \ 5g^2 - 8 = 27$ kun je door een bordje te leggen oplossen.

b $5g^2 = 35$

$$g^2 = 7$$

$$g = \sqrt{7} \text{ of } g = -\sqrt{7}$$

c De vergelijking $D \ (2x - 6)(x + 3) = 0$ is al op nul herleid en ook ontbonden in factoren.

$$2x - 6 = 0 \text{ of } x + 3 = 0$$

$$2x = 6 \text{ of } x = -3$$

$$x = 3 \text{ of } x = -3$$

d B $7b^2 = 21b$

$$7b^2 - 21b = 0$$

$$7b(b - 3) = 0$$

$$7b = 0 \text{ of } b - 3 = 0$$

$$b = 0 \text{ of } b = 3$$

C $a^2 + 8a = -16$

$$a^2 + 8a + 16 = 0$$

$$(a + 4)(a + 4) = 0$$

$$a + 4 = 0 \text{ of } a + 4 = 0$$

$$a = -4$$

2 Parabolen

E $k^2 - 30 = k$

$$k^2 - k - 30 = 0$$

$$(k - 6)(k + 5) = 0$$

$$k - 6 = 0 \text{ of } k + 5 = 0$$

$$k = 6 \text{ of } k = -5$$

V6 a $4a^2 + 8a = 0$

$$4a(a + 2) = 0$$

$$4a = 0 \text{ of } a + 2 = 0$$

$$a = 0 \text{ of } a = -2$$

b $3w^2 = 5w$

$$3w^2 - 5w = 0$$

$$w(3w - 5) = 0$$

$$w = 0 \text{ of } 3w - 5 = 0$$

$$w = 0 \text{ of } w = 1\frac{2}{3}$$

c $5h^2 + 5 = -5$

$$5h^2 = -10$$

$$h^2 = -2$$

kan niet

d $(2s - 4)(6 - s) = 0$

$$2s - 4 = 0 \text{ of } 6 - s = 0$$

$$2s = 4 \text{ of } s = 6$$

$$s = 2 \text{ of } s = 6$$

e $3n^2 = 27$

$$n^2 = 9$$

$$n = 3 \text{ of } n = -3$$

f $4x(5 - 2x) = 0$

$$4x = 0 \text{ of } 5 - 2x = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 2x = 5$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2\frac{1}{2}$$

g $(g - 12)^2 = 16$

$$g - 12 = 4 \text{ of } g - 12 = -4$$

$$g = 16 \text{ of } g = 8$$

h $b^2 - 7b + 10 = 2b - 4$

$$b^2 - 9b + 14 = 0$$

$$(b - 7)(b - 2) = 0$$

$$b - 7 = 0 \text{ of } b - 2 = 0$$

$$b = 7 \text{ of } b = 2$$

2.1 Parabolen

intro Als er een negatief getal voor x^2 staat, dan is de grafiek een bergparabool, dus de functie A $h(a) = 0,01a^2 + 0,5a$ valt af.

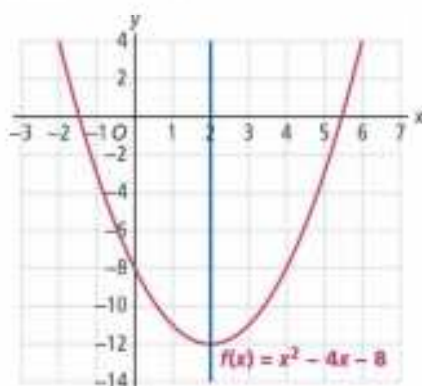
Invullen van bijvoorbeeld $a = 10$ geeft B $h(10) = -0,01 \times 10^2 = -1$ en

C $h(10) = -0,01 \times 10^2 + 0,5 \times 10 = -1 + 5 = 4$.

Bij de hoogte van de bal kan de functie C $h(a) = -0,01a^2 + 0,5a$ horen.

1 a b

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-3	-8	-11	-12	-11	-8	-3



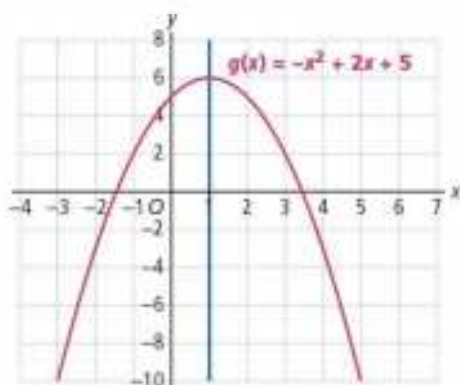
c De formule van de symmetrieas is $x = 2$.

d De coördinaten van het laagste punt van de grafiek zijn $(2, -12)$.

2 a $g(-2) = -(-2)^2 + 2 \times -2 + 5 = -4 - 4 + 5 = -3$

b c

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	-3	2	5	6	5	2	-3



d De formule van de symmetrieas is $x = 1$.

e De coördinaten van het hoogste punt van de grafiek zijn $(1, 6)$.

3 a Het getal voor x^2 is positief, dus de grafiek is een dalparabool.

b Het getal voor x^2 is negatief, dus de grafiek is een bergparabool.

c Het getal voor x^2 is negatief, dus de grafiek is een bergparabool.

d Het getal voor x^2 is positief, dus de grafiek is een dalparabool.

4 a Grafiek 1 is een bergparabool.

b Bij grafiek 1 hoort de functie $f(x) = -x^2 - 6x - 7$. Dat kun je aan het functievoorschrift zien, omdat voor x^2 een negatief getal staat, dus de grafiek is een bergparabool.

c De symmetrieas van grafiek 1 is de lijn $x = -3$.

d De coördinaten van de top van grafiek 1 zijn $(-3, 2)$.

e Grafiek 2 is een dalparabool.

Bij grafiek 2 hoort de functie $g(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$. Dat kun je aan het functievoorschrift zien, omdat voor x^2 een positief getal staat, dus de grafiek is een dalparabool.

De symmetrieas van grafiek 2 is de lijn $x = 2$.

De coördinaten van de top van grafiek 2 zijn $(2, -1)$.

5 a $f(x) = x(5 - 2x)$

$\times$	5	$-2x$
x	$5x$	$-2x^2$

$$f(x) = 5x - 2x^2$$

b De grafiek van f is een bergparabool, want in het functievoorschrift

$$f(x) = 5x - 2x^2 \text{ staat een negatief getal voor } x^2.$$

c $g(x) = (x - 5)(-x + 4)$

$\times$	$-x$	$+4$
x	$-x^2$	$+4x$
-5	$+5x$	-20

$$g(x) = -x^2 + 9x - 20$$

d De grafiek van g is een bergparabool, want in het functievoorschrift

$$g(x) = -x^2 + 9x - 20 \text{ staat een negatief getal voor } x^2.$$

2 Parabolen

6 a $f(x) = -3(x+4)(x-1)$

$\times$	x	-1
x	x^2	$-x$
$+4$	$+4x$	-4

$$f(x) = -3(x^2 + 3x - 4)$$

- b** Er staat -3 in deze vermenigvuldigtabel, omdat je $x^2 + 3x - 4$ daarmee moet vermenigvuldigen.

c

$\times$	x^2	$+3x$	-4
-3	$-3x^2$	$-9x$	$+12$

- d** Het functievoorschrift van f zonder haakjes geschreven is

$$f(x) = -3x^2 - 9x + 12.$$

- e** De grafiek van f is een bergparabool, want in het functievoorschrift $f(x) = -3x^2 - 9x + 12$ staat een negatief getal voor x^2 .

7 a $f(x) = 2(x+2)(1-x)$

$\times$	1	$-x$
x	x	$-x^2$
$+2$	$+2$	$-2x$

$$f(x) = 2(-x^2 - x + 2)$$

$\times$	$-x^2$	$-x$	$+2$
2	$-2x^2$	$-2x$	$+4$

$$f(x) = -2x^2 - 2x + 4$$

De grafiek van f is een bergparabool, want in het functievoorschrift

$$f(x) = -2x^2 - 2x + 4$$
 staat een negatief getal voor x^2 .

b $g(x) = -5(x+4)(x-4)$

$\times$	x	-4
x	x^2	$-4x$
$+4$	$+4x$	-16

$$g(x) = -5(x^2 - 16)$$

$\times$	x^2	-16
-5	$-5x^2$	$+80$

$$g(x) = -5x^2 + 80$$

De grafiek van g is een bergparabool, want in het functievoorschrift

$$g(x) = -5x^2 + 80$$
 staat een negatief getal voor x^2 .

c $h(x) = -3x(x-8) + 4x^2$

$\times$	x	-8
$-3x$	$-3x^2$	$+24x$

$$h(x) = -3x^2 + 24x + 4x^2$$

$$h(x) = x^2 + 24x$$

De grafiek van h is een dalparabool, want in het functievoorschrift

$$h(x) = x^2 + 24x$$
 staat een positief getal voor x^2 .

d $i(x) = -(7-x)(2+x) - 3x$

$\times$	2	$+x$
7	14	$+7x$
$-x$	$-2x$	$-x^2$

$$i(x) = -(-x^2 + 5x + 14) - 3x$$

$\times$	$-x^2$	$+5x$	$+14$
-1	x^2	$-5x$	-14

$$i(x) = x^2 - 5x - 14 - 3x$$

$$i(x) = x^2 - 8x - 14$$

De grafiek van i is een dalparabool, want in het functievoorschrift

$$i(x) = x^2 - 8x - 14 \text{ staat een positief getal voor } x^2.$$

8 a $f(x) = -3(x+1)^2$

$\times$	x	$+1$
x	x^2	$+x$
$+1$	$+x$	$+1$

$$f(x) = -3(x^2 + 2x + 1)$$

$\times$	x^2	$+2x$	$+1$
-3	$-3x^2$	$-6x$	-3

$$f(x) = -3x^2 - 6x - 3$$

b De grafiek van f is een bergparabool, want in het functievoorschrift

$$f(x) = -3x^2 - 6x - 3 \text{ staat een negatief getal voor } x^2.$$

c $g(x) = 2(x-7)^2$

$\times$	x	-7
x	x^2	$-7x$
-7	$-7x$	$+49$

$$g(x) = 2(x^2 - 14x + 49)$$

$\times$	x^2	$-14x$	$+49$
2	$2x^2$	$-28x$	$+98$

$$g(x) = 2x^2 - 28x + 98$$

De grafiek van g is een dalparabool, want in het functievoorschrift

$$g(x) = 2x^2 - 28x + 98 \text{ staat een positief getal voor } x^2.$$

$$h(x) = -(5-x)^2$$

$\times$	5	$-x$
5	25	$-5x$
$-x$	$-5x$	$+x^2$

$$h(x) = -(x^2 - 10x + 25)$$

$\times$	x^2	$-10x$	$+25$
-1	$-x^2$	$+10x$	-25

$$h(x) = -x^2 + 10x - 25$$

De grafiek van h is een bergparabool, want in het functievoorschrift

$$h(x) = -x^2 + 10x - 25 \text{ staat een negatief getal voor } x^2.$$

2 Parabolen

9 A $h(a) = 0,3a(a - 8) + 2,1$ B $h(a) = -0,3a(a - 8) + 2,1$

$\times$	a	-8
$0,3a$	$0,3a^2$	$-2,4a$

$$h(a) = 0,3a^2 - 2,4a + 2,1$$

$\times$	a	-8
$-0,3a$	$-0,3a^2$	$+2,4a$

$$h(a) = -0,3a^2 + 2,4a + 2,1$$

C $h(a) = -0,3a(8 - a) + 2,1$

$\times$	8	$-a$
$-0,3a$	$-2,4a$	$+0,3a^2$

$$h(a) = 0,3a^2 - 2,4a + 2,1$$

$$h(a) = 0,3a^2 - 2,4a + 2,1$$

De grafiek moet een bergparabool zijn, dus in het functievoorschrift moet een negatief getal voor a^2 staan.

Bij de hoogte van de bal kan de functie B $h(a) = -0,3a(a - 8) + 2,1$ horen.

07 a $f(x) = 2(x + 6)(2 + x) - 3x^2$

$\times$	2	$+x$
x	$2x$	$+x^2$

$+6$	$+12$	$+6x$
------	-------	-------

$$f(x) = 2(x^2 + 8x + 12) - 3x^2$$

$$f(x) = 2(x^2 + 8x + 12) - 3x^2$$

$\times$	x^2	$+8x$	$+12$
2	$2x^2$	$+16x$	$+24$

$$f(x) = 2x^2 + 16x + 24 - 3x^2$$

$$f(x) = -x^2 + 16x + 24$$

$$f(x) = -x^2 + 16x + 24$$

b De grafiek van f is een bergparabool, want in het functievoorschrift $f(x) = -x^2 + 16x + 24$ staat een negatief getal voor x^2 .

c $g(x) = -2(x - 3)(1 + x)$

$\times$	1	$+x$
x	x	$+x^2$

-3	-3	$-3x$
------	------	-------

$$g(x) = -2(x^2 - 2x - 3)$$

$$g(x) = -2(x^2 - 2x - 3)$$

$\times$	x^2	$-2x$	-3
-2	$-2x^2$	$+4x$	$+6$

$$g(x) = -2x^2 + 4x + 6$$

$$g(x) = -2x^2 + 4x + 6$$

De grafiek van g is een bergparabool, want in het functievoorschrift $g(x) = -2x^2 + 4x + 6$ staat een negatief getal voor x^2 .

d $h(x) = -(x - 6)(3 + x)$

$\times$	3	$+x$
x	$3x$	$+x^2$

-6	-18	$-6x$
------	-------	-------

$$h(x) = -(x^2 - 3x - 18)$$

$$h(x) = -(x^2 - 3x - 18)$$

$\times$	x^2	$-3x$	-18
-1	$-x^2$	$+3x$	$+18$

$$h(x) = -x^2 + 3x + 18$$

$$h(x) = -x^2 + 3x + 18$$

De grafiek van h is een bergparabool, want in het functievoorschrift $h(x) = -x^2 + 3x + 18$ staat een negatief getal voor x^2 .

e $i(x) = 3x(x - 5) - 2x^2$

$\times$	x	-5
----------	-----	------

$3x$	$3x^2$	$-15x$
------	--------	--------

$$i(x) = 3x^2 - 15x - 2x^2$$

$$i(x) = x^2 - 15x$$

De grafiek van i is een dalparabool, want in het functievoorschrift

$$i(x) = x^2 - 15x \text{ staat een positief getal voor } x^2.$$

08 a $f(x) = -(x + 4)^2$

$\times$	x	$+4$
----------	-----	------

x	x^2	$+4x$
-----	-------	-------

$+4$	$+4x$	$+16$
------	-------	-------

$$f(x) = -(x^2 + 8x + 16)$$

$\times$	x^2	$+8x$	$+16$
----------	-------	-------	-------

-1	$-x^2$	$-8x$	-16
------	--------	-------	-------

$$f(x) = -x^2 - 8x - 16$$

b De grafiek van f is een bergparabool, want in het functievoorschrift

$$f(x) = -x^2 - 8x - 16 \text{ staat een negatief getal voor } x^2.$$

c $g(x) = -2(x + 5)^2$

$\times$	x	$+5$
----------	-----	------

x	x^2	$+5x$
-----	-------	-------

$+5$	$+5x$	$+25$
------	-------	-------

$$g(x) = -2(x^2 + 10x + 25)$$

$\times$	x^2	$+10x$	$+25$
----------	-------	--------	-------

-2	$-2x^2$	$-20x$	-50
------	---------	--------	-------

$$g(x) = -2x^2 - 20x - 50$$

De grafiek van g is een bergparabool, want in het functievoorschrift

$$g(x) = -2x^2 - 20x - 50 \text{ staat een negatief getal voor } x^2.$$

d $h(x) = 4(3 - x)^2$

$\times$	3	$-x$
----------	-----	------

3	9	$-3x$
-----	-----	-------

$-x$	$-3x$	$+x^2$
------	-------	--------

$$h(x) = 4(x^2 - 6x + 9)$$

$\times$	x^2	$-6x$	$+9$
----------	-------	-------	------

4	$4x^2$	$-24x$	$+36$
-----	--------	--------	-------

$$h(x) = 4x^2 - 24x + 36$$

De grafiek van h is een dalparabool, want in het functievoorschrift

$$h(x) = 4x^2 - 24x + 36 \text{ staat een positief getal voor } x^2.$$

2 Parabolen

e $i(x) = -(8-x)^2$

$\times$	8	$-x$
8	64	$-8x$
$-x$	$-8x$	$+x^2$

$$i(x) = -(x^2 - 16x + 64)$$

$\times$	x^2	$-16x$	$+64$
-1	$-x^2$	$+16x$	-64

$$i(x) = -x^2 + 16x - 64$$

De grafiek van i is een bergparabool, want in het functievoorschrift

$i(x) = -x^2 + 16x - 64$ staat een negatief getal voor x^2 .

U1 a Invullen van $c = 3$ geeft $f(x) = -(2x+3)^2 + 3x^2$.

$\times$	$2x$	$+3$
$2x$	$4x^2$	$+6x$
$+3$	$+6x$	$+9$

$$f(x) = -(4x^2 + 12x + 9) + 3x^2$$

$\times$	$4x^2$	$+12x$	$+9$
-1	$-4x^2$	$-12x$	-9

$$f(x) = -4x^2 - 12x - 9 + 3x^2$$

$$f(x) = -x^2 - 12x - 9$$

De grafiek van f is een bergparabool, want in het functievoorschrift

$f(x) = -x^2 - 12x - 9$ staat een negatief getal voor x^2 .

- b Je kunt het functievoorschrift schrijven als $f(x) = -4x^2 - 12x - 9 + cx^2$, oftewel als $f(x) = (-4 + c)x^2 - 12x - 9$.

De grafiek van f is een dalparabool als er een positief getal voor x^2 staat.

Dat is zo als $-4 + c > 0$, oftewel als $c > 4$.

- c Als $c = 4$, dan krijg je $f(x) = (-4 + 4)x^2 - 12x - 9$, oftewel

$f(x) = -12x - 9$. De grafiek is dan een rechte lijn.

U2 Als je in het functievoorschrift $g(x) = -3(x-4)^2$ de haakjes om $(x-4)^2$ weg zou werken, dan komt er een positief getal voor x^2 te staan.

Als je dat vervolgens met -3 zou vermenigvuldigen, dan komt er een negatief getal voor x^2 te staan, dus de grafiek van g is een bergparabool.

2.2 Symmetrie en top

intro Na 0 seconden en na 1,0 seconden is de hoogte van de tennisbal 90 cm.

De baan van de tennisbal door de lucht heeft de vorm van een parabool, dus midden tussen 0 seconden en 1,0 seconden is de tennisbal op zijn hoogst.

De tennisbal is na 0,5 seconden op zijn hoogst.

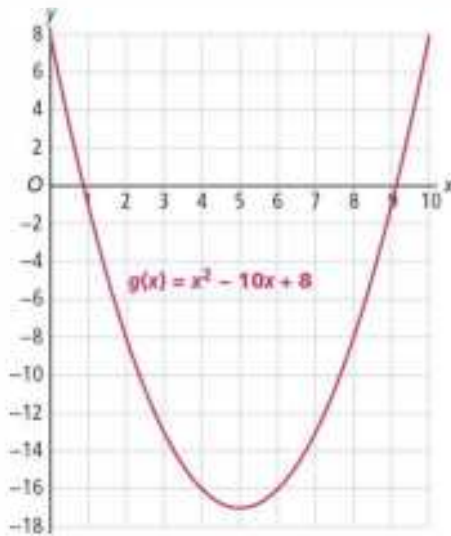
10 a

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	47	32	19	8	-1	-8	-13

- b De y -waarden in de tabel dalen steeds, maar ze dalen wel steeds minder. Dit is geen geschikte tabel om de parabool te tekenen, want de coördinaten van de top zijn nog niet af te lezen.

c Dit is wel een geschikte tabel, want de coördinaten van de top staan er in.

d	x	2	3	4	5	6	7	8
	g(x)	-8	-13	-16	-17	-16	-13	-8



- 11 a $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 + 4 = 4$
 b Als de lijn de parabool snijdt, dan moet zowel $y = 4$ als $f(x) = x^2 - 2x + 4$ gelden, dus moet $x^2 - 2x + 4 = 4$ gelden.
 c $x^2 - 2x + 4 = 4$
 $x^2 - 2x = 0$
 $x(x - 2) = 0$
 $x = 0$ of $x - 2 = 0$
 $x = 0$ of $x = 2$
 d De symmetrieas ligt midden tussen $x = 0$ en $x = 2$, dus de x -coördinaat van de top is 1.
 e De y -coördinaat van de top is $f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 4 = 1 - 2 + 4 = 3$.

- 12 a $f(0) = 0^2 + 4 \times 0 - 5 = -5$
 $x^2 + 4x - 5 = -5$
 $x^2 + 4x = 0$
 $x(x + 4) = 0$
 $x = 0$ of $x + 4 = 0$
 $x = 0$ of $x = -4$
 De x -coördinaat van de top is -2 .
 De y -coördinaat van de top is $f(-2) = (-2)^2 + 4 \times -2 - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$.
 De coördinaten van de top van de parabool zijn $(-2, -9)$.
 b $g(0) = 0^2 - 7 \times 0 + 3 = 3$
 $x^2 - 7x + 3 = 3$
 $x^2 - 7x = 0$
 $x(x - 7) = 0$
 $x = 0$ of $x - 7 = 0$
 $x = 0$ of $x = 7$
 De x -coördinaat van de top is $3,5$.
 De y -coördinaat van de top is
 $g(3,5) = 3,5^2 - 7 \times 3,5 + 3 = 12,25 - 24,5 + 3 = -9,25$.
 De coördinaten van de top van de parabool zijn $(3,5; -9,25)$.

2 Parabolen

$$\begin{aligned} \text{c } h(0) &= -0,5 \times 0^2 + 8 \times 0 - 2 = -2 \\ -0,5x^2 + 8x - 2 &= -2 \\ -0,5x^2 + 8x &= 0 \\ -0,5x(x - 16) &= 0 \\ -0,5x &= 0 \text{ of } x - 16 = 0 \\ x &= 0 \text{ of } x = 16 \end{aligned}$$

De x -coördinaat van de top is 8.

De y -coördinaat van de top is $h(8) = -0,5 \times 8^2 + 8 \times 8 - 2 = -32 + 64 - 2 = 30$.

De coördinaten van de top van de parabool zijn (8, 30).

$$\begin{aligned} \text{d } i(0) &= 2 \times 0^2 - 10 \times 0 = 0 \\ 2x^2 - 10x &= 0 \\ 2x(x - 5) &= 0 \\ 2x &= 0 \text{ of } x - 5 = 0 \\ x &= 0 \text{ of } x = 5 \end{aligned}$$

De x -coördinaat van de top is 2,5.

De y -coördinaat van de top is

$$i(2,5) = 2 \times 2,5^2 - 10 \times 2,5 = 12,5 - 25 = -12,5.$$

De coördinaten van de top van de parabool zijn (2,5; -12,5).

13 a Bij punt A en bij punt B is de hoogte 0, dus dan moet $a - 0,01a^2 = 0$ gelden.

$$\begin{aligned} \text{b } a - 0,01a^2 &= 0 \\ a(1 - 0,01a) &= 0 \\ a &= 0 \text{ of } 1 - 0,01a = 0 \\ a &= 0 \text{ of } 0,01a = 1 \\ a &= 0 \text{ of } a = 100 \end{aligned}$$

c De afstand van punt A tot punt B is 100 meter.

d De boog is in het midden, dus bij 50 meter, het hoogst.

$$\text{De maximale hoogte van de boog is } 50 - 0,01 \times 50^2 = 50 - 25 = 25 \text{ meter.}$$

$$\text{14 a } (x - 3)(x + 7) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ of } x + 7 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = -7$$

De coördinaten van de snijpunten met de x -as zijn (3, 0) en (-7, 0).

b De x -coördinaat van de top ligt midden tussen $x = 3$ en $x = -7$, dus de x -coördinaat van de top is -2.

$$\text{c } k(-2) = (-2 - 3)(-2 + 7) = -5 \times 5 = -25$$

De coördinaten van de top van de parabool zijn (-2, -25).

$$\text{15 a } (x + 2)(x + 10) = 0$$

$$x + 2 = 0 \text{ of } x + 10 = 0$$

$$x = -2 \text{ of } x = -10$$

De coördinaten van de snijpunten met de x -as zijn (-2, 0) en (-10, 0).

b De x -coördinaat van de top is -6.

$$f(-6) = (-6 + 2)(-6 + 10) = -4 \times 4 = -16$$

De coördinaten van de top van de parabool zijn (-6, -16).

$$\text{c } (x - 4)(x + 6) = 0$$

$$x - 4 = 0 \text{ of } x + 6 = 0$$

$$x = 4 \text{ of } x = -6$$

De coördinaten van de snijpunten met de x -as zijn (4, 0) en (-6, 0).

De x -coördinaat van de top is -1.

$$g(-1) = (-1 - 4)(-1 + 6) = -5 \times 5 = -25$$

De coördinaten van de top van de parabool zijn (-1, -25).

$$(x+1)(x-5) = 0$$

$$x+1 = 0 \text{ of } x-5 = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 5$$

De coördinaten van de snijpunten met de x -as zijn $(-1, 0)$ en $(5, 0)$.

De x -coördinaat van de top is 2.

$$h(2) = (2+1)(2-5) = 3 \times -3 = -9$$

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(2, -9)$.

- 16 a** Lijn m valt af, want bij de formule $y = 4$ hoort een horizontale lijn.

De parabool bij de functie $p(x) = x^2 - 3x - 4$ snijdt de y -as in het punt $(0, -4)$. Door dat punt gaat ook lijn l . Lijn l hoort bij de formule $y = -4$.

b $x^2 - 3x - 4 = -4$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x - 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 3$$

De x -coördinaat van de top is 1,5. De y -coördinaat van de top is

$$p(1,5) = 1,5^2 - 3 \times 1,5 - 4 = 2,25 - 4,5 - 4 = -6,25.$$

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(1,5; -6,25)$.

- c** De snijpunten van parabool p met lijn k hebben dezelfde y -coördinaat.

De x -coördinaat van de top ligt midden tussen de x -coördinaten van die snijpunten.

- d** De snijpunten van parabool p met lijn m hebben niet dezelfde y -coördinaat.

De x -coördinaat van de top ligt niet midden tussen de x -coördinaten van die snijpunten.

012 a $f(0) = 0^2 - 6 \times 0 + 7 = 7$

b $x^2 - 6x + 7 = 7$

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x(x-6) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x - 6 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 6$$

De x -coördinaat van punt B is 6.

- c** De x -coördinaat van de top ligt midden tussen $x = 0$ en $x = 6$, dus de x -coördinaat van de top is 3.

- d** De y -coördinaat van de top is $f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 7 = 9 - 18 + 7 = -2$.

- e** De coördinaten van de top van de parabool zijn $(3, -2)$.

f $g(0) = 0^2 + 3 \times 0 - 2 = -2$

$$x^2 + 3x - 2 = -2$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x+3) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x + 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -3$$

De x -coördinaat van de top is $-1,5$. De y -coördinaat van de top is

$$g(-1,5) = (-1,5)^2 + 3 \times -1,5 - 2 = 2,25 - 4,5 - 2 = -4,25.$$

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(-1,5; -4,25)$.

g $h(0) = 0,5 \times 0^2 + 10 \times 0 - 4 = -4$

$$0,5x^2 + 10x - 4 = -4$$

$$0,5x^2 + 10x = 0$$

$$0,5x(x+20) = 0$$

$$0,5x = 0 \text{ of } x + 20 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -20$$

De x -coördinaat van de top is -10 . De y -coördinaat van de top is

$$h(-10) = 0,5 \times (-10)^2 + 10 \times -10 - 4 = 50 - 100 - 4 = -54.$$

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(-10, -54)$.

2 Parabolen

h $i(0) = 0^2 - 6 \times 0 = 0$

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x(x - 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x - 6 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 6$$

De x -coördinaat van de top is 3.

De y -coördinaat van de top is $i(3) = 3^2 - 6 \times 3 = 9 - 18 = -9$.

De coördinaten van de top van de parabool zijn (3, -9).

015 a $(x + 8)(x - 4) = 0$

$$x + 8 = 0 \text{ of } x - 4 = 0$$

$$x = -8 \text{ of } x = 4$$

De coördinaten van de snijpunten met de x -as zijn (-8, 0) en (4, 0).

b De x -coördinaat van de top ligt midden tussen $x = -8$ en $x = 4$, dus de x -coördinaat van de top is -2.

c $g(-2) = (-2 + 8)(-2 - 4) = 6 \times -6 = -36$, dus de coördinaten van de top van de parabool zijn (-2, -36).

U3 $f(0) = 0^2 - 5 \times 0 - 6 = -6$, dus de coördinaten van punt A zijn (0, -6).

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x - 6)(x + 1) = 0$$

$$x - 6 = 0 \text{ of } x + 1 = 0$$

$$x = 6 \text{ of } x = -1$$

De coördinaten van punt B zijn (6, 0).

zijde	kwadraat
OA = 6	36
OB = 6	36 +
AB = ...	72

De lengte van lijnstuk AB is $\sqrt{72}$.

U4 a Invullen van $b = -6$ en $c = -8$ geeft $g(x) = x^2 - 6x - 8$.

$$g(0) = 0^2 - 6 \times 0 - 8 = -8$$

$$x^2 - 6x - 8 = -8$$

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x(x - 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x - 6 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 6$$

De x -coördinaat van de top is 3.

De y -coördinaat van de top is $g(3) = 3^2 - 6 \times 3 - 8 = 9 - 18 - 8 = -17$.

De coördinaten van de top van de bijbehorende parabool zijn (3, -17).

b Invullen van $c = -3$ geeft $g(x) = x^2 + bx - 3$.

Invullen van $x = 5$ en $y = -28$ geeft

$$-28 = 5^2 + b \times 5 - 3$$

$$-28 = 25 + 5b - 3$$

$$-28 = 22 + 5b$$

$$5b = -50$$

$$b = -10$$

Dit geeft $g(x) = x^2 - 10x - 3$.

$$g(0) = 0^2 - 10 \times 0 - 3 = -3$$

$$x^2 - 10x - 3 = -3$$

2 Parabolen

19 a $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 + 5 = 5$

$$x^2 - 2x + 5 = 5$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

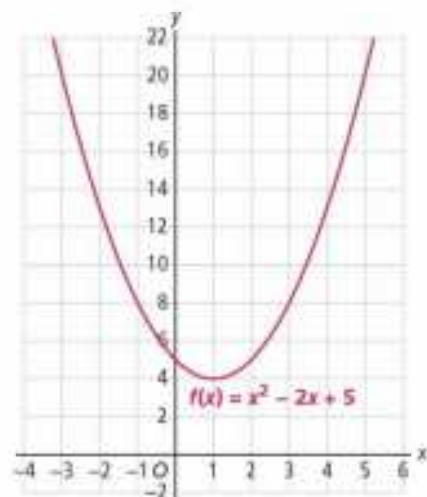
$$x = 0 \text{ of } x - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2$$

De x -coördinaat van de top is 1.

De y -coördinaat van de top is $f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 5 = 1 - 2 + 5 = 4$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	20	13	8	5	4	5	8	13	20



b $g(0) = -0^2 - 9 \times 0 = 0$

$$-x^2 - 9x = 0$$

$$-x(x + 9) = 0$$

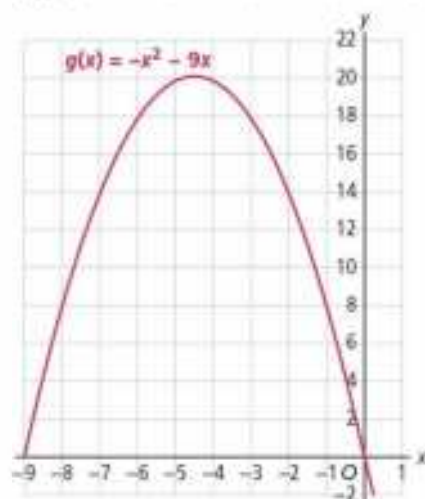
$$-x = 0 \text{ of } x + 9 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -9$$

De x -coördinaat van de top is $-4,5$. De y -coördinaat van de top is

$$g(-4,5) = -(-4,5)^2 - 9 \times -4,5 = -20,25 + 40,5 = 20,25.$$

x	-8	-7	-6	-5	-4,5	-4	-3	-2	-1
$g(x)$	8	14	18	20	20,25	20	18	14	8



c $h(0) = 2 \times 0^2 + 4 \times 0 - 5 = -5$

$$2x^2 + 4x - 5 = -5$$

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$2x(x + 2) = 0$$

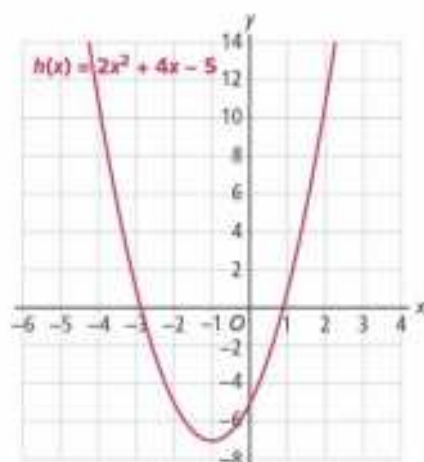
$$2x = 0 \text{ of } x + 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -2$$

De x -coördinaat van de top is -1 . De y -coördinaat van de top is

$$h(-1) = 2 \times (-1)^2 + 4 \times -1 - 5 = 2 - 4 - 5 = -7.$$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	25	11	1	-5	-7	-5	1	11	25



20 a $(x + 6)(x - 8) = 0$

$$x + 6 = 0 \text{ of } x - 8 = 0$$

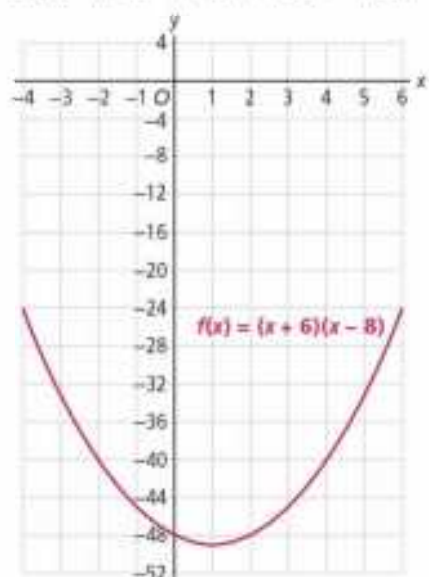
$$x = -6 \text{ of } x = 8$$

De x -coördinaat van de top ligt midden tussen $x = -6$ en $x = 8$, dus de x -coördinaat van de top is 1 .

b $f(1) = (1 + 6)(1 - 8) = 7 \times -7 = -49$, dus de coördinaten van de top van de parabool zijn $(1, -49)$.

c

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-33	-40	-45	-48	-49	-48	-45	-40	-33



2 Parabolen

21 a $(x+8)(x-2) = 0$

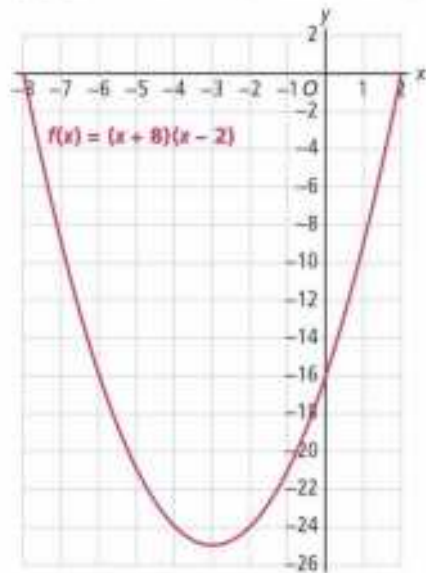
$$x+8=0 \text{ of } x-2=0$$

$$x=-8 \text{ of } x=2$$

De x -coördinaat van de top is -3 .

De y -coördinaat van de top is $f(-3) = (-3+8)(-3-2) = 5 \times -5 = -25$.

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	-9	-16	-21	-24	-25	-24	-21	-16	-9



b $(7-x)(x+5) = 0$

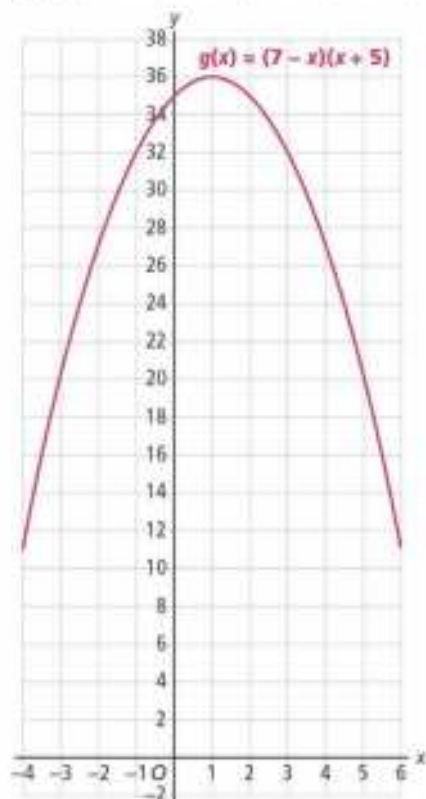
$$7-x=0 \text{ of } x+5=0$$

$$x=7 \text{ of } x=-5$$

De x -coördinaat van de top is 1 .

De y -coördinaat van de top is $g(1) = (7-1)(1+5) = 6 \times 6 = 36$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	20	27	32	35	36	35	32	27	20



c $(x-9)(-x+3) = 0$

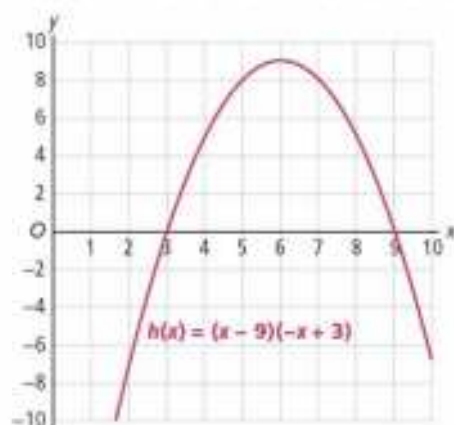
$x-9 = 0$ of $-x+3 = 0$

$x = 9$ of $x = 3$

De x -coördinaat van de top is 6.

De y -coördinaat van de top is $h(6) = (6-9)(-6+3) = -3 \times -3 = 9$.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h(x)$	-7	0	5	8	9	8	5	0	-7



22 a $h(0) = -5 \times 0^2 + 10 \times 0 + 120 = 120$

$-5t^2 + 10t + 120 = 120$

$-5t^2 + 10t = 0$

$-5t(t-2) = 0$

$-5t = 0$ of $t-2 = 0$

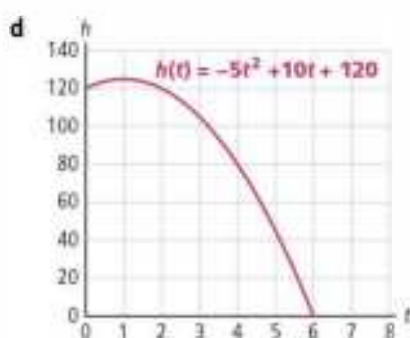
$t = 0$ of $t = 2$

Na 1 seconde is de steen op zijn hoogste punt.

b De steen komt maximaal $-5 \times 1^2 + 10 \times 1 + 120 = -5 + 10 + 120 = 125$ meter hoog.

c

t	0	1	2	3	4	5	6
$h(t)$	120	125	120	105	80	45	0



e Na 6 seconden valt de steen op de grond.

2 Parabolen

019 a $f(0) = 0^2 - 4 \times 0 - 5 = -5$

$$x^2 - 4x - 5 = -5$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x - 4 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4$$

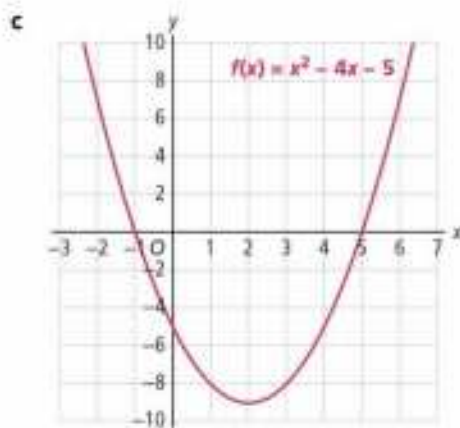
De x -coördinaat van de top is 2.

De y -coördinaat van de top is $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$.

De coördinaten van de top zijn dus (2, -9).

b

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	-5	-8	-9	-8	-5	0



d $g(0) = 0^2 + 6 \times 0 + 7 = 7$

$$x^2 + 6x + 7 = 7$$

$$x^2 + 6x = 0$$

$$x(x + 6) = 0$$

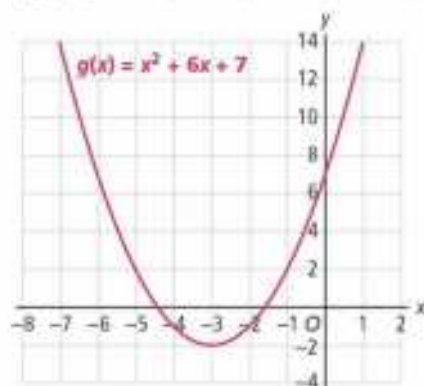
$$x = 0 \text{ of } x + 6 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -6$$

De x -coördinaat van de top is -3.

De y -coördinaat van de top is $g(-3) = (-3)^2 + 6 \times -3 + 7 = 9 - 18 + 7 = -2$.

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$g(x)$	14	7	2	-1	-2	-1	2	7	14



e $h(0) = -0^2 - 8 \times 0 = 0$

$$-x^2 - 8x = 0$$

$$-x(x + 8) = 0$$

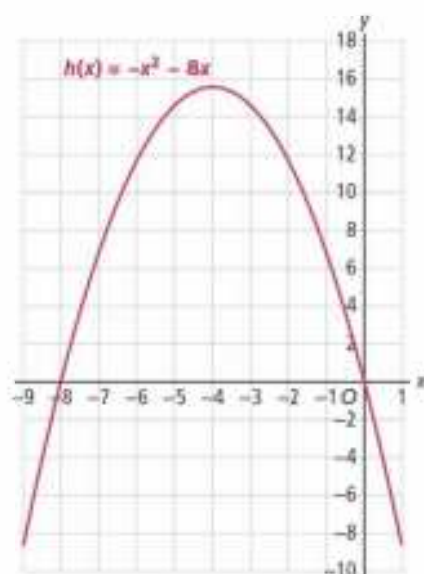
$$-x = 0 \text{ of } x + 8 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -8$$

De x -coördinaat van de top is -4 .

De y -coördinaat van de top is $h(-4) = -(-4)^2 - 8 \times -4 = -16 + 32 = 16$.

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$h(x)$	0	7	12	15	16	15	12	7	0



f $i(0) = 2 \times 0^2 + 6 \times 0 - 3 = -3$

$$2x^2 + 6x - 3 = -3$$

$$2x^2 + 6x = 0$$

$$2x(x + 3) = 0$$

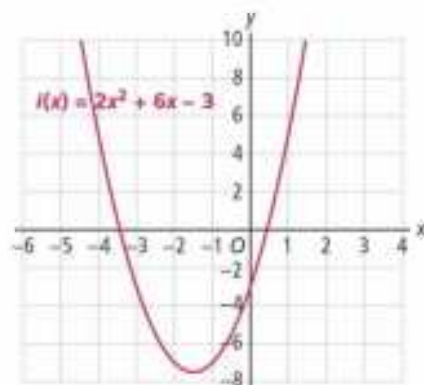
$$2x = 0 \text{ of } x + 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -3$$

De x -coördinaat van de top is $-1,5$. De y -coördinaat van de top is

$$i(-1,5) = 2 \times (-1,5)^2 + 6 \times -1,5 - 3 = 4,5 - 9 - 3 = -7,5.$$

x	-5	-4	-3	-2	-1,5	-1	0	1	2
$i(x)$	17	5	-3	-7	-7,5	-7	-3	5	17



2 Parabolen

U5 a Invullen van $v = 30$ geeft $h(t) = -5t^2 + 30t + 200$.

$$h(0) = -5 \times 0^2 + 30 \times 0 + 200 = 200$$

$$-5t^2 + 30t + 200 = 200$$

$$-5t^2 + 30t = 0$$

$$-5t(t - 6) = 0$$

$$-5t = 0 \text{ of } t - 6 = 0$$

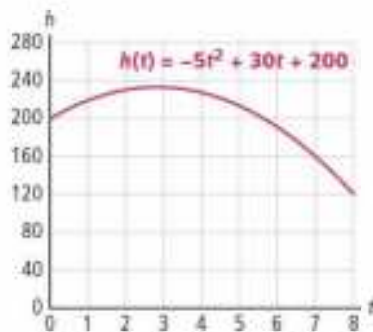
$$t = 0 \text{ of } t = 6$$

Na 3 seconden bereikt de spee de maximale hoogte.

De maximale hoogte is $-5 \times 3^2 + 30 \times 3 + 200 = -45 + 90 + 200 = 245$ cm.

b

t	0	1	2	3	4	5	6
$h(t)$	200	225	240	245	240	225	200



c $-5t^2 + 30t + 200 = 0$

$$t^2 - 6t - 40 = 0$$

$$(t + 4)(t - 10) = 0$$

$$t + 4 = 0 \text{ of } t - 10 = 0$$

$$t = -4 \text{ of } t = 10$$

Na 10 seconden komt de speer dan op de grond.

d $-5t^2 + 15t + 200 = 0$

$$t^2 - 3t - 40 = 0$$

$$(t + 5)(t - 8) = 0$$

$$t + 5 = 0 \text{ of } t - 8 = 0$$

$$t = -5 \text{ of } t = 8$$

Na 8 seconden komt de speer dan op de grond.

Het duurt dan $10 - 8 = 2$ seconden korter voor de speer op de grond komt.

2.4 De vorm en de ligging van de parabool

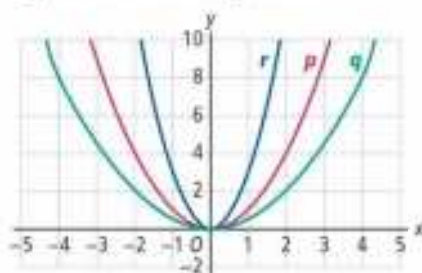
intro Voor het snijpunt met de y -as geldt $f(0) = -0^2 + 4 \times 0 + 5 = 5$,
 $g(0) = \frac{1}{2} \times 0^2 - 2 \times 0 + 3 = 3$ en $h(0) = 0^2 - 4 \times 0 + 5 = 5$, dus functie g hoort
 bij parabool 3.

Het getal voor x^2 is alleen bij functie f negatief en dat is de enige functie
 waar een bergparabool bij hoort, dus functie f hoort bij parabool 1.

Dan hoort functie h bij parabool 2.

- 23 a** De grafieken bij de drie functies zijn dalparabolen, want het getal voor x^2 is bij de drie functies positief.

b



- c** Bij $a = 3$ loopt de parabool het steilst.
d Daar hoort de smalste parabool bij.
- 24 a** De grafiek van f is een bergparabool, want het getal voor x^2 is negatief.
b De grafiek van f is smaller dan de grafiek van g , want -3 ligt verder van 0 af dan -2 .

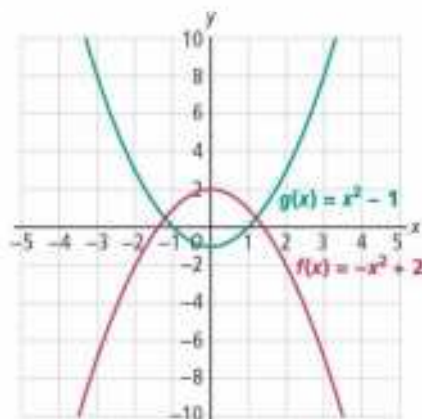
- 25** De grafieken van f , h en k zijn dalparabolen, want de getallen voor x^2 zijn positief. Van smal naar breed zijn dat de grafieken van h , k en f , want de getallen voor x^2 zijn respectievelijk 8, 4 en 1.

Bij de functie f hoort parabool 4, bij de functie h hoort parabool 6 en bij de functie k hoort parabool 5.

De grafieken van g , i en j zijn bergparabolen, want de getallen voor x^2 zijn negatief. Van smal naar breed zijn dat de grafieken van i , g en j , want de getallen voor x^2 zijn respectievelijk -2 , -1 en $-\frac{1}{4}$.

Bij de functie g hoort parabool 2, bij de functie i hoort parabool 3 en bij de functie j hoort parabool 1.

26 a



- b** De toppen van deze parabolen liggen op de y -as.
c De coördinaten van de top van f zijn $(0, 2)$ en de coördinaten van de top van g zijn $(0, -1)$.
d In het functievoorschrift komt geen term met x voor, dus de top ligt op de y -as en daarvoor geldt $x = 0$. De tweede coördinaat is dan het getal na x^2 .

2 Parabolen

- 27 a** Ja, de grafiek van h gaat door de oorsprong, want $h(0) = 2 \times 0^2 - 8 \times 0 = 0$.
- b** $2x^2 - 8x = 0$
 $2x(x - 4) = 0$
 $2x = 0$ of $x - 4 = 0$
 $x = 0$ of $x = 4$
 De x -coördinaat van de top is 2.
 De y -coördinaat van de top is $h(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 = 8 - 16 = -8$.
 De coördinaten van de top van de parabool zijn $(2, -8)$.
- c** Nee, de top van de parabool ligt niet op de y -as.
- 28 a** Van de functie r is de grafiek een bergparabool, want het getal voor x^2 is negatief.
- b** Bij de functies p en r ligt de top van de parabool op de y -as. De coördinaten van de top van p zijn $(0, 9)$ en de coördinaten van de top van r zijn $(0, 0)$.
- c** Bij de functies q en r gaat de parabool door de oorsprong.
- 29** De parabolen bij de functies f en i gaan door de oorsprong, want in de functievoorschriften van f en i is $c = 0$. Bij de functie i hoort een dalparabool, want het getal voor x^2 is positief en bij de functie f hoort een bergparabool, want het getal voor x^2 is negatief.
 Bij de functie f hoort parabool 3 en bij de functie i hoort parabool 4.
 De top van de parabolen bij de functies h en j ligt op de y -as, want in de functievoorschriften van h en j is $b = 0$.
 De parabool bij de functie j is smaller dan de parabool bij de functie h , want -2 ligt verder van 0 af dan -1 .
 Bij de functie h hoort parabool 1 en bij de functie j hoort parabool 2.
 Bij de functie g hoort parabool 5.
- 30 a** Aan de functie zie je direct dat het hoogste punt bij $a = 0$ hoort.
 Bij het hoogste punt is de tunnel 5 meter hoog.
- b** Invullen van $a = 1$ geeft $h(1) = -0,4 \times 1^2 + 5 = -0,4 + 5 = 4,6$.
 Op 1 meter van het midden van de weg is de tunnel 4,6 meter hoog.
- c** Invullen van $a = 2$ geeft $h(2) = -0,4 \times 2^2 + 5 = -1,6 + 5 = 3,4$.
 Op 2 meter van het midden van de weg is de tunnel 3,4 meter hoog.
 Nee, de vrachtwagen kan niet onder de tunnel door zonder over het midden van de weg te rijden, want de vrachtwagen is 3,5 meter hoog.
- d** Invullen van $a = 2$ en $h = 4$ in het functievoorschrift geeft $4 = p \times 2^2 + 5$, oftewel $4 = 4p + 5$, dus $4p = -1$ en $p = -0,25$.
- e** $-0,25x^2 + 5 = 0$
 $-0,25x^2 = -5$
 $x^2 = 20$
 $x = \sqrt{20}$ of $x = -\sqrt{20}$
 De weg in de nieuwe tunnel wordt $2\sqrt{20} \approx 8,94$ meter breed.

- 025** a De grafieken van f en g zijn dalparabolen, want de getallen voor x^2 zijn positief.
- b De grafiek van f is smaller dan de grafiek van g , want 4 ligt verder van 0 af dan 2.
- c De grafieken van f , g , h en j zijn dalparabolen, want de getallen voor x^2 zijn positief. Van smal naar breed zijn dat de grafieken van j , f , g en h , want de getallen voor x^2 zijn respectievelijk 8, 4, 2 en $\frac{1}{2}$.
 Bij de functie f hoort parabool 3, bij de functie g hoort parabool 2, bij de functie h hoort parabool 1 en bij de functie j hoort parabool 4.
 De grafieken van i en k zijn bergparabolen, want de getallen voor x^2 zijn negatief. Van smal naar breed zijn dat de grafieken van i en k , want de getallen voor x^2 zijn respectievelijk -4 en -2 .
 Bij de functie i hoort parabool 6 en bij de functie k hoort parabool 5.

- 029** a De parabool bij de functie f gaat door de oorsprong, want in het functievoorschrift van f is $c = 0$.
- b De top van de parabool bij de functie g ligt op de y -as, want in het functievoorschrift van g is $b = 0$.
- c De parabolen bij de functies f en j gaan door de oorsprong, want in de functievoorschriften van f en j is $c = 0$. Bij de functie j hoort een dalparabool, want het getal voor x^2 is positief en bij de functie f hoort een bergparabool, want het getal voor x^2 is negatief.
 Bij de functie f hoort parabool 1 en bij de functie j hoort parabool 3.
 De top van de parabolen bij de functies g en i ligt op de y -as, want in de functievoorschriften van g en i is $b = 0$. De parabool bij de functie g is smaller dan de parabool bij de functie i , want 2 ligt verder van 0 af dan 1.
 Bij de functie g hoort parabool 4 en bij de functie i hoort parabool 5.
 Bij de functie h hoort parabool 2.

- U6** De parabool gaat door de oorsprong, dus $c = 0$ en het functievoorschrift is van de vorm $f(x) = ax^2 + bx$. De parabool is smaller dan de parabool bij de functie g , dus a moet verder van 0 af liggen dan -3 .
 Twee functievoorschriften die bij deze parabool kunnen horen zijn bijvoorbeeld $f(x) = -5x^2 + 6x$ en $f(x) = 8x^2$.

- U7** De grafiek is een dalparabool, dus $a > 0$.
 De dalparabool is even breed als de parabool bij de functie g , dus a ligt even ver van 0 af als -1 en dan moet gelden dat $a = 1$.
 De grafiek gaat door de oorsprong, dus $c = 0$.
 Het functievoorschrift is van de vorm $f(x) = x^2 + bx$.
 De grafiek gaat door het punt $(2, 10)$, dus moet gelden $10 = 2^2 + b \times 2$, oftewel $10 = 4 + 2b$, dus $2b = 6$ en $b = 3$.

2 Parabolen

2.5 Gemengde opdrachten

- 31** De grafieken bij de functies f , g en i zijn dalparabolen, want het getal voor x^2 is positief.

In de functievoorschriften van de functies g en i is $b = 0$, dus de toppen van de bijbehorende parabolen liggen op de y -as. De top van de parabool bij de functie g is $(0, 2)$ en de top van de parabool bij de functie i is $(0, -4)$.

Bij de functie f hoort parabool 5, bij de functie g hoort parabool 3 en bij de functie i hoort parabool 2.

De grafieken bij de functies h en j zijn bergparabolen, want het getal voor x^2 is negatief. In het functievoorschrift van de functie h is $c = 0$, dus de bijbehorende parabool gaat door de oorsprong.

Bij de functie h hoort parabool 4 en bij de functie j hoort parabool 1.

- 32 a** De grafiek van p is een dalparabool, want het getal voor x^2 is positief.

$$q(x) = -(x-3)(x+3) + 8$$

$\times$	x	$+3$
x	x^2	$+3x$
-3	$-3x$	-9

$$q(x) = -(x^2 - 9) + 8$$

$\times$	x^2	-9
-1	$-x^2$	$+9$

$$q(x) = -x^2 + 9 + 8$$

$$q(x) = -x^2 + 17$$

De grafiek van q is een bergparabool, want in het functievoorschrift

$$q(x) = -x^2 + 17 \text{ staat een negatief getal voor } x^2.$$

$$r(x) = -5x(x+2) + 7$$

$\times$	x	$+2$
$-5x$	$-5x^2$	$-10x$

$$r(x) = -5x^2 - 10x + 7$$

De grafiek van r is een bergparabool, want in het functievoorschrift

$$r(x) = -5x^2 - 10x + 7 \text{ staat een negatief getal voor } x^2.$$

$$s(x) = (x-7)^2 - 49$$

$\times$	x	-7
x	x^2	$-7x$
-7	$-7x$	$+49$

$$s(x) = x^2 - 14x + 49 - 49$$

$$s(x) = x^2 - 14x$$

De grafiek van s is een dalparabool, want in het functievoorschrift

$$s(x) = x^2 - 14x \text{ staat een positief getal voor } x^2.$$

- b** Van de functie s gaat de grafiek door de oorsprong, want in het functievoorschrift $s(x) = x^2 - 14x$ is $c = 0$.
- c** Bij de functie q ligt de top van de parabool op de y -as, want in het functievoorschrift $q(x) = -x^2 + 17$ is $b = 0$.

- 33 a** De coördinaten van de top van de parabool bij de functie f zijn $(0, -5)$.

$$g(0) = 0^2 - 4 \times 0 + 1 = 1$$

$$x^2 - 4x + 1 = 1$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4$$

De x -coördinaat van de top is 2.

$$\text{De } y\text{-coördinaat van de top is } g(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3.$$

De coördinaten van de top van de parabool bij de functie g zijn $(2, -3)$.

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x + 1 = 0 \text{ of } x - 3 = 0$$

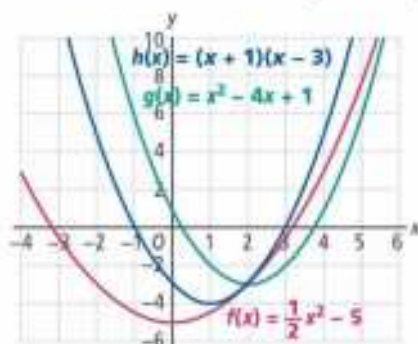
$$x = -1 \text{ of } x = 3$$

De x -coördinaat van de top is 1.

$$\text{De } y\text{-coördinaat van de top is } h(1) = (1 + 1)(1 - 3) = 2 \times -2 = -4.$$

De coördinaten van de top van de parabool bij de functie h zijn $(1, -4)$.

b



- c** Bij de functie f is de parabool het breedst, omdat in het functievoorschrift het getal voor x^2 het dichtst bij 0 ligt.
- d** De symmetrieas van f is $x = 0$, de symmetrieas van g is $x = 2$ en de symmetrieas van h is $x = 1$.
- e** De drie parabolen snijden elkaar in het punt $(2, -3)$.
- 34 a** Martijn gooit de bal vanaf een hoogte van $-5 \times 0^2 + 10 \times 0 + 75 = 75$ meter omhoog.
- b** $-5t^2 + 10t + 75 = 75$
 $-5t^2 + 10t = 0$
 $-5t(t - 2) = 0$
 $-5t = 0 \text{ of } t - 2 = 0$
 $t = 0 \text{ of } t = 2$
 Na 2 seconden is de bal weer op dezelfde hoogte.
- c** De bal komt maximaal $-5 \times 1^2 + 10 \times 1 + 75 = -5 + 10 + 75 = 80$ meter hoog.
- d** $-5t^2 + 10t + 75 = 0$
 $t^2 - 2t - 15 = 0$
 $(t - 5)(t + 3) = 0$
 $t - 5 = 0 \text{ of } t + 3 = 0$
 $t = 5 \text{ of } t = -3$
 Na 5 seconden valt de bal op de grond.
- 35 a** Het getal voor p^2 is negatief, dus de grafiek is een bergparabool en er is sprake van een prijs waarbij de winst maximaal is.
- b** Invullen van $p = 4$ geeft
 $W(4) = -10 \times 4^2 + 160 \times 4 - 280 = -160 + 640 - 280 = 200.$
 Bij deze prijs maakt hij € 200,- winst.

2 Parabolen

- c Invullen van $p = 6$ geeft

$$W(6) = -10 \times 6^2 + 160 \times 6 - 280 = -360 + 960 - 280 = 320.$$

Invullen van $p = 10$ geeft

$$W(10) = -10 \times 10^2 + 160 \times 10 - 280 = -1000 + 1600 - 280 = 320.$$

Zowel bij een prijs van € 6,- als bij een prijs van € 10,- is de winst € 320,-.

- d Invullen van $p = 8$ geeft

$$W(8) = -10 \times 8^2 + 160 \times 8 - 280 = -640 + 1280 - 280 = 360.$$

De maximale winst is € 360,-.

- 36 a Invullen van $a = 2$, $b = -10$ en $c = 2$ geeft $f(x) = 2x^2 - 10x + 2$.

$$f(0) = 2 \times 0^2 - 10 \times 0 + 2 = 2$$

$$2x^2 - 10x + 2 = 2$$

$$2x^2 - 10x = 0$$

$$2x(x - 5) = 0$$

$$2x = 0 \text{ of } x - 5 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 5$$

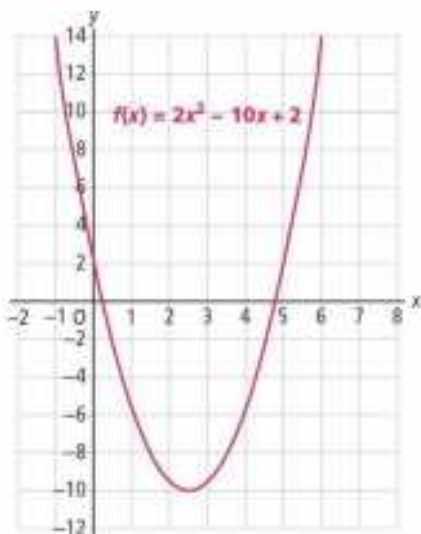
De x -coördinaat van de top is 2,5.

De y -coördinaat van de top is

$$f(2,5) = 2 \times 2,5^2 - 10 \times 2,5 + 2 = 12,5 - 25 + 2 = -10,5.$$

De coördinaten van de top van de bijbehorende parabool zijn (2,5; -10,5).

x	-1	0	1	2	2,5	3	4	5	6
$f(x)$	14	2	-6	-10	-10,5	-10	-6	2	14



- b De bij $b = 16$ horende parabool gaat door de oorsprong, dus $c = 0$ en dat geeft $f(x) = ax^2 + 16x$.

De parabool gaat door het punt (3, -24), dus $-24 = a \times 3^2 + 16 \times 3$, oftewel $-24 = 9a + 48$, dus $9a = -72$ en $a = -8$.

Het functievoorschrift is $f(x) = -8x^2 + 16x$.

$$f(0) = -8 \times 0^2 + 16 \times 0 = 0$$

$$-8x^2 + 16x = 0$$

$$-8x(x - 2) = 0$$

$$-8x = 0 \text{ of } x - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2$$

De x -coördinaat van de top is 1.

De y -coördinaat van de top is $f(1) = -8 \times 1^2 + 16 \times 1 = -8 + 16 = 8$.

De coördinaten van de top van de parabool zijn (1, 8).

- 37 a** Invullen van $a = 0$ geeft $h(0) = 0,01 \times 0^2 - 0,2 \times 0 + 1,2 = 0 + 0 + 1,2 = 1,2$.
De hoogte OA is 1,2 meter.
- b** $0,01a^2 - 0,2a + 1,2 = 1,2$
 $0,01a^2 - 0,2a = 0$
 $0,01a(a - 20) = 0$
 $0,01a = 0$ of $a - 20 = 0$
 $a = 0$ of $a = 20$
 De diameter AB is 20 meter.
- c** De straal van de vijver is 10 meter.
Het wateroppervlak is $\pi \times 10^2 \approx 314 \text{ m}^2$.
- d** Invullen van $a = 10$ geeft
 $h(10) = 0,01 \times 10^2 - 0,2 \times 10 + 1,2 = 1 - 2 + 1,2 = 0,2$.
 In het midden is de vijver $1,2 - 0,2 = 1$ meter diep.

Samenvatting

- S1 a** De grafiek van de functie $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$ is getekend. In het functievoorschrift is het getal voor x^2 positief, dus de grafiek is een dalparabool.
- b** De lijn $x = 4$ is de symmetrieas van de grafiek.
- c** $g(4) = \frac{1}{4} \times 4^2 - 2 \times 4 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$
 De coördinaten van de top zijn $(4, -1)$.
- S2 a** De grafiek van p is een bergparabool, want voor x^2 staat een negatief getal.
- b** $q(x) = (x - 5)(2 - x) + 2x^2$
- | | | |
|------|-------|--------|
| x | 2 | $-x$ |
| x | $2x$ | $-x^2$ |
| -5 | -10 | $+5x$ |
- $q(x) = -x^2 + 7x - 10 + 2x^2$
 $q(x) = x^2 + 7x - 10$
 De grafiek van q is een dalparabool, want in het functievoorschrift $q(x) = x^2 + 7x - 10$ staat een positief getal voor x^2 .
- S3 a** $f(0) = 0^2 + 8 \times 0 - 3 = -3$
 $x^2 + 8x - 3 = -3$
 $x^2 + 8x = 0$
 $x(x + 8) = 0$
 $x = 0$ of $x + 8 = 0$
 $x = 0$ of $x = -8$
 De x -coördinaat van de top is -4 . De y -coördinaat van de top is
 $f(-4) = (-4)^2 + 8 \times -4 - 3 = 16 - 32 - 3 = -19$.
 De coördinaten van de top van de parabool zijn $(-4, -19)$.

2 Parabolen

b $g(0) = -0^2 - 5 \times 0 + 2 = 2$

$$-x^2 - 5x + 2 = 2$$

$$-x^2 - 5x = 0$$

$$-x(x + 5) = 0$$

$$-x = 0 \text{ of } x + 5 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -5$$

De x -coördinaat van de top is $-2,5$. De y -coördinaat van de top is

$$g(-2,5) = -(-2,5)^2 - 5 \times -2,5 + 2 = -6,25 + 12,5 + 2 = 8,25.$$

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(-2,5; 8,25)$.

c $h(0) = 4 \times 0^2 - 8 \times 0 = 0$

$$4x^2 - 8x = 0$$

$$4x(x - 2) = 0$$

$$4x = 0 \text{ of } x - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2$$

De x -coördinaat van de top is 1 .

$$\text{De } y\text{-coördinaat van de top is } h(1) = 4 \times 1^2 - 8 \times 1 = 4 - 8 = -4.$$

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(1, -4)$.

S4 a $f(0) = 0^2 - 10 \times 0 = 0$

$$x^2 - 10x = 0$$

$$x(x - 10) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x - 10 = 0$$

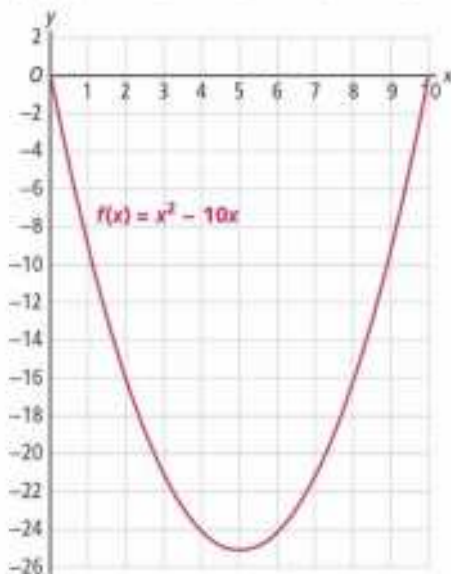
$$x = 0 \text{ of } x = 10$$

De x -coördinaat van de top is 5 .

$$\text{De } y\text{-coördinaat van de top is } f(5) = 5^2 - 10 \times 5 = 25 - 50 = -25.$$

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(5, -25)$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	-9	-16	-21	-24	-25	-24	-21	-16	-9



b $g(0) = -0^2 + 6 \times 0 - 8 = -8$

$$-x^2 + 6x - 8 = -8$$

$$-x^2 + 6x = 0$$

$$-x(x - 6) = 0$$

$$-x = 0 \text{ of } x - 6 = 0$$

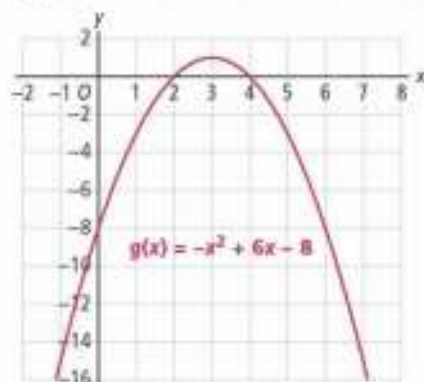
$$x = 0 \text{ of } x = 6$$

De x -coördinaat van de top is 3.

De y -coördinaat van de top is $g(3) = -3^2 + 6 \times 3 - 8 = -9 + 18 - 8 = 1$.

De coördinaten van de top van de parabool zijn (3, 1).

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$g(x)$	-15	-8	-3	0	1	0	-3	-8	-15



c $(x + 2)(x - 6) = 0$

$$x + 2 = 0 \text{ of } x - 6 = 0$$

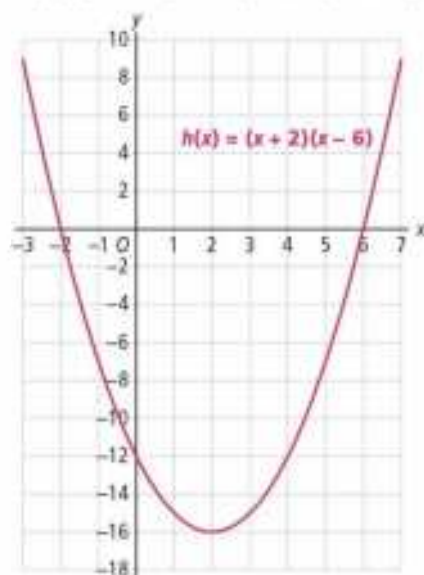
$$x = -2 \text{ of } x = 6$$

De x -coördinaat van de top is 2.

De y -coördinaat van de top is $h(2) = (2 + 2)(2 - 6) = 4 \times -4 = -16$.

De coördinaten van de top van de parabool zijn (2, -16).

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$h(x)$	0	-7	-12	-15	-16	-15	-12	-7	0



2 Parabolen

- S5** In alle functievoorschriften is $b = 0$, dus de toppen van de parabolen liggen op de y -as. De top van de parabool bij de functie i is $(0, 0)$, de toppen van alle andere parabolen is $(0, 8)$, dus de functie i hoort bij parabool 2. De grafieken bij de functies f en g zijn dalparabolen, want het getal voor x^2 is positief. De parabool bij de functie f is smaller dan de parabool bij de functie g , want 3 ligt verder van 0 af dan 1. De functie f hoort bij parabool 1 en de functie g hoort bij parabool 3. De grafieken bij de functies h , j en k zijn bergparabolen, want het getal voor x^2 is negatief. Van smal naar breed zijn dat de parabolen bij de functies j , h en k , want de getallen voor x^2 zijn respectievelijk -3 , -1 en $-0,5$. De functie h hoort bij parabool 5, de functie j hoort bij parabool 6 en de functie k hoort bij parabool 4.
- S6 a** Van de functie q is de grafiek een dalparabool, want het getal voor x^2 is positief.
b Bij de functie q is de parabool het smalst, want 2 ligt verder van 0 af dan -1 .
c Bij de functie p ligt de top van de parabool op de y -as, want in het functievoorschrift is $b = 0$.
 De coördinaten van de top van deze parabool zijn $(0, 9)$.
d Bij de functie q gaat de parabool door de oorsprong, want in het functievoorschrift is $c = 0$.

Test jezelf

- T1 a** De grafiek is een dalparabool, want het getal voor x^2 is positief.
b De grafiek is een bergparabool, want het getal voor x^2 is negatief.
c $h(x) = -(x+5)(1-x) - 2x^2$
- | | | |
|----------|------|--------|
| $\times$ | 1 | $-x$ |
| x | x | $-x^2$ |
| $+5$ | $+5$ | $-5x$ |
- $$h(x) = -(-x^2 - 4x + 5) - 2x^2$$
- | | | | |
|----------|--------|-------|------|
| $\times$ | $-x^2$ | $-4x$ | $+5$ |
| -1 | x^2 | $+4x$ | -5 |
- $$h(x) = x^2 + 4x - 5 - 2x^2$$
- $$h(x) = -x^2 + 4x - 5$$
- De grafiek van h is een bergparabool, want in het functievoorschrift $h(x) = -x^2 + 4x - 5$ staat een negatief getal voor x^2 .
- d** $i(x) = -(x-2)^2 + 2x^2$
- | | | |
|----------|-------|-------|
| $\times$ | x | -2 |
| x | x^2 | $-2x$ |
| -2 | $-2x$ | $+4$ |
- $$i(x) = -(x^2 - 4x + 4) + 2x^2$$
- | | | | |
|----------|--------|-------|------|
| $\times$ | x^2 | $-4x$ | $+4$ |
| -1 | $-x^2$ | $+4x$ | -4 |
- $$i(x) = -x^2 + 4x - 4 + 2x^2$$
- $$i(x) = x^2 + 4x - 4$$
- De grafiek van i is een dalparabool, want in het functievoorschrift $i(x) = x^2 + 4x - 4$ staat een positief getal voor x^2 .

- T2 a** Bij de functies p en r gaat de parabool door de oorsprong, want in het functievoorschrift is $c = 0$.
- b** Bij de functies q en s ligt de top van de parabool op de y -as, want in het functievoorschrift is $b = 0$.
- De coördinaten van de top van de parabool bij de functie q zijn $(0, -4)$ en de coördinaten van de top van de parabool bij de functie s zijn $(0, -5)$.

T3 a $f(0) = -\frac{1}{2} \times 0^2 + 4 \times 0 - 12 = -12$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 12 = -12$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 4x = 0$$

$$-\frac{1}{2}x(x - 8) = 0$$

$$-\frac{1}{2}x = 0 \text{ of } x - 8 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 8$$

De x -coördinaat van de top is 4.

$$\text{De } y\text{-coördinaat van de top is } f(4) = -\frac{1}{2} \times 4^2 + 4 \times 4 - 12 = -8 + 16 - 12 = -4.$$

De coördinaten van de top van de parabool bij de functie f zijn $(4, -4)$.

$$g(0) = -2 \times 0^2 - 4 \times 0 = 0$$

$$-2x^2 - 4x = 0$$

$$-2x(x + 2) = 0$$

$$-2x = 0 \text{ of } x + 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -2$$

De x -coördinaat van de top is -1 .

$$\text{De } y\text{-coördinaat van de top is } g(-1) = -2 \times (-1)^2 - 4 \times -1 = -2 + 4 = 2.$$

De coördinaten van de top van de parabool bij de functie g zijn $(-1, 2)$.

$$h(0) = 0^2 + 2 \times 0 - 1 = -1$$

$$x^2 + 2x - 1 = -1$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -2$$

De x -coördinaat van de top is -1 .

$$\text{De } y\text{-coördinaat van de top is } h(-1) = (-1)^2 + 2 \times -1 - 1 = 1 - 2 - 1 = -2.$$

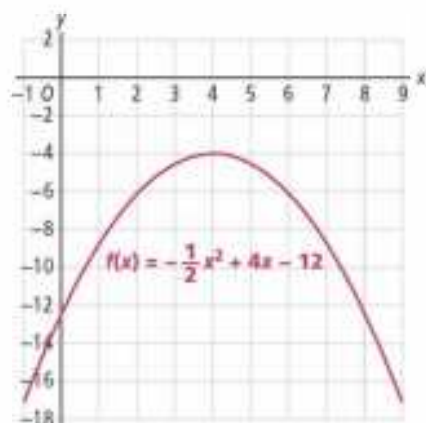
De coördinaten van de top van de parabool bij de functie h zijn $(-1, -2)$.

De coördinaten van de top van de parabool bij de functie i zijn $(0, -7)$, want in het functievoorschrift is $b = 0$.

- b** Bij de functie g is de parabool het smalst, want -2 ligt het verst van 0 af.

c

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	-12	-8,5	-6	-4,5	-4	-4,5	-6	-8,5	-12



2 Parabolen

T4 a Bij $a = 0$ is $h(0) = -0,05 \times 0^2 + 1,2 \times 0 - 4 = -4$, dus de hoogte is -4 meter.
Aan het begin van de brug, dus bij punt P , ligt de boog 4 meter onder het wegdek.

$$\begin{aligned} \text{b} \quad & -0,05a^2 + 1,2a - 4 = -4 \\ & -0,05a^2 + 1,2a = 0 \\ & -0,05a(a - 24) = 0 \\ & -0,05a = 0 \text{ of } a - 24 = 0 \\ & a = 0 \text{ of } a = 24 \end{aligned}$$

De afstand van punt P tot punt Q is 24 meter.

c Het hoogste punt bevindt zich bij $a = 12$.

Invullen van $a = 12$ in het functievoorschrift geeft

$$h(12) = -0,05 \times 12^2 + 1,2 \times 12 - 4 = -7,2 + 14,4 - 4 = 3,2.$$

Het hoogste punt van de boog ligt 3,2 meter boven het wegdek.

T5 De grafieken bij de functies f en g zijn dalparabolen, want het getal voor x^2 is positief.

$f(0) = 0^2 + 0 + 2 = 2$ en $g(0) = 0^2 + 0 - 3 = -3$, dus de functie f hoort bij parabool 3 en de functie g hoort bij parabool 1.

De grafieken bij de functies h en i zijn bergparabolen, want het getal voor x^2 is negatief.

In het functievoorschrift van de functie h is $c = 0$, dus de parabool gaat door de oorsprong. De functie h hoort bij parabool 2.

In het functievoorschrift van de functie i is $b = 0$, dus de top van de parabool ligt op de y -as. De functie i hoort bij parabool 4.

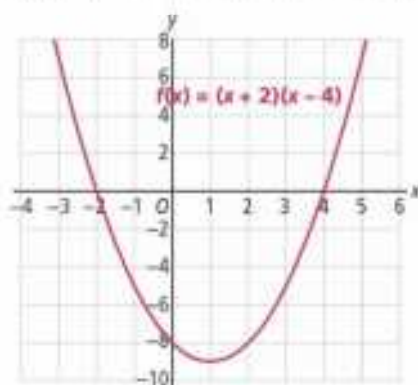
$$\begin{aligned} \text{T6 a} \quad & (x + 2)(x - 4) = 0 \\ & x + 2 = 0 \text{ of } x - 4 = 0 \\ & x = -2 \text{ of } x = 4 \end{aligned}$$

De x -coördinaat van de top is 1.

De y -coördinaat van de top is $f(1) = (1 + 2)(1 - 4) = 3 \times -3 = -9$.

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(1, -9)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7



- b** De formule van de symmetrieas is $x = 1$.
c De coördinaten van dat punt zijn $(-3, 7)$.

- T7 a** Invullen van $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$ en $c = -4$ geeft $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 4$.

$$f(0) = \frac{1}{2} \times 0^2 - 3 \times 0 - 4 = -4$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x - 4 = -4$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$$

$$\frac{1}{2}x(x - 6) = 0$$

$$\frac{1}{2}x = 0 \text{ of } x - 6 = 0$$

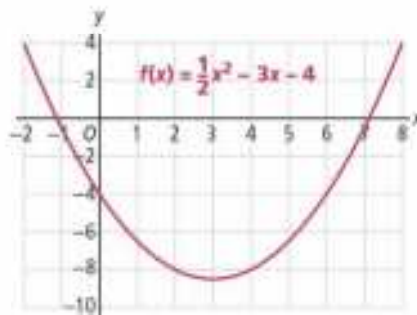
$$x = 0 \text{ of } x = 6$$

De x -coördinaat van de top is 3.

De y -coördinaat van de top is $f(3) = \frac{1}{2} \times 3^2 - 3 \times 3 - 4 = 4,5 - 9 - 4 = -8,5$.

De coördinaten van de top van de bijbehorende parabool zijn (3; -8,5).

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	-0,5	-4	-6,5	-8	-8,5	-8	-6,5	-4	-0,5



- b** Invullen van $a = -2$ geeft $f(x) = -2x^2 + bx + c$.

De parabool gaat door het punt (0, 0) en dat geeft $0 = -2 \times 0^2 + b \times 0 + c$, dus $c = 0$.

De parabool gaat door het punt (6, 0) en dat geeft $0 = -2 \times 6^2 + b \times 6$, oftewel $0 = -72 + 6b$, dus $6b = 72$ en $b = 12$.

Het functievoorschrift is $f(x) = -2x^2 + 12x$.

- T8 a** Invullen van $a = 0$ geeft $h(0) = -0,02 \times 0^2 + 1,6 \times 0 + 1 = 1$.

De bal wordt op een hoogte van 1 meter weggeslagen.

- b** $-0,02a^2 + 1,6a + 1 = 1$

$$-0,02a^2 + 1,6a = 0$$

$$-0,02a(a - 80) = 0$$

$$-0,02a = 0 \text{ of } a - 80 = 0$$

$$a = 0 \text{ of } a = 80$$

Bij $a = 40$ is de hoogte van de bal maximaal. De maximale hoogte van de bal is $-0,02 \times 40^2 + 1,6 \times 40 + 1 = -32 + 64 + 1 = 33$ meter.

- c** Invullen van $a = 70$ geeft

$$h(70) = -0,02 \times 70^2 + 1,6 \times 70 + 1 = -98 + 112 + 1 = 15.$$

Nee, hij kan de bal niet vangen, want waar de veldspeler staat bevindt de bal zich op een hoogte van 15 meter.

Extra oefening

- E1 a** De grafiek is een bergparabool, want het getal voor x^2 is negatief.
b De grafiek is een dalparabool, want het getal voor x^2 is positief.

2 Parabolen

c $h(x) = 3(x+1)(x+2) - 4x^2$

$\times$	x	$+2$
x	x^2	$+2x$
$+1$	$+x$	$+2$

$$h(x) = 3(x^2 + 3x + 2) - 4x^2$$

$\times$	x^2	$+3x$	$+2$
3	$3x^2$	$+9x$	$+6$

$$h(x) = 3x^2 + 9x + 6 - 4x^2$$

$$h(x) = -x^2 + 9x + 6$$

De grafiek van h is een bergparabool, want in het functievoorschrift

$$h(x) = -x^2 + 9x + 6 \text{ staat een negatief getal voor } x^2.$$

d $i(x) = (x+3)^2 - 6x$

$\times$	x	$+3$
x	x^2	$+3x$
$+3$	$+3x$	$+9$

$$i(x) = x^2 + 6x + 9 - 6x$$

$$i(x) = x^2 + 9$$

De grafiek van i is een dalparabool, want in het functievoorschrift

$$i(x) = x^2 + 9 \text{ staat een positief getal voor } x^2.$$

E2 a $f(0) = 0^2 - 12 \times 0 + 4 = 4$

$$x^2 - 12x + 4 = 4$$

$$x^2 - 12x = 0$$

$$x(x - 12) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x - 12 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 12$$

De x -coördinaat van de top is 6.

$$\text{De } y\text{-coördinaat van de top is } f(6) = 6^2 - 12 \times 6 + 4 = 36 - 72 + 4 = -32.$$

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(6, -32)$.

b $g(0) = 2 \times 0^2 + 8 \times 0 - 5 = -5$

$$2x^2 + 8x - 5 = -5$$

$$2x^2 + 8x = 0$$

$$2x(x + 4) = 0$$

$$2x = 0 \text{ of } x + 4 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -4$$

De x -coördinaat van de top is -2 . De y -coördinaat van de top is

$$g(-2) = 2 \times (-2)^2 + 8 \times -2 - 5 = 8 - 16 - 5 = -13.$$

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(-2, -13)$.

c $h(0) = 0^2 + 7 \times 0 = 0$

$$x^2 + 7x = 0$$

$$x(x + 7) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x + 7 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -7$$

De x -coördinaat van de top is $-3,5$. De y -coördinaat van de top is

$$h(-3,5) = (-3,5)^2 + 7 \times -3,5 = 12,25 - 24,5 = -12,25.$$

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(-3,5; -12,25)$.

d $i(0) = 6 \times 0^2 - 24 = -24$

$$6x^2 - 24 = -24$$

$$6x^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

De x -coördinaat van de top is 0.

De y -coördinaat van de top is $i(0) = 6 \times 0^2 - 24 = -24$.

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(0, -24)$.

E3 a $(x-5)(x+7) = 0$

$$x-5 = 0 \text{ of } x+7 = 0$$

$$x = 5 \text{ of } x = -7$$

De x -coördinaat van de top is -1 .

De y -coördinaat van de top is $p(-1) = (-1-5)(-1+7) = -6 \times 6 = -36$.

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(-1, -36)$.

b $(x+2)(x-10) = 0$

$$x+2 = 0 \text{ of } x-10 = 0$$

$$x = -2 \text{ of } x = 10$$

De x -coördinaat van de top is 4.

De y -coördinaat van de top is $q(4) = (4+2)(4-10) = 6 \times -6 = -36$.

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(4, -36)$.

c $(x+9)(-x-1) = 0$

$$x+9 = 0 \text{ of } -x-1 = 0$$

$$x = -9 \text{ of } x = -1$$

De x -coördinaat van de top is -5 .

De y -coördinaat van de top is $r(-5) = (-5+9)(-5-1) = 4 \times 4 = 16$.

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(-5, 16)$.

d $(x-3)(5-x) = 0$

$$x-3 = 0 \text{ of } 5-x = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = 5$$

De x -coördinaat van de top is 4.

De y -coördinaat van de top is $s(4) = (4-3)(5-4) = 1 \times 1 = 1$.

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(4, 1)$.

E4 a Invullen van $a = 0$ geeft $h(0) = 0,01 \times 0^2 - 1,2 \times 0 + 46 = 46$.

De hoogte van de linker toren is 46 meter.

b De vergelijking levert de snijpunten van de parabool met $h = 46$ op.

c $0,01a^2 - 1,2a + 46 = 46$

$$0,01a^2 - 1,2a = 0$$

$$0,01a(a-120) = 0$$

$$0,01a = 0 \text{ of } a-120 = 0$$

$$a = 0 \text{ of } a = 120$$

De afstand tussen de twee torens is 120 meter.

d Voor $a = 60$ is de afstand tussen de kabels en het wegdek het kleinst.

Invullen van $a = 60$ geeft

$$h(60) = 0,01 \times 60^2 - 1,2 \times 60 + 46 = 36 - 72 + 46 = 10.$$

Die afstand is 10 meter.

2 Parabolen

E5 a $f(0) = 0^2 - 4 \times 0 + 2 = 2$

$$x^2 - 4x + 2 = 2$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x - 4 = 0$$

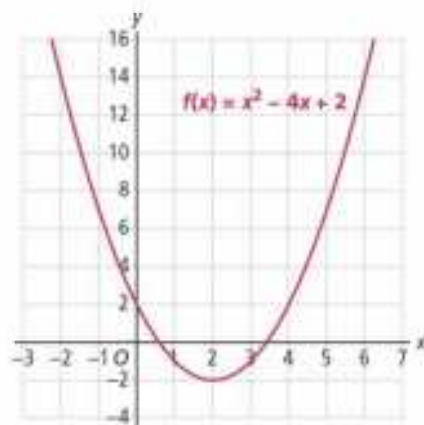
$$x = 0 \text{ of } x = 4$$

De x -coördinaat van de top is 2.

De y -coördinaat van de top is $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$.

De coördinaten van de top van de bijbehorende parabool zijn (2, -2).

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	14	7	2	-1	-2	-1	2	7	14



b $g(0) = 0^2 + 6 \times 0 = 0$

$$x^2 + 6x = 0$$

$$x(x + 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x + 6 = 0$$

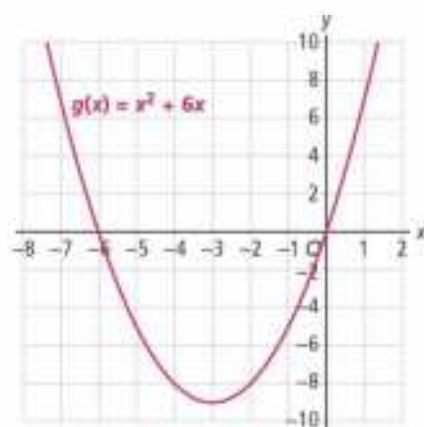
$$x = 0 \text{ of } x = -6$$

De x -coördinaat van de top is -3.

De y -coördinaat van de top is $g(-3) = (-3)^2 + 6 \times -3 = 9 - 18 = -9$.

De coördinaten van de top van de bijbehorende parabool zijn (-3, -9).

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$g(x)$	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7



3 Vlakke figuren

Voorkennis

- V1 a Zo'n driehoek noem je een gelijkzijdige driehoek.
 b Figuur $PQRS$ is een trapezium.
 c Zo'n vierhoek is een parallellogram.

zijde	kwadraat
$DG = 5$	25
$DF = \dots$	144 +
$FG = 13$	169

De lengte van de diagonaal DF is $\sqrt{144} = 12$.

- e Driehoek DFG is een rechthoekige driehoek.
 f Vierhoek $KLMN$ is een ruit.
 g Driehoek KLN is een gelijkbenige driehoek.
- V2 a $\angle R_1 + \angle R_2 + \angle R_3 + \angle R_4 + \angle R_5 = 360^\circ$
 b $\angle R_5 = 40^\circ$, want het is de overstaande hoek van de gegeven hoek van 40° .
 c Er geldt $\angle R_3 + \angle R_4 = 180^\circ$, dus $\angle R_4 = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

- V3 a $\angle P_1 = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$
 $\angle P_2 = 112^\circ$, want het is de overstaande hoek van de gegeven hoek van 112° .
 $\angle P_3 = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$
 b $\angle Q_1 = 180^\circ - 45^\circ - 78^\circ = 57^\circ$
 $\angle Q_2 = 78^\circ$, want het is de overstaande hoek van de gegeven hoek van 78° .

- V4 a De overeenkomstige hoeken zijn $\angle D$ en $\angle K$, $\angle E$ en $\angle L$, en $\angle F$ en $\angle M$.
 b De overeenkomstige zijden zijn DE en KL , EF en LM , en DF en KM .
 c De factor bij deze vergroting is $4 : 5 = 0,8$.

zijden $\triangle DEF$	$DE = 8$	$EF = 7$	$DF = 5$
zijden $\triangle KLM$	$KL = \dots$	$LM = \dots$	$KM = 4$

De lengte van zijde KL is $8 \times 0,8 = 6,4$ en de lengte van zijde LM is $7 \times 0,8 = 5,6$.

- V5 a De overeenkomstige hoeken zijn gelijk, want alle hoeken zijn 90° .

zijden rechthoek $PQRS$	$PQ = 22$	$PS = 10$
zijden rechthoek $TUVW$	$TW = 15$	$TU = 7$

De factor is voor de langste zijden $22 : 15 = 1,466\dots$ en voor de kortste zijden $10 : 7 = 1,428\dots$

Nee, de rechthoeken $PQRS$ en $TUVW$ zijn niet gelijkvormig.

- b Er geldt $\angle G = \angle N = 60^\circ$ en $\angle I = \angle L = 86^\circ$.
 In vlieger $GHIJ$ blijft voor $\angle H$ en $\angle J$ samen $360^\circ - 60^\circ - 86^\circ = 214^\circ$ over en omdat $GHIJ$ een vlieger is, geldt $\angle H = \angle J = 214^\circ : 2 = 107^\circ$.
 In vlieger $KLMN$ blijft voor $\angle K$ en $\angle M$ samen $360^\circ - 60^\circ - 86^\circ = 214^\circ$ over en omdat $KLMN$ een vlieger is, geldt $\angle K = \angle M = 214^\circ : 2 = 107^\circ$.
 De overeenkomstige hoeken zijn dus gelijk.

Omdat $GHIJ$ een vlieger is, geldt $GH = GJ = 24$ en $HI = IJ = 15$.

Omdat $KLMN$ een vlieger is, geldt $KL = LM = 10$ en $KN = MN = 16$.

zijden vlieger $GHIJ$	$GH = 24$	$HI = 15$
zijden vlieger $KLMN$	$KN = 16$	$KL = 10$

De tabel is een verhoudingstabel en de factor is $24 : 16 = 15 : 10 = 1,5$.

Ja, deze vliegers zijn gelijkvormig.

3 Vlakke figuren

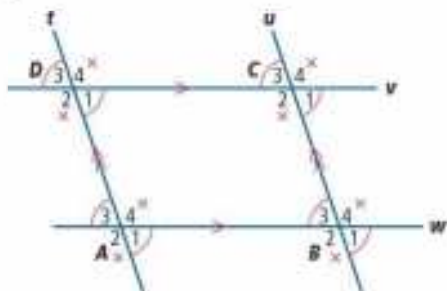
3.1 F-hoeken en Z-hoeken

intro In het linker plantenrekje worden door de latjes ruiten gevormd en in het rechter plantenrekje worden door de latjes vierkanten gevormd.

In het linker plantenrekje maken de latjes aan de linkerkant en aan de rechterkant van de ruit even grote hoeken en ook aan de bovenkant en de onderkant van de ruit maken de latjes even grote hoeken.

In het rechter plantenrekje maken de latjes rechte hoeken met elkaar.

- 1 a Vierhoek $ABCD$ is een parallellogram omdat de zijden AB en CD evenwijdig lopen en de zijden AD en BC evenwijdig lopen.
- b In parallellogram $ABCD$ is $\angle C_2$ gelijk aan $\angle A_4$.
- c En in parallellogram $ABCD$ is $\angle D_1$ gelijk aan $\angle B_3$.
- d e



- 2 a $\angle A_1 = \angle B_1$, want het zijn F-hoeken.
 $\angle A_3 = \angle B_1$, want het zijn Z-hoeken.
 - b $\angle A_1 = \angle B_1$ (F-hoeken) en $\angle B_1 = \angle B_3$ (overstaande hoeken), dus $\angle A_1 = \angle B_3$.
 - c $\angle A_2 = \angle A_4 = \angle B_2 = \angle B_4$
 - d In de rechter figuur zitten geen F-hoeken en geen Z-hoeken, omdat de lijnen p en q niet evenwijdig lopen.
- 3 a $\angle A_3 = \angle A_1 = 72^\circ$ (overstaande hoeken)
 $\angle A_2 = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ en $\angle A_4 = \angle A_2 = 108^\circ$ (overstaande hoeken)
 $\angle B_1 = \angle A_1 = 72^\circ$ (F-hoeken)
 $\angle B_3 = \angle B_1 = 72^\circ$ (overstaande hoeken)
 $\angle B_2 = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ en $\angle B_4 = \angle B_2 = 108^\circ$ (overstaande hoeken)
 - b $\angle A_2 + \angle B_1 = 108^\circ + 72^\circ = 180^\circ$
 - c Als $\angle A_1 = 50^\circ$, dan is $\angle A_2 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.
 Verder is $\angle B_1 = \angle A_1 = 50^\circ$ (F-hoeken).
 Nu is $\angle A_2 + \angle B_1 = 130^\circ + 50^\circ = 180^\circ$.
 - d Als $\angle A_1 = a^\circ$, dan is $\angle A_2 = 180^\circ - a^\circ$.
 En dan is $\angle B_1 = \angle A_1 = a^\circ$ (F-hoeken).
- 4 $\angle P = \angle R = 51^\circ$ (Z-hoeken)
 $\angle T = \angle Q = 72^\circ$ (Z-hoeken)
 $\angle S_2 = 180^\circ - 51^\circ - 72^\circ = 57^\circ$
 $\angle S_1 = \angle S_2 = 57^\circ$ (overstaande hoeken)

- 5 a $\angle G_1 + \angle G_2 = 180^\circ$, dus $\angle G_1 = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$ en $\angle D + \angle E + \angle F = 180^\circ$, dus $\angle F = 180^\circ - 28^\circ - 90^\circ = 62^\circ$ en $\angle G_1 = \angle F$.

- b Vierhoek $EFGH$ is een trapezium, want $\angle G_1 = \angle F$ en dat zijn F -hoeken, dus de zijden EF en GH zijn evenwijdig.

zijde	kwadraat
$DE = 15$	225
$EF = 8$	64 +
$DF = \dots$	289

De lengte van zijde DF is $\sqrt{289} = 17$.

zijden driehoek DGH	$DH = \dots$	$GH = 6$	$DG = \dots$
zijden driehoek DEF	$DE = 15$	$EF = 8$	$DF = 17$

De factor van driehoek DEF naar driehoek DGH is $6 : 8 = 0,75$.

De lengte van lijnstuk DH is $15 \times 0,75 = 11,25$ en de lengte van lijnstuk DG is $17 \times 0,75 = 12,75$.

De lengte van lijnstuk FG is $17 - 12,75 = 4,25$ en de lengte van lijnstuk EH is $15 - 11,25 = 3,75$.

- 6 a Er geldt $TY \parallel VW$, dus $\angle Y_1$ en $\angle W$ zijn F -hoeken en die zijn even groot.

- b Er geldt $ST \parallel UV$, dus $\angle S_1$ en $\angle U$ zijn F -hoeken en die zijn even groot.

In de vierhoeken $UVWX$ en $STYX$ geldt $\angle U = \angle S_1$, $\angle X = \angle X$ en $\angle W = \angle Y_1$ en omdat drie overeenkomstige hoeken even groot zijn geldt ook $\angle V = \angle T$.

zijden vierhoek $UVWX$	$UV = 9$	$VW = 4$	$WX = 10$	$UX = 6$
zijden vierhoek $STYX$	$ST = 5,4$	$TY = 3$	$YX = 6$	$SX = 4,6$

Er geldt $5,4 : 9 = 0,6$; $3 : 4 = 0,75$; $6 : 10 = 0,6$ en $4,6 : 6 = 0,77$.

Nee, de vierhoeken $UVWX$ en $STYX$ zijn niet gelijkvormig.

- 7 $\angle D_1 + \angle D_2 = 180^\circ$, dus $\angle D_1 = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$
 $\angle C + \angle D_1 + \angle E_1 = 180^\circ$, dus $\angle C = 180^\circ - 76^\circ - 50^\circ = 54^\circ$
 $\angle B = \angle E_1 = 50^\circ$ (F -hoeken)
 $\angle E_2 = \angle A_2 = 38^\circ$ (Z -hoeken)
 $\angle E_1 + \angle E_2 + \angle E_3 = 180^\circ$, dus $\angle E_3 = 180^\circ - 50^\circ - 38^\circ = 92^\circ$
 $\angle A_1 + \angle D_2 + \angle E_2 = 180^\circ$, dus $\angle A_1 = 180^\circ - 104^\circ - 38^\circ = 38^\circ$

- 03 a In de linker figuur is $\angle D_1 = \angle D_3$, omdat het overstaande hoeken zijn.

En in de linker figuur is $\angle D_1 = \angle E_1$, omdat het F -hoeken zijn.

- b $\angle D_3 = \angle D_1 = 54^\circ$ (overstaande hoeken)
 $\angle D_2 = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$ en $\angle D_4 = \angle D_2 = 126^\circ$ (overstaande hoeken)
 $\angle E_1 = \angle D_1 = 54^\circ$ (F -hoeken)
 $\angle E_3 = \angle E_1 = 54^\circ$ (overstaande hoeken)
 $\angle E_2 = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$ en $\angle E_4 = \angle E_2 = 126^\circ$ (overstaande hoeken)

- c $\angle D_2 + \angle E_1 = 126^\circ + 54^\circ = 180^\circ$

- d Als $\angle D_1 = 112^\circ$, dan is $\angle D_2 = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$.

Verder is $\angle E_1 = \angle D_1 = 112^\circ$ (F -hoeken).

Nu is $\angle D_2 + \angle E_1 = 68^\circ + 112^\circ = 180^\circ$.

- e $\angle D_1 = a^\circ$ invullen in $\angle D_1 + \angle D_2 = 180^\circ$ geeft $a^\circ + \angle D_2 = 180^\circ$, dus dan is $\angle D_2 = 180^\circ - a^\circ$.

- f Dan is $\angle E_1 = \angle D_1 = a^\circ$ (F -hoeken).

3 Vlakke figuren

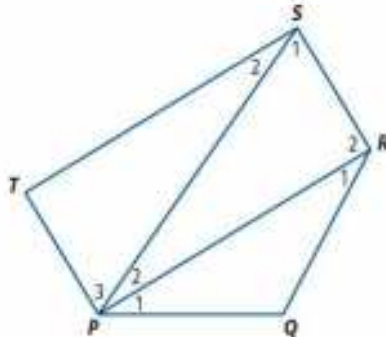
- 05 a $\angle N_1 + \angle N_2 = 180^\circ$, dus $\angle N_2 = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$
 $\angle J = 36^\circ$, dus $\angle J = \angle N_2$
- b De lijnstukken JK en NM lopen evenwijdig, want $\angle J = \angle N_2$ en dat zijn F -hoeken.
- c Vierhoek $JKMN$ is een trapezium, want de lijnstukken JK en NM zijn evenwijdig.
- d $\angle K = \angle M_2$, want dit zijn F -hoeken.
 $\angle M_2 = 74^\circ$
- e $\angle M_1 + \angle M_2 = 180^\circ$, dus $\angle M_1 = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$
- U1 $\angle B = \angle D_1$ (F -hoeken) en
 $\angle C_1 = \angle D_2$ (Z -hoeken) en $\angle D_2 = \angle D_1$ (gegeven), dus $\angle C_1 = \angle D_1$, dus
 $\angle B = \angle C_1$, dus $BD = CD$ en driehoek BCD is een gelijkbenige driehoek.

3.2 Vermoeden en bewijs

intro De hoeken van haar vijfhoek zijn samen $105^\circ + 133^\circ + 75^\circ + 122^\circ + 105^\circ = 540^\circ$.
 De hoeken van een driehoek zijn samen 180° , de hoeken van een vierhoek zijn samen 360° , de hoeken van een vijfhoek zijn samen 540° , dus de hoeken van een zeshoek zullen samen 720° zijn.

- 8 a Er geldt dat $\angle P_1 = \angle R_1$ en $\angle P_3 = \angle Q_2$ omdat dit Z -hoeken zijn.
 b $\angle P_1, \angle P_2$ en $\angle P_3$ zijn samen een gestrekte hoek en die is 180° .
 c Invullen van $\angle P_1 = \angle R_1$ en $\angle P_3 = \angle Q_2$ in
 $\angle P_1 + \angle P_2 + \angle P_3 = 180^\circ$ geeft
 $\angle R_1 + \angle P_2 + \angle Q_2 = 180^\circ$ oftewel
 $\angle P_2 + \angle Q_2 + \angle R_1 = 180^\circ$.
- 9 a $\angle D_1 = 136^\circ$ en $\angle F_1 = 136^\circ$
 b Het vermoeden is dat $\angle D_1$ en $\angle F_1$ altijd even groot zijn.
 c Volgens de stelling dat de overstaande hoeken even groot zijn, is $\angle E_1 = \angle E_2$.
 d $\angle A = \angle B$ (gegeven)
 $\angle E_1 = \angle E_2$ (overstaande hoeken)
 $\angle A + \angle E_1 + \angle D_2 = 180^\circ$ (som van de hoeken in een driehoek) en
 $\angle B + \angle E_2 + \angle F_2 = 180^\circ$ (som van de hoeken in een driehoek), dus
 $\angle D_2 = \angle F_2$
 $\angle D_1 + \angle D_2 = 180^\circ$ (gestrekte hoek) en
 $\angle F_1 + \angle F_2 = 180^\circ$ (gestrekte hoek), dus
 $\angle D_1 = \angle F_1$
- 10 a De overstaande zijden van een ruit zijn evenwijdig, dus $\angle K_1$ en $\angle M_2$ zijn Z -hoeken en $\angle K_1 = \angle M_2$.
 b De overstaande hoeken van een ruit zijn even groot, dus $\angle K_{12} = \angle M_{12}$.
 De diagonalen van een ruit delen de overstaande hoeken in twee even grote hoeken, dus $\angle K_1 = \angle K_2$ en $\angle M_1 = \angle M_2$.
 Dit geeft $\angle K_1 = \angle M_2 = \angle M_1$.

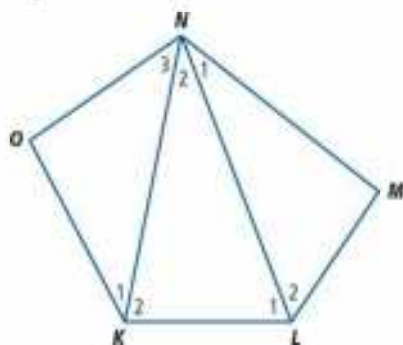
- 11 a** In driehoek PQR geldt $\angle P_1 + \angle Q + \angle R_1 = 180^\circ$.
 In driehoek PRS geldt $\angle P_2 + \angle R_2 + \angle S = 180^\circ$.
 Opgeteld geeft dat $\angle P_1 + \angle Q + \angle R_1 + \angle P_2 + \angle R_2 + \angle S = 2 \times 180^\circ$, oftewel
 $\angle P_1 + \angle P_2 + \angle Q + \angle R_1 + \angle R_2 + \angle S = 360^\circ$, dus
 $\angle P_{12} + \angle Q + \angle R_{12} + \angle S = 360^\circ$.
- b** Bijvoorbeeld



- c** In driehoek PQR geldt $\angle P_1 + \angle Q + \angle R_1 = 180^\circ$.
 In driehoek PRS geldt $\angle P_2 + \angle R_2 + \angle S_1 = 180^\circ$.
 In driehoek PST geldt $\angle P_3 + \angle S_2 + \angle T = 180^\circ$.
 Opgeteld geeft dat
 $\angle P_1 + \angle Q + \angle R_1 + \angle P_2 + \angle R_2 + \angle S_1 + \angle P_3 + \angle S_2 + \angle T = 3 \times 180^\circ$,
 oftewel $\angle P_1 + \angle P_2 + \angle P_3 + \angle Q + \angle R_1 + \angle R_2 + \angle S_1 + \angle S_2 + \angle T = 540^\circ$,
 dus $\angle P_{123} + \angle Q + \angle R_{12} + \angle S_{12} + \angle T = 540^\circ$.
- 12 a** $\angle T_2 = \angle X_1$ invullen in $\angle X_1 + \angle X_2 + \angle X_3 = 180^\circ$ geeft
 $\angle T_2 + \angle X_2 + \angle X_3 = 180^\circ$,
 $\angle T_2 + \angle X_3 = 90^\circ$ invullen in $\angle T_2 + \angle X_2 + \angle X_3 = 180^\circ$ geeft
 $\angle X_2 + 90^\circ = 180^\circ$, dus $\angle X_2 = 90^\circ$.
- b** oppervlakte driehoek $TUX = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$
 oppervlakte driehoek $XVW = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$
 oppervlakte driehoek $TXW = \frac{1}{2} \cdot c \cdot c$
 Voor de oppervlakte A van trapezium $TUVW$ geldt dan
 $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c \cdot c$, oftewel $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c^2$.
- c** $\frac{1}{2} \cdot (a+b)(a+b) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c^2$
 $(a+b)(a+b) = a \cdot b + a \cdot b + c^2$
 $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$
 $a^2 + b^2 = c^2$
- 09 a** $\angle A = 80^\circ$, $\angle B_2 = 135^\circ$ en $\angle C = 55^\circ$
b $\angle A + \angle C = 80^\circ + 55^\circ = 135^\circ$
c Het vermoeden is dat $\angle A$ en $\angle C$ samen altijd even groot zijn als $\angle B_2$.
d Volgens de stelling dat de som van de hoeken in een driehoek 180° is.
e Samen vormen $\angle B_1$ en $\angle B_2$ een gestrekte hoek, dus $\angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ$.
f $\angle A + \angle B_1 + \angle C = 180^\circ$ (som van de hoeken) en
 $\angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ$ (gestrekte hoek), dus
 $\angle A + \angle C = \angle B_2$

3 Vlakke figuren

- 011 a Er geldt dat $\angle K + \angle L_1 + \angle N_2 = 180^\circ$, want de som van de hoeken in driehoek KLN is 180° .
- b Er geldt dat $\angle L_2 + \angle M + \angle N_1 = 180^\circ$, want de som van de hoeken in driehoek LMN is 180° .
- c $\angle K + \angle L_1 + \angle N_2 = 180^\circ$ (som van de hoeken) en $\angle L_2 + \angle M + \angle N_1 = 180^\circ$ (som van de hoeken), dus $\angle K + \angle L_1 + \angle N_2 + \angle L_2 + \angle M + \angle N_1 = 2 \times 180^\circ$
 $\angle K + \angle L_1 + \angle L_2 + \angle M + \angle N_1 + \angle N_2 = 360^\circ$
 $\angle K + \angle L_{12} + \angle M + \angle N_{12} = 360^\circ$
- d Bijvoorbeeld



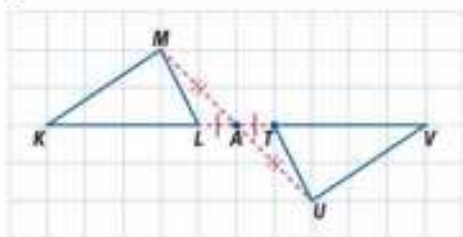
- e In driehoek KNO geldt $\angle K_1 + \angle N_3 + \angle O = 180^\circ$,
 In driehoek KLN geldt $\angle K_2 + \angle L_1 + \angle N_2 = 180^\circ$,
 In driehoek LMN geldt $\angle L_2 + \angle M + \angle N_1 = 180^\circ$.
 Opgeteld geeft dat
 $\angle K_1 + \angle N_3 + \angle O + \angle K_2 + \angle L_1 + \angle N_2 + \angle L_2 + \angle M + \angle N_1 = 3 \times 180^\circ$, oftewel
 $\angle K_1 + \angle K_2 + \angle L_1 + \angle L_2 + \angle M + \angle N_1 + \angle N_2 + \angle N_3 + \angle O = 540^\circ$, dus
 $\angle K_{12} + \angle L_{12} + \angle M + \angle N_{123} + \angle O = 540^\circ$.

- U2 In $\triangle ACM$ is $AM = CM$, dus geldt $\angle A = \angle C_1$.
 Invullen in $\angle A + \angle C_1 + \angle M_1 = 180^\circ$ geeft $\angle C_1 + \angle C_1 + \angle M_1 = 180^\circ$.
 In $\triangle BCM$ is $BM = CM$, dus geldt $\angle B = \angle C_2$.
 Invullen in $\angle B + \angle C_2 + \angle M_2 = 180^\circ$ geeft $\angle C_2 + \angle C_2 + \angle M_2 = 180^\circ$.
 Optellen geeft $\angle C_1 + \angle C_1 + \angle M_1 + \angle C_2 + \angle C_2 + \angle M_2 = 2 \times 180^\circ$, oftewel
 $2 \times \angle C_1 + 2 \times \angle C_2 + \angle M_1 + \angle M_2 = 360^\circ$.
 Invullen van $\angle M_1 + \angle M_2 = 180^\circ$ geeft $2 \times \angle C_1 + 2 \times \angle C_2 + 180^\circ = 360^\circ$,
 oftewel $2 \times \angle C_1 + 2 \times \angle C_2 = 180^\circ$, dus $\angle C_1 + \angle C_2 = 90^\circ$ en $\angle C_{12} = 90^\circ$.

3.3 Spiegelen

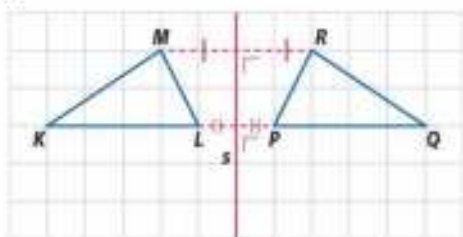
- intro In het blauwe blaadje ontstaan op deze manier een trapezium, een gelijkbenige driehoek en een ruit.
 Ja, de twee uitgeknipte driehoeken op het gele blaadje zijn gelijkvormig, want de overeenkomstige hoeken zijn even groot en de overeenkomstige zijden zijn ook even groot.

13 a b



- c $KL = TV = 40$ mm, $LM = TU \approx 22$ mm en $KM = UV \approx 36$ mm
 d $\angle K = \angle V = 34^\circ$, $\angle L = \angle T = 63^\circ$ en $\angle M = \angle U = 83^\circ$
 e Ja, je kunt driehoek TUV in dezelfde stand draaien als driehoek KLM .
 f Ja, driehoek TUV past precies op driehoek KLM .

14 a b



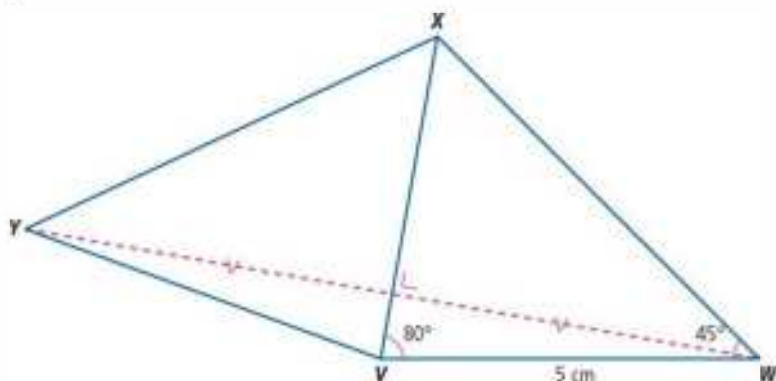
- c $KL = PQ = 40$ mm, $LM = PR \approx 22$ mm en $KM = QR \approx 36$ mm
 d $\angle K = \angle Q = 34^\circ$, $\angle L = \angle P = 63^\circ$ en $\angle M = \angle R = 83^\circ$
 e Nee, je kunt driehoek PQR niet in dezelfde stand draaien als driehoek KLM .

15 a -

- b Ja, als je één van de driehoeken omkeert, dan kun je de twee driehoeken in dezelfde stand naast elkaar leggen.
 c Ja, driehoek PQR past precies op driehoek KLM . Je moet de zijden van driehoek KLM dan met de factor 1 vermenigvuldigen om die van driehoek PQR te krijgen.
 d Thom heeft gelijk.

16 a Het spiegelbeeld van punt P ligt op punt P omdat het punt op de lijn ligt waarin gespiegeld wordt.

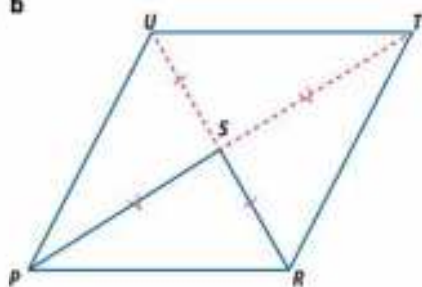
- b Na spiegelen van driehoek PRS in lijn k krijg je driehoek PRQ . Die driehoeken zijn gelijkvormig, dus $PS = PQ$ en $RS = RQ$ en vierhoek $PQRS$ is een vlieger.
 c d



- e Ja, de vierhoek die zo ontstaat is ook een vlieger, want $VW = VY$ en $WX = XY$.

3 Vlakke figuren

17 a b

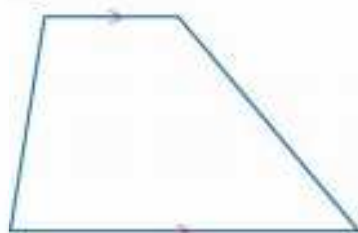


c Vierhoek $PRTU$ is een parallellogram.

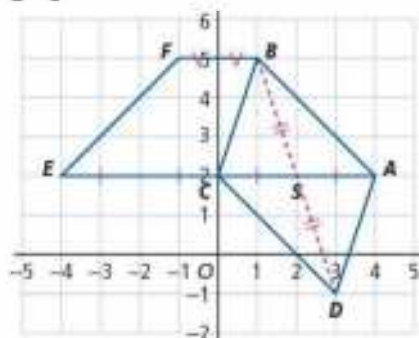
18 a De zijden KN en LM zijn even lang.

b $\angle K = \angle L$ en $\angle M = \angle N$

c Bijvoorbeeld



19 a b c



d Vierhoek $ABCD$ is een parallellogram.

e f

Zie de tekening bij opdracht 19abc.

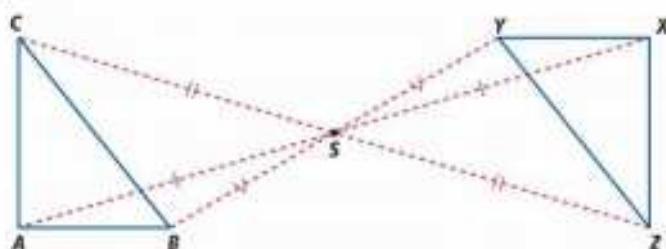
f Vierhoek $EABF$ is een gelijkbenig trapezium.

20 Punt S kan op de lijn door het punt R evenwijdig aan de lijn door de punten P en Q liggen. De formule van deze lijn is $y = 3$.

Punt S kan ook op de lijn door het punt P evenwijdig aan de lijn door de punten Q en R liggen. De richtingscoëfficiënt van deze lijn is $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ en deze lijn gaat door het punt $(0, 3)$. De formule van deze lijn is $y = 2\frac{1}{2}x + 3$.

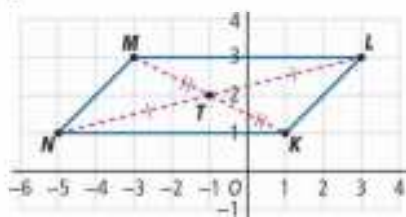
017 a De lijnstukken AS en SX zijn even lang.

b c d



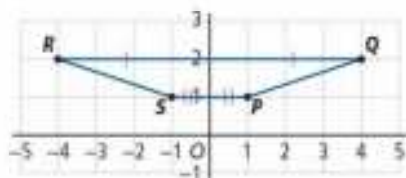
e Ja, driehoek XYZ is gelijkvormig met driehoek ABC .

019 a b

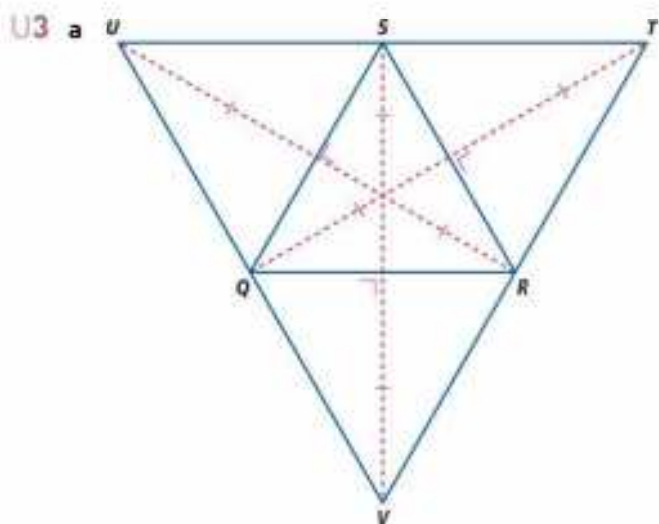


c Vierhoek $KLMN$ is een parallellogram omdat $KL \parallel NM$ en $NK \parallel LM$.

d e



f Vierhoek $PQRS$ is een gelijkbenig trapezium.

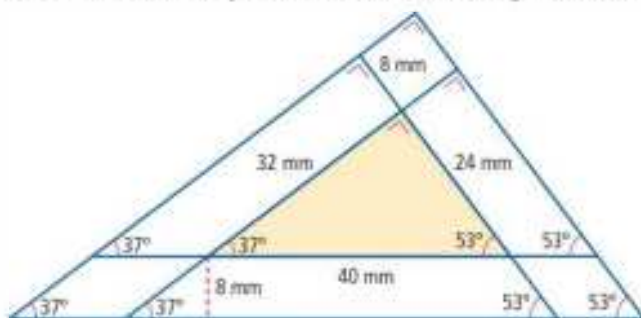


b Driehoek RST is gelijkvormig met driehoek QRS , dus is ook een gelijkzijdige driehoek. Driehoek QSU is gelijkvormig met driehoek QRS , dus is ook een gelijkzijdige driehoek. Driehoek QRV is gelijkvormig met driehoek QRS , dus is ook een gelijkzijdige driehoek. Dan geldt $TU = UV = TV$, dus is driehoek TUV ook een gelijkzijdige driehoek.

3 Vlakke figuren

3.4 Gelijkvormige driehoeken

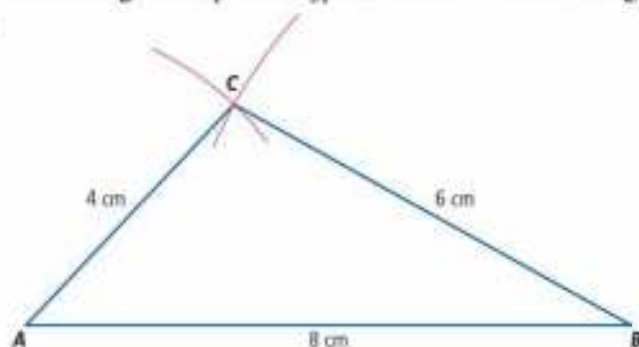
intro Ja, de grote driehoek en de gele driehoek zijn gelijkvormig.
Als je de zijden van de gele driehoek verlengt zoals hieronder, dan ontstaan er F -hoeken en zie je dat de overeenkomstige hoeken even groot zijn.



Opmeten geeft dat de zijden van de grote driehoek 48 mm, 64 mm en 80 mm zijn, dus die zijn allemaal 2 keer zo groot als de zijden van de gele driehoek.

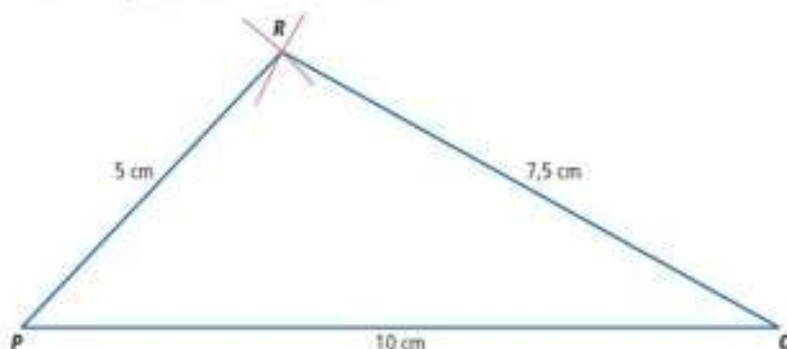
- 21 a** Alle punten op de cirkelboog met middelpunt A liggen 4 cm van punt A af en punt C ligt op die cirkelboog, want $AC = 4$ cm. Alle punten op de cirkelboog met middelpunt B liggen 6 cm van punt B af en punt C ligt op die cirkelboog, want $BC = 6$ cm.
Punt C ligt dus op het snijpunt van de twee cirkelbogen.

b



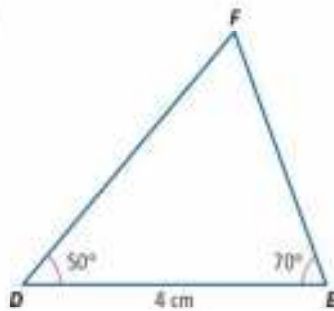
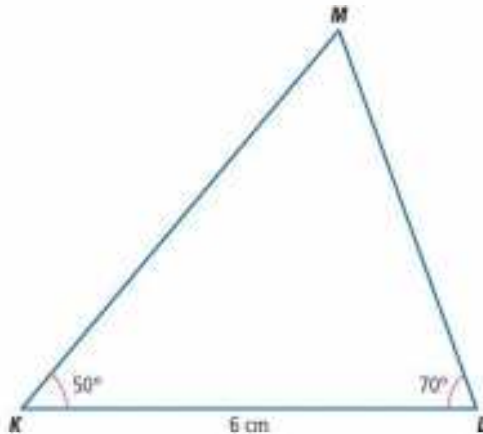
c $\angle A = 47^\circ$, $\angle B = 29^\circ$ en $\angle C = 104^\circ$

d



e $\angle P = 47^\circ$, $\angle Q = 29^\circ$ en $\angle R = 104^\circ$

f Ja, de driehoeken ABC en PQR zijn gelijkvormig omdat de overeenkomstige hoeken gelijk zijn en de factor $10 : 8 = 7.5 : 6 = 5 : 4 = 1.25$ is.

22 a**b**

- c $DE = 4$ cm, $EF \approx 3,5$ cm en $DF \approx 4,3$ cm
 $KL = 6$ cm, $LM = 5,3$ cm en $KM = 6,5$ cm
d $\angle F = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$ en $\angle M = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$
e Het vermoeden is dat de driehoeken DEF en KLM gelijkvormig zijn.

23 a

zijden $\triangle KLM$	$KL = 4$	$LM = 2$	$KM = 3$
zijden $\triangle PQR$	$PQ = 6$	$QR = 3$	$PR = 4,5$

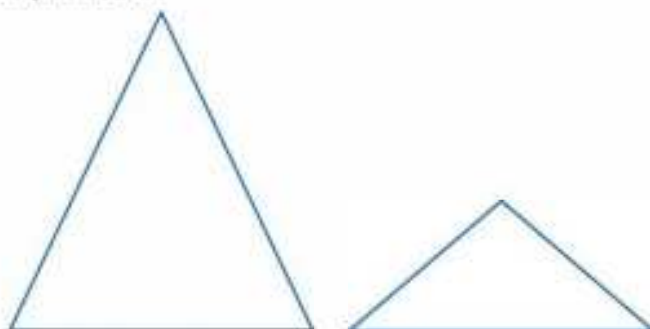
- b $\triangle KLM$ is gelijkvormig met $\triangle PQR$ omdat de overeenkomstige zijden met dezelfde factor $6 : 4 = 3 : 2 = 4,5 : 3 = 1,5$ vermenigvuldigd zijn.
c $\angle M = 180^\circ - 29^\circ - 47^\circ = 104^\circ$ en $\angle T = 180^\circ - 29^\circ - 104^\circ = 47^\circ$
d $\triangle KLM$ is gelijkvormig met $\triangle STU$ omdat de overeenkomstige hoeken gelijk zijn, want $\angle K = \angle U = 29^\circ$, $\angle L = \angle T = 47^\circ$ en $\angle M = \angle S = 104^\circ$.

- 24 a** $\triangle ABC$ is gelijkvormig met $\triangle KLM$, want als je de zijden van $\triangle ABC$ met $\frac{2}{3}$ vermenigvuldigt, dan krijg je de zijden van $\triangle KLM$.
b De notatie $\triangle ABC \sim \triangle KLM$ is niet juist, want dan zou moeten gelden dat $\angle A = \angle K$, maar $\angle A$ is de hoek tussen de kortste zijde en de langste zijde en $\angle K$ is de hoek tussen de kortste twee zijden, dus $\angle A$ is kleiner dan $\angle K$.
c $\triangle ABC \sim \triangle MLK$
d Nee, $\triangle PQR$ is niet gelijkvormig met $\triangle ABC$, want $10 : 9 = 1\frac{1}{9}$, $9 : 7 = 1\frac{2}{7}$ en $8\frac{1}{4} : 6 = 1\frac{3}{8}$.
e $\angle F = 180^\circ - 65^\circ - 51^\circ = 64^\circ$ en $\angle T = 180^\circ - 51^\circ - 64^\circ = 65^\circ$
 $\triangle DEF \sim \triangle TSU$, want $\angle D = \angle T = 65^\circ$, $\angle E = \angle S = 51^\circ$ en $\angle F = \angle U = 64^\circ$

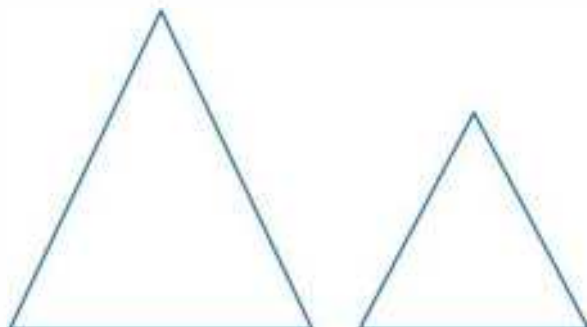
- 25 a** Driehoek KLM is gelijkbenig, dus $\angle K = \angle L$.
Ook geldt dat $\angle N_1 = \angle N_2 = 90^\circ$.
Verder geldt dat $\angle M_1 = 180^\circ - \angle K - \angle N_1 = 180^\circ - \angle K - 90^\circ = 90^\circ - \angle K$ en $\angle M_2 = 180^\circ - \angle L - \angle N_2 = 180^\circ - \angle L - 90^\circ = 90^\circ - \angle L = 90^\circ - \angle K$, dus is $\angle M_1 = \angle M_2$ en geldt dat $\triangle KNM \sim \triangle LNM$.
b De overeenkomstige zijden zijn met de factor 1 vermenigvuldigd.

3 Vlakke figuren

26 a Bijvoorbeeld



b Bijvoorbeeld



- c Je moest er voor zorgen dat de overeenkomstige hoeken even groot zijn.
d Ja, alle drie de hoeken van een gelijkzijdige driehoek zijn 60° , dus de overeenkomstige hoeken zijn steeds even groot.

- 27 a Er geldt $\angle V_2 = \angle X_2$ (Z-hoeken), $\angle W_2 = \angle Y_2$ (Z-hoeken) en $\angle Z_2 = \angle Z_4$ (overstaande hoeken), dus de driehoeken VWZ en XYZ zijn gelijkvormig. Vierhoek $VWXY$ is een parallelogram, dus $VW = XY$. Omdat de driehoeken VWZ en XYZ gelijkvormig zijn, is de factor 1 en is $VZ = XZ$ en $WZ = YZ$.
b Omdat $\triangle VWZ \sim \triangle XYZ$ geldt $VZ = XZ$, dus Z is het midden van VX . Omdat $\triangle VWZ \sim \triangle XYZ$ geldt $WZ = YZ$, dus Z is het midden van WY . De diagonalen van een parallelogram delen elkaar dus middendoor.

- 024 a $\angle A = 180^\circ - 59^\circ - 49^\circ = 72^\circ$ en $\angle E = 180^\circ - 49^\circ - 72^\circ = 59^\circ$

- b In driehoek DEF is $\angle F$ de overeenkomstige hoek van $\angle A$. Bij $\angle B$ is dat $\angle E$ en bij $\angle C$ is dat $\angle D$.

- c De notatie $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ is niet juist, want dan zou moeten gelden dat $\angle A = \angle D$, maar $\angle A = 72^\circ$ en $\angle D = 49^\circ$.

- d $\triangle ABC \sim \triangle FED$

- e

zijden $\triangle KLM$	$KL = 21$	$LM = 35$	$KM = 28$
zijden $\triangle PQR$	$PQ = 12$	$PR = 20$	$QR = 16$

- f Driehoek KLM is gelijkvormig met driehoek PQR , omdat de overeenkomstige zijden met dezelfde factor $21 : 12 = 35 : 20 = 28 : 16 = 1,75$ vermenigvuldigd zijn.

- g De overeenkomstige hoeken zijn $\angle K$ en $\angle Q$, $\angle L$ en $\angle P$, en $\angle M$ en $\angle R$.

- h $\triangle KLM \sim \triangle QPR$

- 025 a De basishoeken in een gelijkbenige driehoek zijn even groot, dus $\angle V$ en $\angle W$ zijn even groot.

- b Er geldt $\angle Y_2 = 90^\circ$ en $\angle Y_1 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, dus $\angle Y_1 = \angle Y_2 = 90^\circ$.

- c Er geldt $\angle V = \angle W$ en $\angle Y_1 = \angle Y_2$, dus moet ook gelden dat $\angle X_1 = \angle X_2$.

- d De overeenkomstige zijden zijn met de factor 1 vermenigvuldigd.

- U4** Er geldt $\triangle RST \sim \triangle PQT$, want $\angle R = \angle P_2$ (Z-hoeken), $\angle S_2 = \angle Q$ (Z-hoeken) en $\angle T_3 = \angle T_2$ (overstaande hoeken), dus de bijbehorende tabel is een verhoudingstabel.

zijden $\triangle RST$	RS	RT	ST
zijden $\triangle PQT$	PQ	PT	QT

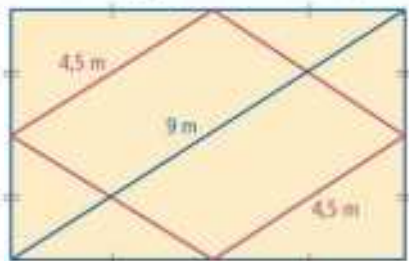
Dan geldt dat $RS : RT = PQ : PT$.

Uit $\angle S_1 = \angle S_2$ (gegeven) en $\angle S_2 = \angle Q$ (Z-hoeken) volgt $\angle S_1 = \angle Q$, dus $\triangle PQS$ is een gelijkbenige driehoek en $PQ = PS$.

Invullen in $RS : RT = PQ : PT$ geeft $RS : RT = PS : PT$.

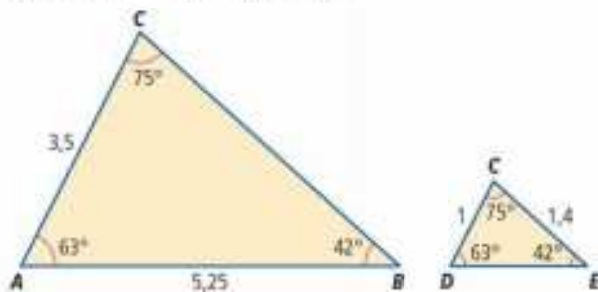
3.5 Rekenen met gelijkvormigheid

intro De vier slingers moeten elk 4,5 meter lang zijn.



- 28 a** $\angle C = 180^\circ - 63^\circ - 42^\circ = 75^\circ$, $\angle D = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$ en $\angle E = 180^\circ - 75^\circ - 63^\circ = 42^\circ$

b



- c** $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ want $\angle A = \angle D = 63^\circ$, $\angle B = \angle E = 42^\circ$ en $\angle C = \angle C = 75^\circ$.

- d**
- | | | | |
|------------------------|--------------|--------------|------------|
| zijden $\triangle ABC$ | $AB = 5,25$ | $BC = \dots$ | $AC = 3,5$ |
| zijden $\triangle DEC$ | $DE = \dots$ | $EC = 1,4$ | $DC = 1$ |

- e** De lengte van lijnstuk AE is $3,5 - 1,4 = 2,1$.

De factor van $\triangle DEC$ naar $\triangle ABC$ is $3,5 : 1 = 3,5$.

De lengte van zijde BC is $1,4 \times 3,5 = 4,9$.

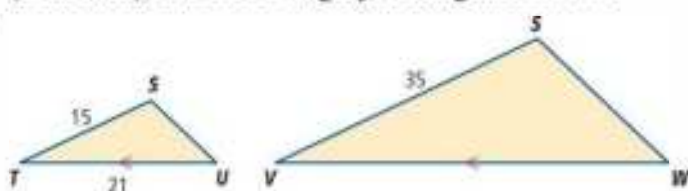
De lengte van lijnstuk BD is $4,9 - 1 = 3,9$.

- 29** De lengte van zijde LM is $5 \times \frac{17}{13} = \frac{60}{13} = 4 \frac{8}{13}$.

3 Vlakke figuren

- 30 a** Er geldt $\angle S = \angle S$ (overstaande hoeken), $\angle T = \angle V$ (Z-hoeken) en $\angle U = \angle W$ (Z-hoeken), dus $\triangle STU$ is gelijkvormig met $\triangle SVW$.

b



zijden $\triangle STU$	$ST = 15$	$TU = 21$	$SU = \dots$
zijden $\triangle SVW$	$SV = 35$	$VW = \dots$	$SW = \dots$

De factor van $\triangle STU$ naar $\triangle SVW$ is $35 : 15 = 2\frac{1}{3}$.

De lengte van zijde VW is $21 \times 2\frac{1}{3} = 49$.

- c** Invullen van $UW = 30$ en $SW = SU \times 2\frac{1}{3}$ in $SU + SW = UW$ geeft $SU + 2\frac{1}{3}SU = 30$, oftewel $3\frac{1}{3}SU = 30$, dus $SU = 9$.
Invullen van $SU = 9$ in $SW = SU \times 2\frac{1}{3}$ geeft $SW = 9 \times 2\frac{1}{3} = 21$.

- 31 a** De overeenkomstige hoek van $\angle A$ is $\angle C$ en de overeenkomstige hoek van $\angle E$ is $\angle D$.

- b** De factor van $\triangle BCD$ naar $\triangle BAE$ is $4,5 : 1,5 = 3$.

De boom is $1,6 \times 3 = 4,8$ meter hoog.

- c** De factor van $\triangle BCD$ naar $\triangle BAE$ is dan $10,5 : 2,1 = 5$.

De boom is dan $1,8 \times 5 = 9$ meter hoog.

- 32 a** $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ want $\angle A = \angle A$, $\angle D = \angle B$ (F-hoeken) en $\angle E = \angle C$ (F-hoeken).

- b** De factor van de vergroting van $\triangle ADE$ naar $\triangle ABC$ is $10 : 5 = 2$.

- c** De lengte van lijnstuk DE is $7 : 2 = 3,5$.

- d** De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $10 \times 7 : 2 = 35$.

De oppervlakte van $\triangle ADE$ is $5 \times 3,5 : 2 = 8,75$.

De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $35 : 8,75 = 4$ keer zo groot als de oppervlakte van $\triangle ADE$.

- 33 a** De oppervlakte van driehoek PQR is negen keer zo groot als de oppervlakte van driehoek FGH , dus de zijden van driehoek PQR zijn drie keer zo groot als de zijden van driehoek FGH .

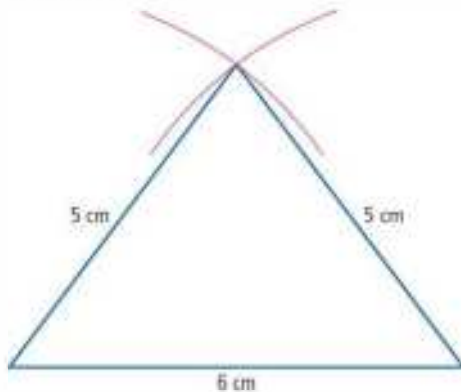
- b** De lengte van de zijden van driehoek PQR zijn $PR = 3 \times 3 = 9$ cm en

$PQ = QR = 2,5 \times 3 = 7,5$ cm.

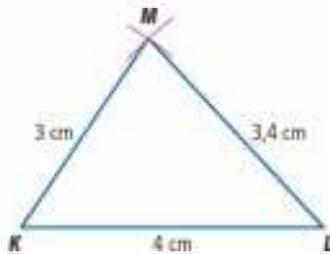
- c** De zijden van driehoek FGH zijn met de factor $\sqrt{2}$ vermenigvuldigd om die van driehoek STU te krijgen, want $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

- d** De zijden van driehoek STU zijn $3\sqrt{2} = 4,24$ cm, $2,5\sqrt{2} = 3,54$ cm en $2,5\sqrt{2} = 3,54$ cm.

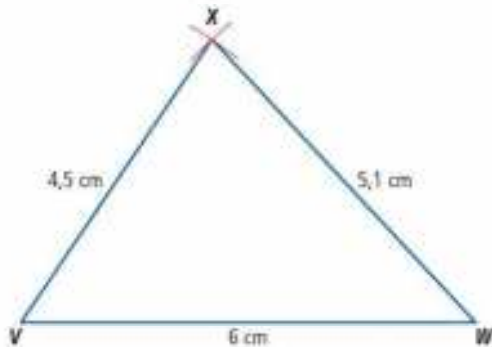
- e De oppervlakte van de gevraagde driehoek is vier keer zo groot als de oppervlakte van driehoek FGH , dus de zijden van de gevraagde driehoek zijn twee keer zo groot als de zijden van driehoek FGH .
De zijden van de gevraagde driehoek zijn $3 \times 2 = 6$ cm, $2,5 \times 2 = 5$ cm en $2,5 \times 2 = 5$ cm.



34 a



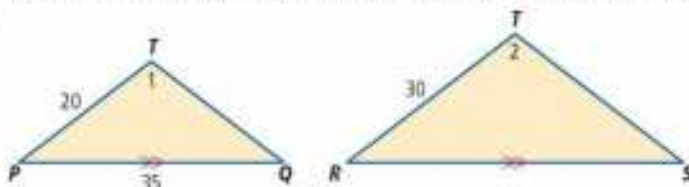
b



- c De factor is $6 : 4 = 4,5 : 3 = 5,1 : 3,4 = 1,5$, dus $\triangle KLM$ en $\triangle VWX$ zijn gelijkvormig.
d De oppervlakte van $\triangle KLM$ is $11,18 : 1,5^2 = 4,97$ cm².

- 30 a Er geldt $\angle P = \angle R$ (Z-hoeken), $\angle Q = \angle S$ (Z-hoeken) en $\angle T_1 = \angle T_2$ (overstaande hoeken), dus $\triangle PQT$ is gelijkvormig met $\triangle RST$.

b

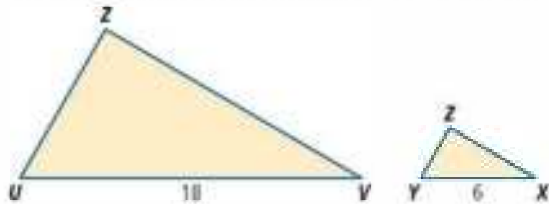


- c
- | | | | |
|------------------------|--------------|-----------|--------------|
| zijden $\triangle PQT$ | $PQ = 35$ | $PT = 20$ | $QT = \dots$ |
| zijden $\triangle RST$ | $RS = \dots$ | $RT = 30$ | $ST = \dots$ |
- d De factor van $\triangle PQT$ naar $\triangle RST$ is $30 : 20 = 1\frac{1}{2}$.
De lengte van zijde RS is $35 \times 1\frac{1}{2} = 52\frac{1}{2}$.

3 Vlakke figuren

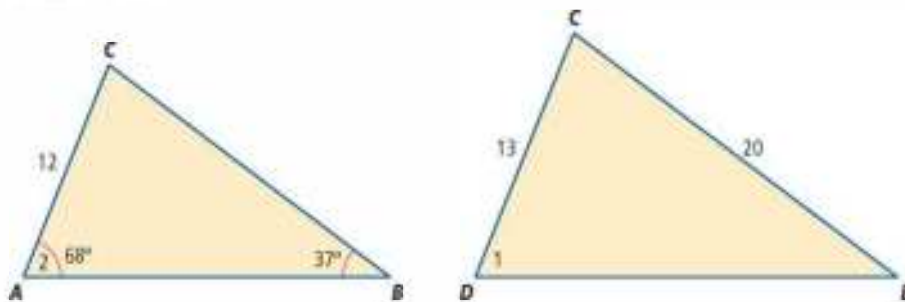
- e De factor van $\triangle PQT$ naar $\triangle RST$ is $30 : 20 = 1\frac{1}{2}$.
 Invullen van $QS = 55$ en $ST = QT \times 1\frac{1}{2}$ in $QT + ST = QS$ geeft
 $QT + QT \times 1\frac{1}{2} = 55$, dus $2\frac{1}{2} QT = 55$ en $QT = 22$.
 Invullen van $QT = 22$ in $ST = QT \times 1\frac{1}{2}$ geeft $ST = 22 \times 1\frac{1}{2} = 33$.

- U5 Er geldt $\angle U = \angle Y$ (Z-hoeken), $\angle V = \angle X$ (Z-hoeken) en $\angle Z = \angle Z$ (overstaande hoeken), dus $\triangle UVZ \sim \triangle YXZ$.



De factor van $\triangle YXZ$ naar $\triangle UVZ$ is $18 : 6 = 3$, dus $UZ = YZ \times 3$.
 Invullen van $UY = 12$ en $UZ = YZ \times 3$ in $UZ + YZ = UY$ geeft
 $YZ \times 3 + YZ = 12$, oftewel $4YZ = 12$, dus $YZ = 3$.
 Invullen van $YZ = 3$ in $UZ = YZ \times 3$ geeft $UZ = 3 \times 3 = 9$.

- U6 Er geldt $\angle A_1 = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$, $\angle C = 180^\circ - 68^\circ - 37^\circ = 75^\circ$,
 $\angle D_1 = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$ en $\angle E = 180^\circ - 75^\circ - 68^\circ = 37^\circ$.
 De driehoeken ABC en DEC zijn gelijkvormig, want $\angle A_1 = \angle D_1$, $\angle B = \angle E$
 en $\angle C = \angle C$.

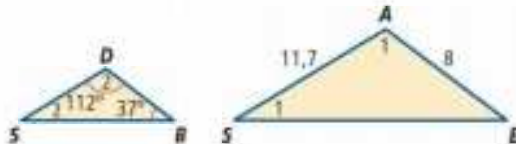


zijden $\triangle ABC$	$AB = \dots$	$BC = \dots$	$AC = 12$
zijden $\triangle DEC$	$DE = \dots$	$EC = 20$	$DC = 13$

De factor van $\triangle DEC$ naar $\triangle ABC$ is $12 : 13 = \frac{12}{13}$.

De lengte van zijde BC is $20 \times \frac{12}{13} = \frac{240}{13} = 18\frac{6}{13}$ en de lengte van lijnstuk BD is $18\frac{6}{13} - 13 = 5\frac{6}{13}$.

De driehoeken AES en DBS zijn gelijkvormig, want $\angle A_1 = \angle D_2$, $\angle E = \angle B$
 en $\angle S_1 = \angle S_2$ (overstaande hoeken).



zijden $\triangle AES$	$AE = 8$	$ES = \dots$	$AS = 11,7$
zijden $\triangle DBS$	$DB = 5\frac{6}{13}$	$BS = \dots$	$DS = \dots$

De factor van $\triangle AES$ naar $\triangle DBS$ is $5\frac{6}{13} : 8 = 0,68269\dots$

De lengte van lijnstuk DS is $11,7 \times 0,68269\dots = 7,9875$.

3.6 Gemengde opdrachten

- 35 a** $\triangle ABC$ is een gelijkbenige driehoek, want $AC = BC$.
b $\triangle ABC$ is gelijkvormig met $\triangle DEC$ want $\angle A = \angle D$ (F-hoeken), $\angle B = \angle E$ (F-hoeken) en $\angle C = \angle C$.
c Van $\triangle ABC$ naar $\triangle DEC$ is de factor 0,5, dus lijnstuk DE is $5 \times 0,5 = 2,5$.

d

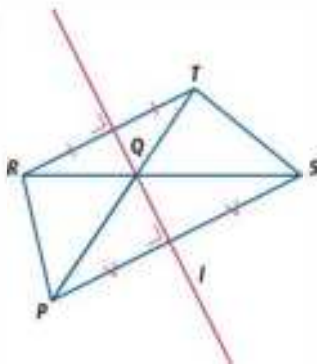
zijde	kwadraat
...	36
2,5	6,25 +
6,5	42,25

De afstand van punt C tot zijde AB is $\sqrt{36} = 6$.

- e** De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $5 \times 6 : 2 = 15$.
f De oppervlakte van $\triangle DEC$ is $15 \times 0,5^2 = 3,75$.
 De oppervlakte van trapezium $ABED$ is $15 - 3,75 = 11,25$.

- 36 a** Vierhoek $KLMN$ is een gelijkbenig trapezium.
b Er geldt $\angle K_1 = \angle M_1$ (Z-hoeken), $\angle L_1 = \angle N_1$ (Z-hoeken) en $\angle O = \angle O$ (overstaande hoeken), dus $\triangle KLO \sim \triangle MNO$.
d De factor van $\triangle KLO$ naar $\triangle MNO$ is $6 : 10 = 0,6$.
 Invullen van $LN = 9,6$ en $NO = LO \times 0,6$ in $LO + NO = LN$ geeft
 $LO + LO \times 0,6 = 9,6$ oftewel $1,6LO = 9,6$, dus $LO = 6$.
 Invullen van $LO = 6$ in $NO = LO \times 0,6$ geeft $NO = 6 \times 0,6 = 3,6$.
 Vierhoek $KLMN$ is een gelijkbenig trapezium en $KN = LM$, dus
 $MO = NO = 3,6$.

37 a



- b** Ja, driehoek PQR is gelijkvormig met driehoek QST , want $PQ = QS$, $QR = QT$ en $PR = ST$.
c Zie opdracht 37a.
d Vierhoek $PSTR$ is een gelijkbenig trapezium.

- 38** $\triangle ABC$ en $\triangle CDE$ zijn gelijkvormig, want $\angle A = \angle E$ (Z-hoeken), $\angle B = \angle D = 90^\circ$ (Z-hoeken) en $\angle C = \angle C$ (overstaande hoeken).

zijden $\triangle ABC$ in passen	$AB = \dots$	$BC = 40$
----------------------------------	--------------	-----------

zijden $\triangle CDE$ in passen	$DE = 28$	$CD = 15$
----------------------------------	-----------	-----------

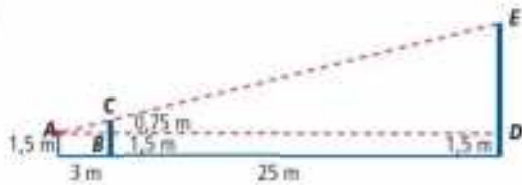
De factor van $\triangle CDE$ naar $\triangle ABC$ is $40 : 15 = 2\frac{2}{3}$.

Dus zijde AB is $28 \times 2\frac{2}{3} = 74\frac{2}{3}$ passen.

Deze rivier is $74\frac{2}{3} \times 0,6 = 44,8$ meter breed.

3 Vlakke figuren

39 a



- b De overeenkomstige hoeken van $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$ zijn gelijk, dus deze driehoeken zijn gelijkvormig.

zijden $\triangle ABC$ in m	$AB = 3$	$BC = 0,75$	$AC = \dots$
zijden $\triangle ADE$ in m	$AD = 28$	$DE = \dots$	$AE = \dots$

De factor van $\triangle ABC$ naar $\triangle ADE$ is $28 : 3 = 9\frac{1}{3}$.

De lengte van zijde DE is $0,75 \times 9\frac{1}{3} = 7$ m.

Het gebouw is $7 + 1,5 = 8,5$ meter hoog.

- 40 a Voor de oppervlakte A van het parallellogram geldt $A = \text{basis} \times \text{hoogte}$, oftewel $A = LP \cdot h$.

In het parallellogram geldt $LP = MN$. Dan geldt ook $LP + LP = LP + MN$, oftewel $2 \cdot LP = LP + MN$, dus $LP = \frac{1}{2} \cdot (LP + MN)$.

Dit invullen in $A = LP \cdot h$ geeft $A = \frac{1}{2} \cdot (LP + MN) \cdot h$, dus

$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (LP + MN).$$

- b Voor de oppervlakte A van de driehoek geldt $A = \frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte}$, oftewel $A = \frac{1}{2} \cdot KP \cdot h$.

Voor de oppervlakte A van het trapezium geldt

$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (LP + MN) + \frac{1}{2} \cdot KP \cdot h$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot LP + \frac{1}{2} \cdot h \cdot MN + \frac{1}{2} \cdot h \cdot KP$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (LP + MN + KP)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (KP + LP + MN)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (KL + MN)$$

- 41 Van vierhoek $ABCD$ en vierhoek $EFGD$ zijn de hoeken gelijk, want $\angle A = \angle E$ (F-hoeken), $\angle C = \angle G$ (F-hoeken), $\angle D = \angle D$ en dus $\angle B = \angle F$. $\triangle ABD$ is gelijkvormig met $\triangle EFD$, want $\angle A = \angle E$ (F-hoeken), $\angle B = \angle F$ (F-hoeken) en $\angle D = \angle D$.

Van $\triangle ABD$ naar $\triangle EFD$ is de factor $7 : 10 = 0,7$, dus $EF = AB \times 0,7$ en $ED = AD \times 0,7$.

$\triangle BCD$ is gelijkvormig met $\triangle FGD$, want $\angle B = \angle F$ (F-hoeken), $\angle C = \angle G$ (F-hoeken) en $\angle D = \angle D$.

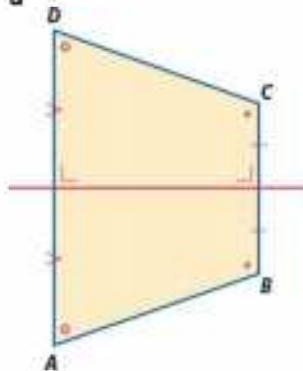
Van $\triangle BCD$ naar $\triangle FGD$ is de factor $7 : 10 = 0,7$, dus $FG = BC \times 0,7$ en $DG = DC \times 0,7$.

Door de zijden van vierhoek $ABCD$ met $0,7$ te vermenigvuldigen, vind je de overeenkomstige zijden van vierhoek $EFGD$.

Zowel de hoeken zijn gelijk als de overeenkomstige zijden zijn met dezelfde factor vermenigvuldigd, dus vierhoek $ABCD$ is gelijkvormig met vierhoek $EFGD$.

Samenvatting

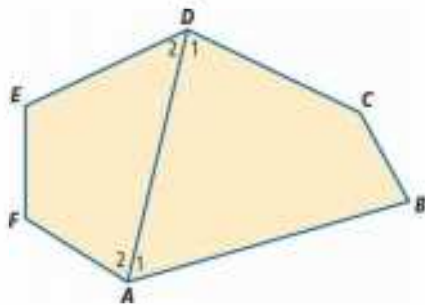
- S1 a De zijden AB en CD van het gelijkbenig trapezium $ABCD$ zijn even lang.
 b De zijden AD en BC lopen evenwijdig.
 c d



- S2 a De overeenkomstige hoeken zijn $\angle A$ en $\angle E$, $\angle B$ en $\angle F$, en $\angle C$ en $\angle D$.
 b $\triangle ABC \sim \triangle EFD$

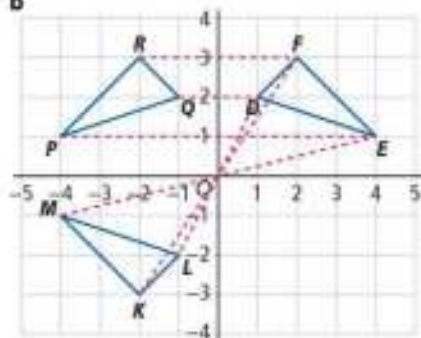
- S3 a $\angle A_1 = \angle D_1$, want het zijn F -hoeken.
 $\angle A_4 = \angle D_2$, want het zijn Z -hoeken.
 b Gelijk aan $\angle B_3$ zijn $\angle B_4$ (overstaande hoeken), $\angle C_2$ (F -hoeken) en $\angle C_4$.
 c $\angle D_3 = \angle A_1 = 59^\circ$ (Z -hoeken) en $\angle D_4 = 180^\circ - 59^\circ = 121^\circ$

- S4 Neem bijvoorbeeld de zeshoek $ABCDEF$.



$\angle A_1 + \angle B + \angle C + \angle D_1 = 360^\circ$ (som van de hoeken in een vierhoek) en
 $\angle A_2 + \angle D_2 + \angle E + \angle F = 360^\circ$ (som van de hoeken in een vierhoek), dus
 $\angle A_1 + \angle B + \angle C + \angle D_1 + \angle A_2 + \angle D_2 + \angle E + \angle F = 2 \times 360^\circ$
 $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle B + \angle C + \angle D_1 + \angle D_2 + \angle E + \angle F = 720^\circ$
 $\angle A_{12} + \angle B + \angle C + \angle D_{12} + \angle E + \angle F = 720^\circ$

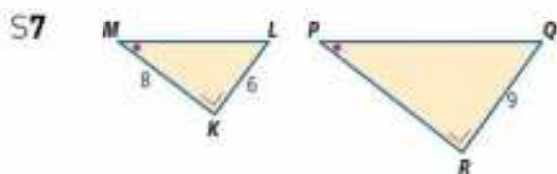
- S5 a b



- c Ja, driehoek KLM is gelijkvormig met driehoek PQR , want $\angle K = \angle F = \angle R$,
 $\angle L = \angle D = \angle Q$ en $\angle M = \angle E = \angle P$, en $KL = DF = QR$, $LM = DE = PQ$ en
 $KM = EF = PR$.

3 Vlakke figuren

- S6 a $\angle H = 180^\circ - 94^\circ - 55^\circ = 31^\circ$
 b $\angle M = 180^\circ - 31^\circ - 94^\circ = 55^\circ$
 c Er geldt $\angle G = \angle O$, $\angle H = \angle N$ en $\angle I = \angle M$, dus $\triangle GHI$ is gelijkvormig met $\triangle MNO$.



zijden $\triangle KLM$	$KM = 8$	$KL = 6$	$LM = \dots$
------------------------	----------	----------	--------------

zijden $\triangle PQR$	$PR = \dots$	$QR = 9$	$PQ = \dots$
------------------------	--------------	----------	--------------

De factor van $\triangle KLM$ naar $\triangle PQR$ is $9 : 6 = 1,5$.

De lengte van zijde PR is $8 \times 1,5 = 12$.

Test jezelf

- T1 a Bijvoorbeeld



- b Bijvoorbeeld



- c De hoek links in de linker ruit van het lattenwerk is $180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$.
 De andere hoeken van het lattenwerk zijn allemaal 116° en 64° .

- T2 a Vierhoek $ABCD$ is een trapezium.

- b Omdat $AB \parallel CD$ geldt $\angle A_2 = \angle C_1 = 38^\circ$ (Z-hoeken).

In $\triangle ABC$ is $\angle B = 180^\circ - 104^\circ - 38^\circ = 38^\circ$, dus geldt $\angle A_2 = \angle B$ en is $\triangle ABC$ gelijkbenig, dus $AC = BC$.

- T3 a Bij het linker tafeltje is de factor $25 : 75 = \frac{1}{3}$.

Bij het rechter tafeltje is de factor $40 : 60 = \frac{2}{3}$.

- b Het tafelblad van het linker tafeltje is 40 cm bij $90 \times \frac{1}{3} = 30$ cm en heeft een oppervlakte van $40 \times 30 = 1200 \text{ cm}^2$.

Het tafelblad van het rechter tafeltje is 45 cm bij $45 \times \frac{2}{3} = 30$ cm en heeft een oppervlakte van $45 \times 30 = 1350 \text{ cm}^2$.

Bij het rechter tafeltje is de oppervlakte van het tafelblad het grootst.

- T4** Er geldt $\angle B = 180^\circ - 35^\circ - 120^\circ = 25^\circ$ en $\angle U = 180^\circ - 25^\circ - 120^\circ = 35^\circ$, dus $\triangle ABC$ is gelijkvormig met $\triangle STU$, want $\angle A = \angle U$, $\angle B = \angle S$ en $\angle C = \angle T$.
 $\triangle DEF$ is gelijkvormig met $\triangle RQP$, want $20 : 10 = 16 : 8 = 12 : 6 = 2$.
 $\triangle GHI$ is gelijkvormig met $\triangle MNO$, want $18 : 12 = 15 : 10 = 9 : 6 = 1,5$.

- T5 a** $\angle V = 65^\circ$, $\angle W = 50^\circ$ en $\angle Y = 65^\circ$, en
 $VW = 30$ mm, $VY = 25$ mm en $WY = 30$ mm
b Het vermoeden is dat driehoek VWY een gelijkbenige driehoek is.
c Vierhoek $UYWX$ is een parallellogram, want $UV \parallel WX$ en $UX \parallel WY$, dus geldt $UX = WY$.
Omdat $UX = WY$ en $UX = VW$ geldt $WY = VW$, dus driehoek VWY is een gelijkbenige driehoek.

- T6 a** $\triangle KLM \sim \triangle KPN$, want $\angle K = \angle K$, $\angle M = \angle N = 90^\circ$ en dus moet ook gelden $\angle L = \angle P$.

- b**

zijde	kwadraat
$KN = 8$	64
$NP = 6$	36 +
$KP = \dots$	100

$$KP = \sqrt{100} = 10$$

zijden $\triangle KLM$	$KL = 20$	$LM = \dots$	$KM = \dots$
zijden $\triangle KPN$	$KP = 10$	$PN = 6$	$KN = 8$

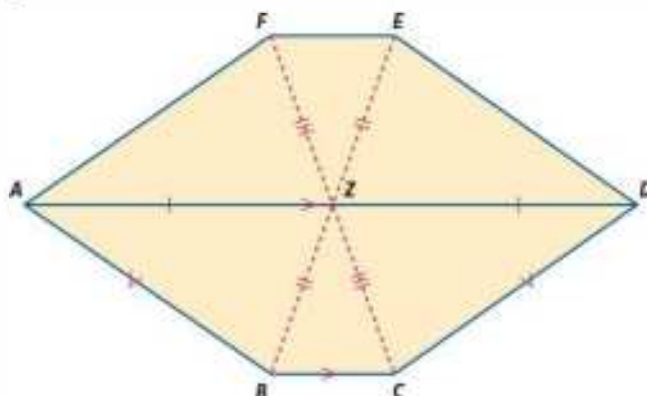
De factor van $\triangle KPN$ naar $\triangle KLM$ is $20 : 10 = 2$, dus $LM = 6 \times 2 = 12$.

Verder is $KM = 8 \times 2 = 16$, dus $MP = KM - KP = 16 - 10 = 6$.

- c** De oppervlakte van $\triangle KNP$ is $8 \times 6 : 2 = 24$.
De oppervlakte van $\triangle RST$ is $54 : 24 = 2,25$ keer zo groot.
De lengte van de zijden van $\triangle RST$ zijn dan 1,5 keer zo groot als de lengte van de zijden van $\triangle KNP$.
De lengte van de zijden van $\triangle RST$ zijn $RS = 8 \times 1,5 = 12$, $ST = 6 \times 1,5 = 9$ en $RT = 10 \times 1,5 = 15$.

- T7 a** Vierhoek $ABCD$ is een gelijkbenig trapezium.

- b c**



- d** De driehoeken ABZ en DEZ zijn gelijkvormig, want $\angle A = \angle D$ (Z-hoeken), $\angle B = \angle E$ (Z-hoeken) en $\angle Z = \angle Z$ (overstaande hoeken).
Er geldt $AZ = DZ$ (gegeven), dus de bijbehorende factor is 1.

3 Vlakke figuren

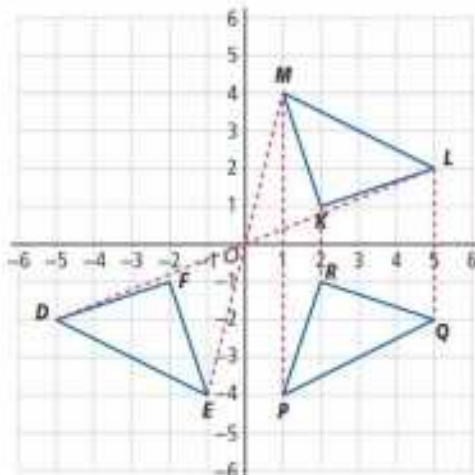
Extra oefening

- E1 a $\angle A_3 = \angle A_1 = 43^\circ$ (overstaande hoeken)
 $\angle A_2 = 180^\circ - 43^\circ = 137^\circ$ en $\angle A_4 = \angle A_2 = 137^\circ$ (overstaande hoeken)
 $\angle B_1 = \angle A_1 = 43^\circ$ (F-hoeken)
 $\angle B_3 = \angle B_1 = 43^\circ$ (overstaande hoeken)
 $\angle B_2 = 180^\circ - 43^\circ = 137^\circ$ en $\angle B_4 = \angle B_2 = 137^\circ$ (overstaande hoeken)
 b $\angle A_3 + \angle B_4 = 43^\circ + 137^\circ = 180^\circ$
 c Als $\angle B_4 = 87^\circ$, dan is $\angle B_3 = 180^\circ - 87^\circ = 93^\circ$ en $\angle A_3 = \angle B_3 = 93^\circ$ (F-hoeken).
 d Als $\angle B_4 = b^\circ$, dan is $\angle B_3 = 180^\circ - b^\circ$ en $\angle A_3 = \angle B_3 = 180^\circ - b^\circ$ (F-hoeken).

- E2 a $\angle P_1 = 180^\circ - 133^\circ = 47^\circ$
 b Nee, de lijnen k en n in de linker figuur zijn niet evenwijdig, want dan zou moeten gelden dat $\angle P_1 = \angle Q = 46^\circ$ (Z-hoeken), maar $\angle P_1 = 47^\circ$.
 c $\angle T_1 = 180^\circ - 70^\circ - 42^\circ = 68^\circ$
 Ja, de lijnen k en n in de rechter figuur zijn evenwijdig, want er geldt $\angle T_1 = \angle R = 68^\circ$ (Z-hoeken).
 Of:
 $\angle S_1 = 180^\circ - 68^\circ - 70^\circ = 42^\circ$
 Ja, de lijnen k en n in de rechter figuur zijn evenwijdig, want er geldt $\angle S_1 = \angle T = 42^\circ$ (Z-hoeken).

- E3 $\angle H_1 + \angle H_2 = 180^\circ$, dus $\angle H_1 = 180^\circ - \angle H_2$
 $\angle H_2 + \angle F + \angle G_2 = 180^\circ$, dus $\angle F + \angle G_2 = 180^\circ - \angle H_2$
 Uit $\angle H_1 = 180^\circ - \angle H_2$ en $\angle F + \angle G_2 = 180^\circ - \angle H_2$ volgt dat $\angle H_1 = \angle F + \angle G_2$.

- E4 a b



- c Ja, driehoek KLM is gelijkvormig met driehoek PQR , want $\angle K = \angle R$, $\angle L = \angle Q$ en $\angle M = \angle P$, en $KL = RQ$, $KM = PR$ en $LM = PQ$.
 d Zie opdracht E4ab.
 e Ja, driehoek PQR is gelijkvormig met driehoek DEF , want $\angle P = \angle M = \angle E$, $\angle Q = \angle L = \angle D$ en $\angle R = \angle K = \angle F$, en $PQ = LM = DE$, $PR = KM = EF$ en $QR = KL = DF$.

- E5 a** In $\triangle ABC$ geldt $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 50^\circ$ en $\angle C_{12} = 180^\circ - 30^\circ - 50^\circ = 100^\circ$ en in $\triangle ADC$ geldt $\angle A = 30^\circ$, $\angle D_1 = 100^\circ$ en $\angle C_1 = 180^\circ - 30^\circ - 100^\circ = 50^\circ$. De overeenkomstige hoeken zijn gelijk, dus $\triangle ABC$ is gelijkvormig met $\triangle ADC$.
- b** $\triangle ABC \sim \triangle ACD$

- E6 a** Er geldt $\angle U = \angle X_1$ (F -hoeken), $\angle X_1 = \angle V$ (F -hoeken) en $\angle Z_1 = \angle X_2 = \angle Y_2$ (Z -hoeken), dus de overeenkomstige hoeken zijn gelijk en $\triangle UXZ$ is gelijkvormig met $\triangle XZY$.

- b** Er geldt dat $\triangle UXZ$ gelijkvormig is met $\triangle UVW$, want $\angle U = \angle U$, $\angle X_1 = \angle V$ (F -hoeken) en $\angle Z_1 = \angle W$ (F -hoeken).

zijden $\triangle UXZ$	$UX = 8$	$XZ = \dots$	$UZ = \dots$
zijden $\triangle UVW$	$UV = 12$	$VW = 14$	$UW = 14$

De factor van $\triangle UVW$ naar $\triangle UXZ$ is $8 : 12 = \frac{2}{3}$, dus $XZ = UZ = 14 \times \frac{2}{3} = 9\frac{1}{3}$ en $WZ = 14 - 9\frac{1}{3} = 4\frac{2}{3}$.

- E7 a** De driehoeken ACE en BCD zijn gelijkvormig, want $\angle A = \angle B = 90^\circ$ en $\angle C = \angle C$, dus moet ook gelden dat $\angle E = \angle D$.

b

zijden $\triangle ACE$ in m	$AC = 13,3$	$AE = \dots$	$CE = \dots$
zijden $\triangle BCD$ in m	$BC = 2,8$	$BD = 1,6$	$CD = \dots$

- c** De factor van $\triangle BCD$ naar $\triangle ACE$ is $13,3 : 2,8 = 4,75$.

De hoogte van de boom is $1,6 \times 4,75 = 7,6$ meter.

d

zijden $\triangle ACE$ in m	$AC = 10,8$	$AE = \dots$	$CE = \dots$
zijden $\triangle BCD$ in m	$BC = 1,5$	$BD = 1,8$	$CD = \dots$

De factor van $\triangle BCD$ naar $\triangle ACE$ is dan $10,8 : 1,5 = 7,2$.

De hoogte van de boom is dan $1,8 \times 7,2 = 12,96$ meter.

4 De abc-formule

Voorkennis

- V1 a** $x^2 = 25$
 $x = 5$ of $x = -5$
 Controle
 $5^2 = 25$, klopt
 $(-5)^2 = 25$, klopt
- b** $c^2 - 7 = 8$
 $c^2 = 15$
 $c = \sqrt{15}$ of $c = -\sqrt{15}$
 Controle
 $\sqrt{15}^2 - 7 = 15 - 7 = 8$, klopt
 $(-\sqrt{15})^2 - 7 = 15 - 7 = 8$, klopt
- c** $(m - 2)^2 = 81$
 $m - 2 = 9$ of $m - 2 = -9$
 $m = 11$ of $m = -7$
 Controle
 $(11 - 2)^2 = 9^2 = 81$, klopt
 $(-7 - 2)^2 = (-9)^2 = 81$, klopt
- d** $2u^2 + 5 = 1$
 $2u^2 = -4$
 $u^2 = -2$
 Dit kan niet. De vergelijking heeft geen oplossingen.
- e** $15 - 3a^2 = -3$
 $3a^2 = 18$
 $a^2 = 6$
 $a = \sqrt{6}$ of $a = -\sqrt{6}$
 Controle
 $15 - 3 \times \sqrt{6}^2 = 15 - 18 = -3$, klopt
 $15 - 3 \times (-\sqrt{6})^2 = 15 - 18 = -3$, klopt
- f** $(5 + d)^2 = 0$
 $5 + d = 0$
 $d = -5$
 Controle
 $(5 - 5)^2 = 0^2 = 0$, klopt
- V2 a** $a = 3(9 - 2k)$
- | | | |
|----------|----|-------|
| $\times$ | 9 | $-2k$ |
| 3 | 27 | $-6k$ |
- $a = 27 - 6k$
- b** $c = 10 - 2(2g + 5)$
- | | | |
|----------|-----|-----|
| $\times$ | 2g | +5 |
| -2 | -4g | -10 |
- $c = 10 - 4g - 10$
 $c = -4g$
- c** $f = -(t + 3)^2$
- | | | |
|----------|-------|-------|
| $\times$ | t | +3 |
| t | t^2 | $+3t$ |
| +3 | $+3t$ | +9 |
- $f = -(t^2 + 6t + 9)$
- | | | | |
|----------|--------|-------|----|
| $\times$ | t^2 | $+6t$ | +9 |
| -1 | $-t^2$ | $-6t$ | -9 |
- $f = -t^2 - 6t - 9$
- d** $e = (u + 8)(5 - 2u)$
- | | | |
|----------|-----|---------|
| $\times$ | 5 | $-2u$ |
| u | 5u | $-2u^2$ |
| +8 | +40 | $-16u$ |
- $e = -2u^2 - 11u + 40$
- V3 a** De grootste gemeenschappelijke factor van de termen $6a^2$ en $-4a$ is $2a$.
- b**
- | | | |
|----------|--------|-------|
| $\times$ | 3a | -2 |
| 2a | $6a^2$ | $-4a$ |
- c** $y = 2a(3a - 2)$

- V4 a Het product is +32 en de som is -12. c Het product is +21 en de som is +10.

product	getallen	som
+32	1 en 32	33
+32	-1 en -32	-33
+32	2 en 16	18
+32	-2 en -16	-18
+32	4 en 8	12
+32	-4 en -8	-12

$$k = (c - 4)(c - 8)$$

- b Het product is +6 en de som is +5.

product	getallen	som
+6	1 en 6	7
+6	-1 en -6	-7
+6	2 en 3	5
+6	-2 en -3	-5

$$g = (b + 2)(b + 3)$$

product	getallen	som
+21	1 en 21	22
+21	-1 en -21	-22
+21	3 en 7	10
+21	-3 en -7	-10

$$d = (p + 3)(p + 7)$$

- d Het product is -42 en de som is -1.

product	getallen	som
-42	1 en -42	-41
-42	-1 en 42	41
-42	2 en -21	-19
-42	-2 en 21	19
-42	3 en -14	-11
-42	-3 en 14	11
-42	6 en -7	-1
-42	-6 en 7	1

$$z = (u - 7)(u + 6)$$

- V5 a $2p(12p + 36) = 0$

$$2p = 0 \text{ of } 12p + 36 = 0$$

$$p = 0 \text{ of } 12p = -36$$

$$p = 0 \text{ of } p = -3$$

- b $(x - 3)(4x + 6) = 0$

$$x - 3 = 0 \text{ of } 4x + 6 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } 4x = -6$$

$$x = 3 \text{ of } x = -1\frac{1}{2}$$

- c $4a^2 + 3a = 0$

$$a(4a + 3) = 0$$

$$a = 0 \text{ of } 4a + 3 = 0$$

$$a = 0 \text{ of } 4a = -3$$

$$a = 0 \text{ of } a = -\frac{3}{4}$$

- d $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$(x - 3)(x - 4) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ of } x - 4 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = 4$$

- e $q^2 - 6q - 16 = 0$

$$(q + 2)(q - 8) = 0$$

$$q + 2 = 0 \text{ of } q - 8 = 0$$

$$q = -2 \text{ of } q = 8$$

- f $7w^2 - 28w = 0$

$$7w(w - 4) = 0$$

$$7w = 0 \text{ of } w - 4 = 0$$

$$w = 0 \text{ of } w = 4$$

4.1 Ontbinden in factoren

intro De vergelijking $p^2 + 6p + 9 = 0$ en de vergelijking $x^2 + 9x + 20 = 0$ kun je al oplossen, want de eerste vergelijking kun je schrijven als $(p + 3)(p + 3) = 0$ en de laatste vergelijking kun je schrijven als $(x + 4)(x + 5) = 0$.

- 1 a $x^2 - 9x + 18 = 0$

$$(x - 3)(x - 6) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ of } x - 6 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = 6$$

- b Invullen van $x = 3$ geeft $2 \times 3^2 - 18 \times 3 + 36 = 18 - 54 + 36 = 0$ en invullen van $x = 6$ geeft $2 \times 6^2 - 18 \times 6 + 36 = 72 - 108 + 36 = 0$.

Het valt op dat de gevonden oplossingen aan beide vergelijkingen voldoen.

4 De abc-formule

- c Als je in de vergelijking $2x^2 - 18x + 36 = 0$ aan beide kanten van het gelijkteken alle termen door 2 deelt, dan krijg je de vergelijking $x^2 - 9x + 18 = 0$.
- d De vergelijkingen hebben dezelfde oplossingen, omdat de vergelijking $x^2 - 9x + 18 = 0$ uit de vergelijking $2x^2 - 18x + 36 = 0$ ontstaat door aan beide kanten van het gelijkteken alle termen door 2 te delen.
- 2 a Mark vermenigvuldigt aan beide kanten van het gelijkteken alle termen met het getal -5 .
- b $x^2 - 15x + 50 = 0$
 $(x - 5)(x - 10) = 0$
 $x - 5 = 0$ of $x - 10 = 0$
 $x = 5$ of $x = 10$
- c Ja, want $-0,2 : -0,2 = 1$; $3 : -0,2 = -15$ en $-10 : -0,2 = 50$, dus ook dan krijgt hij de vergelijking $x^2 - 15x + 50 = 0$.
- 3 a $-x^2 + 3x + 18 = 0$
 $x^2 - 3x - 18 = 0$
 $(x + 3)(x - 6) = 0$
 $x + 3 = 0$ of $x - 6 = 0$
 $x = -3$ of $x = 6$
- b $\frac{1}{2}x^2 - 6x + 18 = 0$
 $x^2 - 12x + 36 = 0$
 $(x - 6)(x - 6) = 0$
 $x - 6 = 0$ of $x - 6 = 0$
 $x = 6$
- c $\frac{1}{4}x^2 - x - 8 = 0$
 $x^2 - 4x - 32 = 0$
 $(x + 4)(x - 8) = 0$
 $x + 4 = 0$ of $x - 8 = 0$
 $x = -4$ of $x = 8$
- d $2x^2 + 10x - 28 = 0$
 $x^2 + 5x - 14 = 0$
 $(x - 2)(x + 7) = 0$
 $x - 2 = 0$ of $x + 7 = 0$
 $x = 2$ of $x = -7$
- e $-3x^2 + 36x - 96 = 0$
 $x^2 - 12x + 32 = 0$
 $(x - 4)(x - 8) = 0$
 $x - 4 = 0$ of $x - 8 = 0$
 $x = 4$ of $x = 8$
- f $0,1x^2 - x + 0,9 = 0$
 $x^2 - 10x + 9 = 0$
 $(x - 1)(x - 9) = 0$
 $x - 1 = 0$ of $x - 9 = 0$
 $x = 1$ of $x = 9$
- 4 a $-2p^2 + 90p - 700 = 0$
 $p^2 - 45p + 350 = 0$
 $(p - 10)(p - 35) = 0$
 $p - 10 = 0$ of $p - 35 = 0$
 $p = 10$ of $p = 35$
 Bij $W = 0$ hoort een prijs van een cupcake van 10 cent of 35 cent.
- b Bij een winst van 200 euro hoort de vergelijking $-2p^2 + 90p - 700 = 200$.
- c $-2p^2 + 90p - 700 = 200$
 $-2p^2 + 90p - 900 = 0$
 $p^2 - 45p + 450 = 0$
 $(p - 15)(p - 30) = 0$
 $p - 15 = 0$ of $p - 30 = 0$
 $p = 15$ of $p = 30$
 Bij een winst van 200 euro kost een cupcake 15 cent of 30 cent.

5 a Als je de vergelijking aan beide kanten van het gelijkteken door -2 deelt, dan krijg je de vergelijking $(x+3)(x+5) = 0$.

b $-2(x+3)(x+5) = 0$

$$(x+3)(x+5) = 0$$

$$x+3 = 0 \text{ of } x+5 = 0$$

$$x = -3 \text{ of } x = -5$$

c Hij heeft gelijk, want hij deelt de vergelijking aan beide kanten van het gelijkteken door 3.

d $3(x+3)(x-4) = 24$

$$(x+3)(x-4) = 8$$

$$x^2 - x - 12 = 8$$

$$x^2 - x - 20 = 0$$

$$(x+4)(x-5) = 0$$

$$x+4 = 0 \text{ of } x-5 = 0$$

$$x = -4 \text{ of } x = 5$$

6 a $-0,5(x-3)(5-x) = 0$

$$(x-3)(5-x) = 0$$

$$x-3 = 0 \text{ of } 5-x = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = 5$$

b $4b^2 - 12b = 16$

$$4b^2 - 12b - 16 = 0$$

$$b^2 - 3b - 4 = 0$$

$$(b+1)(b-4) = 0$$

$$b+1 = 0 \text{ of } b-4 = 0$$

$$b = -1 \text{ of } b = 4$$

c $2d(d+5) = -12$

$$d(d+5) = -6$$

$$d^2 + 5d + 6 = 0$$

$$(d+2)(d+3) = 0$$

$$d+2 = 0 \text{ of } d+3 = 0$$

$$d = -2 \text{ of } d = -3$$

d $x^2 + 2x - 16 = 8$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(x-4)(x+6) = 0$$

$$x-4 = 0 \text{ of } x+6 = 0$$

$$x = 4 \text{ of } x = -6$$

e $-2(x-3)(x+3) = -32$

$$(x-3)(x+3) = 16$$

$$x^2 - 9 = 16$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \text{ of } x = -5$$

f $-3x^2 + 12x = -63$

$$-3x^2 + 12x + 63 = 0$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$(x+3)(x-7) = 0$$

$$x+3 = 0 \text{ of } x-7 = 0$$

$$x = -3 \text{ of } x = 7$$

7 a $x^2 - 36 = 0$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6 \text{ of } x = -6$$

b $(x+6)(x-6) = 0$

$$x+6 = 0 \text{ of } x-6 = 0$$

$$x = -6 \text{ of } x = 6$$

Het valt op dat beide vergelijkingen dezelfde oplossingen hebben.

c $(x+6)(x-6) = 0$

x	x	-6
x	x^2	$-6x$
$+6$	$+6x$	-36

$$x^2 - 36 = 0$$

Na het zonder haakjes schrijven van de vergelijking $(x+6)(x-6) = 0$ krijg je de vergelijking $x^2 - 36 = 0$ en die vergelijkingen hebben natuurlijk dezelfde oplossingen.

4 De abc-formule

- 8 a** $x^2 - 25 = 0$
 $(x + 5)(x - 5) = 0$
 $x + 5 = 0$ of $x - 5 = 0$
 $x = -5$ of $x = 5$
- b** $x^2 - 4 = 0$
 $(x + 2)(x - 2) = 0$
 $x + 2 = 0$ of $x - 2 = 0$
 $x = -2$ of $x = 2$
- c** $2x^2 - 32 = 0$
 $x^2 - 16 = 0$
 $(x + 4)(x - 4) = 0$
 $x + 4 = 0$ of $x - 4 = 0$
 $x = -4$ of $x = 4$
- d** $-4x^2 + 10 = 6$
 $-4x^2 + 4 = 0$
 $x^2 - 1 = 0$
 $(x + 1)(x - 1) = 0$
 $x + 1 = 0$ of $x - 1 = 0$
 $x = -1$ of $x = 1$
- 9 a** Ze heeft gelijk, want ze heeft aan beide kanten van het gelijkteken alle termen door 4 gedeeld.
- b** Femke ziet dat als ze $x - 8$ door X vervangt, dat ze dan de vergelijking $X^2 - 9 = 0$, oftewel $X^2 - 3^2 = 0$ krijgt.
 $(x - 8)^2 - 9 = 0$
 $(x - 8 + 3)(x - 8 - 3) = 0$
 $(x - 5)(x - 11) = 0$
 $x - 5 = 0$ of $x - 11 = 0$
 $x = 5$ of $x = 11$
- 03 a** Je moet eerst aan beide kanten van het gelijkteken alle termen door 4 delen, omdat je een vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ alleen kunt ontbinden in factoren als $a = 1$.
- b** $4x^2 + 20x - 56 = 0$
 $x^2 + 5x - 14 = 0$
 $(x - 2)(x + 7) = 0$
 $x - 2 = 0$ of $x + 7 = 0$
 $x = 2$ of $x = -7$
- c** Bij vergelijking B moet je eerst aan beide kanten van het gelijkteken alle termen met -1 vermenigvuldigen of door -1 delen.
 Bij vergelijking C moet je eerst aan beide kanten van het gelijkteken alle termen met 2 vermenigvuldigen of door $\frac{1}{2}$ delen.
- d B** $-x^2 + 3x + 10 = 0$
 $x^2 - 3x - 10 = 0$
 $(x + 2)(x - 5) = 0$
 $x + 2 = 0$ of $x - 5 = 0$
 $x = -2$ of $x = 5$
- C** $\frac{1}{2}x^2 - 3x - 8 = 0$
 $x^2 - 6x - 16 = 0$
 $(x + 2)(x - 8) = 0$
 $x + 2 = 0$ of $x - 8 = 0$
 $x = -2$ of $x = 8$
- e** $5x^2 + 30x + 40 = 0$
 $x^2 + 6x + 8 = 0$
 $(x + 2)(x + 4) = 0$
 $x + 2 = 0$ of $x + 4 = 0$
 $x = -2$ of $x = -4$
- g** $\frac{1}{2}x^2 - 5x - 12 = 0$
 $x^2 - 10x - 24 = 0$
 $(x + 2)(x - 12) = 0$
 $x + 2 = 0$ of $x - 12 = 0$
 $x = -2$ of $x = 12$
- f** $-0,2x^2 - x + 10 = 0$
 $x^2 + 5x - 50 = 0$
 $(x - 5)(x + 10) = 0$
 $x - 5 = 0$ of $x + 10 = 0$
 $x = 5$ of $x = -10$
- h** $-2x^2 + 24x - 64 = 0$
 $x^2 - 12x + 32 = 0$
 $(x - 4)(x - 8) = 0$
 $x - 4 = 0$ of $x - 8 = 0$
 $x = 4$ of $x = 8$

$$\begin{array}{lll}
 \text{06} & 9(p+7)(p+8) = 0 & -3(x-2)(x-5) = 6 & 3x^2 + 33x = -90 \\
 & (p+7)(p+8) = 0 & (x-2)(x-5) = -2 & 3x^2 + 33x + 90 = 0 \\
 & p+7 = 0 \text{ of } p+8 = 0 & x^2 - 7x + 10 = -2 & x^2 + 11x + 30 = 0 \\
 & p = -7 \text{ of } p = -8 & x^2 - 7x + 12 = 0 & (x+5)(x+6) = 0 \\
 & & (x-3)(x-4) = 0 & x+5 = 0 \text{ of } x+6 = 0 \\
 & & x-3 = 0 \text{ of } x-4 = 0 & x = -5 \text{ of } x = -6 \\
 & & x = 3 \text{ of } x = 4 &
 \end{array}$$

- U1 a** $-0,01p^2 + 3,5p - 34 = 0$
 $p^2 - 350p + 3400 = 0$
 $(p-10)(p-340) = 0$
 $p-10 = 0$ of $p-340 = 0$
 $p = 10$ of $p = 340$
 Bij een prijs van 10 cent of 340 cent maakt Tim geen winst.
 Bij een prijs van $(10 + 340) : 2 = 175$ cent maakt Tim de grootste winst.
- b** Invullen van $p = 175$ geeft $W(175) = -0,01 \times 175^2 + 3,5 \times 175 - 34$, oftewel
 $W(175) = -306,25 + 612,5 - 34 = 272,25$. De grootste winst is 272,25 euro.

4.2 Kwadraat afsplitsen

intro Michael vindt dezelfde oplossingen, want als hij in de vergelijking

$(x+4)^2 = 9$ de haakjes wegwerkt, dan krijgt hij de vergelijking

$$x^2 + 8x + 16 = 9, \text{ oftewel } x^2 + 8x + 7 = 0.$$

10 a $(x+2)^2 = 49$
 $x+2 = 7$ of $x+2 = -7$
 $x = 5$ of $x = -9$

b $(x+2)^2 = 49$
 $x^2 + 4x + 4 = 49$
 $x^2 + 4x - 45 = 0$

c $x^2 + 4x - 45 = 0$
 $(x-5)(x+9) = 0$
 $x-5 = 0$ of $x+9 = 0$
 $x = 5$ of $x = -9$

Ja, je krijgt dezelfde oplossingen als bij opdracht a.

11 a Er geldt dat $(\sqrt{6})^2 = 6$ en $(-\sqrt{6})^2 = 6$. Hij legt een bordje op $a-8$, dus krijgt hij $a-8 = \sqrt{6}$ of $a-8 = -\sqrt{6}$.

b $a-8 = \sqrt{6}$ of $a-8 = -\sqrt{6}$
 $a = 8 + \sqrt{6}$ of $a = 8 - \sqrt{6}$

c $(a-8)^2 = 6$
 $a^2 - 16a + 64 = 6$

4 De abc-formule

- d De vergelijking bij opdracht c op nul herleiden geeft $a^2 - 16a + 58 = 0$.

product	getallen	som
+58	1 en 58	59
+58	-1 en -58	-59
+58	2 en 29	31
+58	-2 en -29	-31

Er zijn geen gehele getallen te vinden waarvan het product +58 en de som -16 is, dus je kunt de vergelijking die je bij opdracht c krijgt niet ontbinden in factoren.

- 12 a Op de puntjes moet het getal 5 staan.

b A $y = (x + 3)^2$ C $y = (x - 8)^2$
 B $y = (x - 1)^2$ D $y = (x + 6)^2$

- 13 a Je kunt $y = x^2 + 8x + 16$ schrijven als $y = (x + 4)^2$.
 b Je kunt $y = x^2 - 14x + 49$ schrijven als $y = (x - 7)^2$.
 c Je kunt $y = x^2 + 20x + 100$ schrijven als $y = (x + 10)^2$.
 d Je kunt $y = x^2 - 18x + 81$ schrijven als $y = (x - 9)^2$.

14 a $y = (x + 3)^2 - 9$
 $y = x^2 + 6x + 9 - 9$
 $y = x^2 + 6x$

- b De formule $y = x^2 + 6x + 14$ van Youri is de formule $y = x^2 + 6x$ van Roos waar aan de rechterkant 14 bij opgeteld is.
 De formule van Roos kun je schrijven als $y = (x + 3)^2 - 9$ en daar aan de rechterkant 14 bij optellen, geeft de formule $y = (x + 3)^2 - 9 + 14$.
 c Op de puntjes schrijft ze de getallen 9 en 10.
 d Fatima schrijft het getal 19 op de puntjes.

15 a

product	getallen	som
-13	1 en -13	-12
-13	-1 en 13	12

Er zijn geen gehele getallen te vinden waarvan het product -13 en de som -6 is, dus hij kan de vergelijking niet met ontbinden in factoren oplossen.

b $x^2 - 6x - 13 = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 - 13 = 0$
 $(x - 3)^2 - 22 = 0$
 $(x - 3)^2 = 22$
 $x - 3 = \sqrt{22}$ of $x - 3 = -\sqrt{22}$
 $x = 3 + \sqrt{22}$ of $x = 3 - \sqrt{22}$

- 16 a** $x^2 + 22x - 5 = 0$
 $(x + 11)^2 - 121 - 5 = 0$
 $(x + 11)^2 - 126 = 0$
 $(x + 11)^2 = 126$
 $x + 11 = \sqrt{126}$ of $x + 11 = -\sqrt{126}$
 $x = -11 + \sqrt{126}$ of $x = -11 - \sqrt{126}$
- b** $x^2 + 10x + 5 = 0$
 $(x + 5)^2 - 25 + 5 = 0$
 $(x + 5)^2 - 20 = 0$
 $(x + 5)^2 = 20$
 $x + 5 = \sqrt{20}$ of $x + 5 = -\sqrt{20}$
 $x = -5 + \sqrt{20}$ of $x = -5 - \sqrt{20}$
- c** $x^2 - 18x + 2 = 0$
 $(x - 9)^2 - 81 + 2 = 0$
 $(x - 9)^2 - 79 = 0$
 $(x - 9)^2 = 79$
 $x - 9 = \sqrt{79}$ of $x - 9 = -\sqrt{79}$
 $x = 9 + \sqrt{79}$ of $x = 9 - \sqrt{79}$
- d** $q^2 + 8q + 10 = 0$
 $(q + 4)^2 - 16 + 10 = 0$
 $(q + 4)^2 - 6 = 0$
 $(q + 4)^2 = 6$
 $q + 4 = \sqrt{6}$ of $q + 4 = -\sqrt{6}$
 $q = -4 + \sqrt{6}$ of $q = -4 - \sqrt{6}$
- e** $q^2 - 6q + 15 = 0$
 $(q - 3)^2 - 9 + 15 = 0$
 $(q - 3)^2 + 6 = 0$
 $(q - 3)^2 = -6$
Dit kan niet. De vergelijking heeft geen oplossingen.
- f** $q^2 - 4q - 9 = 0$
 $(q - 2)^2 - 4 - 9 = 0$
 $(q - 2)^2 - 13 = 0$
 $(q - 2)^2 = 13$
 $q - 2 = \sqrt{13}$ of $q - 2 = -\sqrt{13}$
 $q = 2 + \sqrt{13}$ of $q = 2 - \sqrt{13}$

- 17 a** $t^2 + 8t + 3 = 4$
 $t^2 + 8t - 1 = 0$
 $(t + 4)^2 - 16 - 1 = 0$
 $(t + 4)^2 - 17 = 0$
 $(t + 4)^2 = 17$
 $t + 4 = \sqrt{17}$ of $t + 4 = -\sqrt{17}$
 $t = -4 + \sqrt{17}$ of $t = -4 - \sqrt{17}$
- b A** $a^2 + 12a = -29$
 $a^2 + 12a + 29 = 0$
 $(a + 6)^2 - 36 + 29 = 0$
 $(a + 6)^2 - 7 = 0$
 $(a + 6)^2 = 7$
 $a + 6 = \sqrt{7}$ of $a + 6 = -\sqrt{7}$
 $a = -6 + \sqrt{7}$ of $a = -6 - \sqrt{7}$
- B** $b^2 - 12b - 14 = 5$
 $b^2 - 12b - 19 = 0$
 $(b - 6)^2 - 36 - 19 = 0$
 $(b - 6)^2 - 55 = 0$
 $(b - 6)^2 = 55$
 $b - 6 = \sqrt{55}$ of $b - 6 = -\sqrt{55}$
 $b = 6 + \sqrt{55}$ of $b = 6 - \sqrt{55}$
- C** $c^2 - 2c + 18 = 7$
 $c^2 - 2c + 11 = 0$
 $(c - 1)^2 - 1 + 11 = 0$
 $(c - 1)^2 + 10 = 0$
 $(c - 1)^2 = -10$
Dit kan niet. De vergelijking heeft geen oplossingen.
- D** $d^2 + 6d = 25$
 $d^2 + 6d - 25 = 0$
 $(d + 3)^2 - 9 - 25 = 0$
 $(d + 3)^2 - 34 = 0$
 $(d + 3)^2 = 34$
 $d + 3 = \sqrt{34}$ of $d + 3 = -\sqrt{34}$
 $d = -3 + \sqrt{34}$ of $d = -3 - \sqrt{34}$

- 18 a** De x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $x \approx 1,5$ en $x \approx -3,5$.
- b** Je kunt de x -coördinaten niet berekenen door de bijbehorende vergelijking te ontbinden in factoren, want er zijn geen gehele getallen te vinden waarvan het product $-5,25$ en de som $+2$ is.
- c** $x^2 + 2x - 5,25 = 0$
 $(x + 1)^2 - 1 - 5,25 = 0$
 $(x + 1)^2 - 6,25 = 0$
 $(x + 1)^2 = 6,25$
 $x + 1 = 2,5$ of $x + 1 = -2,5$
 $x = 1,5$ of $x = -3,5$

4 De abc-formule

016 a Marieke schrijft op de tweede regel $(x - 10)^2$ omdat -10 de helft van -20 is.

b Marieke moet de op tweede regel het getal 100 invullen, omdat $10^2 = 100$.

c $x^2 - 20x + 70 = 0$

$$(x - 10)^2 - 100 + 70 = 0$$

$$(x - 10)^2 - 30 = 0$$

$$(x - 10)^2 = 30$$

$$x - 10 = \sqrt{30} \text{ of } x - 10 = -\sqrt{30}$$

$$x = 10 + \sqrt{30} \text{ of } x = 10 - \sqrt{30}$$

d $q^2 + 8q + 17 = 0$

$$(q + 4)^2 - 16 + 17 = 0$$

$$(q + 4)^2 + 1 = 0$$

$$(q + 4)^2 = -1$$

Dit kan niet. De vergelijking heeft geen oplossingen.

e De vergelijking van Thomas heeft geen oplossingen, omdat een kwadraat niet negatief kan zijn.

f $x^2 + 6x - 5 = 0$

$$(x + 3)^2 - 9 - 5 = 0$$

$$(x + 3)^2 - 14 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 14$$

$$x + 3 = \sqrt{14} \text{ of } x + 3 = -\sqrt{14}$$

$$x = -3 + \sqrt{14} \text{ of } x = -3 - \sqrt{14}$$

g $x^2 - 2x + 2 = 0$

$$(x - 1)^2 - 1 + 2 = 0$$

$$(x - 1)^2 + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = -1$$

Dit kan niet. De vergelijking heeft geen oplossingen.

h $x^2 + 16x + 5 = 0$

$$(x + 8)^2 - 64 + 5 = 0$$

$$(x + 8)^2 - 59 = 0$$

$$(x + 8)^2 = 59$$

$$x + 8 = \sqrt{59} \text{ of } x + 8 = -\sqrt{59}$$

$$x = -8 + \sqrt{59} \text{ of } x = -8 - \sqrt{59}$$

i $q^2 - 4q + 15 = 0$

$$(q - 2)^2 - 4 + 15 = 0$$

$$(q - 2)^2 + 11 = 0$$

$$(q - 2)^2 = -11$$

Dit kan niet. De vergelijking heeft geen oplossingen.

j $q^2 + 10q + 8 = 0$

$$(q + 5)^2 - 25 + 8 = 0$$

$$(q + 5)^2 - 17 = 0$$

$$(q + 5)^2 = 17$$

$$q + 5 = \sqrt{17} \text{ of } q + 5 = -\sqrt{17}$$

$$q = -5 + \sqrt{17} \text{ of } q = -5 - \sqrt{17}$$

k $q^2 - 12q - 7 = 0$

$$(q - 6)^2 - 36 - 7 = 0$$

$$(q - 6)^2 - 43 = 0$$

$$(q - 6)^2 = 43$$

$$q - 6 = \sqrt{43} \text{ of } q - 6 = -\sqrt{43}$$

$$q = 6 + \sqrt{43} \text{ of } q = 6 - \sqrt{43}$$

U2 a $x^2 + 9x + 11\frac{1}{4} = 0$

$$(x + 4\frac{1}{2})^2 - 20\frac{1}{4} + 11\frac{1}{4} = 0$$

$$(x + 4\frac{1}{2})^2 - 9 = 0$$

$$(x + 4\frac{1}{2})^2 = 9$$

$$x + 4\frac{1}{2} = 3 \text{ of } x + 4\frac{1}{2} = -3$$

$$x = -1\frac{1}{2} \text{ of } x = -7\frac{1}{2}$$

b $x^2 + \frac{1}{2}x = 2\frac{3}{16}$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 2\frac{3}{16} = 0$$

$$(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} - 2\frac{3}{16} = 0$$

$$(x + \frac{1}{4})^2 - 2\frac{4}{16} = 0$$

$$(x + \frac{1}{4})^2 = 2\frac{1}{4}$$

$$x + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2} \text{ of } x + \frac{1}{4} = -1\frac{1}{2}$$

$$x = 1\frac{1}{4} \text{ of } x = -1\frac{3}{4}$$

U3 a $x^2 + 6x + 100 = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + 100 = 0$
 $(x - 3)^2 + 91 = 0$
 $(x - 3)^2 = -91$

De vergelijking $x^2 + 6x + 100 = 0$ heeft geen oplossingen, omdat een kwadraat niet negatief kan zijn.

b $x^2 + 6x + c = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + c = 0$
 $(x - 3)^2 = 9 - c$

De vergelijking heeft één oplossing als $9 - c = 0$, dus als $c = 9$.

4.3 De abc-formule

intro Eerst even een tabel maken.

a in m	0	10	20	30	40	50	60	70	80
h in m	25,5	16,5	9,5	4,5	1,5	0,5	1,5	4,5	9,5

Nee, de vogel raakt de grond niet, want tijdens de vlucht is de hoogte altijd minstens 0,5 meter.

19 a $x^2 - 6x + 8 = 0$
 $(x - 2)(x - 4) = 0$
 $x - 2 = 0$ of $x - 4 = 0$
 $x = 2$ of $x = 4$

De x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $x = 2$ of $x = 4$.

b

product	getallen	som
+3	1 en 3	4
+3	-1 en -3	-4

Er zijn geen gehele getallen te vinden waarvan het product +3 en de som -6 is, dus het lukt niet de vergelijking $x^2 - 6x + 3 = 0$ met ontbinden in factoren op te lossen.

c $x^2 - 6x + 3 = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + 3 = 0$
 $(x - 3)^2 - 6 = 0$
 $(x - 3)^2 = 6$
 $x - 3 = \sqrt{6}$ of $x - 3 = -\sqrt{6}$
 $x = 3 + \sqrt{6} = 5,4$ of $x = 3 - \sqrt{6} = 0,6$

d Het klopt, want de grafiek van g snijdt de x -as als $x = 5,4$ of $x = 0,6$.

20 a Er staan haakjes om -5, omdat je h^2 moet berekenen en zonder haakjes zou er -5^2 staan en dat is niet -5×-5 , maar -5×5 .

b De exacte oplossingen op twee decimalen afgerond zijn gelijk aan
 $\frac{5 + \sqrt{37}}{2} = \frac{11,082...}{2} = 5,54$ en $\frac{5 - \sqrt{37}}{2} = \frac{-1,082...}{2} = -0,54$ en dat klopt.

4 De abc-formule

- 21 a** $a = 2$, $b = -1$ en $c = -5$
b Rob zet haakjes om -1 , omdat hij b^2 moet berekenen en zonder haakjes zou er -1^2 staan.
c Rob gebruikt hier haakjes, omdat hij de hele teller door de hele noemer moet delen en zonder haakjes zou er $1 + \sqrt{41} : 2 \times 2$ staan.
d De tweede oplossing van de vergelijking is $x = \frac{1 - \sqrt{41}}{2 \times 2} = \frac{-5,403...}{4} \approx -1,35$ en dat klopt.

22 a $-2x^2 + 13x - 15 = 0$
 $D = 13^2 - 4 \times -2 \times -15 = 169 - 120 = 49$
 $x = \frac{-13 + \sqrt{49}}{2 \times -2}$ of $x = \frac{-13 - \sqrt{49}}{2 \times -2}$
 $x = \frac{-13 + 7}{-4} = 1\frac{1}{2} = 1,50$ of $x = \frac{-13 - 7}{-4} = 5$

b $5x^2 - 6x - 1 = 0$
 $D = (-6)^2 - 4 \times 5 \times -1 = 36 + 20 = 56$
 $x = \frac{6 + \sqrt{56}}{2 \times 5}$ of $x = \frac{6 - \sqrt{56}}{2 \times 5}$
 $x = \frac{6 + \sqrt{56}}{10} \approx 1,35$ of $x = \frac{6 - \sqrt{56}}{10} \approx -0,15$

c $-\frac{1}{4}w^2 - w + 1 = 0$
 $D = (-1)^2 - 4 \times -\frac{1}{4} \times 1 = 1 + 1 = 2$
 $w = \frac{1 + \sqrt{2}}{2 \times -\frac{1}{4}}$ of $w = \frac{1 - \sqrt{2}}{2 \times -\frac{1}{4}}$
 $w = \frac{1 + \sqrt{2}}{-\frac{1}{2}} \approx -4,83$ of $w = \frac{1 - \sqrt{2}}{-\frac{1}{2}} \approx 0,83$

d $13p + 18p^2 + 2 = 0$
 $18p^2 + 13p + 2 = 0$
 $D = 13^2 - 4 \times 18 \times 2 = 169 - 144 = 25$
 $p = \frac{-13 + \sqrt{25}}{2 \times 18}$ of $p = \frac{-13 - \sqrt{25}}{2 \times 18}$
 $p = \frac{-13 + 5}{36} = -\frac{2}{9} \approx -0,22$ of $p = \frac{-13 - 5}{36} = -\frac{1}{2} = -0,50$

e $4v^2 + 3v - 1 = 0$
 $D = 3^2 - 4 \times 4 \times -1 = 9 + 16 = 25$
 $v = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times 4}$ of $v = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times 4}$
 $v = \frac{-3 + 5}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$ of $v = \frac{-3 - 5}{8} = -1$

f $r^2 - 6\frac{1}{2}r + 3 = 0$
 $D = (6\frac{1}{2})^2 - 4 \times 1 \times 3 = 42\frac{1}{4} - 12 = 30\frac{1}{4}$
 $r = \frac{6\frac{1}{2} + \sqrt{30\frac{1}{4}}}{2 \times 1}$ of $r = \frac{6\frac{1}{2} - \sqrt{30\frac{1}{4}}}{2 \times 1}$
 $r = \frac{6\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2}}{2} = 6$ of $r = \frac{6\frac{1}{2} - 5\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} = 0,50$

23 a $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$D = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times 1} \text{ of } x = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-4 + 2}{2} = -1 \text{ of } x = \frac{-4 - 2}{2} = -3$$

b De vergelijking $f(x) = 0$ heeft twee oplossingen. Dat kun je aan de bijbehorende grafiek zien, omdat die twee snijpunten met de x -as heeft.

c De discriminant is positief, want $D = 4$.

d $x^2 + 4x + 4 = 0$

$$D = 4^2 - 4 \times 1 \times 4 = 16 - 16 = 0$$

$$x = \frac{-4 + \sqrt{0}}{2 \times 1} \text{ of } x = \frac{-4 - \sqrt{0}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-4 + 0}{2} = -2 \text{ (of } x = \frac{-4 - 0}{2} = -2)$$

De vergelijking $g(x) = 0$ heeft één oplossing. Dat kun je aan de bijbehorende grafiek zien, omdat die één snijpunt met de x -as heeft.

De discriminant is gelijk aan 0, want $D = 0$.

e $D = 4^2 - 4 \times 1 \times 6 = 16 - 24 = -8$

f De vergelijking $h(x) = 0$ heeft geen oplossingen, want de bijbehorende grafiek heeft geen snijpunten met de x -as.

24 a $D = 2^2 - 4 \times 1 \times -10 = 4 + 40 = 44$, dus $D > 0$ en er zijn twee oplossingen.

b $D = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 11 = 81 - 88 = -7$, dus $D < 0$ en er zijn geen oplossingen.

c $D = (-16)^2 - 4 \times 8 \times 8 = 256 - 256 = 0$, dus $D = 0$ en er is één oplossing.

d $D = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 4 = 49 - 48 = 1$, dus $D > 0$ en er zijn twee oplossingen.

25 a De bij $c = 0$ horende parabool heeft twee snijpunten met de x -as.

Er geldt $D = 5^2 - 4 \times 1 \times 3 = 25 - 12 = 13$, dus $D > 0$ en dat klopt.

b Er geldt $D = 5^2 - 4 \times 1 \times 6,25 = 25 - 25 = 0$, dus de bijbehorende parabool heeft één gemeenschappelijk punt met de x -as.

c De bijbehorende parabool heeft geen snijpunten met de x -as als $c > 6,25$.

22 a $a = 3$, $b = -6$ en $c = 2$

b Phill zet haakjes om -6 , omdat hij b^2 moet berekenen en zonder haakjes zou er -6^2 staan.

c $D = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 36 - 24 = 12$

d Phill schrijft 6 op, omdat dat hetzelfde is als $- -6$.

e $x = \frac{6 + \sqrt{12}}{2 \times 3} \text{ of } x = \frac{6 - \sqrt{12}}{2 \times 3}$

$$x = \frac{6 + \sqrt{12}}{6} \text{ of } x = \frac{6 - \sqrt{12}}{6}$$

f Op twee decimalen afgerond is dat is $x = \frac{6 + \sqrt{12}}{6} = \frac{9,464...}{6} = 1,58$ of

$$x = \frac{6 - \sqrt{12}}{6} = \frac{2,535...}{6} = 0,42 \text{ en dat klopt.}$$

4 De abc-formule

g $2x^2 + 3x - 4 = 0$

$$D = 3^2 - 4 \times 2 \times -4 = 9 + 32 = 41$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{41}}{2 \times 2} \text{ of } x = \frac{-3 - \sqrt{41}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{41}}{4} \approx 0,85 \text{ of } x = \frac{-3 - \sqrt{41}}{4} \approx -2,35$$

h $6x^2 - 13x + 5 = 0$

$$D = (-13)^2 - 4 \times 6 \times 5 = 169 - 120 = 49$$

$$x = \frac{13 + \sqrt{49}}{2 \times 6} \text{ of } x = \frac{13 - \sqrt{49}}{2 \times 6}$$

$$x = \frac{13 + 7}{12} = 1\frac{2}{3} \approx 1,67 \text{ of } x = \frac{13 - 7}{12} = \frac{1}{2} = 0,50$$

i $-v^2 + 4v - \frac{1}{2} = 0$

$$D = 4^2 - 4 \times -1 \times -\frac{1}{2} = 16 - 2 = 14$$

$$v = \frac{-4 + \sqrt{14}}{2 \times -1} \text{ of } v = \frac{-4 - \sqrt{14}}{2 \times -1}$$

$$v = \frac{-4 + \sqrt{14}}{-2} \approx 0,13 \text{ of } v = \frac{-4 - \sqrt{14}}{-2} \approx 3,87$$

j $2p^2 - 7p + 1 = 0$

$$D = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 49 - 8 = 41$$

$$p = \frac{7 + \sqrt{41}}{2 \times 2} \text{ of } p = \frac{7 - \sqrt{41}}{2 \times 2}$$

$$p = \frac{7 + \sqrt{41}}{4} \approx 3,35 \text{ of } p = \frac{7 - \sqrt{41}}{4} \approx 0,15$$

k $-r - 3r^2 + 2 = 0$

$$-3r^2 - r + 2 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \times -3 \times 2 = 1 + 24 = 25$$

$$r = \frac{1 + \sqrt{25}}{2 \times -3} \text{ of } r = \frac{1 - \sqrt{25}}{2 \times -3}$$

$$r = \frac{1 + 5}{-6} = -1 \text{ of } r = \frac{1 - 5}{-6} \approx 0,67$$

l $4w^2 + 6w + 2 = 0$

$$D = 6^2 - 4 \times 4 \times 2 = 36 - 32 = 4$$

$$w = \frac{-6 + \sqrt{4}}{2 \times 4} \text{ of } w = \frac{-6 - \sqrt{4}}{2 \times 4}$$

$$w = \frac{-6 + 2}{8} = -\frac{1}{2} = -0,50 \text{ of } w = \frac{-6 - 2}{8} = -1$$

U4 De grafiek van f heeft geen punten gemeenschappelijk met de x -as als de discriminant van de vergelijking $0,5x^2 + 4x + c = 0$ negatief is.

Oplossen van $D = 4^2 - 4 \times 0,5 \times c = 0$ geeft $16 - 2c = 0$, oftewel $2c = 16$, dus $c = 8$.

Voor $c = 8$ raakt de grafiek de x -as. Voor $c > 8$ heeft de grafiek van f geen punten gemeenschappelijk met de x -as.

U5 De symmetrieas ligt midden tussen de oplossingen $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ en $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ in.

De symmetrieas ligt bij $x = \frac{\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}}{2}$, oftewel

$x = \frac{\frac{-b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}}{2a}}{2}$. Verder vereenvoudigen geeft $x = \frac{-2b}{2a}$, oftewel

$x = \frac{-b}{a}$, dus $x = \frac{-b}{2a}$.

4.4 Kwadratische vergelijkingen

- intro**
- A kwadraat afsplitsen, ontbinden in factoren en de *abc*-formule
 - B bordjes, ontbinden in factoren en de *abc*-formule
 - C $A \times B = 0$
 - D de *abc*-formule
 - E kwadraat afsplitsen, ontbinden in factoren en de *abc*-formule

- 26 a** $(2l - 3)^2 = 49$
 $2l - 3 = 7$ of $2l - 3 = -7$
 $2l = 10$ of $2l = -4$
 $l = 5$ of $l = -2$
- b** Vergelijking C $20 - (10 - 4m)^2 = 16$ kun je ook met bordjes oplossen.
 $20 - (10 - 4m)^2 = 16$
 $(10 - 4m)^2 = 4$
 $10 - 4m = 2$ of $10 - 4m = -2$
 $4m = 8$ of $4m = 12$
 $m = 2$ of $m = 3$
- c** $3k^2 + 6k = 5k^2$
 $-2k^2 + 6k = 0$
 $-2k(k - 3) = 0$
 $-2k = 0$ of $k - 3 = 0$
 $k = 0$ of $k = 3$
- d** $-\frac{1}{2}n^2 + 4n - 3\frac{1}{2} = 0$
 $n^2 - 8n + 7 = 0$
 $(n - 1)(n - 7) = 0$
 $n - 1 = 0$ of $n - 7 = 0$
 $n = 1$ of $n = 7$
- 27 a** Vergelijking D $-10(x - 5)(x - 16) = 0$ kun je met $A \times B = 0$ oplossen.
 $-10(x - 5)(x - 16) = 0$
 $x - 5 = 0$ of $x - 16 = 0$
 $x = 5$ of $x = 16$

4 De abc-formule

b B $(2y + 5)(y - 3) = -12$

$$2y^2 - y - 15 = -12$$

$$2y^2 - y - 3 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \times 2 \times -3 = 1 + 24 = 25$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{25}}{2 \times 2} \text{ of } y = \frac{1 - \sqrt{25}}{2 \times 2}$$

$$y = \frac{1 + 5}{4} = 1\frac{1}{2} \text{ of } y = \frac{1 - 5}{4} = -1$$

c $v^2 - 8 = -14v$

$$v^2 + 14v - 8 = 0$$

product	getallen	som
-8	1 en -8	-7
-8	-1 en 8	7
-8	2 en -4	-2
-8	-2 en 4	2

Er zijn geen gehele getallen te vinden waarvan het product -8 en de som +14 is, dus het lukt niet de verkregen vergelijking met ontbinden in factoren op te lossen.

d $v^2 + 14v - 8 = 0$

$$(v + 7)^2 - 49 - 8 = 0$$

$$(v + 7)^2 - 57 = 0$$

$$(v + 7)^2 = 57$$

$$v + 7 = \sqrt{57} \text{ of } v + 7 = -\sqrt{57}$$

$$v = -7 + \sqrt{57} \text{ of } v = -7 - \sqrt{57}$$

e $2w^2 + 10w + 12 = 0$

$$w^2 + 5w + 6 = 0$$

$$(w + 2)(w + 3) = 0$$

$$w + 2 = 0 \text{ of } w + 3 = 0$$

$$w = -2 \text{ of } w = -3$$

f $z^2 - 11z - 7 = 0$

$$D = (-11)^2 - 4 \times 1 \times -7 = 121 + 28 = 149$$

$$z = \frac{11 + \sqrt{149}}{2 \times 1} \text{ of } z = \frac{11 - \sqrt{149}}{2 \times 1}$$

$$z = \frac{11 + \sqrt{149}}{2} \text{ of } z = \frac{11 - \sqrt{149}}{2}$$

28 a Vergelijking D $(3p - 7)(p + 2) = 0$ is geschreven in de vorm $A \times B = 0$.

$$(3p - 7)(p + 2) = 0$$

$$3p - 7 = 0 \text{ of } p + 2 = 0$$

$$3p = 7 \text{ of } p = -2$$

$$p = 2\frac{1}{3} \text{ of } p = -2$$

b Bij vergelijking C $3t^2 - 5t = 0$ kun je ontbinden in factoren.

$$3t^2 - 5t = 0$$

$$t(3t - 5) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } 3t - 5 = 0$$

$$t = 0 \text{ of } 3t = 5$$

$$t = 0 \text{ of } t = 1\frac{2}{3}$$

c B $u^2 - u = 12$
 $u^2 - u - 12 = 0$
 $(u + 3)(u - 4) = 0$
 $u + 3 = 0$ of $u - 4 = 0$
 $u = -3$ of $u = 4$

d E $0,1r^2 - 0,2r - 0,3 = 0$
 $r^2 - 2r - 3 = 0$
 $(r + 1)(r - 3) = 0$
 $r + 1 = 0$ of $r - 3 = 0$
 $r = -1$ of $r = 3$

e A $s^2 + 4s - 10 = 0$
 $(s + 2)^2 - 4 - 10 = 0$
 $(s + 2)^2 - 14 = 0$
 $(s + 2)^2 = 14$
 $s + 2 = \sqrt{14}$ of $s + 2 = -\sqrt{14}$
 $s = -2 + \sqrt{14}$ of $s = -2 - \sqrt{14}$

F $2q^2 - q - 28 = 0$
 $D = (-1)^2 - 4 \times 2 \times -28 = 1 + 224 = 225$
 $q = \frac{1 + \sqrt{225}}{2 \times 2}$ of $q = \frac{1 - \sqrt{225}}{2 \times 2}$
 $q = \frac{1 + 15}{4} = 4$ of $q = \frac{1 - 15}{4} = -3\frac{1}{2}$

29 a $\frac{1}{4}p^2 + 2p = -3$

$$\frac{1}{4}p^2 + 2p + 3 = 0$$

$$p^2 + 8p + 12 = 0$$

$$(p + 2)(p + 6) = 0$$

$$p + 2 = 0 \text{ of } p + 6 = 0$$

$$p = -2 \text{ of } p = -6$$

b $(3 - 6x)(2x - 5) = 0$
 $3 - 6x = 0$ of $2x - 5 = 0$
 $6x = 3$ of $2x = 5$
 $x = \frac{1}{2}$ of $x = 2\frac{1}{2}$

c $(k - 5)^2 + 13 = 17$
 $(k - 5)^2 = 4$
 $k - 5 = 2$ of $k - 5 = -2$
 $k = 7$ of $k = 3$

d $8a - 3a^2 = 0$
 $a(8 - 3a) = 0$
 $a = 0$ of $8 - 3a = 0$
 $a = 0$ of $3a = 8$
 $a = 0$ of $a = 2\frac{2}{3}$

e $s^2 + 10 = 4s + 6$
 $s^2 - 4s + 4 = 0$
 $(s - 2)(s - 2) = 0$
 $s - 2 = 0$ of $s - 2 = 0$
 $s = 2$

f $0,2(x - 4)^2 = 5$
 $(x - 4)^2 = 25$
 $x - 4 = 5$ of $x - 4 = -5$
 $x = 9$ of $x = -1$

g $3m^2 + 18m - 15 = 0$
 $m^2 + 6m - 5 = 0$
 $D = 6^2 - 4 \times 1 \times -5 = 36 + 20 = 56$

$$m = \frac{-6 + \sqrt{56}}{2 \times 1} \text{ of } m = \frac{-6 - \sqrt{56}}{2 \times 1}$$

$$m = \frac{-6 + \sqrt{56}}{2} \text{ of } m = \frac{-6 - \sqrt{56}}{2}$$

h $-q(6 - 2q) = 20$
 $-6q + 2q^2 = 20$
 $2q^2 - 6q - 20 = 0$
 $q^2 - 3q - 10 = 0$
 $(q + 2)(q - 5) = 0$
 $q + 2 = 0$ of $q - 5 = 0$
 $q = -2$ of $q = 5$

4 De *abc*-formule

30 a $x(x-2) = 3$

$x^2 - 2x = 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x+1)(x-3) = 0$

$x+1 = 0$ of $x-3 = 0$

$x = -1$ of $x = 3$

b $-3(p+2)(8p-2) = 0$

$p+2 = 0$ of $8p-2 = 0$

$p = -2$ of $8p = 2$

$p = -2$ of $p = \frac{1}{4}$

c $(2h-4)^2 = 121$

$2h-4 = 11$ of $2h-4 = -11$

$2h = 15$ of $2h = -7$

$h = 7\frac{1}{2}$ of $h = -3\frac{1}{2}$

d $(x-4)^2 + 9 = 7$

$(x-4)^2 = -2$

Dit kan niet. De vergelijking heeft geen oplossingen.

e $2(t+1)(t+3) = 6$

$(t+1)(t+3) = 3$

$t^2 + 4t + 3 = 3$

$t^2 + 4t = 0$

$t(t+4) = 0$

$t = 0$ of $t+4 = 0$

$t = 0$ of $t = -4$

f $2r^2 = 9r - 7$

$2r^2 - 9r + 7 = 0$

$D = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 7 = 81 - 56 = 25$

$r = \frac{9 + \sqrt{25}}{2 \times 2}$ of $r = \frac{9 - \sqrt{25}}{2 \times 2}$

$r = \frac{9+5}{4} = 3\frac{1}{2}$ of $r = \frac{9-5}{4} = 1$

31 a Vergelijking A $-x^2 + 3x + 4 = 4$ hoort bij situatie 2.

Vergelijking B $-x^2 + 3x + 4 = 0$ hoort bij situatie 1.

Vergelijking C $-x^2 + 3x + 4 = 5$ hoort bij situatie 3.

b A $-x^2 + 3x + 4 = 4$

$-x^2 + 3x = 0$

$-x(x-3) = 0$

$-x = 0$ of $x-3 = 0$

$x = 0$ of $x = 3$

B $-x^2 + 3x + 4 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x+1)(x-4) = 0$

$x+1 = 0$ of $x-4 = 0$

$x = -1$ of $x = 4$

C $-x^2 + 3x + 4 = 5$

$-x^2 + 3x - 1 = 0$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 9 - 4 = 5$

$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2 \times 1}$ of $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2 \times 1}$

$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ of $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

c Je berekent de x -coördinaten van de snijpunten van de parabool met de lijn

$y = -4$.

$-x^2 + 3x + 4 = -4$

$-x^2 + 3x + 8 = 0$

$x^2 - 3x - 8 = 0$

$D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times -8 = 9 + 32 = 41$

$x = \frac{3 + \sqrt{41}}{2 \times 1}$ of $x = \frac{3 - \sqrt{41}}{2 \times 1}$

$x = \frac{3 + \sqrt{41}}{2} \approx 4,70$ of $x = \frac{3 - \sqrt{41}}{2} \approx -1,70$

029 a $4(3x + 2)(-2x + 4) = 0$

$$(3x + 2)(-2x + 4) = 0$$

$$3x + 2 = 0 \text{ of } -2x + 4 = 0$$

$$3x = -2 \text{ of } -2x = -4$$

$$x = -\frac{2}{3} \text{ of } x = 2$$

- b** Vergelijking A kun je met $A \times B = 0$ oplossen, maar vergelijking B kun je niet met $A \times B = 0$ oplossen.

c $2(x - 3)(x + 4) = 36$

$$(x - 3)(x + 4) = 18$$

$$x^2 + x - 12 = 18$$

$$x^2 + x - 30 = 0$$

$$(x - 5)(x + 6) = 0$$

$$x - 5 = 0 \text{ of } x + 6 = 0$$

$$x = 5 \text{ of } x = -6$$

d $(h - 7)^2 - 80 = 1$

$$(h - 7)^2 = 81$$

$$h - 7 = 9 \text{ of } h - 7 = -9$$

$$h = 16 \text{ of } h = -2$$

e $k^2 = 4k - 3$

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$(k - 1)(k - 3) = 0$$

$$k - 1 = 0 \text{ of } k - 3 = 0$$

$$k = 1 \text{ of } k = 3$$

f $3w^2 - 12w = 15$

$$3w^2 - 12w - 15 = 0$$

$$w^2 - 4w - 5 = 0$$

$$(w + 1)(w - 5) = 0$$

$$w + 1 = 0 \text{ of } w - 5 = 0$$

$$w = -1 \text{ of } w = 5$$

g $y^2 - 6y = 54$

$$y^2 - 6y - 54 = 0$$

product	getallen	som
-54	1 en -54	-53
-54	-1 en 54	53
-54	2 en -27	-25
-54	-2 en 27	25
-54	3 en -18	-15
-54	-3 en 18	15
-54	6 en -9	-3
-54	-6 en 9	3

Er zijn geen gehele getallen te vinden waarvan het product -54 en de som -6 is, dus het lukt niet vergelijking F met ontbinden in factoren op te lossen.

h $y^2 - 6y - 54 = 0$

$$(y - 3)^2 - 9 - 54 = 0$$

$$(y - 3)^2 - 63 = 0$$

$$(y - 3)^2 = 63$$

$$y - 3 = \sqrt{63} \text{ of } y - 3 = -\sqrt{63}$$

$$y = 3 + \sqrt{63} \text{ of } y = 3 - \sqrt{63}$$

4 De abc-formule

i $(r+2)^2 + 5 = 54$

$$(r+2)^2 = 49$$

$$r+2 = 7 \text{ of } r+2 = -7$$

$$r = 5 \text{ of } r = -9$$

j $x^2 - 3x - 4 = 2$

$$x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times -6 = 9 + 24 = 33$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{33}}{2 \times 1} \text{ of } x = \frac{3 - \sqrt{33}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \text{ of } x = \frac{3 - \sqrt{33}}{2}$$

k $g^2 - 8g + 3 = 12$

$$g^2 - 8g - 9 = 0$$

$$(g+1)(g-9) = 0$$

$$g+1 = 0 \text{ of } g-9 = 0$$

$$g = -1 \text{ of } g = 9$$

l $4k^2 - 16 = -12k$

$$4k^2 + 12k - 16 = 0$$

$$k^2 + 3k - 4 = 0$$

$$(k-1)(k+4) = 0$$

$$k-1 = 0 \text{ of } k+4 = 0$$

$$k = 1 \text{ of } k = -4$$

U6 $-0,008a^2 + 1,6a - 10 = 0$

$$a^2 - 200a + 1250 = 0$$

$$D = (-200)^2 - 4 \times 1 \times 1250 = 40\,000 - 5000 = 35\,000$$

$$a = \frac{200 + \sqrt{35\,000}}{2 \times 1} \text{ of } a = \frac{200 - \sqrt{35\,000}}{2 \times 1}$$

$$a = \frac{200 + \sqrt{35\,000}}{2} = 193,54... \text{ of } a = \frac{200 - \sqrt{35\,000}}{2 \times 1} = 6,45...$$

De afstand van het weggedeelte tussen de punten A en B is

$$193,54... - 6,45... = 187,1 \text{ meter.}$$

4.5 Gemengde opdrachten

32 a $7d^2 - 5d - 2 = 0$

$$D = (-5)^2 - 4 \times 7 \times -2 = 25 + 56 = 81$$

$$d = \frac{5 + \sqrt{81}}{2 \times 7} \text{ of } d = \frac{5 - \sqrt{81}}{2 \times 7}$$

$$d = \frac{5+9}{14} = 1 \text{ of } d = \frac{5-9}{14} = -\frac{2}{7}$$

b $-10(2x-5)(x-16) = 0$

$$2x-5 = 0 \text{ of } x-16 = 0$$

$$2x = 5 \text{ of } x = 16$$

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ of } x = 16$$

c $6w + 7w^2 = 3w^2$

$$4w^2 + 6w = 0$$

$$2w(2w+3) = 0$$

$$2w = 0 \text{ of } 2w+3 = 0$$

$$w = 0 \text{ of } 2w = -3$$

$$w = 0 \text{ of } w = -1\frac{1}{2}$$

d $\frac{1}{3}r^2 = 27$

$$r^2 = 81$$

$$r = 9 \text{ of } r = -9$$

e $2(h-5)^2 - 16 = 0$

$$(h-5)^2 - 8 = 0$$

$$(h-5)^2 = 8$$

$$h-5 = \sqrt{8} \text{ of } h-5 = -\sqrt{8}$$

$$h = 5 + \sqrt{8} \text{ of } h = 5 - \sqrt{8}$$

f $4k^2 + 20k = -24$

$$4k^2 + 20k + 24 = 0$$

$$k^2 + 5k + 6 = 0$$

$$(k+2)(k+3) = 0$$

$$k+2 = 0 \text{ of } k+3 = 0$$

$$k = -2 \text{ of } k = -3$$

- 33 a** $h(0) = -0,01 \times 0^2 + 1,5 \times 0 - 71 = 0 + 0 - 71 = -71$
De boog ligt bij de linker pilaar 71 meter onder het wegdek.
- b** $-0,01a^2 + 1,5a - 71 = -71$
 $-0,01a^2 + 1,5a = 0$
 $-0,01a(a - 150) = 0$
 $-0,01a = 0$ of $a - 150 = 0$
 $a = 0$ of $a = 150$
 De afstand tussen de twee pilaren is 150 meter.
- c** De symmetrieas ligt bij $a = 75$. Invullen van $a = 75$ geeft
 $h(75) = -0,01 \times 75^2 + 1,5 \times 75 - 71 = -56,25 + 112,5 - 71 = -14,75$.
 Het hoogste punt van de boog ligt $71 - 14,75 = 56,25$ meter boven de bodem van het ravijn.
- d** Als de afstand tot de bodem 26 meter is, dan ligt de boog $71 - 26 = 45$ meter onder het wegdek. In deze situatie geldt $h(a) = -45$.
- e** $-0,01a^2 + 1,5a - 71 = -45$
 $-0,01a^2 + 1,5a - 26 = 0$
 $a^2 - 150a + 2600 = 0$
 $(a - 20)(a - 130) = 0$
 $a - 20 = 0$ of $a - 130 = 0$
 $a = 20$ of $a = 130$
 Op de hoogte van 26 meter is de boog $130 - 20 = 110$ meter breed.

34 Het is voor je school, voor jou en voor de parabool te hopen dat dit klopt.

- 35 a** Oplossen van $f(x) = 0$ geeft $(x + 3)^2 + 4 = 0$, oftewel $(x + 3)^2 = -4$ en dat kan niet, dus de grafiek van f heeft geen snijpunten met de x -as.
 De grafiek van g is een bergparabool en die valt dus ook af.
 Oplossen van $h(x) = 0$ geeft $x^2 - 4x - 6,25 = 0$. De discriminant daarvan is $D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times -6,25 = 16 + 25 = 41$, dus $D > 0$ en de grafiek van h heeft twee snijpunten met de x -as. Verder is de grafiek van h een dalparabool.
 Het functievoorschrift $h(x) = x^2 - 4x - 6,25$ past bij de geschetste grafiek.
- b** De grafiek van f is een dalparabool die geen punt gemeenschappelijk heeft met de x -as.
 Oplossen van $g(x) = 0$ geeft $-x^2 + 6x - 9 = 0$, oftewel $x^2 - 6x + 9 = 0$, of $(x - 3)^2 = 0$. De grafiek van g heeft dus één punt gemeenschappelijk met de x -as en de grafiek van g is een bergparabool.



4 De *abc*-formule

- 36 a** Invullen van $p = 900$ in de formule geeft $a = 4500 - 5 \times 900 = 0$ en dan worden er geen seizoenkaarten verkocht.
 Als p met 20 toeneemt, dan is $a = 4500 - 5 \times (p + 20)$, oftewel
 $a = 4500 - 5p - 100$ en worden er 100 seizoenkaarten minder verkocht.
- b** $4500 - 5p = 3000$
 $5p = 1500$
 $p = 300$
 De seizoenkaart moet dan € 300,- kosten.
- c** Bij een prijs van € 300,- worden er 3000 seizoenkaarten verkocht.
 De totale opbrengst voor de club wordt dan $3000 \times € 300,- = € 900.000,-$.
- d** De totale opbrengst TO in euro's is gelijk aan het aantal seizoenkaarten vermenigvuldigd met de prijs per seizoenkaart, dus $TO = p(4500 - 5p)$.
- e** $p(4500 - 5p) = 0$
 $p = 0$ of $4500 - 5p = 0$
 $p = 0$ of $5p = 4500$
 $p = 0$ of $p = 900$
 Bij een prijs van € 450,- is de totale opbrengst maximaal.
 Invullen van $p = 450$ geeft
 $TO = 450 \times (4500 - 5 \times 450) = 450 \times 2250 = 1\,012\,500$.
 De totale opbrengst is dan € 1.012.500,-.
- f** Invullen van $p = 450$ geeft $a = 4500 - 5 \times 450 = 2250$.
 Als de totale opbrengst maximaal is, dan worden er 2250 seizoenkaarten verkocht.

- 37 a** $x^2 - 2x - 3 = 2$
 $x^2 - 2x - 5 = 0$
 $D = (-2)^2 - 4 \times 1 \times -5 = 4 + 20 = 24$
 $x = \frac{2 + \sqrt{24}}{2 \times 1}$ of $x = \frac{2 - \sqrt{24}}{2 \times 1}$
 $x = \frac{2 + \sqrt{24}}{2}$ of $x = \frac{2 - \sqrt{24}}{2}$
 $x^2 - 2x - 3 = 2$
 $x^2 - 2x - 5 = 0$
 $(x - 1)^2 - 1 - 5 = 0$
 $(x - 1)^2 - 6 = 0$
 $(x - 1)^2 = 6$
 $x - 1 = \sqrt{6}$ of $x - 1 = -\sqrt{6}$
 $x = 1 + \sqrt{6}$ of $x = 1 - \sqrt{6}$
 Er geldt $\frac{2 + \sqrt{24}}{2} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{24} = 1 + \sqrt{\frac{1}{4} \times 24} = 1 + \sqrt{6}$ en
 $\frac{2 - \sqrt{24}}{2} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{24} = 1 - \sqrt{\frac{1}{4} \times 24} = 1 - \sqrt{6}$ dus de oplossingen zijn hetzelfde.

b $t^2 + 14t = -39$

$$t^2 + 14t + 39 = 0$$

$$D = 14^2 - 4 \times 1 \times 39 = 196 - 156 = 40$$

$$t = \frac{-14 + \sqrt{40}}{2 \times 1} \text{ of } t = \frac{-14 - \sqrt{40}}{2 \times 1}$$

$$t = \frac{-14 + \sqrt{40}}{2} \text{ of } t = \frac{-14 - \sqrt{40}}{2}$$

$$t^2 + 14t = -39$$

$$t^2 + 14t + 39 = 0$$

$$(t + 7)^2 - 49 + 39 = 0$$

$$(t + 7)^2 - 10 = 0$$

$$(t + 7)^2 = 10$$

$$t + 7 = \sqrt{10} \text{ of } t + 7 = -\sqrt{10}$$

$$t = -7 + \sqrt{10} \text{ of } t = -7 - \sqrt{10}$$

Er geldt $\frac{-14 + \sqrt{40}}{2} = -7 + \frac{1}{2}\sqrt{40} = -7 + \sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{40} = -7 + \sqrt{10}$ en

$\frac{-14 - \sqrt{40}}{2} = -7 - \frac{1}{2}\sqrt{40} = -7 - \sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{40} = -7 - \sqrt{10}$ dus de oplossingen zijn

hetzelfde.

c $-v^2 + 6v = \frac{1}{2}$

$$-v^2 + 6v - \frac{1}{2} = 0$$

$$v^2 - 6v + \frac{1}{2} = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 36 - 2 = 34$$

$$v = \frac{6 + \sqrt{34}}{2 \times 1} \text{ of } v = \frac{6 - \sqrt{34}}{2 \times 1}$$

$$v = \frac{6 + \sqrt{34}}{2} \text{ of } v = \frac{6 - \sqrt{34}}{2}$$

$$-v^2 + 6v = \frac{1}{2}$$

$$-v^2 + 6v - \frac{1}{2} = 0$$

$$v^2 - 6v + \frac{1}{2} = 0$$

$$(v - 3)^2 - 9 + \frac{1}{2} = 0$$

$$(v - 3)^2 - 8\frac{1}{2} = 0$$

$$(v - 3)^2 = 8\frac{1}{2}$$

$$v - 3 = \sqrt{8\frac{1}{2}} \text{ of } v - 3 = -\sqrt{8\frac{1}{2}}$$

$$v = 3 + \sqrt{8\frac{1}{2}} \text{ of } v = 3 - \sqrt{8\frac{1}{2}}$$

Er geldt $\frac{6 + \sqrt{34}}{2} = 3 + \frac{1}{2}\sqrt{34} = 3 + \sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{34} = 3 + \sqrt{8\frac{1}{2}}$ en

$\frac{6 - \sqrt{34}}{2} = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{34} = 3 - \sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{34} = 3 - \sqrt{8\frac{1}{2}}$ dus de oplossingen zijn

hetzelfde.

4 De abc-formule

- 38** Oplossen van $f(x) = 0$ geeft $-2x^2 + px - 18 = 0$.
 De discriminant daarvan is $D = p^2 - 4 \times -2 \times -18 = p^2 - 144$.
 Als $D = 0$, dan heeft de parabool één gemeenschappelijke punt met de x -as.
 $p^2 - 144 = 0$
 $p^2 = 144$
 $p = 12$ of $p = -12$
 Als $p = 0$, dan is $D = -144$ en heeft de parabool geen gemeenschappelijke punten met de x -as.
 De parabool ligt geheel onder de x -as als p tussen -12 en 12 ligt.

Samenvatting

- S1 a** $x^2 - 121 = 0$
 $(x + 11)(x - 11) = 0$
 $x + 11 = 0$ of $x - 11 = 0$
 $x = -11$ of $x = 11$
- b** $3x^2 - 48 = 0$
 $x^2 - 16 = 0$
 $(x + 4)(x - 4) = 0$
 $x + 4 = 0$ of $x - 4 = 0$
 $x = -4$ of $x = 4$
- S2 a** $2x^2 + 12x + 18 = 0$
 $x^2 + 6x + 9 = 0$
 $(x + 3)(x + 3) = 0$
 $x + 3 = 0$ of $x + 3 = 0$
 $x = -3$
- b** $3x^2 - 18x + 15 = 0$
 $x^2 - 6x + 5 = 0$
 $(x - 1)(x - 5) = 0$
 $x - 1 = 0$ of $x - 5 = 0$
 $x = 1$ of $x = 5$
- c** $-\frac{1}{2}x^2 - 3x + 8 = 0$
 $x^2 + 6x - 16 = 0$
 $(x - 2)(x + 8) = 0$
 $x - 2 = 0$ of $x + 8 = 0$
 $x = 2$ of $x = -8$
- d** $-x^2 - 2x + 24 = 0$
 $x^2 + 2x - 24 = 0$
 $(x - 4)(x + 6) = 0$
 $x - 4 = 0$ of $x + 6 = 0$
 $x = 4$ of $x = -6$
- S3 a** $x^2 - 10x - 5 = 0$
 $(x - 5)^2 - 25 - 5 = 0$
 $(x - 5)^2 - 30 = 0$
 $(x - 5)^2 = 30$
 $x - 5 = \sqrt{30}$ of $x - 5 = -\sqrt{30}$
 $x = 5 + \sqrt{30}$ of $x = 5 - \sqrt{30}$
- b** $q^2 + 26q + 24 = 0$
 $(q + 13)^2 - 169 + 24 = 0$
 $(q + 13)^2 - 145 = 0$
 $(q + 13)^2 = 145$
 $q + 13 = \sqrt{145}$ of $q + 13 = -\sqrt{145}$
 $q = -13 + \sqrt{145}$ of $q = -13 - \sqrt{145}$

S4 a $3x^2 - 5x - 8 = 0$
 $D = (-5)^2 - 4 \times 3 \times -8 = 25 + 96 = 121$

$$x = \frac{5 + \sqrt{121}}{2 \times 3} \text{ of } x = \frac{5 - \sqrt{121}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{5 + 11}{6} = 2\frac{2}{3} \text{ of } x = \frac{5 - 11}{6} = -1$$

b $-5v^2 + 2v + 14 = 0$
 $D = 2^2 - 4 \times -5 \times 14 = 4 + 280 = 284$

$$v = \frac{-2 + \sqrt{284}}{2 \times -5} \text{ of } v = \frac{-2 - \sqrt{284}}{2 \times -5}$$

$$v = \frac{-2 + \sqrt{284}}{-10} \text{ of } v = \frac{-2 - \sqrt{284}}{-10}$$

S5 a $D = (-10)^2 - 4 \times 1 \times -20 = 100 + 80 = 180$, dus $D > 0$ en er zijn twee oplossingen.

b $D = 8^2 - 4 \times 3 \times 15 = 64 - 180 = -116$, dus $D < 0$ en er zijn geen oplossingen.

c $D = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$, dus $D = 0$ en er is één oplossing.

S6 a $-2h^2 + 6h + 56 = 0$
 $h^2 - 3h - 28 = 0$
 $(h + 4)(h - 7) = 0$
 $h + 4 = 0$ of $h - 7 = 0$
 $h = -4$ of $h = 7$

b $(a + 11)^2 - 5 = 20$
 $(a + 11)^2 = 25$
 $a + 11 = 5$ of $a + 11 = -5$
 $a = -6$ of $a = -16$

c $2(x - 6)(4x - 20) = 0$
 $x - 6 = 0$ of $4x - 20 = 0$
 $x = 6$ of $4x = 20$
 $x = 6$ of $x = 5$

d $r^2 + 6r - 2 = -9$
 $r^2 + 6r + 7 = 0$
 $D = 6^2 - 4 \times 1 \times 7 = 36 - 28 = 8$
 $r = \frac{-6 + \sqrt{8}}{2 \times 1}$ of $r = \frac{-6 - \sqrt{8}}{2 \times 1}$
 $r = \frac{-6 + \sqrt{8}}{2}$ of $r = \frac{-6 - \sqrt{8}}{2}$

Test jezelf

T1 a $h^2 - 6h - 40 = 0$
 $(h + 4)(h - 10) = 0$
 $h + 4 = 0$ of $h - 10 = 0$
 $h = -4$ of $h = 10$

b $3a^2 + 12a + 6 = -6$
 $3a^2 + 12a + 12 = 0$
 $a^2 + 4a + 4 = 0$
 $(a + 2)(a + 2) = 0$
 $a + 2 = 0$ of $a + 2 = 0$
 $a = -2$

4 De abc-formule

c $0,2x^2 + 0,4x = 3$
 $0,2x^2 + 0,4x - 3 = 0$
 $x^2 + 2x - 15 = 0$
 $(x - 3)(x + 5) = 0$
 $x - 3 = 0$ of $x + 5 = 0$
 $x = 3$ of $x = -5$

d $-s^2 + 7s - 12 = 0$
 $s^2 - 7s + 12 = 0$
 $(s - 3)(s - 4) = 0$
 $s - 3 = 0$ of $s - 4 = 0$
 $s = 3$ of $s = 4$

T2 a $t^2 + 12t + 25 = 0$
 $(t + 6)^2 - 36 + 25 = 0$
 $(t + 6)^2 - 11 = 0$
 $(t + 6)^2 = 11$
 $t + 6 = \sqrt{11}$ of $t + 6 = -\sqrt{11}$
 $t = -6 + \sqrt{11}$ of $t = -6 - \sqrt{11}$

b $d^2 - 2d = 4$
 $d^2 - 2d - 4 = 0$
 $(d - 1)^2 - 1 - 4 = 0$
 $(d - 1)^2 - 5 = 0$
 $(d - 1)^2 = 5$
 $d - 1 = \sqrt{5}$ of $d - 1 = -\sqrt{5}$
 $d = 1 + \sqrt{5}$ of $d = 1 - \sqrt{5}$

c $x^2 + 12x + 16 = 0$
 $(x + 6)^2 - 36 + 16 = 0$
 $(x + 6)^2 - 20 = 0$
 $(x + 6)^2 = 20$
 $x + 6 = \sqrt{20}$ of $x + 6 = -\sqrt{20}$
 $x = -6 + \sqrt{20}$ of $x = -6 - \sqrt{20}$

d $g^2 - 8g = -36$
 $g^2 - 8g + 36 = 0$
 $(g - 4)^2 - 16 + 36 = 0$
 $(g - 4)^2 + 20 = 0$
 $(g - 4)^2 = -20$

Dit kan niet. De vergelijking heeft geen oplossingen.

T3 a $W(50) = -0,1 \times 50^2 + 15 \times 50 - 360 = -250 + 750 - 360 = 140$
 Bij een prijs van 50 cent per donut maakt Mieke € 140,- winst.

b $-0,1p^2 + 15p - 360 = 202,50$
 $-0,1p^2 + 15p - 562,50 = 0$
 $p^2 - 150p + 5625 = 0$
 $(p - 75)^2 = 0$
 $p - 75 = 0$
 $p = 75$

Bij een winst van € 202,50 heeft de donut een prijs van 75 cent.

c Ja, dit is de maximale winst, want de vergelijking
 $-0,1p^2 + 15p - 360 = 202,50$ heeft maar één oplossing.

T4 a $2w^2 + 7w = 4$
 $2w^2 + 7w - 4 = 0$
 $D = 7^2 - 4 \times 2 \times -4 = 49 + 32 = 81$
 $w = \frac{-7 + \sqrt{81}}{2 \times 2}$ of $w = \frac{-7 - \sqrt{81}}{2 \times 2}$
 $w = \frac{-7 + 9}{4} = \frac{1}{2} = 0,50$ of $w = \frac{-7 - 9}{4} = -4$

b $0,5r^2 - 5r = -3$
 $0,5r^2 - 5r + 3 = 0$
 $D = (-5)^2 - 4 \times 0,5 \times 3 = 25 - 6 = 19$
 $r = \frac{5 + \sqrt{19}}{2 \times 0,5}$ of $r = \frac{5 - \sqrt{19}}{2 \times 0,5}$
 $r = 5 + \sqrt{19} = 9,36$ of $r = 5 - \sqrt{19} = 0,64$

c $3k + 2k^2 - 1 = 0$
 $2k^2 + 3k - 1 = 0$
 $D = 3^2 - 4 \times 2 \times -1 = 9 + 8 = 17$
 $k = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2 \times 2}$ of $k = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2 \times 2}$
 $k = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} = 0,28$ of $k = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} = -1,78$

d $x^2 + 2x + 1\frac{3}{4} = 0$
 $D = 2^2 - 4 \times 1 \times 1\frac{3}{4} = 4 - 7 = -3$
 Dit kan niet. De vergelijking heeft geen oplossingen.

T5 a $D = 7^2 - 4 \times 5 \times 1 = 49 - 20 = 29$, dus $D > 0$ en er zijn twee oplossingen.
b $D = 3^2 - 4 \times -1 \times -10 = 9 - 40 = -31$, dus $D < 0$ en er zijn geen oplossingen.
c $D = (-2)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 2 = 4 - 4 = 0$, dus $D = 0$ en er is één oplossing.
d $D = 8^2 - 4 \times 3 \times -7 = 64 + 84 = 148$, dus $D > 0$ en er zijn twee oplossingen.

T6 a $h(0) = -5 \times 0^2 + 10 \times 0 + 40 = 40$
 Peter gooit de bal van een hoogte van 40 meter omhoog.
b $-5t^2 + 10t + 40 = 40$
 $-5t^2 + 10t = 0$
 $-5t(t - 2) = 0$
 $-5t = 0$ of $t - 2 = 0$
 $t = 0$ of $t = 2$
 Na 2 seconden is de bal weer op dezelfde hoogte als Peter.
c $-5t^2 + 10t + 40 = 0$
 $t^2 - 2t - 8 = 0$
 $(t + 2)(t - 4) = 0$
 $t + 2 = 0$ of $t - 4 = 0$
 $t = -2$ (voldoet niet) of $t = 4$
 Na 4 seconden komt de bal op de grond terecht.

4 De abc-formule

- 17 a** $2(x-4)^2 = 18$
 $(x-4)^2 = 9$
 $x-4 = 3$ of $x-4 = -3$
 $x = 7$ of $x = 1$
- b** $3t^2 - 2t = 0$
 $t(3t-2) = 0$
 $t = 0$ of $3t-2 = 0$
 $t = 0$ of $3t = 2$
 $t = 0$ of $t = \frac{2}{3}$
- c** $4q^2 + 1 = -4q$
 $4q^2 + 4q + 1 = 0$
 $D = 4^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0$
 $q = \frac{-4 + \sqrt{0}}{2 \times 4}$ of $q = \frac{-4 - \sqrt{0}}{2 \times 4}$
 $q = \frac{-4 + 0}{8} = -\frac{1}{2}$ (of $q = \frac{-4 - 0}{8} = -\frac{1}{2}$)
- d** $0,5r^2 - r = 2$
 $0,5r^2 - r - 2 = 0$
 $r^2 - 2r - 4 = 0$
 $D = (-2)^2 - 4 \times 1 \times -4 = 4 + 16 = 20$
 $r = \frac{2 + \sqrt{20}}{2 \times 1}$ of $r = \frac{2 - \sqrt{20}}{2 \times 1}$
 $r = \frac{2 + \sqrt{20}}{2}$ of $r = \frac{2 - \sqrt{20}}{2}$
- e** $-k(k+4) = 8$
 $-k^2 - 4k = 8$
 $-k^2 - 4k - 8 = 0$
 $k^2 + 4k + 8 = 0$
 $D = 4^2 - 4 \times 1 \times 8 = 16 - 32 = -16$
Dit kan niet. De vergelijking heeft geen oplossingen.
- f** $4(a+1)(a-6) = 120$
 $(a+1)(a-6) = 30$
 $a^2 - 5a - 6 = 30$
 $a^2 - 5a - 36 = 0$
 $(a+4)(a-9) = 0$
 $a+4 = 0$ of $a-9 = 0$
 $a = -4$ of $a = 9$
- g** $4(g-9)(g+6) = 0$
 $g-9 = 0$ of $g+6 = 0$
 $g = 9$ of $g = -6$
- h** $2x^2 - 90 = 8$
 $2x^2 = 98$
 $x^2 = 49$
 $x = 7$ of $x = -7$

T8 a $-0,09a^2 + 0,7a = 0$

$$9a^2 - 70a = 0$$

$$a(9a - 70) = 0$$

$$a = 0 \text{ of } 9a - 70 = 0$$

$$a = 0 \text{ of } 9a = 70$$

$$a = 0 \text{ of } a = 7\frac{7}{9}$$

Met deze sprong komt de atleet $7\frac{7}{9} = 7,78$ meter ver.

b $-0,1a^2 + 0,8a - 0,1 = 0$

$$a^2 - 8a + 1 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 64 - 4 = 60$$

$$a = \frac{8 + \sqrt{60}}{2 \times 1} \text{ of } a = \frac{8 - \sqrt{60}}{2 \times 1}$$

$$a = \frac{8 + \sqrt{60}}{2} = 7,87 \text{ of } a = \frac{8 - \sqrt{60}}{2 \times 1} = 0,13$$

Hij komt nu op ongeveer 7,87 meter vanaf de afzetlijn neer.

c Bij opdracht b hoort een negatieve hoogte van 0,1 meter bij de afzetlijn.

Omdat de bijbehorende grafiek een bergparabool is, wil dat zeggen dat de atleet pas na de afzetlijn afzet en de tweede sprong ongeldig is.

Bij opdracht b kun je zien dat hij op 0,13 meter na de afzetlijn afzet.

T9 a $-x^2 + 5x + 14 = 18$

$$-x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$x - 1 = 0 \text{ of } x - 4 = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 4$$

De coördinaten van die snijpunten zijn (1, 18) en (4, 18).

b $-x^2 + 5x + 14 = c$

$$-x^2 + 5x + 14 - c = 0$$

$$x^2 - 5x - 14 + c = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-14 + c) = 25 + 56 - 4c = 81 - 4c$$

De grafiek van f heeft één punt gemeenschappelijk met de lijn $y = c$ als

$D = 0$. Dat is zo als $81 - 4c = 0$, oftewel $4c = 81$, dus $c = 20\frac{1}{4}$.

Extra oefening

E1 a Sjaak heeft aan beide kanten van het gelijkteken alle termen door 2 gedeeld.

b $2x^2 + 24x + 40 = 0$

$$x^2 + 12x + 20 = 0$$

$$(x + 2)(x + 10) = 0$$

$$x + 2 = 0 \text{ of } x + 10 = 0$$

$$x = -2 \text{ of } x = -10$$

c Manique heeft aan beide kanten van het gelijkteken alle termen met het getal -2 vermenigvuldigd.

d $-\frac{1}{2}x^2 + 4x + 24 = 0$

$$x^2 - 8x - 48 = 0$$

$$(x + 4)(x - 12) = 0$$

$$x + 4 = 0 \text{ of } x - 12 = 0$$

$$x = -4 \text{ of } x = 12$$

4 De abc-formule

e A $3x^2 + 15x - 18 = 0$
 $x^2 + 5x - 6 = 0$
 $(x-1)(x+6) = 0$
 $x-1 = 0$ of $x+6 = 0$
 $x = 1$ of $x = -6$

B $\frac{1}{2}x^2 + 6x + 10 = 0$
 $x^2 + 12x + 20 = 0$
 $(x+2)(x+10) = 0$
 $x+2 = 0$ of $x+10 = 0$
 $x = -2$ of $x = -10$

C $0,1x^2 + 2x + 10 = 0$
 $x^2 + 20x + 100 = 0$
 $(x+10)(x+10) = 0$
 $x+10 = 0$ of $x+10 = 0$
 $x = -10$

D $-4x^2 - 28x - 24 = 0$
 $x^2 + 7x + 6 = 0$
 $(x+1)(x+6) = 0$
 $x+1 = 0$ of $x+6 = 0$
 $x = -1$ of $x = -6$

E2 a $3y^2 - 6y - 9 = 0$
 $y^2 - 2y - 3 = 0$
 $(y+1)(y-3) = 0$
 $y+1 = 0$ of $y-3 = 0$
 $y = -1$ of $y = 3$

d $-x^2 + 7x - 12 = 0$
 $x^2 - 7x + 12 = 0$
 $(x-3)(x-4) = 0$
 $x-3 = 0$ of $x-4 = 0$
 $x = 3$ of $x = 4$

b $\frac{1}{3}a^2 + 3a = -6$
 $\frac{1}{3}a^2 + 3a + 6 = 0$
 $a^2 + 9a + 18 = 0$
 $(a+3)(a+6) = 0$
 $a+3 = 0$ of $a+6 = 0$
 $a = -3$ of $a = -6$

e $5x^2 - 30x = -40$
 $5x^2 - 30x + 40 = 0$
 $x^2 - 6x + 8 = 0$
 $(x-2)(x-4) = 0$
 $x-2 = 0$ of $x-4 = 0$
 $x = 2$ of $x = 4$

c $4x^2 - 12x + 10 = 2$
 $4x^2 - 12x + 8 = 0$
 $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $(x-1)(x-2) = 0$
 $x-1 = 0$ of $x-2 = 0$
 $x = 1$ of $x = 2$

f $-0,5x^2 - 5x = 12$
 $-0,5x^2 - 5x - 12 = 0$
 $x^2 + 10x + 24 = 0$
 $(x+4)(x+6) = 0$
 $x+4 = 0$ of $x+6 = 0$
 $x = -4$ of $x = -6$

E3 a $k^2 - 14k + 15 = 0$
 $(k-7)^2 - 49 + 15 = 0$
 $(k-7)^2 - 34 = 0$
 $(k-7)^2 = 34$
 $k-7 = \sqrt{34}$ of $k-7 = -\sqrt{34}$
 $k = 7 + \sqrt{34}$ of $k = 7 - \sqrt{34}$

d $t^2 - 8t = 10$
 $t^2 - 8t - 10 = 0$
 $(t-4)^2 - 16 - 10 = 0$
 $(t-4)^2 - 26 = 0$
 $(t-4)^2 = 26$
 $t-4 = \sqrt{26}$ of $t-4 = -\sqrt{26}$
 $t = 4 + \sqrt{26}$ of $t = 4 - \sqrt{26}$

b $d^2 + 10d + 20 = 0$
 $(d+5)^2 - 25 + 20 = 0$
 $(d+5)^2 - 5 = 0$
 $(d+5)^2 = 5$
 $d+5 = \sqrt{5}$ of $d+5 = -\sqrt{5}$
 $d = -5 + \sqrt{5}$ of $d = -5 - \sqrt{5}$

e $v^2 - 12v + 60 = 0$
 $(v-6)^2 - 36 + 60 = 0$
 $(v-6)^2 + 24 = 0$
 $(v-6)^2 = -24$
 Dit kan niet. De vergelijking heeft geen oplossingen.

c $g^2 + 2g - 5 = 0$
 $(g+1)^2 - 1 - 5 = 0$
 $(g+1)^2 - 6 = 0$
 $(g+1)^2 = 6$
 $g+1 = \sqrt{6}$ of $g+1 = -\sqrt{6}$
 $g = -1 + \sqrt{6}$ of $g = -1 - \sqrt{6}$

f $p^2 - 6p = 18$
 $p^2 - 6p - 18 = 0$
 $(p-3)^2 - 9 - 18 = 0$
 $(p-3)^2 - 27 = 0$
 $(p-3)^2 = 27$
 $p-3 = \sqrt{27}$ of $p-3 = -\sqrt{27}$
 $p = 3 + \sqrt{27}$ of $p = 3 - \sqrt{27}$

E4 a $x^2 + 1\frac{1}{2}x - 1 = 0$

$$D = (1\frac{1}{2})^2 - 4 \times 1 \times -1 = 2\frac{1}{4} + 4 = 6\frac{1}{4}$$

$$x = \frac{-1\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{4}}}{2 \times 1} \text{ of } x = \frac{-1\frac{1}{2} - \sqrt{6\frac{1}{4}}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} = 0,50 \text{ of } x = \frac{-1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}}{2} = -2$$

b $\frac{1}{3}k^2 - 3k + \frac{1}{2} = 0$

$$k^2 - 9k + 1\frac{1}{2} = 0$$

$$D = (-9)^2 - 4 \times 1 \times 1\frac{1}{2} = 81 - 6 = 75$$

$$k = \frac{9 + \sqrt{75}}{2 \times 1} \text{ of } k = \frac{9 - \sqrt{75}}{2 \times 1}$$

$$k = \frac{9 + \sqrt{75}}{2} = 8,83 \text{ of } k = \frac{9 - \sqrt{75}}{2} = 0,17$$

c $3n^2 + 4n - 4 = 0$

$$D = 4^2 - 4 \times 3 \times -4 = 16 + 48 = 64$$

$$n = \frac{-4 + \sqrt{64}}{2 \times 3} \text{ of } n = \frac{-4 - \sqrt{64}}{2 \times 3}$$

$$n = \frac{-4 + 8}{6} = \frac{4}{6} = 0,67 \text{ of } n = \frac{-4 - 8}{6} = -2$$

d $2f^2 + 11f = -5$

$$2f^2 + 11f + 5 = 0$$

$$D = 11^2 - 4 \times 2 \times 5 = 121 - 40 = 81$$

$$f = \frac{-11 + \sqrt{81}}{2 \times 2} \text{ of } f = \frac{-11 - \sqrt{81}}{2 \times 2}$$

$$f = \frac{-11 + 9}{4} = -\frac{1}{2} = -0,50 \text{ of } f = \frac{-11 - 9}{4} = -5$$

e $-s^2 - 6s + 7 = 3$

$$-s^2 - 6s + 4 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \times -1 \times 4 = 36 + 16 = 52$$

$$s = \frac{6 + \sqrt{52}}{2 \times -1} \text{ of } s = \frac{6 - \sqrt{52}}{2 \times -1}$$

$$s = \frac{6 + \sqrt{52}}{-2} = -6,61 \text{ of } s = \frac{6 - \sqrt{52}}{-2} = 0,61$$

f $0,6t^2 - 0,25t = 0,4$

$$0,6t^2 - 0,25t - 0,4 = 0$$

$$6t^2 - 2,5t - 4 = 0$$

$$D = (-2,5)^2 - 4 \times 6 \times -4 = 6,25 + 96 = 102,25$$

$$t = \frac{2,5 + \sqrt{102,25}}{2 \times 6} \text{ of } t = \frac{2,5 - \sqrt{102,25}}{2 \times 6}$$

$$t = \frac{2,5 + \sqrt{102,25}}{12} = 1,05 \text{ of } t = \frac{2,5 - \sqrt{102,25}}{12} = -0,63$$

4 De abc-formule

- E5**
- a** $D = 6^2 - 4 \times 3 \times -5 = 36 + 60 = 96$, dus $D > 0$ en er zijn twee oplossingen.
 - b** $D = 4^2 - 4 \times 5 \times 5 = 16 - 100 = -84$, dus $D < 0$ en er zijn geen oplossingen.
 - c** $D = (-8)^2 - 4 \times 8 \times 2 = 64 - 64 = 0$, dus $D = 0$ en er is één oplossing.
 - d** $D = 2^2 - 4 \times -1 \times -5 = 4 - 20 = -16$, dus $D < 0$ en er zijn geen oplossingen.
- E6**
- a** Bij $c = -4$ hoort de functie $f(x) = -x^2 - 5x - 4$.
De parabool bij $c = -4$ ligt 4 hoger dan de parabool bij $c = -8$, dus de parabool bij $c = -4$ heeft twee snijpunten met de x -as.
De discriminant van $-x^2 - 5x - 4 = 0$ is $D = (-5)^2 - 4 \times -1 \times -4 = 25 - 16 = 9$, dus $D > 0$ en het klopt dat er twee snijpunten zijn.
 - b** Bij $c = -6,25$ hoort de functie $f(x) = -x^2 - 5x - 6,25$. De discriminant van $-x^2 - 5x - 6,25 = 0$ is $D = (-5)^2 - 4 \times -1 \times -6,25 = 25 - 25 = 0$, dus $D = 0$ en het klopt dat er precies één gemeenschappelijk punt met de x -as is.
 - c** Bij $c > -6,25$ heeft de bijbehorende parabool twee snijpunten met de x -as.
- E7**
- a** Vergelijking C $2x^2 + 5 = 13$ kun je met bordjes oplossen.
 $2x^2 = 8$
 $x^2 = 4$
 $x = 2$ of $x = -2$
 - b** Bij vergelijking A is het niet handig om aan beide kanten van het gelijkteken alle termen door 2 te delen, omdat je dan breuken krijgt.
 - c** $2x^2 + 5x + 3 = 0$
 $D = 5^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1$
 $x = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2 \times 2}$ of $x = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \times 2}$
 $x = \frac{-5 + 1}{4} = -1$ of $x = \frac{-5 - 1}{4} = -1\frac{1}{2}$
 - d** **B** $2x^2 + 4x + 8 = 14$
 $x^2 + 2x + 4 = 7$
 $x^2 + 2x - 3 = 0$
 - D** $2x^2 + 8x + 8 = 14$
 $x^2 + 4x + 4 = 7$
 $x^2 + 4x - 3 = 0$
 - e** **B** $x^2 + 2x - 3 = 0$
 $(x - 1)(x + 3) = 0$
 $x - 1 = 0$ of $x + 3 = 0$
 $x = 1$ of $x = -3$
 - f** **D** $x^2 + 4x - 3 = 0$
 $(x + 2)^2 - 4 - 3 = 0$
 $(x + 2)^2 - 7 = 0$
 $(x + 2)^2 = 7$
 $x + 2 = \sqrt{7}$ of $x + 2 = -\sqrt{7}$
 $x = -2 + \sqrt{7}$ of $x = -2 - \sqrt{7}$

E8 a A $(4x+1)(2x-5)=0$
 $4x+1=0$ of $2x-5=0$
 $4x=-1$ of $2x=5$
 $x=-\frac{1}{4}$ of $x=2\frac{1}{2}$

b B $(x+4)(x-5)=10$
 $x^2-x-20=10$
 $x^2-x-30=0$
 $(x+5)(x-6)=0$
 $x+5=0$ of $x-6=0$
 $x=-5$ of $x=6$

D $2x(x-9)=0$
 $2x=0$ of $x-9=0$
 $x=0$ of $x=9$

C $4(x+3)(-x-14)=40$
 $(x+3)(-x-14)=10$
 $-x^2-17x-42=10$
 $-x^2-17x-52=0$
 $x^2+17x+52=0$
 $(x+4)(x+13)=0$
 $x+4=0$ of $x+13=0$
 $x=-4$ of $x=-13$

E9 a $3(p-2)^2+4=31$
 $3(p-2)^2=27$
 $(p-2)^2=9$
 $p-2=3$ of $p-2=-3$
 $p=5$ of $p=-1$

b $(g+1)(g-5)=7$
 $g^2-4g-5=7$
 $g^2-4g-12=0$
 $(g+2)(g-6)=0$
 $g+2=0$ of $g-6=0$
 $g=-2$ of $g=6$

c $2r=-6r^2$
 $6r^2+2r=0$
 $2r(3r+1)=0$
 $2r=0$ of $3r+1=0$
 $r=0$ of $3r=-1$
 $r=0$ of $r=-\frac{1}{3}$

d $\frac{1}{2}z(2z-6)=-6$
 $z^2-3z=-6$
 $z^2-3z+6=0$
 $D=(-3)^2-4 \times 1 \times 6=9-24=-15$
 Dit kan niet. De vergelijking heeft geen oplossingen.

e $4(3x-12)(5x-1)=0$
 $3x-12=0$ of $5x-1=0$
 $3x=12$ of $5x=1$
 $x=4$ of $x=\frac{1}{5}$

f $s^2+8s-3=-4$
 $s^2+8s+1=0$
 $D=8^2-4 \times 1 \times 1=64-4=60$
 $s=\frac{-8+\sqrt{60}}{2 \times 1}$ of $s=\frac{-8-\sqrt{60}}{2 \times 1}$
 $s=\frac{-8+\sqrt{60}}{2}$ of $s=\frac{-8-\sqrt{60}}{2}$

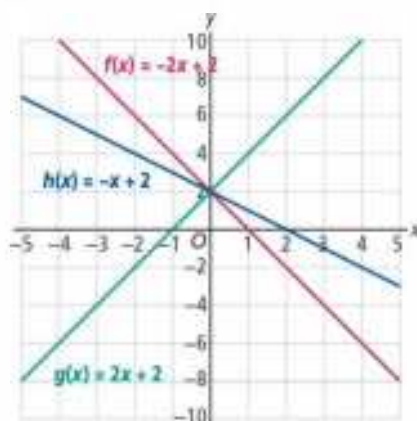
g $4m^2-15=125$
 $4m^2=140$
 $m^2=35$
 $m=\sqrt{35}$ of $m=-\sqrt{35}$

h $85-2v(v+5)=-15$
 $85-2v^2-10v=-15$
 $-2v^2-10v+100=0$
 $v^2+5v-50=0$
 $(v-5)(v+10)=0$
 $v-5=0$ of $v+10=0$
 $v=5$ of $v=-10$

5 Nieuwe grafieken

Voorkennis

V1 a b



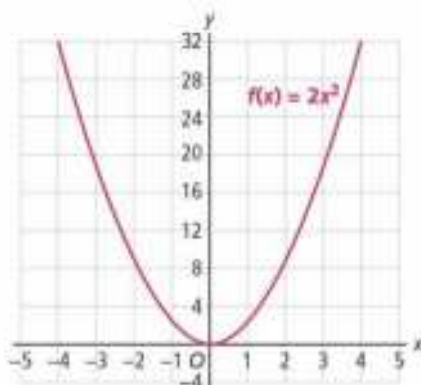
- V2 a** Van de functie f is de richtingscoëfficiënt 2 en het startgetal -2 , dus het functievoorschrift is $f(x) = 2x - 2$.
 Van de functie g is de richtingscoëfficiënt -1 en het startgetal 3 , dus het functievoorschrift is $g(x) = -x + 3$.
 Van de functie h is de richtingscoëfficiënt $\frac{1}{4}$ en het startgetal 2 , dus het functievoorschrift is $h(x) = \frac{1}{4}x + 2$.
- b** De grafiek van i gaat door de punten $(-4, 3)$ en $(-2, -4)$.
 De toename van de x -coördinaat is $-2 - (-4) = 2$ en de toename van de y -coördinaat is $-4 - 3 = -7$. De richtingscoëfficiënt is $\frac{-7}{2} = -3\frac{1}{2}$.
- c** Invullen van $x = -4$ en $y = 3$ geeft $3 = -3\frac{1}{2} \times -4 + b$, oftewel $3 = 14 + b$, dus $b = -11$. Het functievoorschrift is $i(x) = -3\frac{1}{2}x - 11$.
- d** De richtingscoëfficiënt is 3 , dus het functievoorschrift is van de vorm $f(x) = 3x + b$.
 Invullen van $x = 7$ en $y = 8$ geeft $8 = 3 \times 7 + b$, oftewel $8 = 21 + b$, dus $b = -13$. Het functievoorschrift is $f(x) = 3x - 13$.
- e** De grafiek van k loopt evenwijdig aan de grafiek van g , dus het functievoorschrift is van de vorm $k(x) = -x + b$.
 Invullen van $x = 14$ en $y = 23$ geeft $23 = -14 + b$, dus $b = 37$.
 Het functievoorschrift is $k(x) = -x + 37$.
- V3** De grafiek van f is een bergparabool, want het getal voor x^2 is negatief.
 Bij de functie f hoort parabool 4.
 De grafieken van g , h en i zijn dalparabolen, want het getal voor x^2 is positief.
 De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as zijn $(0, 0)$, de coördinaten van de grafiek van h met de y -as zijn $(0, 0)$ en de coördinaten van de grafiek van i met de y -as zijn $(0, -4)$.
 Bij de functie i hoort parabool 2.
 De grafiek van h is smaller dan de grafiek van g , want 1 ligt verder van 0 af dan $0,1$.
 Bij de functie g hoort parabool 1 en bij de functie h hoort parabool 3.
- V4 a** De grafiek bij $a = 2$ is een dalparabool, want het getal voor x^2 is positief.
b De grafiek bij $a = -2$ is een bergparabool, want het getal voor x^2 is negatief.
 En de grafiek bij $a = \frac{1}{2}$ is een dalparabool, want het getal voor x^2 is positief.

5 Nieuwe grafieken

- c Voor alle waarden $a < 0$ zijn de bijbehorende grafieken bergparabolen.
 d Invullen van $x = -3$ en $y = 81$ geeft $81 = a \times (-3)^2$, oftewel $81 = 9a$, dus $a = 9$.
 e Invullen van $a = 2$ geeft $f(x) = 2x^2$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	32	18	8	2	0	2	8	18	32

f



- V5 a De functie $h(x) = 60 \cdot 0,5^x$ hoort bij grafiek 4, want de beginhoeveelheid is 60 en de groeifactor is 0,5, dus de grafiek is dalend.
 b Bij grafiek 1 hoort de functie $i(x) = 60 \cdot 1,2^x$, want de beginhoeveelheid is 60 en de groeifactor is 1,2, dus de grafiek is stijgend.
 Bij grafiek 2 hoort de functie $f(x) = 30 \cdot 1,5^x$, want de beginhoeveelheid is 30 en de groeifactor is 1,5, dus de grafiek is stijgend.
 Bij grafiek 3 hoort de functie $g(x) = 30 \cdot 1^x$, want de beginhoeveelheid is 30 en de groeifactor is 1, dus de grafiek is constant.
 c De functie $g(x) = 30 \cdot 1^x$ is eigenlijk een lineaire functie, want de grafiek is een rechte lijn en je kunt het functievoorschrift schrijven als $g(x) = 30$.

- V6 a Bij de functie $k(x) = \frac{3}{4} \cdot 2^x$ is de beginhoeveelheid $\frac{3}{4}$.
 Bij de functie $l(x) = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ is de beginhoeveelheid 160.
 b $k(5) = \frac{3}{4} \cdot 2^5 = \frac{3}{4} \cdot 32 = 24$
 c Ja, het punt $(6, 2\frac{1}{2})$ ligt op de grafiek van l , want invullen van $x = 6$ geeft
 $l(6) = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 160 \cdot \frac{1}{64} = 2\frac{1}{2}$ en dat klopt.

V7 a $y = 3(x - 4)$

x	x	-4
3	$3x$	-12
$y = 3x - 12$		

b $y = -2\frac{1}{2}(8x + 10)$

x	$8x$	+10
$-2\frac{1}{2}$	$-20x$	-25
$y = -20x - 25$		

c $y = -(-5x + 2) - 3x$

x	$-5x$	+2
-1	$5x$	-2
$y = 5x - 2 - 3x$		
$y = 2x - 2$		

d $y = -4(x^2 + 5) + 9$

x	x^2	+5
-4	$-4x^2$	-20
$y = -4x^2 - 20 + 9$		
$y = -4x^2 - 11$		

e $y = \frac{1}{2}(x^2 + 6x - 8)$

x	x^2	+6x	-8
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}x^2$	+3x	-4

$y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$

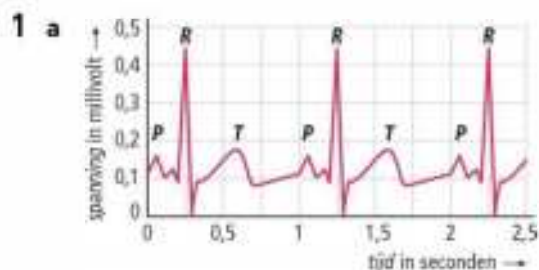
f $y = 2(3x^2 - 7x) - 1$

x	$3x^2$	-7x
2	$6x^2$	-14x
$y = 6x^2 - 14x - 1$		

5.1 Periodieke grafieken

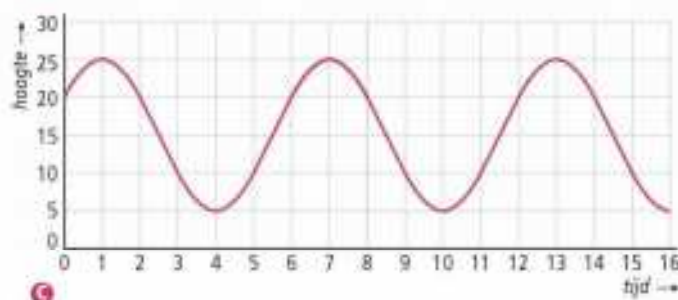
intro 6:19 uur plus 12:44 uur is 18:63 uur, oftewel 19:03 uur. Op 7 augustus was het om 19:03 uur weer volle maan.

Twee keer 29 dagen en 12:44 uur later is 58 dagen en 24:88 uur later, oftewel 59 dagen en 1:28 uur later. Vanaf 7 augustus 2017 om 19:03 uur in totaal 59 dagen en 1:28 uur verder kom je uit op 5 oktober 2017 om 20:31 uur.



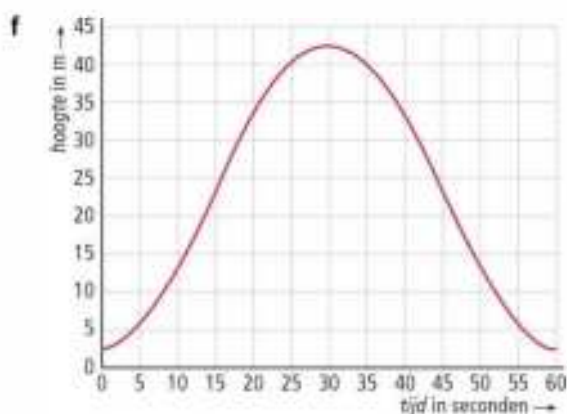
- b** De grafiek herhaalt zich na 1 seconde.
c Dit hart klopt 60 slagen per minuut.

2 a Grafiek A is periodiek, grafiek B is niet periodiek en grafiek C is periodiek.



- 3 a** In één minuut draait het reuzenrad één keer rond, dus het duurt 60 seconden voor punt A weer op dezelfde plaats is.
b De diameter van het reuzenrad is 40 meter, dus de straal van het reuzenrad is $40 : 2 = 20$ meter. De as zit op een hoogte van $2,5 + 20 = 22,5$ meter.
c Na $60 : 4 = 15$ seconden is punt A voor het eerst op de hoogte van de as.
d Punt A is $60 : 2 = 30$ seconden daarna weer op de hoogte van de as.
e Na 15 seconden neemt de hoogte het snelst toe.

5 Nieuwe grafieken



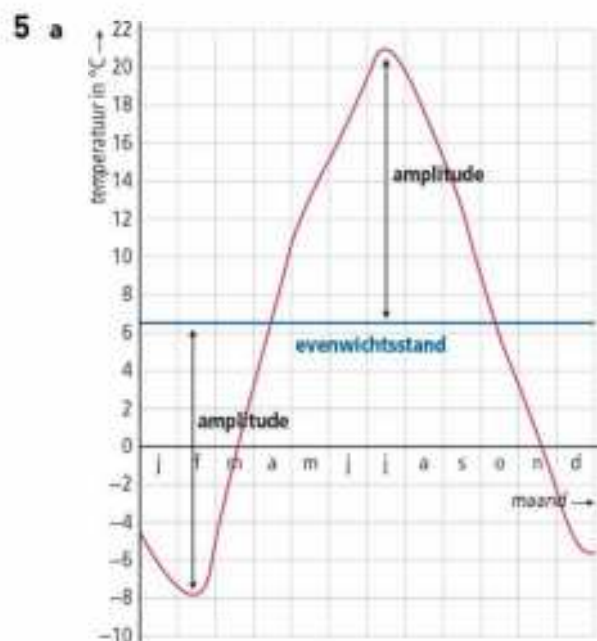
g In 150 seconden draait het reuzenrad $150 : 60 = 2,5$ keer rond. Punt A is dan op een hoogte van $2,5 + 40 = 42,5$ meter.

In 225 seconden draait het reuzenrad $225 : 60 = 3,75$ keer rond. Punt A is dan op een hoogte van $2,5 + 20 = 22,5$ meter.

4 Bij grafiek A is de periode $2 - -4 = 6$, de evenwichtsstand $(8 + 0) : 2 = 4$ en de amplitude $8 - 4 = 4$.

Bij grafiek B is de periode $4 - 0 = 4$, de evenwichtsstand $(-1 + -4) : 2 = -2,5$ en de amplitude $-1 - -2,5 = 1,5$.

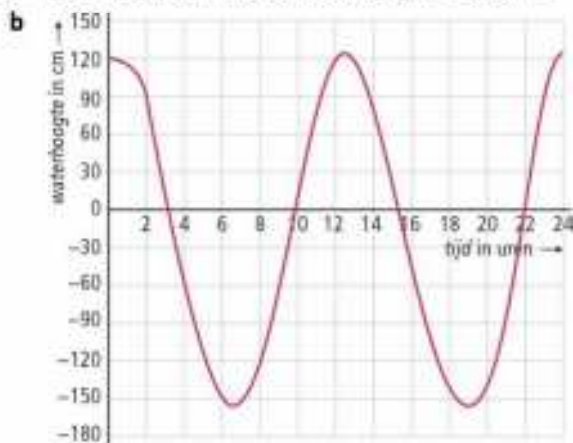
Bij grafiek C is de periode $4 - -4 = 8$, de evenwichtsstand $(6 + -2) : 2 = 2$ en de amplitude $6 - 2 = 4$.



b De evenwichtsstand is $(21 + -8) : 2 = 6,5$ °C. Zie opdracht 5a.

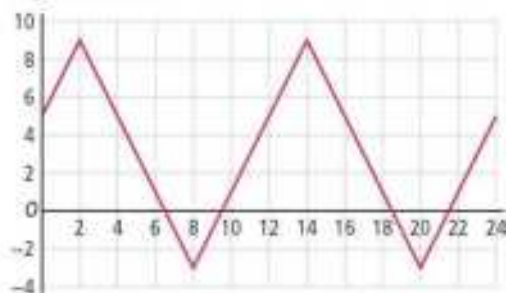
c De amplitude is $21 - 6,5 = 14,5$ °C. Zie opdracht 5a.

- 6 a Om 4.00 uur was de waterhoogte -60 cm.



- c Tussen twee opeenvolgende tijdstippen met de hoogste stand zat $6,40 + 5,45 = 12,25$ uur.
- d Bij de evenwichtsstand van de grafiek hoort een waterhoogte van $(124 + -156) : 2 = -16$ cm.
- e De amplitude van de grafiek is $124 - -16 = 140$ cm.
- f Zie opdracht 6a.
- g Ongeveer om 3.15 uur, 9.30 uur, 15.45 uur en 22.00 uur was op die dag de waterhoogte 0 cm.
- 7 a De hoogste waarde die de grafiek bereikt is $3 + 6 = 9$ en de laagste waarde die de grafiek bereikt is $3 - 6 = -3$.

- b Bijvoorbeeld



- 4 a Bij de periodieke grafiek A is de periode $4 - 0 = 4$.
- b Bij het hoogste punt van grafiek A hoort $h = 1$. En bij het laagste punt hoort $h = -4$.

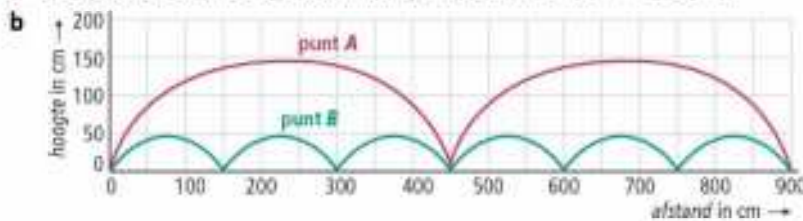


A

- d Bij grafiek A is de evenwichtsstand $-1,5$.
- e Bij grafiek A is de amplitude $1 - -1,5 = 2,5$.
- f Bij grafiek B is de periode $8 - 0 = 8$, de evenwichtsstand $(9 + -6) : 2 = 1,5$ en de amplitude $9 - 1,5 = 7,5$.
- Bij grafiek C is de periode $12 - -6 = 18$, de evenwichtsstand $(4 + -1) : 2 = 1,5$ en de amplitude $4 - 1,5 = 2,5$.

5 Nieuwe grafieken

U1 a De periode van de grafiek van punt A is $\pi \times 144 = 452$ cm.

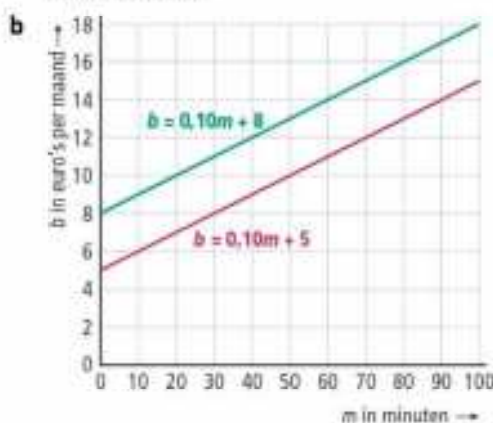


- c** De diameter van het achterwiel is $144 : 48 = 3$ keer zo klein als de diameter van het voorwiel.
Als het voorwiel één keer ronddraait, dan draait het achterwiel drie keer rond.
- d** Zie opdracht U1b.

5.2 Verticaal verschuiven

intro De grafiek van deze schommel ten opzichte van de grond ziet er precies zo uit als de getekende grafiek, alleen moeten de getallen 0, 2, 4 en 6 bij de verticale as door de getallen 100, 102, 104 en 106 vervangen worden.

8 a Met de formule $b = 0,10m + 5$ kun je het bedrag berekenen dat je per maand moet betalen.



- c** De nieuwe formule waarmee je nu het bedrag per maand kunt berekenen is $b = 0,10m + 8$.
- d** Zie opdracht 8b.

- 9 a** Van l is het startgetal 2 en l gaat door de punten $(0, 2)$ en $(8, 4)$.
De toename van de x -coördinaat is $8 - 0 = 8$ en de toename van de y -coördinaat is $4 - 2 = 2$. De richtingscoëfficiënt is $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
De getekende grafiek hoort dus bij de functie $l(x) = \frac{1}{4}x + 2$.
- b** Het startgetal van m is -2 en de richtingscoëfficiënt is $\frac{1}{4}$.
- c** Het functievoorschrift van m is $m(x) = \frac{1}{4}x - 2$.
- d** De grafiek van l moet je 4 omlaag schuiven om de grafiek van m te krijgen.
- e** In het functievoorschrift van l is het startgetal 2 en in het functievoorschrift van m is het startgetal -2 . Als je het startgetal 2 van l met 4 omlaag schuift, dan krijg je het startgetal $2 - 4 = -2$ van m .
- f** Het startgetal van n wordt $2 + 25 = 27$.
Het functievoorschrift van n is $n(x) = \frac{1}{4}x + 27$.

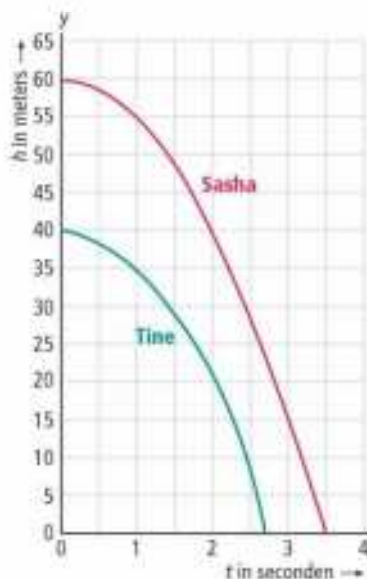
- 10 a** Invullen van $x = 0$ geeft $f(0) = 0^2 - 5 \times 0 + 3 = 3$ en dat klopt.
 Invullen van $x = 4$ geeft $f(4) = 4^2 - 5 \times 4 + 3 = 16 - 20 + 3 = -1$ en dat klopt.
- b** De coördinaten van punt P' zijn $(0, 5)$ en de coördinaten van punt Q' zijn $(4, 1)$.
- c** Invullen van $x = 0$ geeft $g(0) = 0^2 - 5 \times 0 + 5 = 5$ en dat klopt.
 Invullen van $x = 4$ geeft $g(4) = 4^2 - 5 \times 4 + 5 = 16 - 20 + 5 = 1$ en dat klopt.

functievoorschrift van de grafiek	verticaal verschuiven	functievoorschrift van de beeldgrafiek
$f(x) = 7x - 6$	10 omlaag	$g(x) = 7x - 16$
$k(x) = 4x^2 + 2x - 1$	4 omhoog	$l(x) = 4x^2 + 2x + 3$
$m(x) = 5 \cdot 3^x$	15 omlaag	$n(x) = 5 \cdot 3^x - 15$
$p(x) = 2x^2 - 5x - 4$	50 omhoog	$q(x) = 2x^2 - 5x + 46$

- 12 a** Invullen van $t = 0$ geeft $h(0) = 60 - 5 \times 0^2 = 60$.
 De rots waar Sasha op staat is 60 meter hoog.
- b** $60 - 5t^2 = 0$
 $5t^2 = 60$
 $t^2 = 12$
 $t = \sqrt{12}$ of $t = -\sqrt{12}$ (voldoet niet)
 De steen komt na $\sqrt{12} \approx 3,5$ seconden op de grond.

c

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	$\sqrt{12}$
$h(t)$	60	58,75	55	48,75	40	28,75	15	0



- d** Door de grafiek bij de steen van Sasha overal $60 - 40 = 20$ omlaag te schuiven, krijg je de grafiek die bij de steen van Tine hoort. Zie opdracht 12c.
- e** $k(t) = h(t) - 20$
 $k(t) = (60 - 5t^2) - 20$
 $k(t) = 40 - 5t^2$

5 Nieuwe grafieken

13 a De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f 3 omlaag te verschuiven.

b $g(x) = f(x) - 3$

$$g(x) = (-x^2 + 5x - 6) - 3$$

$$g(x) = -x^2 + 5x - 9$$

c $m(x) = l(x) + 1\frac{1}{2}$

$$m(x) = \left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 1\frac{1}{2}$$

$$m(x) = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$$

d $q(x) = p(x) + 2$

$$q(x) = (2x^2 + 8x + 3) + 2$$

$$q(x) = 2x^2 + 8x + 5$$

e Hugo heeft geen gelijk, want de grafiek van q ligt overal 2 boven de grafiek van p .

010 a Invullen van $x = 2$ geeft $f(2) = 2^2 - 6 \times 2 + 6 = 4 - 12 + 6 = -2$ en dat klopt.

b Invullen van $x = 0$ geeft $f(0) = 0^2 - 6 \times 0 + 6 = 6$ en dat klopt.

c Door het omhoog schuiven blijft de x -coördinaat hetzelfde, namelijk 0.

De y -coördinaat wordt 4 groter en die wordt $6 + 4 = 10$.

d De coördinaten van punt P' zijn $(2, 2)$.

e Invullen van $x = 2$ geeft $g(2) = 2^2 - 6 \times 2 + 10 = 4 - 12 + 10 = 2$ en dat klopt.

Invullen van $x = 0$ geeft $g(0) = 0^2 - 6 \times 0 + 10 = 10$ en dat klopt.

011 $g(x) = f(x) + 5$

$$g(x) = (3x^2 + x + 4) + 5$$

$$g(x) = 3x^2 + x + 9$$

$$k(x) = h(x) - 7$$

$$k(x) = (-9x + 2) - 7$$

$$k(x) = -9x - 5$$

U2 a Invullen van $x = 3$ geeft A $g(3) = 3^2 + 3 = 12$, B $g(3) = (3 + 3)^2 = 36$,

C $g(3) = 3^2 + 9 = 18$, D $g(3) = 3^2 - 3 = 6$, E $g(3) = (3 - 3)^2 = 0$ en

F $g(3) = 3^2 - 9 = 0$, dus E en F blijven over.

Invullen van $x = 0$ geeft E $g(0) = (0 - 3)^2 = 9$ en F $g(0) = 0^2 - 9 = -9$.

Bij de beeldgrafiek hoort het functievoorschrift E $g(x) = (x - 3)^2$.

b Bij de grafiek van h hoort het functievoorschrift $h(x) = (x + 4)^2$.

c Bij de grafiek van m hoort het functievoorschrift $m(x) = \frac{1}{2}(x - 6) + 1$.

d Je kunt het functievoorschrift ook schrijven als $m(x) = \frac{1}{2}x - 3 + 1$, oftewel

$$m(x) = \frac{1}{2}x - 2.$$

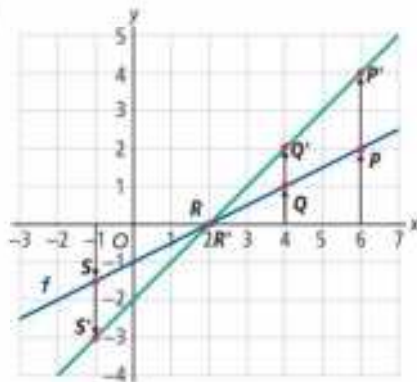
De grafiek van l 3 omlaag verschuiven geeft dezelfde beeldgrafiek.

5.3 Vermenigvuldigen

intro Bij het plakken van de foto in de PowerPointpresentatie is de breedte hetzelfde gebleven, maar de hoogte is 2,5 keer zo groot geworden.

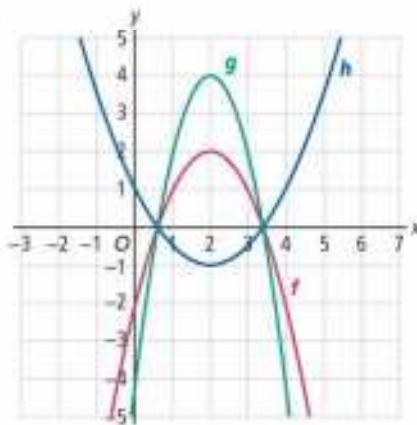
Als de brug op de foto in de PowerPointpresentatie 68 meter lang zou zijn, dan zou die brug $2,5 \times 13 = 32,5$ meter hoog zijn.

14 a



- b Het punt $R(2, 0)$ blijft op zijn plaats.
 c Zie opdracht 14a.
 d Bij de beeldgrafiek hoort de richtingscoëfficiënt 1, want de richtingscoëfficiënt wordt 2 keer zo groot. Het startgetal wordt ook 2 keer zo groot, dus het startgetal wordt $2 \times -1 = -2$.
 e Het functievoorschrift is $g(x) = x - 2$.

15 a



- b Er wordt vermenigvuldigd met een negatief getal en een bergparabool wordt dan een dalparabool. Er wordt vermenigvuldigd met een getal dat tussen -1 en 1 in ligt en dan wordt de grafiek ingedrukt.
 c Zie opdracht 15a.
 d Het functievoorschrift van f met $-0,5$ vermenigvuldigen geeft $h(x) = -0,5(-x^2 + 4x - 2)$, oftewel $h(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$.

16

functievoorschrift van de grafiek	ten opzichte van de x -as vermenigvuldigen met	functievoorschrift van de beeldgrafiek
$f(x) = 3x + 8$	de factor 6	$g(x) = 18x + 48$
$k(x) = x^2 - 4x + 5$	de factor -1	$l(x) = -x^2 + 4x - 5$
$m(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$	de factor -3	$n(x) = -x^2 + 6x - 9$
$p(x) = 20 \cdot 75^x$	de factor 15	$q(x) = 300 \cdot 75^x$

17 a De grafiek van f is met de factor 3 vermenigvuldigd.

- b $g(x) = 3 \times f(x)$
 $g(x) = 3(-x^2 + 6x - 8)$
 $g(x) = -3x^2 + 18x - 24$
 c De grafiek van l is met de factor -1 vermenigvuldigd.
 d $m(x) = -1 \times l(x)$
 $m(x) = -(-1,2x + 9)$
 $m(x) = 1,2x - 9$

5 Nieuwe grafieken

- 18 a** Bij de functie p hoort een stijgende grafiek, want de groeifactor 1,8 is groter dan 0. Na een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met een positieve factor, is de beeldgrafiek ook een stijgende grafiek. Bij de functie q hoort een dalende grafiek, want de groeifactor 0,6 zit tussen 0 en 1, dus dat klopt niet.

b $q(x) = \frac{1}{3} \times p(x)$

$$q(x) = \frac{1}{3} (9 \cdot 1,8^x)$$

$$q(x) = 3 \cdot 1,8^x$$

- 19 a** Invullen van $x = 3$ geeft $f(3) = 8 \times 3^2 - 5 \times 3 - 12 = 72 - 15 - 12 = 45$.
Er wordt met de factor $-9 : 45 = -0,2$ vermenigvuldigd.

b $g(x) = -0,2 \times f(x)$

$$g(x) = -0,2(8x^2 - 5x - 12)$$

$$g(x) = -1,6x^2 + x + 2,4$$

016 $g(x) = 5 \times f(x)$

$$g(x) = 5(-4x + 11)$$

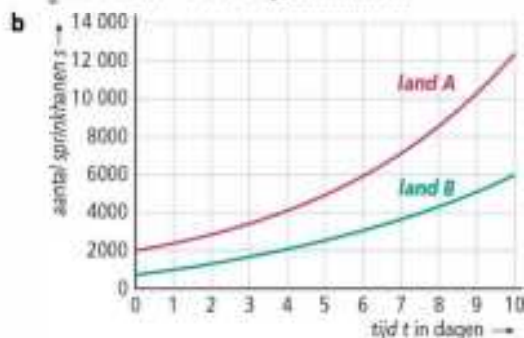
$$g(x) = -20x + 55$$

$$k(x) = -\frac{1}{2} \times h(x)$$

$$k(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 2)$$

$$k(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$$

- 018 a** In land B zijn in het begin $\frac{1}{2} \times 2000 = 1000$ sprinkhanen en na 9 dagen zijn er $\frac{1}{2} \times 10320 = 5160$ sprinkhanen.



- c** Bij het aantal sprinkhanen in land B hoort de functie $s(t) = 1000 \times 1,2^t$.
Invullen van $t = 9$ geeft $s(9) = 1000 \cdot 1,2^9 = 5159,78\dots$
Dat zijn ongeveer 5160 sprinkhanen en dat klopt.

- U3 a** Je kunt de functie schrijven als $f(x) = (x - 2)^2$. Bij de beeldgrafiek hoort dan het functievoorschrift $g(x) = a(x - 2)^2$. De beeldgrafiek gaat altijd door het punt $(2, 0)$, want $g(2) = a \times (2 - 2)^2 = a \times 0 = 0$. De beeldgrafiek kan nooit door bijvoorbeeld het punt $(2, 7)$ gaan. De beeldgrafiek kan, afgezien van het punt $(2, 0)$, niet door een punt op de verticale lijn $x = 2$ gaan. Pierre heeft dus geen gelijk.

- b** Invullen van $x = -4$ en $y = 10$ in $g(x) = a(x - 2)^2$ geeft $10 = a \times (-4 - 2)^2$, oftewel $10 = 36a$, dus $a = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = \frac{5}{18}(x - 2)^2$.

Of:

Het functievoorschrift is van de vorm $g(x) = a(x^2 - 4x + 4)$.

Invullen van $x = -4$ en $y = 10$ geeft $10 = a \times ((-4)^2 - 4 \times -4 + 4)$, oftewel

$$10 = 36a, \text{ dus } a = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = \frac{5}{18}(x^2 - 4x + 4)$, oftewel

$$g(x) = \frac{5}{18}x^2 - 1\frac{1}{9}x + 1\frac{1}{9}.$$

- c Het is niet mogelijk, want om van x^3 naar $-3x^3$ te gaan moet je met de factor -3 vermenigvuldigen, maar om van 4 naar -10 te gaan moet je met de factor $-2,5$ vermenigvuldigen.

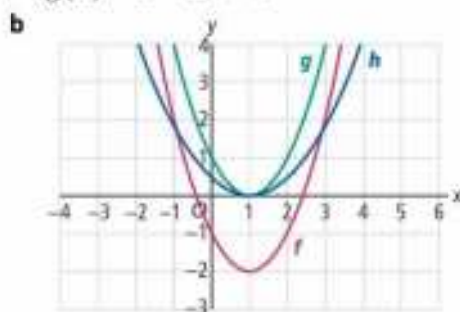
5.4 Combineren

intro In een normale situatie is de hoogste waterhoogte $1,2$ meter.

Bij springtij is dat $1,5 \times 1,2 = 1,8$ meter.

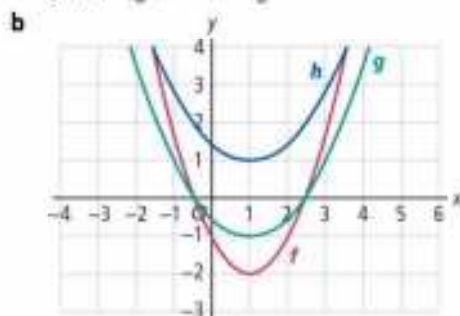
Als het stormt tijdens springtij, dan komt het water maximaal $1,8 + 1 = 2,8$ meter hoog.

- 20 a** $g(x) = f(x) + 2$
 $g(x) = (x^2 - 2x - 1) + 2$
 $g(x) = x^2 - 2x + 1$



- c** $h(x) = \frac{1}{2} \times g(x)$
 $h(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 2x + 1)$
 $h(x) = \frac{1}{2} x^2 - x + \frac{1}{2}$

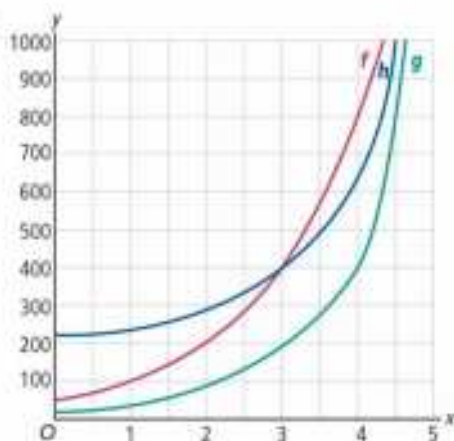
- 21 a** $g(x) = \frac{1}{2} \times f(x)$
 $g(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 2x - 1)$
 $g(x) = \frac{1}{2} x^2 - x - \frac{1}{2}$



- c** $h(x) = g(x) + 2$
 $h(x) = (\frac{1}{2} x^2 - x - \frac{1}{2}) + 2$
 $h(x) = \frac{1}{2} x^2 - x + 1\frac{1}{2}$
- d** Nee, je krijgt niet hetzelfde functievoorschrift als bij opdracht 20c.

5 Nieuwe grafieken

22 a



$$b \quad g(x) = \frac{1}{2} \times f(x)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} (50 \cdot 2^x)$$

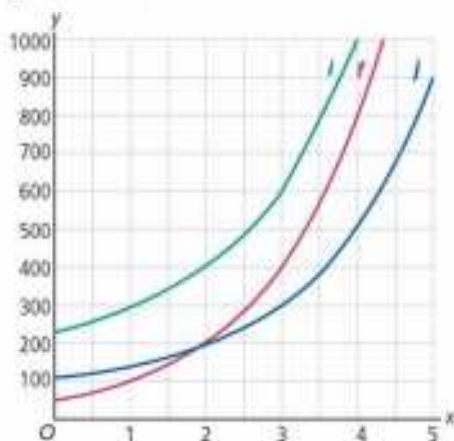
$$g(x) = 25 \cdot 2^x$$

$$h(x) = g(x) + 200$$

$$h(x) = (25 \cdot 2^x) + 200$$

$$h(x) = 25 \cdot 2^x + 200$$

c



$$d \quad i(x) = f(x) + 200$$

$$i(x) = (50 \cdot 2^x) + 200$$

$$i(x) = 50 \cdot 2^x + 200$$

$$j(x) = \frac{1}{2} \times i(x)$$

$$j(x) = \frac{1}{2} (50 \cdot 2^x + 200)$$

$$j(x) = 25 \cdot 2^x + 100$$

23 a

$$l(x) = k(x) - 5$$

$$l(x) = \left(\frac{1}{4}x + 2\right) - 5$$

$$l(x) = \frac{1}{4}x - 3$$

$$m(x) = 6 \times l(x)$$

$$m(x) = 6 \times \left(\frac{1}{4}x - 3\right)$$

$$m(x) = 1\frac{1}{2}x - 18$$

b $p(x) = 6 \times k(x)$

$$p(x) = 6 \times \left(\frac{1}{4}x + 2\right)$$

$$p(x) = 1\frac{1}{2}x + 12$$

$$q(x) = p(x) - 5$$

$$q(x) = \left(1\frac{1}{2}x + 12\right) - 5$$

$$q(x) = 1\frac{1}{2}x + 7$$

- 24 a** Er geldt $4 \times 2x = 8x$, dus de factor moet dan 4 zijn.

b

$$\begin{array}{l}
 f(x) = 2x + 6 \\
 + \dots \\
 \times 4 \quad \left(\begin{array}{l} g(x) = 2x + 7 \\ h(x) = 8x + 28 \end{array} \right) : 4
 \end{array}$$

Van $g(x)$ naar $h(x)$ moet je vermenigvuldigen met 4, dus van $h(x)$ naar $g(x)$ moet je delen door 4.

Dit geeft $g(x) = 2x + 7$, want $8 : 4 = 2$ en $28 : 4 = 7$.

- c** Zie het schema bij opdracht 24b.

Van $f(x)$ naar $g(x)$ moet je 1 optellen, want $6 + 1 = 7$.

De verschuiving is 1 omhoog.

25

$$\begin{array}{l}
 \times -5 \quad \left(\begin{array}{l} k(x) = 6x^2 + x - 5 \\ l(x) = -30x^2 + \dots \\ m(x) = -30x^2 - 5x - 50 \end{array} \right) \\
 + \dots
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \times -5 \quad \left(\begin{array}{l} k(x) = 6x^2 + x - 5 \\ l(x) = -30x^2 - 5x + 25 \\ m(x) = -30x^2 - 5x - 50 \end{array} \right) \\
 + \dots
 \end{array}$$

Van $k(x)$ naar $l(x)$ moet je vermenigvuldigen met -5 . Dit geeft

$$l(x) = -30x^2 - 5x + 25.$$

Van $l(x)$ naar $m(x)$ moet je 75 aftrekken, want $25 - 75 = -50$.

De vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as is met de factor -5 en de verschuiving is 75 omlaag.

26

$$\begin{array}{l}
 + \dots \quad \left(\begin{array}{l} q(x) = 150 \cdot 6^x \\ r(x) = 150 \cdot 6^x + \dots \\ s(x) = 450 \cdot 6^x + 30 \end{array} \right) : 3 \\
 \times 3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 + \dots \quad \left(\begin{array}{l} q(x) = 150 \cdot 6^x \\ r(x) = 150 \cdot 6^x + 10 \\ s(x) = 450 \cdot 6^x + 30 \end{array} \right) : 3 \\
 \times 3
 \end{array}$$

Van $r(x)$ naar $s(x)$ moet je vermenigvuldigen met 3, dus van $s(x)$ naar $r(x)$ moet je delen door 3.

Dit geeft $r(x) = 150 \cdot 6^x + 10$, want $450 : 3 = 150$ en $30 : 3 = 10$.

Van $q(x)$ naar $r(x)$ moet je 10 optellen, want $0 + 10 = 10$.

De verschuiving is 10 omhoog en de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as is met de factor 3.

27 a

$$\begin{array}{l}
 \times 3 \quad \left(\begin{array}{l} f(x) = 2x - \frac{1}{2} \\ g(x) = 6x - \dots \\ h(x) = 6x - 1 \end{array} \right) \\
 + \dots
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \times 3 \quad \left(\begin{array}{l} f(x) = 2x - \frac{1}{2} \\ g(x) = 6x - 1\frac{1}{2} \\ h(x) = 6x - 1 \end{array} \right) \\
 + \dots
 \end{array}$$

Van $f(x)$ naar $g(x)$ moet je vermenigvuldigen met 3. Dit geeft $g(x) = 6x - 1\frac{1}{2}$.

Van $g(x)$ naar $h(x)$ moet je $\frac{1}{2}$ optellen, want $-1 - (-1\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

De vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as is met de factor 3 en de verschuiving is $\frac{1}{2}$ omhoog.

5 Nieuwe grafieken

b

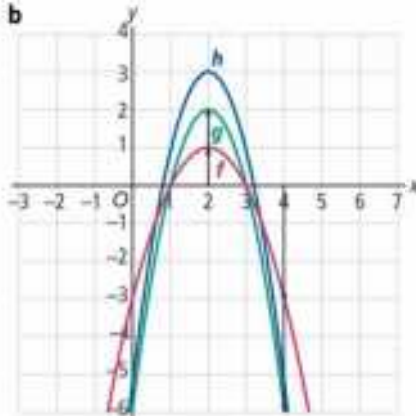
$$\begin{array}{l} \nearrow \frac{1}{3} \quad h(x) = 6x - 1 \\ \searrow \quad k(x) = 2x - \dots \\ \nearrow \quad f(x) = 2x - \frac{1}{2} \end{array}$$

Van $h(x)$ naar $k(x)$ moet je vermenigvuldigen met $\frac{1}{3}$. Dit geeft $k(x) = 2x - \frac{1}{3}$.

Van $k(x)$ naar $f(x)$ moet je $\frac{1}{6}$ aftrekken, want $-\frac{1}{3} - (-\frac{1}{6}) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$.

De vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as is met de factor $\frac{1}{3}$ en de verschuiving is $\frac{1}{6}$ omlaag.

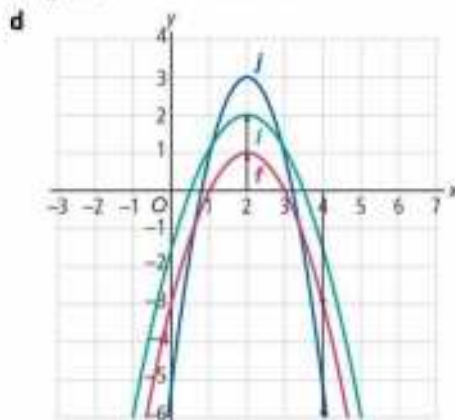
022 a b



c

$$\begin{array}{l} g(x) = 2 \times f(x) \\ g(x) = 2(-x^2 + 4x - 3) \\ g(x) = -2x^2 + 8x - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} h(x) = g(x) + 1 \\ h(x) = (-2x^2 + 8x - 6) + 1 \\ h(x) = -2x^2 + 8x - 5 \end{array}$$



e

$$\begin{array}{l} i(x) = f(x) + 1 \\ i(x) = (-x^2 + 4x - 3) + 1 \\ i(x) = -x^2 + 4x - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} j(x) = 2 \times i(x) \\ j(x) = 2(-x^2 + 4x - 2) \\ j(x) = -2x^2 + 8x - 4 \end{array}$$

025 a Op de puntjes bij $g(x)$ moet $-12x + 15$ staan, want van $f(x)$ naar $g(x)$ moet je vermenigvuldigen met 3.

b

$$\begin{array}{l} \nearrow \times 3 \quad f(x) = x^2 - 4x + 5 \\ \searrow \quad g(x) = 3x^2 - 12x + 15 \\ \nearrow +21 \quad h(x) = 3x^2 - 12x + 36 \end{array}$$

c De vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as is met de factor 3 en de verschuiving is 21 omhoog.

$$\begin{aligned}
 \text{U4 a } q(x) &= p(x) - 28 \\
 q(x) &= (92 \cdot 8^x) - 28 \\
 q(x) &= 92 \cdot 8^x - 28 \\
 r(x) &= \frac{1}{4} \times q(x)
 \end{aligned}$$

$$r(x) = \frac{1}{4} (92 \cdot 8^x - 28)$$

$$r(x) = 23 \cdot 8^x - 7$$

$$s(x) = r(x) + 7$$

$$s(x) = (23 \cdot 8^x - 7) + 7$$

$$s(x) = 23 \cdot 8^x$$

- b Door de grafiek van p ten opzichte van de x -as met de factor $\frac{1}{4}$ te vermenigvuldigen, had je de grafiek van s in één keer kunnen krijgen.
- c Dat geldt ook omdat $-28 \times \frac{1}{4} + 7 = 0$, dus de grafiek verschuift niet.

U5 Neem aan dat de grafiek ten opzichte van de x -as met de factor a vermenigvuldigd wordt en b omhoog geschoven wordt. Dan geldt:

$$m(x) = a \times l(x)$$

$$m(x) = a\left(\frac{3}{4}x + 1\right)$$

$$m(x) = \frac{3}{4}ax + a$$

$$n(x) = m(x) + b$$

$$n(x) = \left(\frac{3}{4}ax + a\right) + b$$

$$n(x) = \frac{3}{4}ax + a + b$$

Invullen van $x = 1$ en $y = 19$ geeft $19 = \frac{3}{4}a \times 1 + a + b$.

Invullen van $x = 10$ en $y = 100$ geeft $100 = \frac{3}{4}a \times 10 + a + b$.

In beide vergelijkingen komt $a + b$ voor, maar dan moet gelden $\frac{3}{4}a \times 9 = 81$, oftewel $\frac{3}{4}a = 9$, dus $a = 12$.

Invullen van $a = 12$ geeft $19 = \frac{3}{4} \times 12 \times 1 + 12 + b$, oftewel $19 = 9 + 12 + b$, dus $19 = 21 + b$ en $b = -2$.

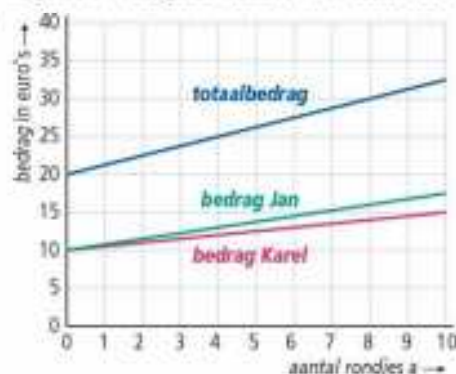
De vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as is met de factor 12 en de verschuiving is 2 omlaag.

5.5 Somfunctie en verschilfunctie

intro De periode van beide tonen is gelijk, dus de periode van de toon die je dan hoort is daar ook gelijk aan. De toon die je dan hoort is een even hoge toon. Als je de grafieken bij elkaar optelt, dan krijg je een grafiek waarvan de amplitude groter is. De toon die je dan hoort is harder.

28 a Bij het bedrag dat Karel verdient hoort de formule $b = 0,50a + 10$.

b

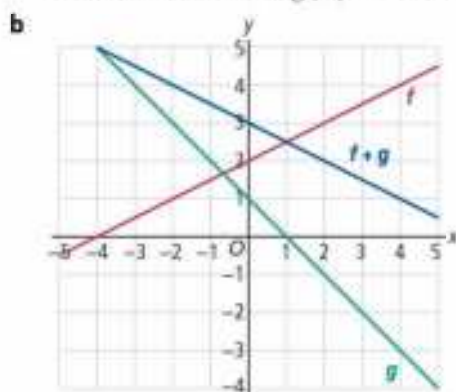


5 Nieuwe grafieken

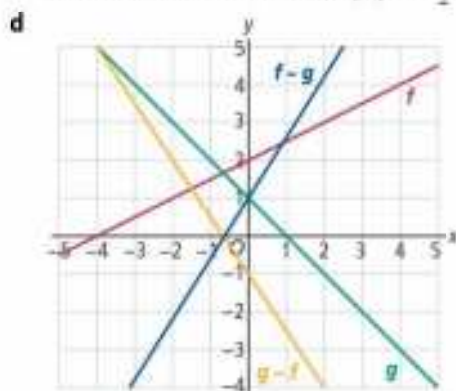
c	aantal rondjes	0	2	4	6	8	10
	bedrag Karel in euro's	10,-	11,-	12,-	13,-	14,-	15,-
	bedrag Jan in euro's	10,-	11,40	12,80	14,20	15,60	17,-
	totaalbedrag in euro's	20,-	22,40	24,80	27,20	29,60	32,-

- d Zie opdracht 28b.
 e Samen krijgen ze er per rondje € 0,50 + € 0,70 = € 1,20 bij.
 f Aan het begin van de sponsorloop krijgen ze samen al
 € 10,- + € 10,- = € 20,-.
 g De formule voor het totaalbedrag is $b = 1,20a + 20$.
 h Optellen van de formules van Karel en van Jan geeft
 $b = (0,50a + 10) + (0,70a + 10)$, oftewel $b = 1,20a + 20$.

- 29 a Van de functie f is de richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$ en het startgetal 2, dus het
 functievoorschrift is $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.
 Van de functie g is de richtingscoëfficiënt -1 en het startgetal 1, dus het
 functievoorschrift is $g(x) = -x + 1$.



- c Van de functie $s = f + g$ is de richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$ en het startgetal 3, dus
 het functievoorschrift is $s(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.



- e Als $f - g$ gelijk is aan nul, dan snijden de grafieken van f en g elkaar.
 f Van de functie $v = f - g$ is de richtingscoëfficiënt $1\frac{1}{2}$ en het startgetal 1, dus
 het functievoorschrift is $v(x) = 1\frac{1}{2}x + 1$.
 g Zie opdracht 29d.
 h Nee, de grafieken van $f - g$ en $g - f$ zijn niet hetzelfde.
 i Ja, de grafieken van $f + g$ en $g + f$ zijn hetzelfde.

30 a $s(x) = f(x) + g(x)$

$$s(x) = \left(\frac{1}{2}x - 3\right) + (2x^2 + 4x + 1)$$

$$s(x) = \frac{1}{2}x - 3 + 2x^2 + 4x + 1$$

$$s(x) = 2x^2 + 4\frac{1}{2}x - 2$$

b $v(x) = f(x) - g(x)$

$$v(x) = \left(\frac{1}{2}x - 3\right) - (2x^2 + 4x + 1)$$

$$v(x) = \frac{1}{2}x - 3 - 2x^2 - 4x - 1$$

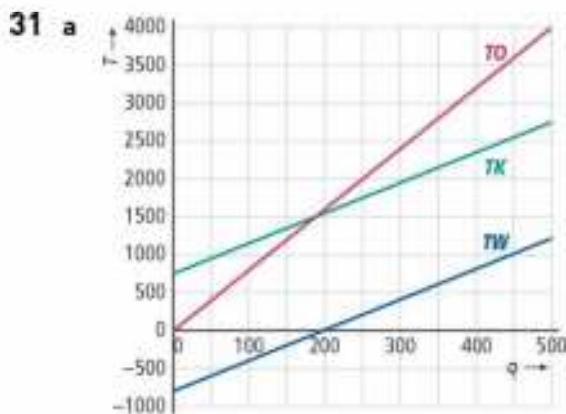
$$v(x) = -2x^2 - 3\frac{1}{2}x - 4$$

c $w(x) = g(x) - f(x)$

$$w(x) = (2x^2 + 4x + 1) - \left(\frac{1}{2}x - 3\right)$$

$$w(x) = 2x^2 + 4x + 1 - \frac{1}{2}x + 3$$

$$w(x) = 2x^2 + 3\frac{1}{2}x + 4$$



b $8q = 800 + 4q$

$$4q = 800$$

$$q = 200$$

Invullen van $q = 200$ geeft $TO = 8 \times 200 = 1600$.

De coördinaten van het snijpunt zijn (200, 1600).

c Bij het snijpunt zijn de totale opbrengst en de totale kosten even groot en maakt de speelgoedfabrikant geen winst, maar ook geen verlies.

d Zie opdracht 31a.

e $TW = TO - TK$

$$TW = (8q) - (800 + 4q)$$

$$TW = 8q - 800 - 4q$$

$$TW = 4q - 800$$

5 Nieuwe grafieken

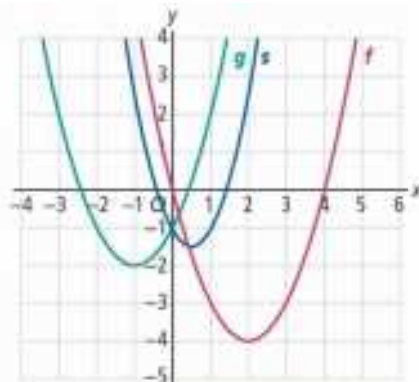
32 a $s(x) = f(x) + g(x)$

$$s(x) = (x^2 - 4x) + (x^2 + 2x - 1)$$

$$s(x) = x^2 - 4x + x^2 + 2x - 1$$

$$s(x) = 2x^2 - 2x - 1$$

b



c De grafiek is een dalparabool.

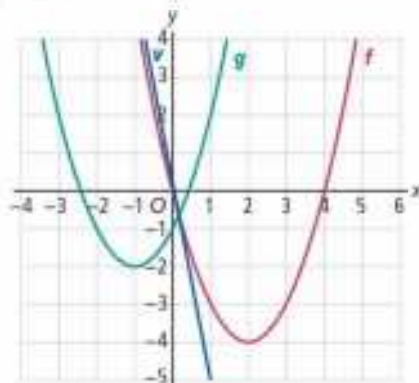
d $v(x) = f(x) - g(x)$

$$v(x) = (x^2 - 4x) - (x^2 + 2x - 1)$$

$$v(x) = x^2 - 4x - x^2 - 2x + 1$$

$$v(x) = -6x + 1$$

e



f De grafiek is een rechte lijn.

30 $s(x) = (5x + 1) + (-3x^2 + 2x - 1)$

$$s(x) = 5x + 1 - 3x^2 + 2x - 1$$

$$s(x) = -3x^2 + 7x$$

$$v(x) = (3x^2 - x - 4) - (-x^2 + 5x - 3)$$

$$v(x) = 3x^2 - x - 4 + x^2 - 5x + 3$$

$$v(x) = 4x^2 - 6x - 1$$

U6 a $s(x) = f(x) + g(x)$

$$x^2 - x + 5 = (x^2 + x) + g(x)$$

$$x^2 - x + 5 = x^2 + x + g(x)$$

$$g(x) = -2x + 5$$

b $v(x) = f(x) - h(x)$

$$-2x^2 - 10x + \frac{1}{2} = (x^2 + x) - h(x)$$

$$-2x^2 - 10x + \frac{1}{2} = x^2 + x - h(x)$$

$$h(x) = 3x^2 + 11x - \frac{1}{2}$$

c $t(x) = p(x) + r(x)$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3x = (x^2 - 6x + 8) + r(x)$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3x = x^2 - 6x + 8 + r(x)$$

$$r(x) = -1\frac{1}{2}x^2 + 9x - 8$$

$$-1\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p(x) = x^2 - 6x + 8 \\ q(x) = -1\frac{1}{2}x^2 + \dots \end{pmatrix}$$

$$+ \dots \begin{pmatrix} r(x) = -1\frac{1}{2}x^2 + 9x - 8 \end{pmatrix}$$

$$\times -1\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p(x) = x^2 - 6x + 8 \\ q(x) = -1\frac{1}{2}x^2 + \dots \end{pmatrix}$$

$$+ \dots \begin{pmatrix} r(x) = -1\frac{1}{2}x^2 + 9x - 8 \end{pmatrix}$$

Van $p(x)$ naar $q(x)$ moet je vermenigvuldigen met $-1\frac{1}{2}$. Dit geeft

$$q(x) = -1\frac{1}{2}x^2 + 9x - 12.$$

Van $q(x)$ naar $r(x)$ moet je 4 optellen, want $-12 + 4 = -8$.

De vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as is met de factor $-1\frac{1}{2}$ en de verschuiving is 4 omhoog.

5.6 Gemengde opdrachten

33 a De grafiek van f is ten opzichte van de x -as met de factor 2 vermenigvuldigd.

b $g(x) = 2 \times f(x)$

$$g(x) = 2(x^2 - 1)$$

$$g(x) = 2x^2 - 2$$

c De grafiek van l is ten opzichte van de x -as met de factor $-\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd.

d $m(x) = -\frac{1}{2} \times l(x)$

$$m(x) = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x + 3)$$

$$m(x) = \frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$$

e Invullen van $x = 3$ in de functie l geeft $l(3) = -\frac{1}{2} \times 3 + 3 = -1\frac{1}{2} + 3 = 1\frac{1}{2}$.

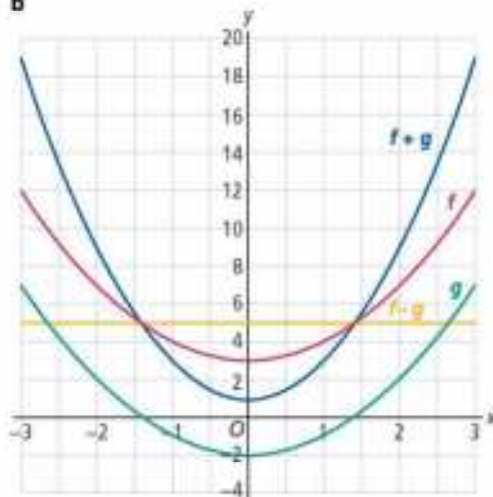
De grafiek van n gaat door het punt $(3, 12)$, dus er is met de factor $12 : 1\frac{1}{2} = 8$ vermenigvuldigd.

$$n(x) = 8 \times l(x)$$

$$n(x) = 8(-\frac{1}{2}x + 3)$$

$$n(x) = -4x + 24$$

34 a b



5 Nieuwe grafieken

c $s(x) = f(x) + g(x)$
 $s(x) = (x^2 + 3) + (x^2 - 2)$
 $s(x) = x^2 + 3 + x^2 - 2$
 $s(x) = 2x^2 + 1$

d

$\times 2$	$f(x) = x^2 + 3$	$\times 2$	$f(x) = x^2 + 3$
$+$	$h(x) = 2x^2 + \dots$	$+$	$h(x) = 2x^2 + 6$
$-$	$s(x) = 2x^2 + 1$	$+$	$s(x) = 2x^2 + 1$

Van $f(x)$ naar $h(x)$ moet je vermenigvuldigen met 2. Dit geeft $h(x) = 2x^2 + 6$.

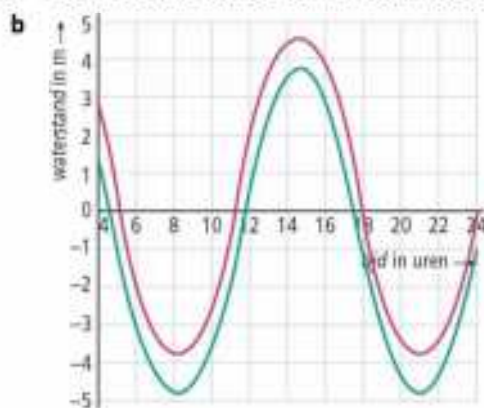
Van $h(x)$ naar $s(x)$ moet je 5 aftrekken, want $6 - 5 = 1$.

De vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as is met de factor 2 en de verschuiving is 5 omlaag.

e Zie opdracht 34ab.

f $v(x) = f(x) - g(x)$
 $v(x) = (x^2 + 3) - (x^2 - 2)$
 $v(x) = x^2 + 3 - x^2 + 2$
 $v(x) = 5$

35 a Ze kan om 6 uur en om 19 uur met de strandwandeling beginnen.



c Bij de grafiek van dinsdag is de periode $17.30 - 4.30 = 13$ uur, de evenwichtsstand $(3,6 + -4,8) : 2 = -0,6$ meter en de amplitude $3,6 - -0,6 = 4,2$ meter.

d De maximale tijdsduur van de strandwandeling is $11 - 5.30 = 5.30$ uur.

36 a De toename van de l -coördinaat is $60 - 20 = 40$ jaar en de toename van de s -coördinaat is $1800 - 1000 = 800$ euro. De richtingscoëfficiënt is $\frac{800}{40} = 20$. De formule voor het oude salaris is van de vorm $s_{oud} = 20l + b$. Invullen van $l = 20$ en $s_{oud} = 1000$ geeft $1000 = 20 \times 20 + b$, oftewel $1000 = 400 + b$, dus $b = 600$.

Voor het oude salaris geldt $s_{oud} = 20l + 600$.

b De toename van de l -coördinaat is $60 - 20 = 40$ jaar en de toename van de s -coördinaat is $1991 - 1111 = 880$ euro. De richtingscoëfficiënt is $\frac{880}{40} = 22$. De formule voor het nieuwe salaris is van de vorm $s_{nieuw} = 22l + b$. Invullen van $l = 20$ en $s_{nieuw} = 1111$ geeft $1111 = 22 \times 20 + b$, oftewel $1111 = 440 + b$, dus $b = 671$.

Voor het nieuwe salaris geldt $s_{nieuw} = 22l + 671$.

- c Er is vermenigvuldigd met de factor $22 : 20 = 1,1$. De salarissen worden met 10% verhoogd.

De oude salarissen van € 1.000,- en € 1.800,- met 10% verhogen, levert de nieuwe salarissen van € 1.100,- en € 1.980,- op. De salarissen worden daarna nog met een vast bedrag van € 11,- verhoogd.

- 37 a Als je de grafiek van $f(x) = 7x + 3$ verschuift, dan verandert de 3, maar de $7x$ blijft hetzelfde, dus kun je niet de grafiek van $h(x) = 14x + 6$ krijgen.

b

$$\begin{array}{l} \times 2 \left(\begin{array}{l} f(x) = 7x + 3 \\ g(x) = 14x + \dots \end{array} \right. \\ + \dots \left(\begin{array}{l} g(x) = 14x + \dots \\ h(x) = 14x + 9 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \times 2 \left(\begin{array}{l} f(x) = 7x + 3 \\ g(x) = 14x + 6 \end{array} \right. \\ + \dots \left(\begin{array}{l} g(x) = 14x + 6 \\ h(x) = 14x + 9 \end{array} \right. \end{array}$$

Van $f(x)$ naar $g(x)$ moet je vermenigvuldigen met 2. Dit geeft $g(x) = 14x + 6$.

Van $g(x)$ naar $h(x)$ moet je 3 optellen, want $6 + 3 = 9$.

De eerste manier is eerst ten opzichte van de x -as met de factor 2 vermenigvuldigen en daarna 3 omhoog verschuiven.

$$\begin{array}{l} + \dots \left(\begin{array}{l} f(x) = 7x + 3 \\ g(x) = 7x + \dots \end{array} \right. \\ \times 2 \left(\begin{array}{l} g(x) = 7x + \dots \\ h(x) = 14x + 9 \end{array} \right) : 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + \dots \left(\begin{array}{l} f(x) = 7x + 3 \\ g(x) = 7x + 4\frac{1}{2} \end{array} \right. \\ \times 2 \left(\begin{array}{l} g(x) = 7x + 4\frac{1}{2} \\ h(x) = 14x + 9 \end{array} \right) : 2 \end{array}$$

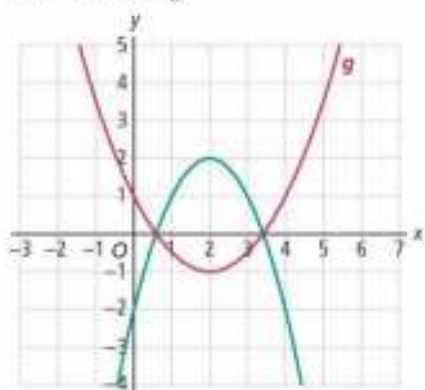
Van $g(x)$ naar $h(x)$ moet je vermenigvuldigen met 2, dus van $h(x)$ naar $g(x)$ moet je delen door 2. Dit geeft $g(x) = 7x + 4\frac{1}{2}$.

Van $f(x)$ naar $g(x)$ moet je $1\frac{1}{2}$ optellen, want $3 + 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$.

De tweede manier is eerst $1\frac{1}{2}$ omhoog verschuiven en daarna ten opzichte van de x -as met de factor 2 vermenigvuldigen.

- 38 a Invullen van $x = 2$ en $y = -1$ geeft $-1 = a \times (2 - 2)^2 + b$, oftewel $-1 = a \times 0 + b$, dus $b = -1$.
- b Invullen van $x = 0$ en $y = 1$ geeft $1 = a \times (0 - 2)^2 - 1$, oftewel $1 = 4a - 1$, dus $4a = 2$ en $a = \frac{1}{2}$.

c



- d $h(x) = -2 \times g(x)$
 $h(x) = -2\left(\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 1\right)$
 $h(x) = -(x - 2)^2 + 2$

5 Nieuwe grafieken

e $s(x) = g(x) + h(x)$

$$s(x) = \left(\frac{1}{2}(x-2)^2 - 1\right) + (-(x-2)^2 + 2)$$

$$s(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1 - (x-2)^2 + 2$$

$$s(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$$

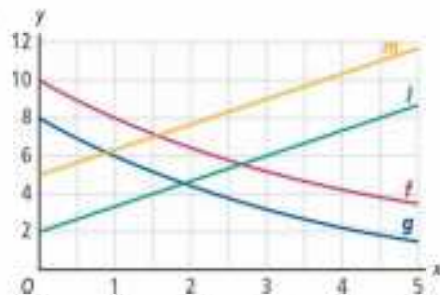
De grafiek van s is het tegengestelde van de grafiek van g . De grafiek van s is net zo breed als de grafiek van g , maar de grafiek van s is een bergparabool.

- 39** Tussen 0 en 6 heeft de grafiek 1 hoogste punt en 1 laagste punt. Tussen $78 = 13 \times 6$ en $120 = 20 \times 6$ heeft de grafiek $20 - 13 = 7$ hoogste punten en $20 - 13 = 7$ laagste punten.
Het laatste hoogste punt ligt voor 118, dus de grafiek heeft 7 hoogste punten.
Het laatste laagste punt ligt na 118, dus de grafiek heeft $7 - 1 = 6$ laagste punten.
Tussen 0 en 6 snijdt de grafiek de x -as 2 keer. Tussen $78 = 13 \times 6$ en $120 = 20 \times 6$ snijdt de grafiek de x -as $(20 - 13) \times 2 = 14$ keer.
Het voorlaatste snijpunt ligt voor 118, maar het laatste snijpunt ligt na 118.
De grafiek snijdt de x -as $14 - 1 = 13$ keer.

Samenvatting

- S1** a De periode van deze grafiek is $0,8 - 0 = 0,8$ seconden.
b De gemiddelde bloeddruk is $(130 + 90) : 2 = 110$ mm kwikdruk.
c De amplitude is $130 - 110 = 20$ mm kwikdruk.
d In 0,8 seconden slaat het hart 1 keer, dus in 60 seconden slaat het hart $60 : 0,8 = 75$ keer. Het hart maakt 75 slagen per minuut.

S2 a



- b $g(x) = f(x) - 2$
 $g(x) = (10 \cdot 0,8^x) - 2$
 $g(x) = 10 \cdot 0,8^x - 2$
 c Zie opdracht S2a.
 d $m(x) = l(x) + 3$
 $m(x) = \left(1\frac{1}{3}x + 2\right) + 3$
 $m(x) = 1\frac{1}{3}x + 5$

- S3** a $g(x) = 4 \times f(x)$
 $g(x) = 4\left(-\frac{1}{4}x^2 - 4x + 8\right)$
 $g(x) = -x^2 - 16x + 32$
 b De gebruikte factor is -8 , want om van $-\frac{1}{4}x^2$ naar $2x^2$, van $-4x$ naar $32x$ en van 8 naar -64 te gaan moet je met -8 vermenigvuldigen.

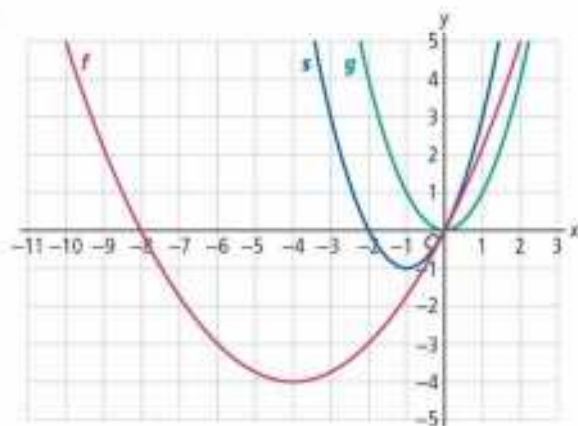
S4 a Je moet met de factor -2 vermenigvuldigen, want $2 \times -2 = -4$.

$$\begin{array}{lcl} \times -2 & \left(\begin{array}{l} l(x) = 2x - 1 \\ m(x) = -4x + \dots \\ n(x) = -4x - 4 \end{array} \right. & \times -2 & \left(\begin{array}{l} l(x) = 2x - 1 \\ m(x) = -4x + 2 \\ n(x) = -4x - 4 \end{array} \right. \\ + \dots & & + \dots & \end{array}$$

Je moet de grafiek vervolgens 6 omlaag verschuiven, want $2 - 6 = -4$.

$$\begin{aligned} \text{c } p(x) &= n(x) - 4 \\ p(x) &= (-4x - 4) - 4 \\ p(x) &= -4x - 8 \\ q(x) &= -\frac{1}{4} \times p(x) \\ q(x) &= -\frac{1}{4}(-4x - 8) \\ q(x) &= x + 2 \end{aligned}$$

S5 a



$$\text{b } s(x) = f(x) + g(x)$$

$$s(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x\right) + \left(\frac{3}{4}x^2\right)$$

$$s(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + \frac{3}{4}x^2$$

$$s(x) = x^2 + 2x$$

$$\text{c } w(x) = g(x) - f(x)$$

$$w(x) = \left(\frac{3}{4}x^2\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x\right)$$

$$w(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 - 2x$$

$$w(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

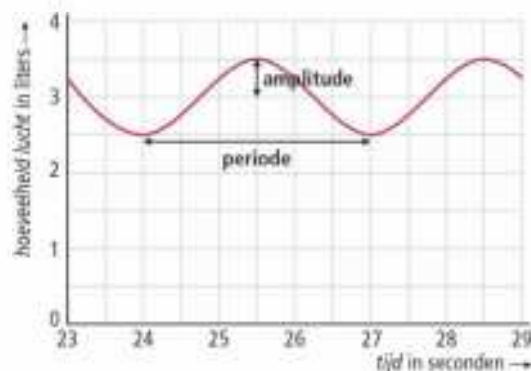
Test jezelf

T1 a Bij één keer in- en uitademen wordt $3,5 - 2,5 = 1$ liter lucht ververst.

b De periode van zijn ademhaling is $3 - 0 = 3$ seconden.

c Gemiddeld zit er $(3,5 + 2,5) : 2 = 3$ liter lucht in zijn longen.

d e



5 Nieuwe grafieken

T2 a $i(x) = f(x) - 10$

$$i(x) = (-2x + 16) - 10$$

$$i(x) = -2x + 6$$

b $k(x) = g(x) + 40$

$$k(x) = (20 \cdot 8^x) + 40$$

$$k(x) = 20 \cdot 8^x + 40$$

$$m(x) = \frac{1}{4} \times k(x)$$

$$m(x) = \frac{1}{4} (20 \cdot 8^x + 40)$$

$$m(x) = 5 \cdot 8^x + 10$$

c $p(x) = \frac{1}{4} \times g(x)$

$$p(x) = \frac{1}{4} (20 \cdot 8^x)$$

$$p(x) = 5 \cdot 8^x$$

$$q(x) = p(x) + 40$$

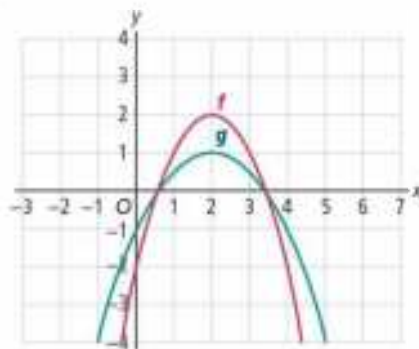
$$q(x) = (5 \cdot 8^x) + 40$$

$$q(x) = 5 \cdot 8^x + 40$$

d De functie h kun je schrijven als $h(x) = -2x - 8$.

Je moet de grafiek van f 24 omlaag verschuiven zodat de beeldgrafiek precies op de grafiek van h past, want $16 - 24 = -8$.

T3 a



b $g(x) = \frac{1}{2} \times f(x)$

$$g(x) = \frac{1}{2} \times (-x^2 + 4x - 2)$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$$

c Er is een negatieve factor gebruikt.

d De factor is -5 , want om van $-x^2$ naar $5x^2$, van $4x$ naar $-20x$ en van -2 naar 10 te gaan moet je met -5 vermenigvuldigen.

T4 a De formule wordt $S_{\text{nieuw}} = 1,08 \times (30L + 1100) + 150$ oftewel

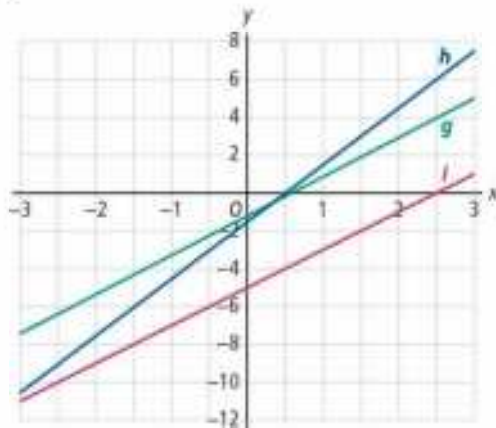
$$S_{\text{nieuw}} = 32,4L + 1188 + 150, \text{ dus } S_{\text{nieuw}} = 32,4L + 1338.$$

b Je krijgt de formule $S_{\text{nieuw}} = 1,08 \times (30L + 1300 + 150)$ oftewel

$$S_{\text{nieuw}} = 1,08 \times (30L + 1250), \text{ dus } S_{\text{nieuw}} = 32,4L + 1350.$$

c Als werknemer kies je voor de tweede variant, want daarbij krijgt iedere werknemer € 12,- meer.

T5 a b



$$\begin{aligned} \text{c } g(x) &= f(x) + 4 \\ g(x) &= (2x - 5) + 4 \\ g(x) &= 2x - 1 \\ h(x) &= 1\frac{1}{2} \times g(x) \\ h(x) &= 1\frac{1}{2} (2x - 1) \\ h(x) &= 3x - 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{d } \begin{array}{l} \nearrow f(x) = 2x - 5 \\ \searrow i(x) = x - \dots \\ \nearrow j(x) = x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow f(x) = 2x - 5 \\ \searrow i(x) = x - 2\frac{1}{2} \\ \nearrow j(x) = x + 1 \end{array} \end{array}$$

Van $f(x)$ naar $i(x)$ moet je vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$. Dit geeft $i(x) = x - 2\frac{1}{2}$.

Van $i(x)$ naar $j(x)$ moet je $3\frac{1}{2}$ optellen, want $-2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = 1$.

De vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as is met de factor $\frac{1}{2}$ en de verschuiving is $3\frac{1}{2}$ omhoog.

$$\begin{array}{l} \text{e } \begin{array}{l} \nearrow f(x) = 2x - 5 \\ \searrow k(x) = 2x + \dots \\ \nearrow j(x) = x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow f(x) = 2x - 5 \\ \searrow k(x) = 2x + 2 \\ \nearrow j(x) = x + 1 \end{array} \end{array}$$

Van $k(x)$ naar $j(x)$ moet je vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$, dus van $j(x)$ naar $k(x)$ moet je vermenigvuldigen met 2. Dit geeft $k(x) = 2x + 2$.

Van $f(x)$ naar $k(x)$ moet je 7 optellen, want $-5 + 7 = 2$.

De verschuiving is 7 omhoog en de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as is met de factor $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{T6 a } s(x) &= f(x) + g(x) \\ s(x) &= (x^2 + 7x - 1) + (-2x + 1) \\ s(x) &= x^2 + 7x - 1 - 2x + 1 \\ s(x) &= x^2 + 5x \\ \text{b } v(x) &= f(x) - g(x) \\ v(x) &= (x^2 + 7x - 1) - (-2x + 1) \\ v(x) &= x^2 + 7x - 1 + 2x - 1 \\ v(x) &= x^2 + 9x - 2 \end{aligned}$$

5 Nieuwe grafieken

c $w(x) = g(x) - f(x)$

$$w(x) = (-2x + 1) - (x^2 + 7x - 1)$$

$$w(x) = -2x + 1 - x^2 - 7x + 1$$

$$w(x) = -x^2 - 9x + 2$$

d Invullen van $x = -3$ in de functie f geeft

$$f(-3) = (-3)^2 + 7 \times -3 - 1 = 9 - 21 - 1 = -13.$$

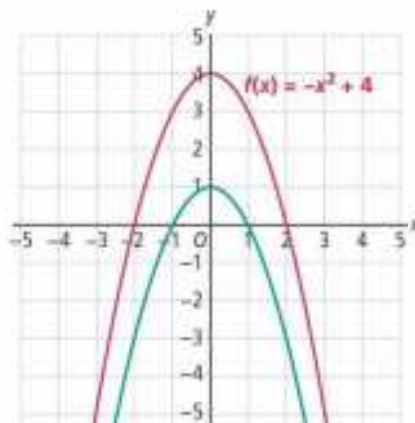
De beeldgrafiek gaat door het punt $(-3, 27)$, dus je moet de grafiek van f 40 omhoog verschuiven, want $-13 + 40 = 27$.

Extra oefening

- E1 Grafiek A is periodiek. De periode is $8 - 0 = 8$, de evenwichtsstand is $(0 + -4) : 2 = -2$ en de amplitude is $0 - -2 = 2$.
 Grafiek B is niet periodiek.
 Grafiek C is periodiek. De periode is $1 - -4 = 5$, de evenwichtsstand is $(9 + -3) : 2 = 3$ en de amplitude is $9 - 3 = 6$.

functievoorschrift van de grafiek	verticaal verschuiven	functievoorschrift van de beeldgrafiek
$f(x) = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$	10 omlaag	$g(x) = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 10$
$k(x) = -\frac{1}{3}x - 9$	12 omhoog	$l(x) = -\frac{1}{3}x + 3$

E3 a b

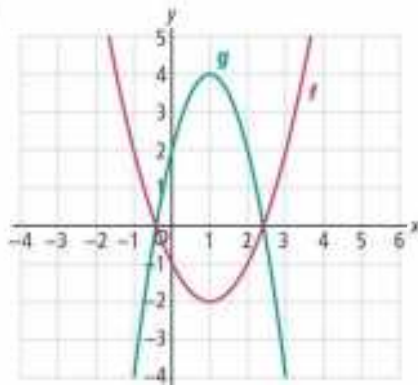


c $g(x) = f(x) - 3$

$$g(x) = (-x^2 + 4) - 3$$

$$g(x) = -x^2 + 1$$

functievoorschrift van de grafiek	ten opzichte van de x-as vermenigvuldigen met	functievoorschrift van de beeldgrafiek
$f(x) = 24 \cdot 6^x$	de factor $\frac{1}{3}$	$g(x) = 8 \cdot 6^x$
$k(x) = 1\frac{1}{2}x - 3$	de factor -4	$l(x) = -6x + 12$

E5 a

- b** Als je de grafiek eerst met -1 vermenigvuldigt, dan wordt de dalparabool een bergparabool die even breed is. Als je daarna met 2 vermenigvuldigt, dan wordt de parabool uitgerekt omdat je met een getal groter dan 1 vermenigvuldigt.
- c** $g(x) = -2 \times f(x)$
 $g(x) = -2(x^2 - 2x - 1)$
 $g(x) = -2x^2 + 4x + 2$

functievoorschrift van de grafiek	eerst verticaal verschuiven	daarna ten opzichte van de x -as vermenigvuldigen met	functievoorschrift van de beeldgrafiek
$f(x) = -2x + 5$	10 omlaag	de factor -2	$h(x) = 4x + 10$
$k(x) = -2x^2 + x + 2$	4 omhoog	de factor $\frac{1}{2}$	$m(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x + 3$
$n(x) = 2x^2 + 6x$	3 omhoog	de factor -5	$p(x) = -10x^2 - 30x - 15$
$r(x) = 18 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$	6 omlaag	de factor 2	$t(x) = 36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 12$

E7

$$\begin{array}{lcl}
 \begin{array}{l}
 \times -\frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} p(x) = -4x^2 - 5x + 6 \\ q(x) = 2x^2 + \dots \end{array} \right. \\
 + \dots \left(\begin{array}{l} r(x) = 2x^2 + 2\frac{1}{2}x + 5 \end{array} \right.
 \end{array} & &
 \begin{array}{l}
 \times -\frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} p(x) = -4x^2 - 5x + 6 \\ q(x) = 2x^2 + 2\frac{1}{2}x - 3 \end{array} \right. \\
 + \dots \left(\begin{array}{l} r(x) = 2x^2 + 2\frac{1}{2}x + 5 \end{array} \right.
 \end{array}
 \end{array}$$

Van $p(x)$ naar $q(x)$ moet je vermenigvuldigen met $-\frac{1}{2}$. Dit geeft

$$q(x) = 2x^2 + 2\frac{1}{2}x - 3.$$

Van $q(x)$ naar $r(x)$ moet je 8 optellen, want $-3 + 8 = 5$.

De vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as is met de factor $-\frac{1}{2}$ en de verschuiving is 8 omhoog.

E8 a

$$\begin{aligned}
 s(x) &= f(x) + g(x) \\
 s(x) &= (x + 5) + \left(-\frac{3}{4}x + 5\right) \\
 s(x) &= x + 5 - \frac{3}{4}x + 5 \\
 s(x) &= \frac{1}{4}x + 10 \\
 v(x) &= f(x) - g(x) \\
 v(x) &= (x + 5) - \left(-\frac{3}{4}x + 5\right) \\
 v(x) &= x + 5 + \frac{3}{4}x - 5 \\
 v(x) &= 1\frac{3}{4}x \\
 w(x) &= g(x) - f(x) \\
 w(x) &= \left(-\frac{3}{4}x + 5\right) - (x + 5) \\
 w(x) &= -\frac{3}{4}x + 5 - x - 5 \\
 w(x) &= -1\frac{3}{4}x
 \end{aligned}$$

b $s(x) = f(x) + g(x)$

$$s(x) = (-x^2 + 2x) + (2x + 4)$$

$$s(x) = -x^2 + 2x + 2x + 4$$

$$s(x) = -x^2 + 4x + 4$$

$$v(x) = f(x) - g(x)$$

$$v(x) = (-x^2 + 2x) - (2x + 4)$$

$$v(x) = -x^2 + 2x - 2x - 4$$

$$v(x) = -x^2 - 4$$

$$w(x) = g(x) - f(x)$$

$$w(x) = (2x + 4) - (-x^2 + 2x)$$

$$w(x) = 2x + 4 + x^2 - 2x$$

$$w(x) = x^2 + 4$$

c $s(x) = f(x) + g(x)$

$$s(x) = (3x^2 + 17x - 4) + (3x^2 + 1)$$

$$s(x) = 3x^2 + 17x - 4 + 3x^2 + 1$$

$$s(x) = 6x^2 + 17x - 3$$

$$v(x) = f(x) - g(x)$$

$$v(x) = (3x^2 + 17x - 4) - (3x^2 + 1)$$

$$v(x) = 3x^2 + 17x - 4 - 3x^2 - 1$$

$$v(x) = 17x - 5$$

$$w(x) = g(x) - f(x)$$

$$w(x) = (3x^2 + 1) - (3x^2 + 17x - 4)$$

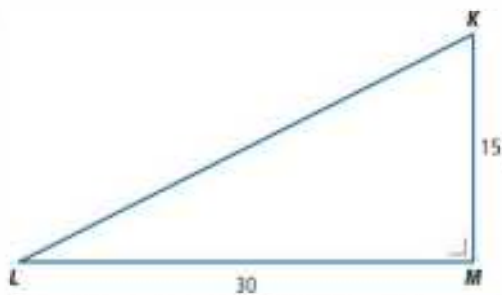
$$w(x) = 3x^2 + 1 - 3x^2 - 17x + 4$$

$$w(x) = -17x + 5$$

6 Goniometrie

Voorkennis

V1 a



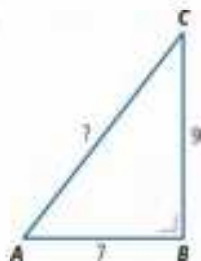
b De zijden KM en LM zijn de rechthoekszijden.

c De zijde KL is de langste zijde.

zijde	kwadraat
$LM = 30$	900
$KM = 15$	<u>225</u> +
$KL = \dots$	1125

De lengte van zijde KL is $\sqrt{1125}$.

V2 a



zijde	kwadraat
$AB = 7$	49
$BC = 9$	<u>81</u> +
$AC = \dots$	130

$AC = \sqrt{130}$

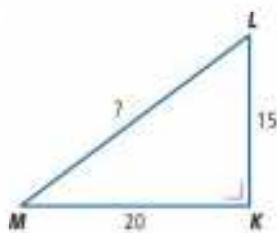
b



zijde	kwadraat
$GH = 4$	16
$GI = \dots$	<u>74</u> +
$HI = \sqrt{90}$	90

$GI = \sqrt{74}$

c



zijde	kwadraat
$KL = 15$	225
$KM = 20$	<u>400</u> +
$LM = \dots$	625

$LM = \sqrt{625} = 25$

V3 a

zijde	kwadraat
$AB = 20$	400
$AD = 10$	<u>100</u> +
$BD = \dots$	500

$BD = \sqrt{500}$

6 Goniometrie

- b Ze rekent met het exacte tussenantwoord door, want als ze met een afgerond antwoord doorrekent, dan kan ze een verkeerde lengte van lijnstuk DF vinden.

zijde	kwadraat
$BD = \sqrt{500}$	500
$BF = 5$	<u>25</u> +
$DF = \dots$	525

De lengte van lijnstuk DF is $\sqrt{525}$.

V4 a	zijden $\triangle ABC$	$AB = 12$	$BC = 10$	$AC = 11$
	zijden $\triangle DEF$	$DE = 6$	$DF = 5$	$EF = 5,5$

- b Je moet de lengte van de zijden van $\triangle ABC$ met de factor 0,5 vermenigvuldigen om die van $\triangle DEF$ te krijgen.
c De overeenkomstige hoeken zijn gelijk.

- V5 a $\angle B = 180^\circ - 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$ en $\angle D = 51^\circ$
De overeenkomstige hoeken zijn niet gelijk, dus $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ zijn niet gelijkvormig.

b	zijden $\triangle ABC$	$AB = 12$	$BC = 20$	$AC = 16$
	zijden $\triangle GHI$	$HI = 16$	$GI = 25,6$	$GH = 20$

$$16 : 12 = 1\frac{1}{3}; 25,6 : 20 = 1,28 \text{ en } 20 : 16 = 1,25$$

De overeenkomstige zijden zijn niet met dezelfde factor vermenigvuldigd, dus $\triangle ABC$ en $\triangle GHI$ zijn niet gelijkvormig.

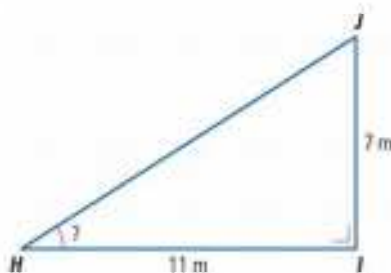
6.1 Hellingshoek en tangens

Intro Het is goed, omdat de opbrengst van zonnepanelen het grootst is als de zon er loodrecht op staat en daar kun je met een hoek die verstelbaar is voor zorgen.

- 1 a Bij de trap met drie treden hoort een afstand van $3 \times 40 = 120$ cm en een hoogte van $3 \times 15 = 45$ cm.
b Als de trap uit 13 treden bestaat, hoort er een afstand van $13 \times 40 = 520$ cm en een hoogte van $13 \times 15 = 195$ cm bij.
c Bij één trede hoort een afstand van 40 cm en een hoogte van 15 cm.
d Bij opdracht a is de uitkomst van de deling $\frac{\text{hoogte}}{\text{afstand}} = \frac{45}{120} = 0,375$, bij opdracht b is de uitkomst van de deling $\frac{\text{hoogte}}{\text{afstand}} = \frac{195}{520} = 0,375$ en bij opdracht c is de uitkomst van de deling $\frac{\text{hoogte}}{\text{afstand}} = \frac{15}{40} = 0,375$.
Het valt op dat de uitkomst van de deling telkens hetzelfde is.
e Nee, de helling van de fietsgeul zal niet veranderen als de trap uit een ander aantal treden bestaat.
f De hoek die de fietsgeul met de grond maakt is 21° .

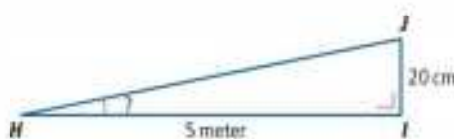
- 2 a De tangens van hoek K is $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$, de tangens van hoek P is $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ en de tangens van hoek X is $\frac{32}{48} = \frac{2}{3}$.
- b Het valt op dat de antwoorden gelijk zijn. Dat komt omdat de driehoeken gelijkvormig zijn en dan zijn de verhoudingen tussen de overeenkomstige zijden gelijk.
- c De hellingshoek is in elke driehoek 34° .
- 3 a Het hellingsgetal van de kabelbaan is $\frac{1400}{2000} = 0,7$.
- b $\tan 35^\circ = \frac{1400}{2000} = 0,7$
- c De rekenmachine geeft $\tan 35^\circ = 0,7002... \approx 0,7$.
- d De rekenmachine geeft $\tan^{-1} 0,7 = 34,9920...^\circ \approx 35^\circ$.

4 a



- b $\tan \angle H = \frac{7}{11}$
- c Ranita vindt $\angle H = 32^\circ$, Divya vindt $\angle H \approx 32^\circ$ en Jonny vindt $\angle H = 33^\circ$.
Ranita en Divya vinden de juiste hellingshoek.

5

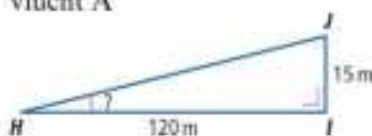


$$\tan \angle H = \frac{20}{500}$$

$$\angle H = 2^\circ$$

Ja, deze helling voldoet aan de wettelijke eisen, want de hellingshoek is kleiner dan 3° .

6 a vlucht A



$$\tan \angle H = \frac{15}{120}$$

$$\angle H = 7^\circ$$

vlucht B



$$\tan \angle H = \frac{375}{75}$$

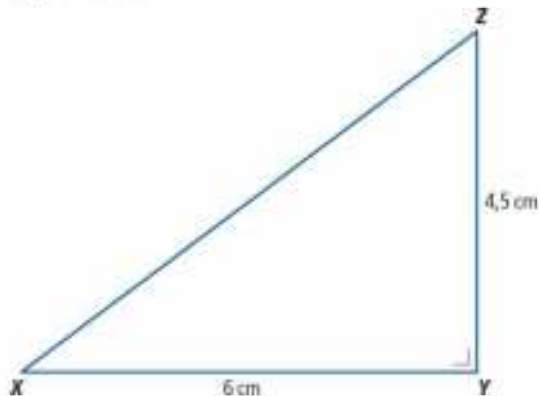
$$\angle H \approx 79^\circ$$

b	vlucht	hoogte in meters	afstand in meters	tangens	hellingshoek
	A	15	120	0,125	7°
	B	375	75	5	79°
	C	40	160	0,25	14°
	D	61,146...	200	0,305...	17°

- c Hoe groter de tangens, hoe groter de hellingshoek.

6 Goniometrie

- 02 a De tangens van hoek G is $\frac{1,5}{2}$.
 b Bij hoek P hoort de hoogte van 3 cm en de afstand van 4 cm.
 c De fout die Aron maakt is dat hij de afstand door de hoogte deelt in plaats van andersom.
 d De tangens van hoek P is $\frac{3}{4}$.
 e In driehoek GHI is de hellingshoek 37° .
 In driehoek PQR is de hellingshoek 37° .
 f Beide hoeken hebben hetzelfde hellingsgetal, omdat $\frac{1,5}{2} = \frac{3}{4}$.
 g Bijvoorbeeld.



- b $\tan \angle H = \frac{74}{2459}$
 c $\angle H \approx 2^\circ$
- U1 a Bij een helling van 17% is $\tan \angle H = \frac{17}{100}$, dus $\angle H \approx 10^\circ$.
 Een helling van 17% is steiler.
 b Bij een helling van 100% is $\tan \angle H = \frac{100}{100}$.
 Bij een helling van 100% hoort een hellingshoek van 45° .
 c Bij een verticale wand is de hellingshoek 90° .

6.2 Rekenen met de tangens

intro Met de jakobsstaf kun je de afstand en de hoogte aflezen. Als je daarna de afstand tot het gebouw opmeet, dan kun je met gelijkvormige driehoeken, of met de tangens, de hoogte van het gebouw berekenen.



- b $\tan \angle P = \frac{10}{24}$
 $\angle P \approx 23^\circ$

- 8 a Zijde AC is de overstaande rechthoekszijde van hoek B .
 b Zijde BC is de aanliggende rechthoekszijde van hoek B .
 c $\tan \angle B = \frac{31}{21}$, dus $\angle B = 56^\circ$
 d Je had $\angle B$ ook kunnen berekenen met de regel dat de som van de hoeken in een driehoek 180° is. Je vindt dan $\angle B = 180^\circ - 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$.

9 a $\tan \angle E = \frac{3}{7}$, dus $\angle E = 23^\circ$

b $\tan \angle K = \frac{5}{11}$
 $\angle K = 24^\circ$

zijde	kwadraat
$PR = 7$	49
$QR = \dots$	16 +
$PQ = \sqrt{65}$	65

De lengte van zijde QR is $\sqrt{16} = 4$.

$\tan \angle P = \frac{4}{7}$
 $\angle P = 30^\circ$

- 10 a Het is niet nodig dat haar schets heel precies op schaal is, omdat ze niet in haar schets gaat meten.

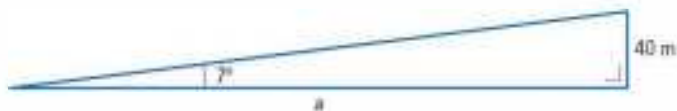
b $\tan 8^\circ = \frac{h}{3}$
 $h = 3 \times \tan 8^\circ$
 $h = 0,4 \text{ km}$

11 a $\tan 13^\circ = \frac{110}{a}$

$a = \frac{110}{\tan 13^\circ}$
 $a = 476 \text{ m}$

- b Het heeft geen zin om het aantal meters op twee decimalen af te ronden, want op een afstand van 476 meter spelen enkele centimeters geen rol van betekenis. Ook is het waarschijnlijk dat de hoogte van 110 meter en de hoek van 13° al zijn afgerond.

12



$\tan 7^\circ = \frac{40}{a}$

$a = \frac{40}{\tan 7^\circ}$

$a = 326 \text{ m}$

De afstand van het schip tot de vuurtoren is ongeveer 326 meter.

- 13 a Dat is niet goed, want $\angle C$ is geen rechte hoek, dus zijn de zijden BC en AC geen rechthoekszijden van $\angle A$.

b $\tan \angle A = \frac{8}{6}$ $\tan \angle B = \frac{8}{15}$
 $\angle A = 53^\circ$ $\angle B = 28^\circ$

c $\angle C = 180^\circ - 53^\circ - 28^\circ = 99^\circ$

6 Goniometrie

$$\text{d } \tan \angle C_1 = \frac{6}{8}$$

$$\angle C_1 \approx 37^\circ$$

$$\tan \angle C_2 = \frac{15}{8}$$

$$\angle C_2 \approx 62^\circ$$

$$14 \text{ a } \tan 35^\circ = \frac{RS}{6}$$

$$RS = 6 \times \tan 35^\circ$$

$$RS = 4,2$$

$$\text{b } \tan 39^\circ = \frac{QS}{4,2012 \dots}$$

$$QS = 4,2012 \dots \times \tan 39^\circ$$

$$QS = 3,4$$

$$\text{c } PQ = PS + QS$$

$$PQ = 6 + 3,402 \dots \approx 9,4$$

09 a Zijde FH is de aanliggende rechthoekszijde van hoek F .

$$\text{b } \tan \angle F = \frac{2}{3}$$

$$\text{c } \angle F \approx 22^\circ$$

d Zijde KL is de overstaande rechthoekszijde van hoek M . En zijde KM is de aanliggende rechthoekszijde van hoek M .

$$\text{e } \tan \angle M = \frac{4,5}{4}, \text{ dus } \angle M \approx 48^\circ$$

f Je kunt hoek Q nog niet meteen berekenen, omdat je de lengte van de overstaande rechthoekszijde van hoek Q niet weet.

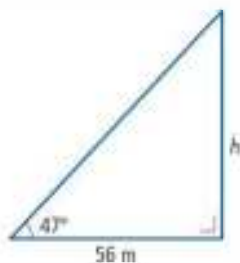
zijde	kwadraat
$QR = 6$	36
$PR = \dots$	$6,25 +$
$PQ = 6,5$	42,25

De lengte van zijde PR is $\sqrt{6,25} = 2,5$.

$$\text{h } \tan \angle Q = \frac{2,5}{6}$$

$$\angle Q \approx 23^\circ$$

012 a



$$\text{b } \tan 47^\circ = \frac{h}{56}$$

$$\text{c } h = 56 \times \tan 47^\circ$$

$$h \approx 60 \text{ m}$$

De kerktoeren is ongeveer 60 meter hoog.

$$\text{U2 } \tan 25^\circ = \frac{HK}{15}$$

$$HK = 15 \times \tan 25^\circ$$

$$HK \approx 7$$

$$HJ = 2 \times HK$$

$$HJ = 2 \times 6,9946 \dots \approx 14$$

$$\tan \angle I_{23} = \frac{14}{15}$$

$$\angle I_{23} \approx 43^\circ$$

$$GH = 2 \times HJ$$

$$GH = 2 \times 13,9892 \dots \approx 28$$

$$\tan \angle I_{123} = \frac{28}{15}$$

$$\angle I_{123} \approx 62^\circ$$

$$\angle I_1 = \angle I_{123} - \angle I_{23}$$

$$\angle I_1 = 61,821 \dots^\circ - 43,025 \dots^\circ \approx 19^\circ$$

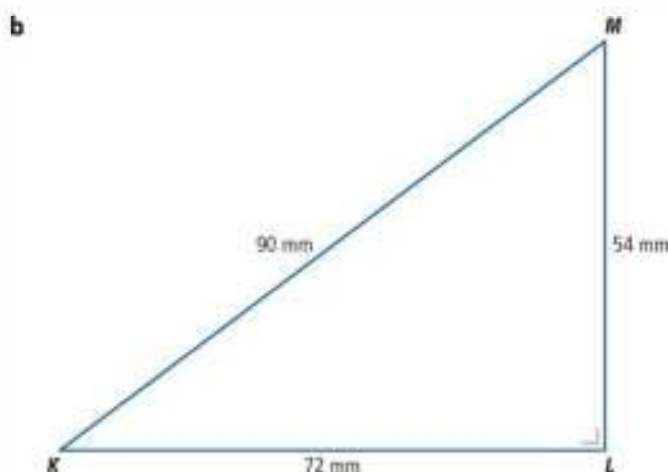
6.3 Sinus en cosinus

intro De fout die hij maakt, is dat hij denkt dat de 1385 meter de horizontale afstand is, maar dat is de langste zijde van de driehoek.

Hij kan de hellingshoek berekenen door eerst met de stelling van Pythagoras de horizontale afstand te berekenen.

$$15a \quad \frac{BC}{AB} = \frac{18}{24} = 0,75 \quad \frac{BC}{AC} = \frac{18}{30} = 0,6 \quad \frac{AB}{AC} = \frac{24}{30} = 0,8$$

$$\frac{EF}{DE} = \frac{36}{48} = 0,75 \quad \frac{EF}{DF} = \frac{36}{60} = 0,6 \quad \frac{DE}{DF} = \frac{48}{60} = 0,8$$



$$c \quad \frac{LM}{KL} = \frac{54}{72} = 0,75 \quad \frac{LM}{KM} = \frac{54}{90} = 0,6 \quad \frac{KL}{KM} = \frac{72}{90} = 0,8$$

d Dat komt omdat bij gelijkvormige driehoeken de overeenkomstige zijden met dezelfde factor vermenigvuldigd zijn.

e Bij de delingen $\frac{BC}{AB}$, $\frac{EF}{DE}$ en $\frac{LM}{KL}$ krijg je de tangens als uitkomst.

$$16a \quad \tan \angle P = \frac{5}{12} \quad \sin \angle P = \frac{5}{13} \quad \cos \angle P = \frac{12}{13}$$

b $\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = 22,6198\dots^\circ$, $\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = 22,6198\dots^\circ$ en $\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = 22,6198\dots^\circ$ en je vindt steeds dezelfde hoekgrootte $\angle P = 23^\circ$.

c Je kunt bij het berekenen van hoek S in $\triangle STU$ het best de sinus gebruiken, omdat de overstaande rechthoekszijde van hoek S en de langste zijde gegeven zijn.

$$d \quad \sin \angle S = \frac{8}{17} \\ \angle S = 28^\circ$$

$$17 \quad \sin \angle L = \frac{4}{7} \\ \angle L = 35^\circ \\ \tan \angle P = \frac{10}{12} \\ \angle P = 40^\circ \\ \cos \angle U = \frac{5}{7} \\ \angle U = 44^\circ \\ \cos \angle Y = \frac{9}{11} \\ \angle Y = 35^\circ$$

6 Goniometrie

18 a $\sin \angle C_1 = \frac{6}{10}$
 $\angle C_1 = 37^\circ$

zijde	kwadraat
$AD = 6$	36
$CD = \dots$	64 +
$AC = 10$	100

$$CD = \sqrt{64} = 8$$

$$\cos \angle C_2 = \frac{8}{15}$$

$$\angle C_2 = 58^\circ$$

- c Nee, driehoek ABC is geen rechthoekige driehoek, want
 $\angle C_{12} = 36,869\dots^\circ + 57,769\dots^\circ = 95^\circ$.

19 a $\angle E_1 = \angle AEB$ of $\angle E_1 = \angle BEA$, $\angle E_2 = \angle BEC$ of $\angle E_2 = \angle CEB$,
 $\angle E_3 = \angle CED$ of $\angle E_3 = \angle DEC$, $\angle C_1 = \angle BCE$ of $\angle C_1 = \angle ECB$ en
 $\angle C_2 = \angle DCE$ of $\angle C_2 = \angle ECD$

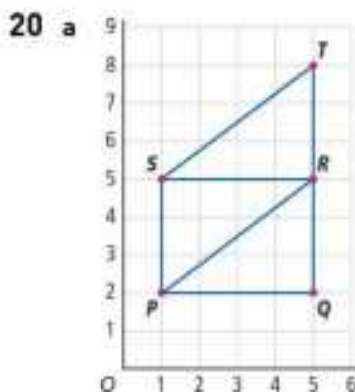
b $\cos \angle ABE = \frac{12}{19}$
 $\angle ABE = 51^\circ$

c $\angle BEA = 180^\circ - 90^\circ - 50,833\dots^\circ = 39^\circ$

d $\tan \angle BCE = \frac{19}{9}$
 $\angle BCE = 65^\circ$

e $\tan \angle ECD = \frac{19}{9}$
 $\angle ECD = 65^\circ$

- f Vierhoek $BCDE$ is een vlieger, want $BC = CD = 9$ en $BE = DE = 19$.



b $\tan \angle PRQ = \frac{4}{3}$
 $\angle PRQ = 53^\circ$

- c Omdat de driehoeken PQR en RTS gelijkvormig zijn, geldt $\angle RTS = \angle PRQ$,
dus $\angle RTS = 53^\circ$.

- 017 a Zijde DF is de langste zijde van $\triangle DEF$.
b Zijde DE is de overstaande rechthoekszijde van hoek F .
c Je kunt hoek F met de sinus berekenen.
d $\sin \angle F = \frac{7}{28}$
 $\angle F = 14^\circ$

18 a $\sin \angle Q_2 = \frac{54}{90}$
 $\angle Q_2 \approx 37^\circ$

zijde	kwadraat
$PS = 54$	2916
$QS = \dots$	$\frac{5184}{+}$
$PQ = 90$	8100

De lengte van lijnstuk QS is $\sqrt{5184} = 72$.

c $\cos \angle Q_1 = \frac{72}{100}$
 $\angle Q_1 \approx 44^\circ$

d $\angle Q_{12} = 36,869\dots^\circ + 43,945\dots^\circ = 81^\circ$

Nee, Magdalena zal niet concluderen dat driehoek PQR een rechthoekige driehoek is, want dan moest gelden dat $\angle Q_{12} = 90^\circ$.

13 a $\sin 45^\circ = \frac{LM}{\sqrt{32}}$ $\cos 45^\circ = \frac{MN}{\sqrt{32}}$
 $LM = \sqrt{32} \times \sin 45^\circ$ $MN = \sqrt{32} \times \cos 45^\circ$
 $LM = 4$ $MN = 4$

$\tan 30^\circ = \frac{KN}{4}$

$KN = 4 \times \tan 30^\circ$

$KN \approx 2,3$

Kies punt O zo dat $LMNO$ een vierkant wordt.

Dan is $KO = NO - KO$, dus $KO = 4 - 2,309\dots = 1,7$.

zijde	kwadraat
$LO = 4$	16
$KO = 1,69\dots$	$\frac{2,858\dots}{+}$
$KL = \dots$	18,858...

De lengte van lijnstuk KL is $\sqrt{18,858\dots} \approx 4,3$.

b De omtrek van vierhoek $KLMN$ is $4 + 4 + 2,309\dots + 4,342\dots \approx 14,7$.

6.4 Rekenen in driehoeken

intro De landmeter kan de afstand tussen de bakens in de punten K en L berekenen door een hulplijn vanuit punt M naar het midden van zijde KL te tekenen. Hij krijgt dan twee rechthoekige driehoeken.

21 a Zijde AC is de langste zijde.

b De lengte van de aanliggende rechthoekszijde van hoek A is gegeven.

c Het is niet handig om $\sin 27^\circ$ of $\tan 27^\circ$ te gebruiken, omdat je daarvoor de lengte van de overstaande rechthoekszijde van hoek A nodig hebt en die is niet gegeven.

d $\cos 27^\circ = \frac{8}{AC}$

e $AC = \frac{8}{\cos 27^\circ}$
 $AC \approx 9,0$

tekening 3

$$\angle Q = 180^\circ - 48^\circ - 59^\circ = 73^\circ$$

$$\sin 73^\circ = \frac{RZ}{13}$$

$$RZ = 13 \times \sin 73^\circ$$

$$RZ \approx 12,4$$

$$\sin 48^\circ = \frac{12,431\dots}{PR}$$

$$PR = \frac{12,431\dots}{\sin 48^\circ}$$

$$PR \approx 16,7$$

- 25** Teken de hulplijn door de top van de berg naar punt D op zijde AB .

$$\tan 40^\circ = \frac{1350}{AD}$$

$$AD = \frac{1350}{\tan 40^\circ}$$

$$AD \approx 1609 \text{ m}$$

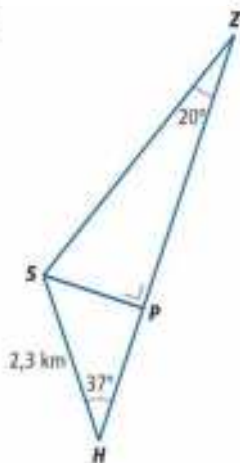
$$\tan 22^\circ = \frac{1350}{BD}$$

$$BD = \frac{1350}{\tan 22^\circ}$$

$$BD \approx 3341 \text{ m}$$

De tunnel wordt ongeveer $1609 + 3341 = 4950$ meter lang.

26 a



b $\cos 37^\circ = \frac{HP}{2,3}$

$$HP = 2,3 \times \cos 37^\circ$$

$$HP \approx 1,84 \text{ km}$$

$$\sin 37^\circ = \frac{SP}{2,3}$$

$$SP = 2,3 \times \sin 37^\circ$$

$$SP \approx 1,38 \text{ km}$$

$$\tan 20^\circ = \frac{1,3841\dots}{PZ}$$

$$PZ = \frac{1,3841\dots}{\tan 20^\circ}$$

$$PZ \approx 3,80 \text{ km}$$

$$HZ = HP + PZ$$

$$HZ = 1,8368\dots + 3,8029\dots \approx 5,64 \text{ km}$$

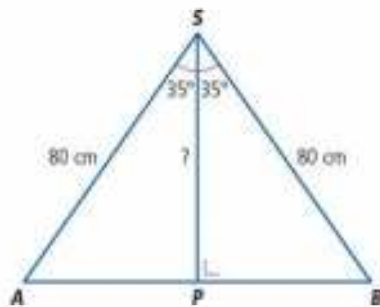
De afstand tussen de kerktoren van Hattem en de kerktoren van Zwolle is ongeveer 5,6 km.

6 Goniometrie

- 022 a Zijde AB is de overstaande rechthoekszijde van hoek C .
 b Je moet de sinus gebruiken om de lengte van zijde BC te berekenen.
 c $\sin 25^\circ = \frac{10}{BC}$
 $BC = \frac{10}{\sin 25^\circ}$
 $BC \approx 23,7$
 d Je kunt het best de tangens gebruiken, omdat de aanliggende rechthoekszijde van hoek D gegeven is en je de overstaande rechthoekszijde van hoek D moet berekenen.
 e $\tan 40^\circ = \frac{EF}{24}$
 $EF = 24 \times \tan 40^\circ$
 $EF \approx 20,1$

- 024 a René kan in tekening 1 de lengte van zijde GH niet meteen berekenen, omdat $\triangle FGH$ geen rechte hoek heeft.
 b $\sin 51^\circ = \frac{HJ}{9}$
 $HJ = 9 \times \sin 51^\circ$
 $HJ \approx 7,0$
 c $\angle FGH = 180^\circ - 51^\circ - 76^\circ = 53^\circ$
 d $\sin 53^\circ = \frac{6,994...}{GH}$
 $GH = \frac{6,994...}{\sin 53^\circ}$
 $GH \approx 8,8$

U4 a



$$\cos 35^\circ = \frac{PS}{80}$$

$$PS = 80 \times \cos 35^\circ$$

$$PS \approx 65,5 \text{ cm}$$

Omdat $AS = \frac{80}{120} \times AD$, oftewel $AS = \frac{2}{3} \times AD$, is de hoogte PS ook $\frac{2}{3}$ deel van de hoogte van de strijkplank.

De hoogte van de strijkplank is $1\frac{1}{2} \times 65,532... \approx 98,3 \text{ cm}$.

b $\sin 35^\circ = \frac{AP}{80}$

$$AP = 80 \times \sin 35^\circ$$

$$AP \approx 45,9 \text{ cm}$$

$$AB = 2 \times AP$$

$$AB = 2 \times 45,886... \approx 91,8$$

De poten AD en BC staan op de grond ongeveer 91,8 cm uit elkaar.

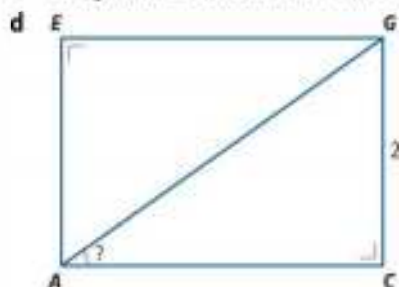
6.5 Hoeken in ruimtefiguren

intro Als je het klimrek hoger maakt, dan wordt de hoek tussen de palen in de top kleiner.

27 a $\angle BAE = 90^\circ$, $\angle BAD = 90^\circ$ en $\angle DAE = 90^\circ$

b $\angle CAE = 90^\circ$

c Hulpvlak $ACGE$ is een rechthoek.

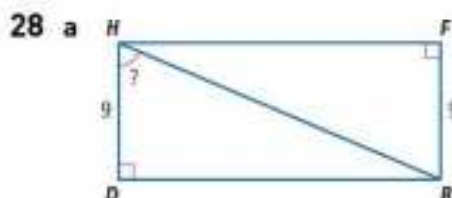


e Ja, driehoek ACG is een rechthoekige driehoek, want $\angle ACG = 90^\circ$.

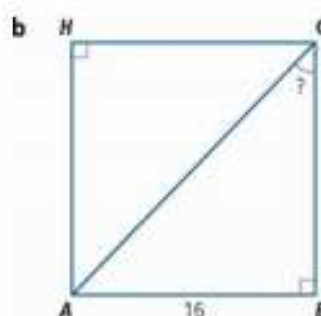
f Je moet van de rechthoekige driehoek ACG twee zijden weten. Alleen de lengte van zijde CG is bekend.

g

zijde	kwadraat
$AB = 2$	4
$BC = 2$	4 +
$AC = \dots$	8
$AC = \sqrt{8}$	
$\tan \angle CAG = \frac{2}{\sqrt{8}}$	
$\angle CAG \approx 35^\circ$	



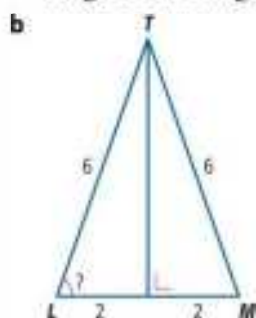
zijde	kwadraat
$AB = 16$	256
$AD = 14$	196 +
$DB = \dots$	452
$DB = \sqrt{452}$	
$\tan \angle BHD = \frac{\sqrt{452}}{9}$	
$\angle BHD \approx 67^\circ$	



zijde	kwadraat
$BC = 14$	196
$CG = 9$	81 +
$BG = \dots$	277
$BG = \sqrt{277}$	
$\tan \angle AGB = \frac{16}{\sqrt{277}}$	
$\angle AGB \approx 44^\circ$	

6 Goniometrie

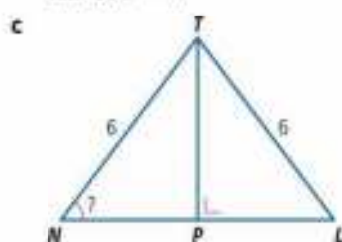
- 29 a Driehoek KLT is een gelijkzijdige driehoek, want de zijden hebben alle drie lengte 6. In een gelijkzijdige driehoek zijn de hoeken 60° , dus $\angle TKL = 60^\circ$.



Omdat driehoek LMT gelijkbenig is, verdeelt de hoogtelijn uit T de zijde LM in twee even grote stukken.

$$\cos \angle TLM = \frac{2}{6}$$

$$\angle TLM = 71^\circ$$



- d Je kunt nog niet met de sinus, de cosinus of de tangens in $\triangle NLT$ rekenen, omdat $\triangle NLT$ geen rechte hoek heeft.

- e Zie de tekening bij opdracht 29c.

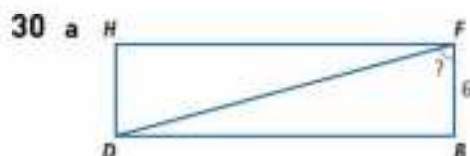
zijde	kwadraat
$KL = 6$	36
$KN = 4$	<u>16</u> +
$LN = \dots$	52

$$LN = \sqrt{52}$$

$$NP = \frac{1}{2}\sqrt{52}$$

$$\cos \angle LNT = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{52}}{6}$$

$$\angle LNT = 53^\circ$$

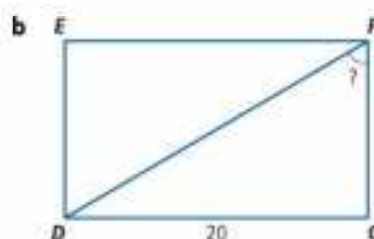


zijde	kwadraat
$AB = 20$	400
$AD = 10$	<u>100</u> +
$BD = \dots$	500

$$BD = \sqrt{500}$$

$$\tan \angle DFB = \frac{\sqrt{500}}{6}$$

$$\angle DFB \approx 75^\circ$$

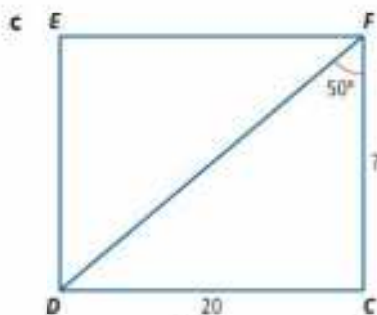


zijde	kwadraat
$BC = 10$	100
$BF = 6$	<u>36</u> +
$CF = \dots$	136

$$CF = \sqrt{136}$$

$$\tan \angle DFC = \frac{20}{\sqrt{136}}$$

$$\angle DFC \approx 60^\circ$$



$$\tan 50^\circ = \frac{20}{CF}$$

$$CF = \frac{20}{\tan 50^\circ}$$

$$CF \approx 16,8$$

zijde	kwadraat
$BC = 10$	100
$BF = \dots$	$\underline{181,635\dots} +$
$CF = 16,781\dots$	281,635...

$$BF = \sqrt{181,635\dots} \approx 13,5$$

Als $\angle DFC = 50^\circ$, dan is $h = 13,5$.

31 a



$$\tan 76^\circ = \frac{h}{2,5}$$

$$b = 2,5 \times \tan 76^\circ$$

$$b \approx 10,03 \text{ m}$$

Het pleintje is dus ongeveer 10 meter breed.

b



$$\tan \angle B = \frac{15}{2,5}$$

$$\angle B \approx 81^\circ$$

De hoek die snoer 1 met de boom maakt, is ongeveer 81° .

c

zijde	kwadraat
15	225
10	$\underline{100} +$
...	325

De diagonaal van het pleintje is $\sqrt{325}$ meter lang.



$$\tan \angle B = \frac{\sqrt{325}}{2,5}$$

$$\angle B \approx 82^\circ$$

De hoek die snoer 2 met de boom maakt, is ongeveer 82° .

6 Goniometrie

030 a In hulpvlak $DBFH$ ligt $\angle DBH$.



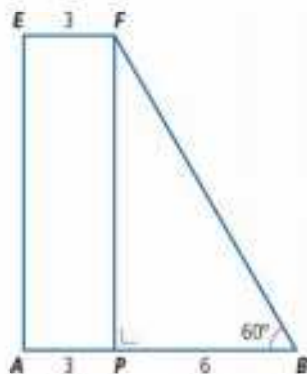
d $\tan \angle DBH = \frac{6}{\sqrt{245}}$
 $\angle DBH \approx 21^\circ$

c

zijde	kwadraat
$AD = 7$	49
$AB = 14$	$\frac{196}{+}$
$BD = \dots$	$\frac{245}{+}$

$BD = \sqrt{245}$

U5



$$\tan 60^\circ = \frac{FP}{6}$$

$$FP = 6 \times \tan 60^\circ$$

$$FP \approx 10,4$$

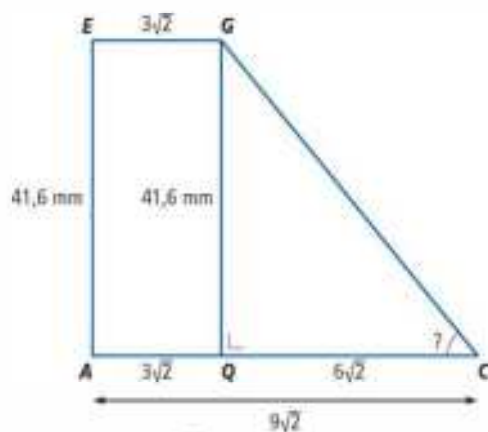
Dan is ook $AE \approx 10,4$.

zijde	kwadraat
$AB = 9$	81
$BC = 9$	$\frac{81}{+}$
$AC = \dots$	$\frac{162}{+}$

$$AC = \sqrt{162} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

zijde	kwadraat
$EF = 3$	9
$FG = 3$	$\frac{9}{+}$
$EG = \dots$	$\frac{18}{+}$

$$EG = \sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$



$$AQ = EG = 3\sqrt{2}$$

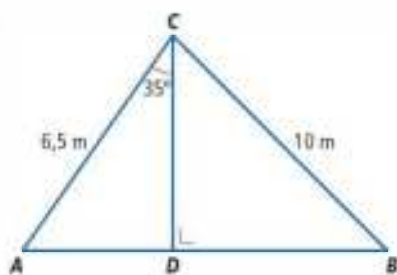
$$CQ = AC - AQ = 9\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\tan \angle ACG = \frac{10,392\dots}{6\sqrt{2}}$$

$$\angle ACG \approx 51^\circ$$

6.6 Gemengde opdrachten

32 a



$$\cos 35^\circ = \frac{CD}{6,5}$$

$$CD = 6,5 \times \cos 35^\circ$$

$$CD \approx 5,32 \text{ meter}$$

De mast is 5,32 meter of 532 cm lang.

b $\sin 35^\circ = \frac{AD}{6,5}$

$$AD = 6,5 \times \sin 35^\circ$$

$$AD \approx 3,73 \text{ meter}$$

zijde	kwadraat
$CD = 5,324\dots$	$28,350\dots$
$BD = \dots$	$\frac{71,649\dots}{+}$
$BC = 10$	100

$$BD = \sqrt{71,649\dots} \approx 8,46 \text{ meter}$$

$$AB = AD + BD$$

$$AB = 3,728\dots + 8,464\dots \approx 12,19 \text{ meter}$$

De lengte van het schip is ongeveer 12,19 meter of ongeveer 1219 cm.

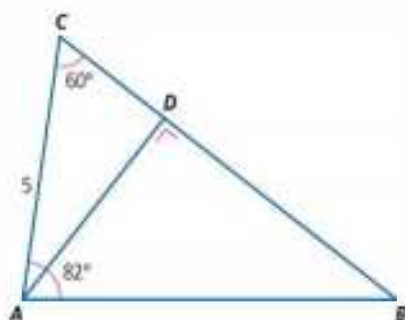
c $\cos \angle BCD = \frac{5,324\dots}{10}$

$$\angle BCD \approx 58^\circ$$

De hoek die de twee vlaggenlijnen met elkaar in de top van de mast maken is

$$35^\circ + 57,828\dots^\circ \approx 93^\circ$$

33 a



$$\angle B = 180^\circ - 82^\circ - 60^\circ = 38^\circ$$

Teken de hulplijn AD loodrecht op zijde BC .

$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{5}$$

$$AD = 5 \times \sin 60^\circ$$

$$AD \approx 4,3$$

$$\sin 38^\circ = \frac{4,330\dots}{AB}$$

$$AB = \frac{4,330\dots}{\sin 38^\circ}$$

$$AB \approx 7,0$$

6 Goniometrie

$$b \quad \cos 60^\circ = \frac{CD}{5}$$

$$CD = 5 \times \cos 60^\circ$$

$$CD = 5 \times \cos 60^\circ = 2,5$$

$$\cos 38^\circ = \frac{BD}{7,033...}$$

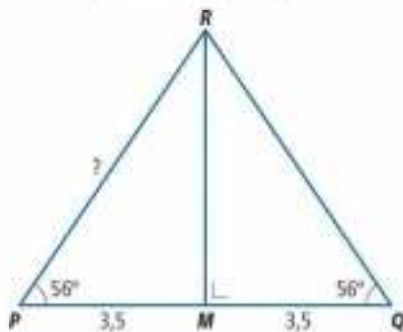
$$BD = 7,033... \times \cos 38^\circ$$

$$BD = 5,5$$

$$BC = BD + CD$$

$$BC = 5,542... + 2,5 = 8,0$$

c



$$\cos 56^\circ = \frac{3,5}{PR}$$

$$PR = \frac{3,5}{\cos 56^\circ}$$

$$PR \approx 6,3$$

- 34 a Als je van de richting zuidoost (CB) naar de richting west (BA) gaat, dan maak je een hoek van 45° .

b



$$\sin 45^\circ = \frac{CD}{15}$$

$$CD = 15 \times \sin 45^\circ$$

$$CD = 10,6 \text{ km}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{BD}{15}$$

$$BD = 15 \times \cos 45^\circ$$

$$BD = 10,6 \text{ km}$$

zijde	kwadraat
-------	----------

$CD = 10,606...$	112,5
------------------	-------

$AD = ...$	<u>2387,5</u> +
------------	-----------------

$AC = 50$	2500
-----------	------

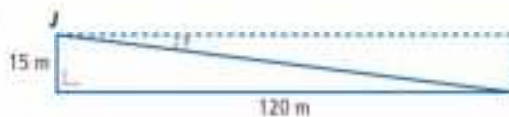
$$AD = \sqrt{2387,5} \approx 48,9 \text{ km}$$

$$AB = AD + BD$$

$$AB = 48,862... + 10,606... \approx 59,5 \text{ km}$$

Het motorjacht vaart $50 + 15 - 59,468... \approx 5,5 \text{ km}$ om.

- c De gemiddelde snelheid is $9 \times 1,852 = 16,668 \text{ km}$ per uur. Over de omweg van $5,531... \text{ km}$ doet het jacht dus $5,531 : 16,668 \approx 0,3318... \text{ uur}$. Het motorjacht doet er $0,3318... \times 60 \approx 20$ minuten langer over.

35 a

$$\tan \angle J = \frac{15}{120}$$

$$\angle J = 7^\circ$$

Jim moet onder een hoek van ongeveer 7° dalen wil hij precies op de linker oever van de rivier landen.

b

De rechter oever bevindt zich op $120 + 24 = 144$ meter van de voet van de rots.

$$\tan \angle J = \frac{15}{144}$$

$$\angle J = 6^\circ$$

Hij moet onder een hoek van ongeveer 6° dalen als hij precies op de rechter oever van de rivier wil landen.

$$\text{c } \tan 6^\circ = \frac{15}{a}$$

$$a = \frac{15}{\tan 6^\circ}$$

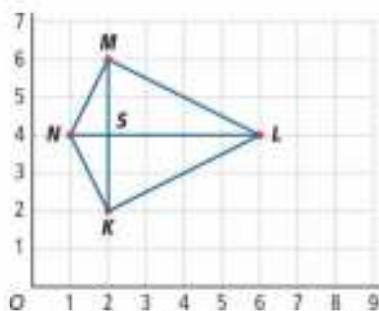
$$a = 142,7 \text{ meter}$$

Vanaf de rots komt Jim ongeveer 142,7 meter ver.

Dat is minder dan 144 meter, dus Jim maakt geen droge landing.

Of:

Bij een hoek van 7° of meer landt hij op de linker oever, maar bij een hoek van $5,946\dots^\circ$ of minder landt hij op de rechter oever. Bij een hoek van 6° landt hij dan in het water, dus Jim maakt geen droge landing.

36 a

$$\text{b } \tan \angle KLS = \frac{3}{4}$$

$$\angle KLS = 27^\circ$$

$$\angle KLM = 2 \times \angle KLS$$

$$\angle KLM = 2 \times 26,565\dots^\circ = 53^\circ$$

$$\text{c } \tan \angle NMS = \frac{1}{2}$$

$$\angle NMS = 27^\circ$$

$$\tan \angle LMS = \frac{4}{2}$$

$$\angle LMS = 63^\circ$$

$$\angle LMN = \angle NMS + \angle LMS$$

$$\angle LMN = 26,565\dots^\circ + 53,130\dots^\circ = 90^\circ$$

6 Goniometrie

37 a $\tan 89^\circ \approx 57,3$; $\tan 89,9^\circ \approx 573,0$ en $\tan 89,99^\circ \approx 5729,6$

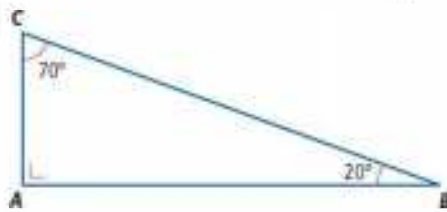
b



Als $\angle P = 90^\circ$, dan is er geen rechthoekige driehoek PQR met $\angle Q = 90^\circ$ te maken. Als hoek P bijna 90° is, dan is de overstaande rechthoekszijde van hoek P heel groot.

c Onno heeft geen gelijk, want $\frac{\tan 80^\circ}{2} = \frac{5,671...}{2} \approx 2,8$ en $\tan 40^\circ \approx 0,8$.

d

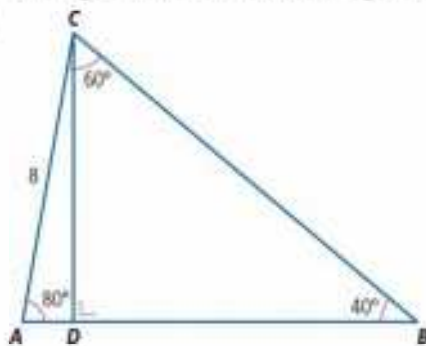


In de rechthoekige driehoek is $\angle B = 20^\circ$ en $\angle C = 70^\circ$.

Er geldt $\sin 20^\circ = \frac{AC}{BC}$ en $\cos 70^\circ = \frac{AC}{BC}$, dus $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$.

38 a $\angle B + \angle C = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$
 $\angle B = \frac{2}{3} \times 100^\circ = 40^\circ$ en $\angle C = \frac{3}{5} \times 100^\circ = 60^\circ$

b



$$\sin 80^\circ = \frac{CD}{8}$$

$$CD = 8 \times \sin 80^\circ$$

$$CD \approx 7,9$$

$$\cos 80^\circ = \frac{AD}{8}$$

$$AD = 8 \times \cos 80^\circ$$

$$AD \approx 1,4$$

$$AB = AD + BD$$

$$AB \approx 1,389... + 9,389... = 10,8$$

$$\text{De omtrek van driehoek } ABC \text{ is } 10,778... + 12,256... + 8 \approx 31,0.$$

$$\sin 40^\circ = \frac{7,878...}{BC}$$

$$BC = \frac{7,878...}{\sin 40^\circ}$$

$$BC \approx 12,3$$

$$\tan 40^\circ = \frac{7,878...}{BD}$$

$$BD = \frac{7,878...}{\tan 40^\circ}$$

$$BD \approx 9,4$$

$$39 \text{ a } \sin 32^\circ = \frac{2,25}{PR}$$

$$PR = \frac{2,25}{\sin 32^\circ}$$

$$PR = 4,25 \text{ m}$$

$$\text{b } \sin 32^\circ = \frac{AB}{2,25}$$

$$\cos 32^\circ = \frac{MN}{4,60}$$

$$AB = 2,25 \times \sin 32^\circ$$

$$MN = 4,60 \times \cos 32^\circ$$

$$AB \approx 1,19 \text{ m}$$

$$MN \approx 3,90 \text{ m}$$

- c Als je de lengte van BN deelt door de lengte van PR , dan krijg je het aantal parkeerhavens op 1 na, oftewel *maximaal aantal parkeerplaatsen* $= 1 + \frac{BN}{PR}$. Invullen van $BN = 100 - AB - MN$ geeft

$$\text{maximaal aantal parkeerplaatsen} = 1 + \frac{100 - AB - MN}{PR}$$

- d Invullen van $AB = 1,19$, $MN = 3,90$ en $PR = 4,25$ geeft

$$\text{maximaal aantal parkeerplaatsen} = 1 + \frac{100 - 1,19 - 3,90}{4,25} \approx 23,33.$$

Je kunt maximaal 23 parkeerhavens maken.

- e Bij langsparkeren hoort een hoek van 0° en bij haaksparkeren hoort een hoek van 90° .

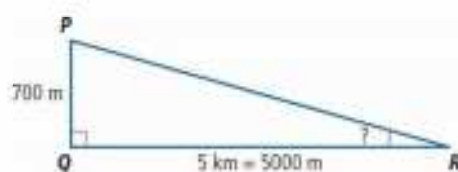
Samenvatting

- S1 a De tangens van $\angle Q$ is $\frac{5}{26}$.

$$\text{b } \tan 41^\circ = 0,869$$

$$\text{S2 } \sin \angle M = \frac{7}{25}, \cos \angle M = \frac{24}{25} \text{ en } \tan \angle M = \frac{7}{24}$$

S3

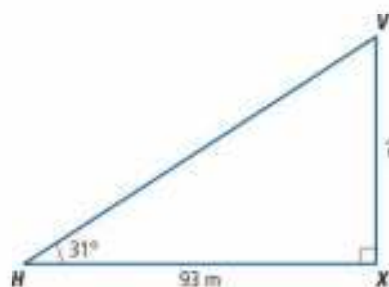


$$\tan \angle R = \frac{700}{5000}$$

$$\angle R \approx 8^\circ$$

De hellingshoek is 8° .

S4



$$\tan 31^\circ = \frac{VX}{93}$$

$$VX = 93 \times \tan 31^\circ$$

$$VX = 55,88 \text{ meter}$$

De vuurtoren is ongeveer 56 meter hoog.

6 Goniometrie

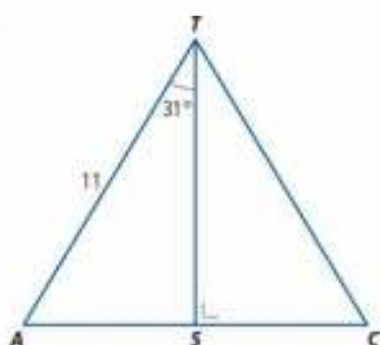
$$\begin{array}{ll} \text{S5} & \sin \angle L = \frac{15}{39} \\ & \angle L \approx 23^\circ \end{array} \quad \begin{array}{ll} & \cos \angle Z = \frac{14}{24} \\ & \angle Z \approx 54^\circ \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{S6} & \cos 34^\circ = \frac{6}{BC} \\ & BC = \frac{6}{\cos 34^\circ} \\ & BC \approx 7,2 \end{array} \quad \begin{array}{ll} & \tan 63^\circ = \frac{7}{EF} \\ & EF = \frac{7}{\tan 63^\circ} \\ & EF \approx 3,6 \end{array}$$

Neem punt J voor het midden van zijde GH .

$$\begin{array}{l} \cos 72^\circ = \frac{HJ}{8} \\ HJ = 8 \times \cos 72^\circ \\ HJ \approx 2,5 \\ GH = 2 \times HJ \\ GH = 2 \times 2,472... \approx 4,9 \end{array}$$

S7 a



zijde	kwadraat
$AB = 8$	64
$BC = 8$	64 +
$AC = \dots$	128

$$AC = \sqrt{128}$$

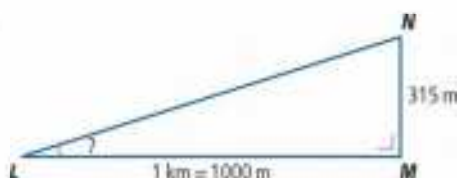
$$AS = \frac{1}{2} \sqrt{128}$$

$$\sin \angle ATS = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{128}}{11}$$

$$\angle ATS \approx 31^\circ$$

Test jezelf

T1 a

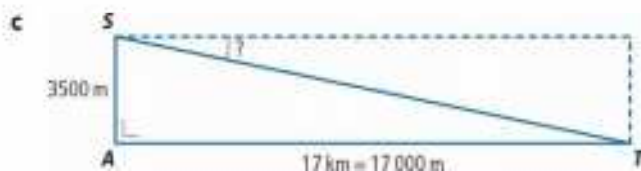


$$\begin{array}{l} \tan \angle L = \frac{315}{1000} \\ \angle L \approx 17^\circ \end{array}$$

Dit sportvliegtuig vertrekt onder een hellingshoek van ongeveer 17° .

b $\tan 18^\circ \approx 0,325$

Dit sportvliegtuig is na 1 km op een hoogte van ongeveer 325 meter.



$$\tan \angle S = \frac{3500}{17000}$$

$$\angle S = 12^\circ$$

De piloot moet onder een hoek van ongeveer 12° dalen om op Terlet te landen.

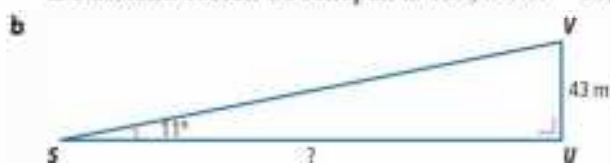
T2 a

$$\tan 74^\circ = \frac{a}{40} \qquad \tan 68^\circ = \frac{b}{40}$$

$$a = 40 \times \tan 74^\circ \qquad b = 40 \times \tan 68^\circ$$

$$a = 139 \text{ m} \qquad b = 99 \text{ m}$$

De afstand tussen de schepen is $139,496... - 99,003... = 40$ meter.



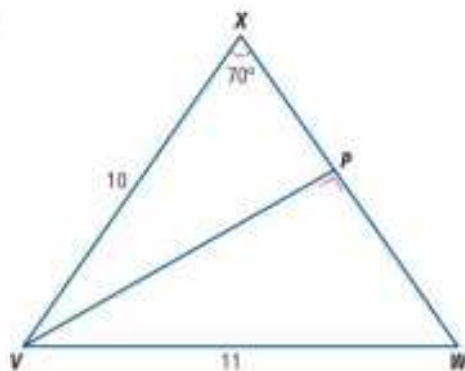
$$\tan 11^\circ = \frac{43}{SU}$$

$$SU = \frac{43}{\tan 11^\circ}$$

$$SU = 221,2 \text{ m}$$

De schipper is ongeveer 221 meter van deze vuurtoren af.

T3 a



b

$$\cos 70^\circ = \frac{PX}{10} \qquad \sin 70^\circ = \frac{VP}{10}$$

$$PX = 10 \times \cos 70^\circ \qquad VP = 10 \times \sin 70^\circ$$

$$PX \approx 3,4 \qquad VP \approx 9,4$$

zijde	kwadraat
PW = ...	32,697...
VP = 9,396...	88,302... +
VW = 11	121

$$PW = \sqrt{32,697...} \approx 5,7$$

$$WX = PW + PX$$

$$WX = 5,718... + 3,420... \approx 9,1$$

6 Goniometrie

- T4 a** De maximale lengte van de hijskraan is $3 + 8 = 11$ meter.
b Bij een minimale lengte is de hijskraan $2 + 8 = 10$ meter hoog.
c $\cos 22^\circ = \frac{PQ}{8}$
 $PQ = 8 \times \cos 22^\circ$
 $PQ = 7,42$ m
 Je vindt dan de lengte $3 + 7,417... = 10,42$ meter.
d $\sin 69^\circ = \frac{QR}{8}$
 $QR = 8 \times \sin 69^\circ$
 $QR = 7,47$ m
 Je vindt dan de hoogte $2 + 7,468... = 9,47$ meter.
e Bij een maximale doorrijhoogte is $RQ = 4,1 - 2 = 2,1$ meter.
 $\sin \angle P = \frac{2,1}{8}$
 $\angle P = 15^\circ$
 De hijskraan past nog net onder het viaduct door als $\angle P = 15^\circ$.

- T5 a** Het bovenvlak van de balk is een rechthoek, dus $\angle WVU = 90^\circ$.

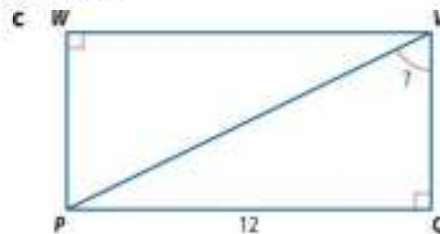


zijde	kwadraat
$PQ = 12$	144
$QR = 5$	25 +
$PR = \dots$	169
$PR = \sqrt{169} = 13$	

$$\tan \angle PVR = \frac{12}{3}$$

$$\angle PVR \approx 77^\circ$$

De hoek die lijnstuk PV met ribbe RV maakt is 77° .



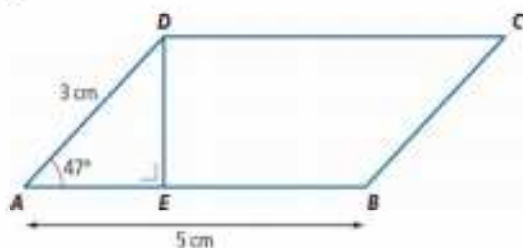
zijde	kwadraat
$QR = 5$	25
$RV = 3$	9 +
$QV = \dots$	34
$QV = \sqrt{34}$	

$$\tan \angle PVQ = \frac{12}{\sqrt{34}}$$

$$\angle PVQ \approx 64^\circ$$

- T6 a** $\angle GHF$ of $\angle FHG$
b $\sin \angle H_1 = \frac{55}{65}$
 $\angle H_1 = 58^\circ$
c Met $\angle EFH$ wordt $\angle F_2$ bedoeld.
d $\cos 42^\circ = \frac{EF}{65}$
 $EF = 65 \times \cos 42^\circ$
 $EF \approx 48,3$
e $\sin 42^\circ = \frac{EH}{65}$
 $EH = 65 \times \sin 42^\circ$
 $EH \approx 43,5$

T7 a b



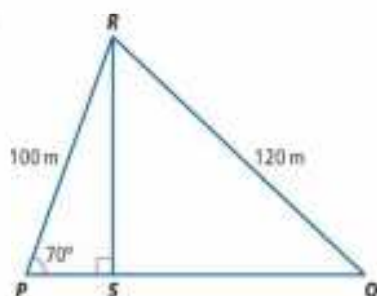
$$c \quad \sin 47^\circ = \frac{DE}{3}$$

$$DE = 3 \times \sin 47^\circ$$

$$DE \approx 2,2 \text{ cm}$$

d Dat zijn $\angle ADE$ of $\angle EDA$ en $\angle EDC$ of $\angle CDE$.

T8 a



$$\sin 70^\circ = \frac{RS}{100}$$

$$RS = 100 \times \sin 70^\circ$$

$$RS \approx 93,97 \text{ m}$$

De ballon zweeft ongeveer 94 meter boven de grond.

b $\angle PRS = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$

$$\cos \angle QRS = \frac{93,969...}{120}$$

$$\angle B \approx 38^\circ$$

De hoek die de twee kabels met elkaar maken is $20^\circ + 38,456...^\circ \approx 58^\circ$.

Extra oefening

E1 a De tangens die bij haar vlucht hoort is $\frac{60}{960} = \frac{1}{16}$.

$$b \quad \tan \angle K = \frac{1}{16}$$

$$\angle K \approx 4^\circ$$

De hellingshoek die bij haar vlucht hoort is ongeveer 4° .

c Raymond komt minder ver dan Katrien, dus de hellingshoek die bij de vlucht van Raymond hoort is groter.

$$E2 \quad a \quad \tan 60^\circ = \frac{9}{BD}$$

$$BD = \frac{9}{\tan 60^\circ}$$

$$BD \approx 5,2$$

De lengte van lijnstuk BD is ongeveer 5,2.

$$b \quad \tan 50^\circ = \frac{9}{AD}$$

$$AD = \frac{9}{\tan 50^\circ}$$

$$AD \approx 7,6$$

$$AB = AD + BD$$

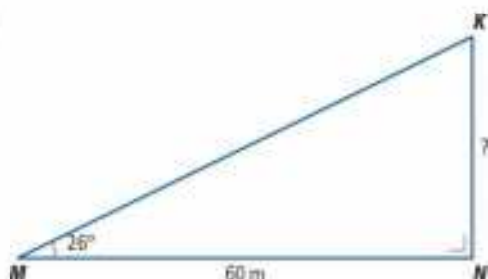
$$AB = 7,551... + 5,196... = 12,7$$

6 Goniometrie

E3

$\sin \angle A = \frac{3}{7}$	$\cos \angle J = \frac{6}{24}$
$\angle A \approx 25^\circ$	$\angle J \approx 76^\circ$
$\sin \angle D = \frac{8}{10}$	$\sin \angle M = \frac{3}{3,5}$
$\angle D = 30^\circ$	$\angle M \approx 59^\circ$
$\cos \angle G = \frac{1}{60}$	$\sin \angle O = \frac{3}{6}$
$\angle G \approx 89^\circ$	$\angle O = 30^\circ$

E4 a



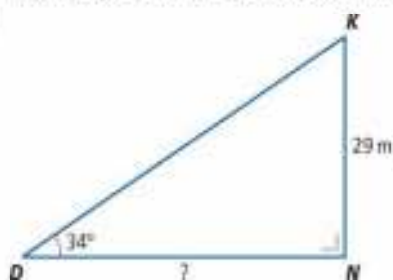
$$\tan 26^\circ = \frac{KN}{60}$$

$$KN = 60 \times \tan 26^\circ$$

$$KN \approx 29,26 \text{ m}$$

De hoogte van de kasteeltoren is ongeveer 29 meter.

b



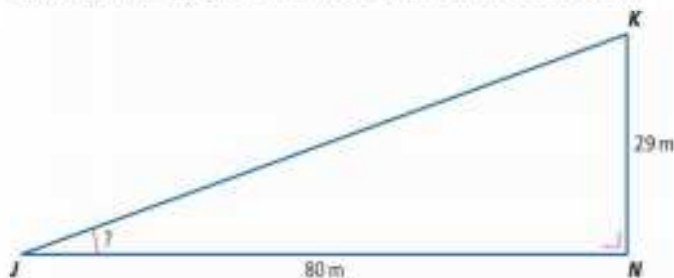
$$\tan 34^\circ = \frac{29,263...}{DN}$$

$$DN = \frac{29,263...}{\tan 34^\circ}$$

$$DN \approx 43,39 \text{ m}$$

Diana staat ongeveer 43 meter van de kasteeltoren af.

c

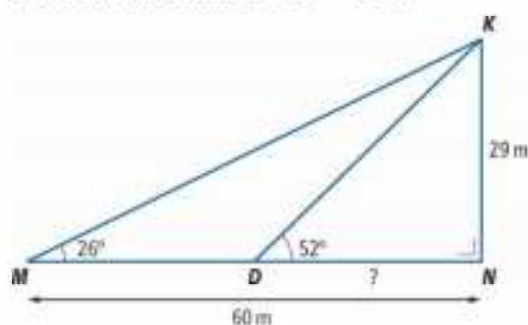


$$\tan \angle J = \frac{29,263...}{80}$$

$$\angle J \approx 20^\circ$$

Je ziet de kasteeltoren dan onder een hoek van ongeveer 20° .

- d Als de hoek van Diana twee keer zo groot is als de hoek van Myrthe, dan is de hoek van Diana $2 \times 26^\circ = 52^\circ$.



$$\tan 52^\circ = \frac{29,263...}{DN}$$

$$DN = \frac{29,263...}{\tan 52^\circ}$$

$$DN = 22,86 \text{ m}$$

Diana staat dan ongeveer 23 meter van de kasteeltoren af. Diana staat dan niet precies midden tussen Myrthe en de kasteeltoren in, want $2 \times 23 = 46$ meter en geen 60 meter.

E5 a $\cos \angle BAC = \frac{4}{\sqrt{160}}$

$$\angle BAC = 72^\circ$$

b $\angle BCA = 180^\circ - 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$

Of:

$$\sin \angle BCA = \frac{4}{\sqrt{160}}$$

$$\angle BCA = 18^\circ$$

zijde	kwadraat
$AB = 4$	16
$BC = \dots$	144 +
$AC = \sqrt{160}$	160

$$BC = \sqrt{144} = 12$$

$$BM = 12 : 2 = 6$$

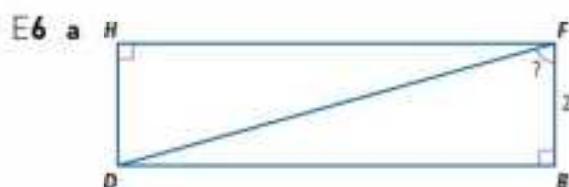
$$\tan \angle MAB = \frac{6}{4}$$

$$\angle MAB = 56^\circ$$

d $\angle MAC = \angle BAC - \angle MAB$

$$\angle MAC = 71,565...^\circ - 56,309...^\circ = 15^\circ$$

6 Goniometrie



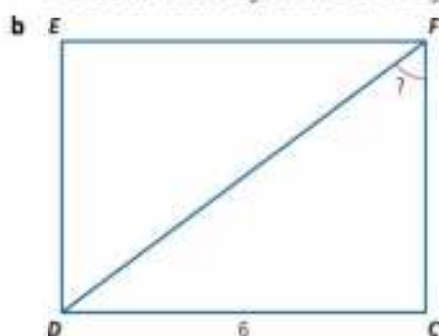
zijde	kwadraat
$AB = 6$	36
$AD = 4$	<u>16</u> +
$BD = \dots$	52

$$BD = \sqrt{52}$$

$$\tan \angle DFB = \frac{\sqrt{52}}{2}$$

$$\angle DFB = 74^\circ$$

De hoek tussen lijnstuk DF en zijde BF is ongeveer 74° .

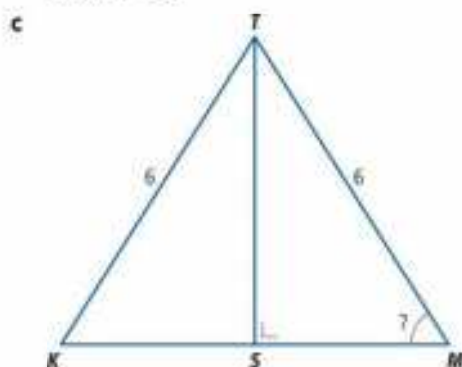


zijde	kwadraat
$BF = 2$	4
$BC = 4$	<u>16</u> +
$CF = \dots$	20

$$CF = \sqrt{20}$$

$$\tan \angle DFC = \frac{6}{\sqrt{20}}$$

$$\angle DFC = 53^\circ$$



zijde	kwadraat
$KL = 5$	25
$LM = 4$	<u>16</u> +
$KM = \dots$	41

$$KM = \sqrt{41}$$

$$MS = \frac{1}{2} \sqrt{41}$$

$$\cos \angle TMK = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{41}}{6}$$

$$\angle TMK \approx 58^\circ$$

7 Kwadratische functies

Voorkennis

V1 a Eerst herleiden.

$$x - y = 7$$

$$-y = -x + 7$$

$$y = x - 7$$

Dan gelijkstellen.

$$x - 7 = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x - 7 = 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x = 9\frac{1}{2}$$

$$x = 19$$

$$4y - 10 = 2x$$

$$4y = 2x + 10$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$$

b Invullen geeft $y = 19 - 7 = 12$.

c De oplossing van het stelsel vergelijkingen is $x = 19$ en $y = 12$.

d A Eerst herleiden.

$$y = 5 - x$$

$$2x + y = 7$$

$$y = -2x + 7$$

Dan gelijkstellen.

$$5 - x = -2x + 7$$

$$5 + x = 7$$

$$x = 2$$

Invullen geeft $y = 5 - 2 = 3$.

De oplossing van het stelsel vergelijkingen is $x = 2$ en $y = 3$.

C Eerst herleiden.

$$2y + x = 6$$

$$3y + 9 = 3x$$

$$2y = -x + 6$$

$$3y = 3x - 9$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$y = x - 3$$

Dan gelijkstellen.

$$-\frac{1}{2}x + 3 = x - 3$$

$$3 = 1\frac{1}{2}x - 3$$

$$1\frac{1}{2}x = 6$$

$$x = 4$$

Invullen geeft $y = -\frac{1}{2} \times 4 + 3 = 1$.

De oplossing van het stelsel

vergelijkingen is $x = 4$ en $y = 1$.

B Eerst herleiden.

$$2y - x = 12$$

$$30 + 5x = 4y$$

$$2y = x + 12$$

$$y = 1\frac{1}{4}x + 7\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 6$$

Dan gelijkstellen.

$$\frac{1}{2}x + 6 = 1\frac{1}{4}x + 7\frac{1}{2}$$

$$6 = \frac{3}{4}x + 7\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4}x = -1\frac{1}{2}$$

$$x = -2$$

Invullen geeft $y = \frac{1}{2} \times -2 + 6 = 5$.

De oplossing van het stelsel

vergelijkingen is $x = -2$ en $y = 5$.

D Eerst herleiden.

$$2x + 3y = 0$$

$$4y + 17 = 3x$$

$$3y = -2x$$

$$4y = 3x - 17$$

$$y = -\frac{2}{3}x$$

$$y = \frac{3}{4}x - 4\frac{1}{4}$$

Dan gelijkstellen.

$$-\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}x - 4\frac{1}{4}$$

$$-\frac{8}{12}x = \frac{9}{12}x - \frac{17}{4}$$

$$0 = \frac{17}{12}x - \frac{17}{4}$$

$$\frac{17}{12}x = \frac{17}{4}$$

$$x = 3$$

Invullen geeft $y = -\frac{2}{3} \times 3 = -2$.

De oplossing van het stelsel

vergelijkingen is $x = 3$ en $y = -2$.

V2 a $2x(x-3)=0$

$$2x=0 \text{ of } x-3=0$$

$$x=0 \text{ of } x=3$$

b $(2x+7)(x-6)=0$

$$2x+7=0 \text{ of } x-6=0$$

$$2x=-7 \text{ of } x=6$$

$$x=-3\frac{1}{2} \text{ of } x=6$$

c $(x+7)^2=0$

$$x+7=0$$

$$x=-7$$

d $2x^2+5x=0$

$$x(2x+5)=0$$

$$x=0 \text{ of } 2x+5=0$$

$$x=0 \text{ of } 2x=-5$$

$$x=0 \text{ of } x=-2\frac{1}{2}$$

e $x^2-6x+8=0$

$$(x-2)(x-4)=0$$

$$x-2=0 \text{ of } x-4=0$$

$$x=2 \text{ of } x=4$$

f $2x^2-10x+8=0$

$$x^2-5x+4=0$$

$$(x-1)(x-4)=0$$

$$x-1=0 \text{ of } x-4=0$$

$$x=1 \text{ of } x=4$$

g $3(2x-1)^2=75$

$$(2x-1)^2=25$$

$$2x-1=5 \text{ of } 2x-1=-5$$

$$2x=6 \text{ of } 2x=-4$$

$$x=3 \text{ of } x=-2$$

h $(2x+5)^2-5=31$

$$(2x+5)^2=36$$

$$2x+5=6 \text{ of } 2x+5=-6$$

$$2x=1 \text{ of } 2x=-11$$

$$x=\frac{1}{2} \text{ of } x=-5\frac{1}{2}$$

V3 a $y=x^2-6x+10$

$$y=(x-3)^2-9+10$$

$$y=(x-3)^2+1$$

b $y=x^2+10x-4$

$$y=(x+5)^2-25-4$$

$$y=(x+5)^2-29$$

c $y=x^2-4x-7$

$$y=(x-2)^2-4-7$$

$$y=(x-2)^2-11$$

d $y=x^2+12x+25$

$$y=(x+6)^2-36+25$$

$$y=(x+6)^2-11$$

e $y=x^2+2x+1$

$$y=(x+1)^2-1+1$$

$$y=(x+1)^2$$

f $y=x^2+4x-10$

$$y=(x+2)^2-4-10$$

$$y=(x+2)^2-14$$

V4 a $2x^2-9x+4=0$

$$D=(-9)^2-4 \times 2 \times 4=81-32=49$$

$$x=\frac{9+\sqrt{49}}{2 \times 2} \text{ of } x=\frac{9-\sqrt{49}}{2 \times 2}$$

$$x=\frac{9+7}{4}=4 \text{ of } x=\frac{9-7}{4}=\frac{1}{2}$$

b $3x^2-12x+3=0$

$$D=(-12)^2-4 \times 3 \times 3=144-36=108$$

$$x=\frac{12+\sqrt{108}}{2 \times 3} \text{ of } x=\frac{12-\sqrt{108}}{2 \times 3}$$

$$x=\frac{12+\sqrt{108}}{6} \text{ of } x=\frac{12-\sqrt{108}}{6}$$

c $3x^2+8x-16=0$

$$D=8^2-4 \times 3 \times -16=64+192=256$$

$$x=\frac{-8+\sqrt{256}}{2 \times 3} \text{ of } x=\frac{-8-\sqrt{256}}{2 \times 3}$$

$$x=\frac{-8+16}{6}=1\frac{1}{3} \text{ of } x=\frac{-8-16}{6}=-4$$

7 Kwadratische functies

d $4x^2 - 7x - 2 = 0$

$$D = (-7)^2 - 4 \times 4 \times -2 = 49 + 32 = 81$$

$$x = \frac{7 + \sqrt{81}}{2 \times 4} \text{ of } x = \frac{7 - \sqrt{81}}{2 \times 4}$$

$$x = \frac{7 + 9}{8} = 2 \text{ of } x = \frac{7 - 9}{8} = -\frac{1}{4}$$

e $2x^2 + 3x - 20 = 0$

$$D = 3^2 - 4 \times 2 \times -20 = 9 + 160 = 169$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{169}}{2 \times 2} \text{ of } x = \frac{-3 - \sqrt{169}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{-3 + 13}{4} = 2\frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{-3 - 13}{4} = -4$$

f $14x^2 + x - 3 = 0$

$$D = 1^2 - 4 \times 14 \times -3 = 1 + 168 = 169$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{169}}{2 \times 14} \text{ of } x = \frac{-1 - \sqrt{169}}{2 \times 14}$$

$$x = \frac{-1 + 13}{28} = \frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{-1 - 13}{28} = -\frac{1}{2}$$

V5 a De grafiek van f is een dalparabool, want $a > 0$.

En de grafiek van g is een dalparabool, want $a > 0$.

b De grafiek van f is breder dan de grafiek van g , want $a = 1$ ligt dichterbij 0 dan $a = 3$.

c De coördinaten van dat punt zijn $(0, -3)$.

V6 De grafieken bij de functies f en g zijn dalparabolen, want het getal voor x^2 is positief.

$f(0) = 0^2 + 0 + 2 = 2$ en $g(0) = 0^2 + 0 - 3 = -3$, dus de functie f hoort bij parabool 1 en de functie g hoort bij parabool 2.

De grafieken bij de functies h en k zijn bergparabolen, want het getal voor x^2 is negatief.

In het functievoorschrift van de functie h is $c = 0$, dus de parabool gaat door de oorsprong. De functie h hoort bij parabool 3.

In het functievoorschrift van de functie k is $b = 0$, dus de top van de parabool ligt op de y -as. De functie k hoort bij parabool 4.

7.1 De vorm $f(x) = a(x - s)(x - t)$

intro $-0,25(a - 5,3)(a + 5,3) = 0$

$$a - 5,3 = 0 \text{ of } a + 5,3 = 0$$

$$a = 5,3 \text{ of } a = -5,3$$

De weg is $2 \times 5,3 = 10,6$ meter breed.

- 1 a** Voor de snijpunten van de grafiek van f met de x -as geldt $f(x) = 0$.

$$(x+2)(x-4)=0$$

$x + 2 = 0$ or $x - 4 = 0$

$x = -2$ or $x = 4$

De grafiek van f snijdt de x -as in de punten $(-2, 0)$ en $(4, 0)$.

b $f(x) = (x + 2)(x - 4)$

$\times$	x	-4
x	x^2	$-4x$
$+2$	$+2x$	-8

$$f(x) = x^2 - 2x - 8$$

- c De grafiek van f is een dalparabool, want $a > 0$.

- d** De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, -8)$.

- 2 a** Voor de snijpunten van de grafiek van h met de x -as geldt $h(x) = 0$, oftewel

$$a(x+1)(x-3)=0.$$

Uit $x + 1 = 0$ volgt $x = -1$ en dat geeft de coördinaten $(-1, 0)$.

Uit $x - 3 = 0$ volgt $x = 3$ en dat geeft de coördinaten $(3, 0)$.

- b** Van grafiek 1 de coördinaten van de top (1, 2) invullen geeft

$2 = a(1 + 1)(1 - 3)$, oftewel $2 = -4a$, dus $a = -\frac{1}{2}$.

- c Van grafiek 2 de coördinaten van de top (1, 4) invullen geeft

$4 = a(1 + 1)(1 - 3)$, oftewel $4 = -4a$, dus $a = -1$.

Het functievoorschrift bij grafiek 2 is $h(x) = -(x + 1)(x - 3)$.

Van grafiek 3 de coördinaten van de top (1, -4) invullen geeft

$$-4 = a(1+1)(1-3), \text{ oftewel } -4 = -4a, \text{ dus } a = 1.$$

Het functievoorschrift bij grafiek 3 is $h(x) = (x + 1)(x - 3)$.

Van grafiek 4 de coördinaten van de top (1, -6) invullen geeft

$-6 = a(1 + 1)(1 - 3)$, oftewel $-6 = -4a$, dus $a = 1\frac{1}{2}$.

Het functievoorschrift bij grafiek 4 is $h(x) = 1\frac{1}{3}(x+1)(x-3)$.

- 3 a** De grafiek van f' is smaller dan de grafiek van g , want $a = 1$ ligt verder van 0 af dan $a = \frac{1}{2}$.

$$\mathbf{b} \quad (x+5)(x-4) = 0$$

$$\frac{1}{4}(x+5)(x-4)=0$$

$x + 5 = 0$ or $x - 4 = 0$

$x + 5 = 0$ or $x - 4 = 0$

$x = -5$ or $x = 4$

$x = -5$ or $x = 4$

Beide grafieken snijden de x -as in de punten $(-5, 0)$ en $(4, 0)$.

- 4 a** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(4, 0)$ en $(3, 0)$.

- b** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn $(7, 0)$ en $(-1\frac{1}{3}, 0)$.

- c De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de x -as zijn $(-3, 0)$ en $(-6, 0)$.

- d De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(-2, 0)$ en $(1, 0)$.

7 Kwadratische functies

- 5 a** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(1, 0)$ en $(-3, 0)$.
- b** De grafiek van f is een dalparabool, want $a > 0$.
- c** Invullen van $x = -1$ geeft $f(-1) = 0,5(-1 - 1)(-1 + 3) = -2$.
Grafiek 1 hoort bij de functie f .
- d** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn $(3, 0)$ en $(-1, 0)$. De grafiek van g is een bergparabool, want $a < 0$.
Invullen van $x = 1$ geeft $g(1) = -0,5(1 - 3)(1 + 1) = 2$.
De functie g hoort bij grafiek 2.
- De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de x -as zijn $(1, 0)$ en $(-3, 0)$. De grafiek van h is een dalparabool, want $a > 0$.
Invullen van $x = -1$ geeft $h(-1) = (-1 - 1)(-1 + 3) = -4$.
De functie h hoort bij grafiek 3.
- De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van i met de x -as zijn $(3, 0)$ en $(-1, 0)$. De grafiek van i is een dalparabool, want $a > 0$.
Invullen van $x = 1$ geeft $i(1) = (1 - 3)(1 + 1) = -4$.
De functie i hoort bij grafiek 4.

- 6 a** $s = -6$ en $t = 3$ (of andersom)
- b** De formule van de symmetrieas van de bijbehorende parabool is $x = (-6 + 3) : 2 = -1\frac{1}{2}$.
- c** Invullen van $x = -1\frac{1}{2}$ geeft $f(-1\frac{1}{2}) = 2(-1\frac{1}{2} + 6)(-1\frac{1}{2} - 3) = -40\frac{1}{2}$.
De coördinaten van de top van de parabool zijn $(-1\frac{1}{2}, -40\frac{1}{2})$.
- 7 a** De formule van de symmetrieas is $x = (2 + 8) : 2 = 5$.
Invullen van $x = 5$ geeft $f(5) = -3(5 - 2)(5 - 8) = 27$.
De coördinaten van de top van de bijbehorende grafiek zijn $(5, 27)$.
- b** De formule van de symmetrieas is $x = (-2 + 8) : 2 = 3$.
Invullen van $x = 3$ geeft $g(3) = 2(3 + 2)(3 - 8) = -50$.
De coördinaten van de top van de bijbehorende grafiek zijn $(3, -50)$.
- c** De formule van de symmetrieas is $x = (-3 + 9) : 2 = 3$.
Invullen van $x = 3$ geeft $h(3) = -1\frac{1}{2}(3 + 3)(3 - 9) = 54$.
De coördinaten van de top van de bijbehorende grafiek zijn $(3, 54)$.
- d** De formule van de symmetrieas is $x = (-6 + 7) : 2 = \frac{1}{2}$.
Invullen van $x = \frac{1}{2}$ geeft $i(\frac{1}{2}) = -4(\frac{1}{2} + 6)(\frac{1}{2} - 7) = 169$.
De coördinaten van de top van de bijbehorende grafiek zijn $(\frac{1}{2}, 169)$.

- 8 a** De coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as zijn $(-3, 0)$ en $(1, 0)$, dus $s = -3$ en $t = 1$ (of andersom).
- b** De grafiek is een bergparabool, dus geldt $a < 0$.
- c** De coördinaten van de top van de parabool zijn $(-1, 2)$.
- d** Invullen van $x = -1$ en $y = 2$ geeft $a(-1 + 3)(-1 - 1) = 2$, oftewel $-4a = 2$, dus $a = -\frac{1}{2}$. Ja, dat klopt met het antwoord bij opdracht b, want $-\frac{1}{2} < 0$.
- 9 a** $s = -3$ en $t = 2$ (of andersom)
- b** Invullen van $x = 6$ en $y = 72$ geeft $a(6 + 3)(6 - 2) = 72$, oftewel $36a = 72$, dus $a = 2$.
- c** De formule van de symmetrieas is $x = (-3 + 2) : 2 = -\frac{1}{2}$.
Invullen van $x = -\frac{1}{2}$ geeft $g(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2} + 3)(-\frac{1}{2} - 2) = -12\frac{1}{2}$.
De coördinaten van de top van de parabool zijn $(-\frac{1}{2}, -12\frac{1}{2})$.

- 04 a** De coördinaten van dit snijpunt kun je opmaken uit het functievoorschrift, omdat voor het snijpunt met de x -as geldt dat $y = 0$.
Dan moet gelden dat $2(x - 3)(x + 5) = 0$, dus $x - 3 = 0$ of $x + 5 = 0$, oftewel $x = 3$ of $x = -5$. De eerste oplossing levert dat de coördinaten van het rechter snijpunt $(3, 0)$ zijn.
- b** De tweede oplossing levert dat de coördinaten van het linker snijpunt $(-5, 0)$ zijn. Dat klopt met de grafiek van f .
- c** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn $(2, 0)$ en $(6, 0)$.
- d** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de x -as zijn $(2, 0)$ en $(-4, 0)$.
- e** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van i met de x -as zijn $(-1, 0)$ en $(-3, 0)$.
- f** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van j met de x -as zijn $(4, 0)$ en $(-8, 0)$.

- 07 a** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn $(-4, 0)$ en $(2, 0)$.
- b** Uit de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as volgt dat $s = -4$ en $t = 2$ (of andersom).
Het functievoorschrift is dus van de vorm $g(x) = a(x + 4)(x - 2)$.
Invullen van $x = -1$ en $y = -18$ geeft $a(-1 + 4)(-1 - 2) = -18$, oftewel $-9a = -18$, dus $a = 2$.
De getekende grafiek hoort dus bij de functie $g(x) = 2(x + 4)(x - 2)$.
- c** De symmetrieas ligt bij $x = (-4 + 2) : 2$, dus de formule van de symmetrieas is $x = -1$.
- d** Invullen van $x = -1$ geeft $g(-1) = 2(-1 + 4)(-1 - 2) = -18$.
De y -coördinaat van de top van de grafiek van g is -18 .

- U1** De formule van de symmetrieas is $x = (-6 + 4) : 2 = -1$.
Invullen van $x = -1$ en $y = 4$ geeft $a(-1 + 6)(-1 - 4) = 4$, oftewel $-25a = 4$, dus $a = -\frac{4}{25}$.

- U2 a** Bij $c = -1$ hoort de functie $f(x) = (x - 1)(x + 2)$.
De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(1, 0)$ en $(-2, 0)$. De formule van de symmetrieas is $x = (1 + -2) : 2 = -\frac{1}{2}$.
Invullen van $x = -\frac{1}{2}$ geeft $f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2} - 1)(-\frac{1}{2} + 2) = -2\frac{1}{4}$.
De coördinaten van de top van de bijbehorende parabool zijn $(-\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4})$.
- b** Bij de functie $f(x) = (x + c)(x - 2c)$ geldt voor de formule van de symmetrieas $x = (-c + 2c) : 2$, oftewel $x = c : 2$, dus $x = \frac{1}{2}c$.
Als de bijbehorende parabool de lijn $x = 2$ als symmetrieas heeft, dan moet gelden $\frac{1}{2}c = 2$, dus $c = 4$.
Invullen van $x = 2$ en $c = 4$ geeft $f(2) = (2 + 4)(2 - 8) = -36$.
De coördinaten van de top van de bijbehorende parabool zijn $(2, -36)$.

7.2 De vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$

- intro** De winst is het grootst als $-\frac{1}{4}(a - 40)^2 = 0$.
Marit kan maximaal 200 euro winst maken.

7 Kwadratische functies

- 10 a** De uitkomst van x^2 is positief of nul. De kleinste uitkomst van $x^2 + 1$ is dus 1.
De kleinste uitkomst krijg je door voor x het getal 0 in te vullen.
De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(0, 1)$.
- b** De uitkomst van x^2 is positief of nul, dus $-x^2$ is negatief of nul.
De grootste uitkomst van $-x^2 - 3$ is dus -3 .
De grootste uitkomst krijg je door voor x het getal 0 in te vullen.
De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(0, -3)$.

11 a $k(x) = (x + 2)^2 + 5$

$\times$	x	$+2$
x	x^2	$+2x$
$+2$	$+2x$	$+4$

$$k(x) = x^2 + 4x + 4 + 5$$

$$k(x) = x^2 + 4x + 9$$

- b** De grafiek van k is een dalparabool, omdat $a > 0$.
- c** De uitkomst van $(x + 2)^2$ is positief of nul, dus de grafiek van k is een dalparabool.
- d** De kleinste uitkomst krijg je als $x + 2 = 0$, dus als $x = -2$.
Invullen van $x = -2$ geeft $k(-2) = (-2 + 2)^2 + 5 = 0^2 + 5 = 5$.
De coördinaten van de top van de grafiek van k zijn $(-2, 5)$.
- e** De uitkomst van $-(x - 3)^2$ is negatief of nul, dus de grafiek van m is een bergparabool.
- f** De grootste uitkomst krijg je als $x - 3 = 0$, dus als $x = 3$.
Invullen van $x = 3$ geeft $m(3) = -(3 - 3)^2 + 4 = -0^2 + 4 = 4$.
De coördinaten van de top van de grafiek van m zijn $(3, 4)$.
- g** De uitkomst van $3(x + 1)^2$ is positief of nul, dus de grafiek van n is een dalparabool.
De kleinste uitkomst krijg je als $x + 1 = 0$, dus als $x = -1$.
Invullen van $x = -1$ geeft $n(-1) = 3(-1 + 1)^2 - 5 = 3 \times 0^2 - 5 = -5$.
De coördinaten van de top van de grafiek van n zijn $(-1, -5)$.
- 12 a** Uit het functievoorschrift van f kun je opmaken dat $p = -1$ en $q = 3$. De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(-1, 3)$. De grafiek van f is een dalparabool, want $a = \frac{1}{3}$.
- b** Uit het functievoorschrift van g kun je opmaken dat $p = 2$ en $q = 4$. De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(2, 4)$. De grafiek van g is een bergparabool, want $a = -2$.
- c** Uit het functievoorschrift van h kun je opmaken dat $p = -1$ en $q = 0$. De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(-1, 0)$. De grafiek van h is een dalparabool, want $a = 2$.
- d** Uit het functievoorschrift van k kun je opmaken dat $p = -1$ en $q = 3$. De coördinaten van de top van de grafiek van k zijn $(-1, 3)$. De grafiek van k is een bergparabool, want $a = -\frac{1}{4}$.
- e** Uit het functievoorschrift van l kun je opmaken dat $p = 2$ en $q = 4$. De coördinaten van de top van de grafiek van l zijn $(2, 4)$. De grafiek van l is een dalparabool, want $a = 1$.
- f** Uit het functievoorschrift van m kun je opmaken dat $p = 0$ en $q = 3$. De coördinaten van de top van de grafiek van m zijn $(0, 3)$. De grafiek van m is een bergparabool, want $a = -2$.

- 13 a De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(1, 2)$.

b $-\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2 = 0$

$$-\frac{1}{2}(x-1)^2 = -2$$

$$(x-1)^2 = 4$$

$$x-1 = 2 \text{ of } x-1 = -2$$

$$x = 3 \text{ of } x = -1$$

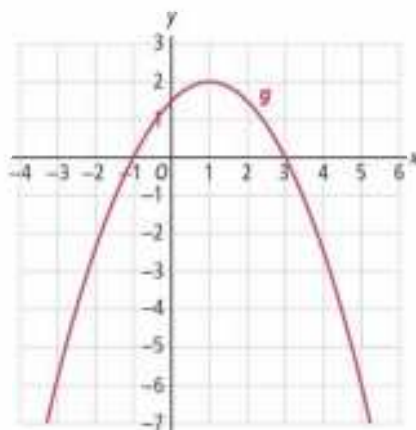
De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn $(3, 0)$ en $(-1, 0)$.

- c Invullen van $x = 0$ geeft $g(0) = -\frac{1}{2} \times (0-1)^2 + 2 = -\frac{1}{2} \times 1 + 2 = 1\frac{1}{2}$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as zijn $(0, 1\frac{1}{2})$.

d

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	-6	$-2\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	2	$1\frac{1}{2}$	0	$-2\frac{1}{2}$	-6



- 14 a Invullen van $x = 3$ geeft $f(3) = a \times (3-3)^2 + 2 = a \times 0 + 2 = 2$, dus voor elke waarde van a gaat de bijbehorende grafiek door het punt $(3, 2)$.

- b Grafiek 1 en grafiek 2 zijn dalparabolen, dus daarbij is $a > 0$.

Grafiek 1 is breder dan grafiek 2, dus de bij grafiek 1 horende waarde van a ligt dichterbij 0 dan de bij grafiek 2 horende waarde van a .

Bij grafiek 1 hoort $a = \frac{1}{2}$ en bij grafiek 2 hoort $a = 1$.

Grafiek 3 en grafiek 4 zijn bergparabolen, dus daarbij is $a < 0$.

Grafiek 3 is breder dan grafiek 4, dus de bij grafiek 3 horende waarde van a ligt dichterbij 0 dan de bij grafiek 4 horende waarde van a .

Bij grafiek 3 hoort $a = -\frac{1}{2}$ en bij grafiek 4 hoort $a = -1$.

- c Invullen van $x = 0$ en $y = 8$ geeft $a \times (0-3)^2 + 2 = 8$, oftewel $9a + 2 = 8$, dus $9a = 6$ en $a = \frac{2}{3}$.

- d Invullen van $x = 6$ en $y = 1$ geeft $a \times (6-3)^2 + 2 = 1$, oftewel $9a + 2 = 1$, dus $9a = -1$ en $a = -\frac{1}{9}$.

- 15 a De coördinaten van de top zijn $(-4, -3)$.

- b Invullen van $x = -2$ en $y = 9$ geeft $a \times (-2+4)^2 - 3 = 9$, oftewel $4a - 3 = 9$, dus $4a = 12$ en $a = 3$.

- c Invullen van $x = 0$ geeft $g(0) = 3 \times (0+4)^2 - 3 = 3 \times 16 - 3 = 45$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as zijn $(0, 45)$.

7 Kwadratische functies

d $3(x+4)^2 - 3 = 0$

$$3(x+4)^2 = 3$$

$$(x+4)^2 = 1$$

$$x+4 = 1 \text{ of } x+4 = -1$$

$$x = -3 \text{ of } x = -5$$

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn $(-3, 0)$ en $(-5, 0)$.

- 16 a** De grafiek bij de slinger is een dalparabool en de zaal is 10 meter breed, dus de top van de parabool ligt bij $a = 5$. Voor de top van de parabool moet gelden $(a-p)^2 = 0$, oftewel $(5-p)^2 = 0$, dus $p = 5$.

- b** De coördinaten van de top van de parabool zijn $(5, 4)$, dus het functievoorschrift is van de vorm $h(a) = b(a-5)^2 + 4$.

Invullen van $a = 0$ en $h = 6$ geeft $b \times (0-5)^2 + 4 = 6$, oftewel $25b + 4 = 6$, dus $25b = 2$ en $b = \frac{2}{25}$.

- c** Het laagste punt van deze slinger hangt 3 meter onder het plafond en het plafond is 5 meter hoog, dus $q = 5 - 3 = 2$.

Invullen van $a = 0$, $h = 5$ en $q = 2$ geeft $\frac{1}{12} \times (0-p)^2 + 2 = 5$, oftewel $\frac{1}{12}p^2 + 2 = 5$, dus $\frac{1}{12}p^2 = 3$ en $p^2 = 36$, dus $p = 6$ of $p = -6$.

Bij $p = -6$ zouden de coördinaten van de top van de grafiek bij de slinger $(-6, 2)$ zijn, maar dat kan niet, dus $p = 6$ en de coördinaten van de top van de grafiek zijn $(6, 2)$. De zaal is dan $2 \times 6 = 12$ meter lang.

- 012 a** De grafiek van f is een bergparabool, omdat $a < 0$.

- b** Voor de top van de grafiek van f geldt $x-p = 0$ en $x+2 = 0$, dus $-p = 2$ en $p = -2$.

- c** De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(-2, 6)$.

- d** Uit het functievoorschrift van g kun je opmaken dat $p = 4$ en $q = 1$. De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(4, 1)$. De grafiek van g is een dalparabool, want $a = 2$.

- e** Uit het functievoorschrift van h kun je opmaken dat $p = 5$ en $q = 9$. De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(5, 9)$. De grafiek van h is een bergparabool, want $a = -\frac{1}{3}$.

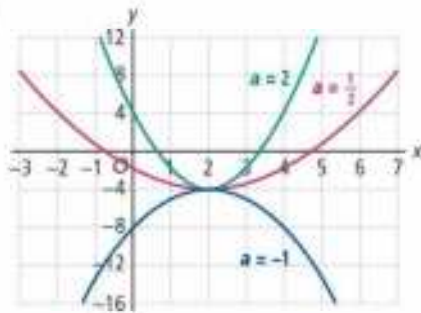
- f** Uit het functievoorschrift van i kun je opmaken dat $p = -3$ en $q = -4$. De coördinaten van de top van de grafiek van i zijn $(-3, -4)$. De grafiek van i is een bergparabool, want $a = -1$.

- g** Uit het functievoorschrift van j kun je opmaken dat $p = -2$ en $q = 0$. De coördinaten van de top van de grafiek van j zijn $(-2, 0)$. De grafiek van j is een bergparabool, want $a = -\frac{1}{2}$.

- h** Uit het functievoorschrift van k kun je opmaken dat $p = -1$ en $q = 9$. De coördinaten van de top van de grafiek van k zijn $(-1, 9)$. De grafiek van k is een dalparabool, want $a = 1$.

- i** Uit het functievoorschrift van l kun je opmaken dat $p = 0$ en $q = -6$. De coördinaten van de top van de grafiek van l zijn $(0, -6)$. De grafiek van l is een dalparabool, want $a = 7$.

014 a



- b De coördinaten van de top van alle drie de grafieken zijn $(2, -4)$.
- c Je kunt de bijbehorende waarde van a berekenen door de vergelijking $a \times (0 - 2)^2 - 4 = 6$ op te lossen.
- d $a \times (0 - 2)^2 - 4 = 6$
 $4a - 4 = 6$
 $4a = 10$
 $a = 2\frac{1}{2}$
 Het bijbehorende functievoorschrift is $f(x) = 2\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 4$.

U3 De coördinaten van de top van de bijbehorende grafiek zijn $(a, 2a - 1)$.
 Invullen in de vergelijking van de lijn $y = x$ geeft $2a - 1 = a$, oftewel $a - 1 = 0$, dus $a = 1$.

- U4 a Invullen van $x = 0$ geeft $g(0) = (0 - b)^2 + 4 - b^2 = b^2 + 4 - b^2 = 4$ voor iedere waarde van b , dus de grafieken gaan allemaal door het punt $(0, 4)$.
- b De coördinaten van de top van de bijbehorende grafiek zijn $(b, 4 - b^2)$.
 De top ligt op de y -as als $b = 0$.

7.3 Herleiden van kwadratische vormen

intro Met de functie $W(a) = -\frac{1}{2}(a - 10)^2 + 18$ kan hij handiger de maximale winst berekenen, want daarvan zijn de coördinaten van de top van de bijbehorende grafiek $(10, 18)$ direct af te lezen.

- 17 a Met ontbinden in factoren kun je het functievoorschrift van f schrijven als $f(x) = (x - 2)(x - 4)$.
- b $x^2 - 6x + 8 = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + 8 = 0$
 $(x - 3)^2 - 1 = 0$
 $(x - 3)^2 = 1$
 $x - 3 = 1$ of $x - 3 = -1$
 $x = 4$ of $x = 2$
- c Met kwadraat afsplitsen kun je het functievoorschrift van f schrijven als $f(x) = (x - 3)^2 - 1$.
- d De vorm $f(x) = (x - 2)(x - 4)$ is het handigst om de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as te berekenen.
- e De vorm $f(x) = (x - 3)^2 - 1$ is het handigst om de coördinaten van de top van de grafiek van f te berekenen.

7 Kwadratische functies

- 18 a** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn $(3, 0)$ en $(-5, 0)$.

b $g(x) = (x - 3)(x + 5)$

$\times$	x	$+5$
x	x^2	$+5x$
-3	$-3x$	-15

$$g(x) = x^2 + 2x - 15$$

- c** De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as zijn $(0, -15)$.

d $g(x) = x^2 + 2x - 15$

$$g(x) = (x + 1)^2 - 1 - 15$$

$$g(x) = (x + 1)^2 - 16$$

- e** De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(-1, -16)$.

- 19 a** De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(4, -64)$.

b $h(x) = (x - 4)^2 - 64$

$\times$	x	-4
x	x^2	$-4x$
-4	$-4x$	$+16$

$$h(x) = x^2 - 8x + 16 - 64$$

$$h(x) = x^2 - 8x - 48$$

- c** De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de y -as zijn $(0, -48)$.

- d** Je kunt het functievoorschrift van h ook herleiden tot $h(x) = (x + 4)(x - 12)$.

- e** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de x -as zijn $(-4, 0)$ en $(12, 0)$.

20 a $h(x) = (x + 2)(x - 8)$

$\times$	x	-8
x	x^2	$-8x$
$+2$	$+2x$	-16

$$h(x) = x^2 - 6x - 16$$

b $g(x) = x^2 + 8x + 12$

$$g(x) = (x + 2)(x + 6)$$

c $g(x) = x^2 + 8x + 12$

$$g(x) = (x + 4)^2 - 16 + 12$$

$$g(x) = (x + 4)^2 - 4$$

$$i(x) = (x - 3)^2 - 9$$

$\times$	x	-3
x	x^2	$-3x$
-3	$-3x$	$+9$

$$i(x) = x^2 - 6x + 9 - 9$$

$$i(x) = x^2 - 6x$$

$$i(x) = (x - 3)^2 - 9$$

$$i(x) = x^2 - 6x$$

$$i(x) = x(x - 6)$$

$$h(x) = (x + 2)(x - 8)$$

$$h(x) = x^2 - 6x - 16$$

$$h(x) = (x - 3)^2 - 9 - 16$$

$$h(x) = (x - 3)^2 - 25$$

	snijpunt met de y -as	snijpunten met de x -as	top
g	$(0, 12)$	$(-2, 0)$ en $(-6, 0)$	$(-4, -4)$
h	$(0, -16)$	$(-2, 0)$ en $(8, 0)$	$(3, -25)$
i	$(0, 0)$	$(0, 0)$ en $(6, 0)$	$(3, -9)$

- 21 a** De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, 16)$.
Invullen van $x = 0$ geeft $g(0) = 0 \times (0 + 4) = 0$, dus de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as zijn $(0, 0)$.
Invullen van $x = 0$ geeft $h(0) = (0 - 2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$, dus de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de y -as zijn $(0, 3)$.

b $x^2 + 10x + 16 = 0$

$$(x + 2)(x + 8) = 0$$

$$x + 2 = 0 \text{ of } x + 8 = 0$$

$$x = -2 \text{ of } x = -8$$

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(-2, 0)$ en $(-8, 0)$.

$$x(x + 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x + 4 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -4$$

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(-4, 0)$.

$$(x - 2)^2 - 1 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 1$$

$$x - 2 = 1 \text{ of } x - 2 = -1$$

$$x = 3 \text{ of } x = 1$$

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de x -as zijn $(3, 0)$ en $(1, 0)$.

c $f(x) = x^2 + 10x + 16$

$$f(x) = (x + 5)^2 - 25 + 16$$

$$f(x) = (x + 5)^2 - 9$$

De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(-5, -9)$.

$$g(x) = x(x + 4)$$

x	x	$+4$
x	x^2	$+4x$

$$g(x) = x^2 + 4x$$

$$g(x) = (x + 2)^2 - 4$$

De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(-2, -4)$.

De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(2, -1)$.

- 22 a** $-0,01a(a - 180) = 0$
 $-0,01a = 0$ of $a - 180 = 0$
 $a = 0$ of $a = 180$

De oplossingen van de vergelijking betekenen dat de hoogte van de boog van de brug 0 meter is op 0 meter en op 180 meter vanaf de linker oever.

- b** De symmetriesas ligt bij $a = 90$.

$$\text{Invullen van } a = 90 \text{ geeft } h(90) = -0,01 \times 90 \times (90 - 180) = -0,9 \times -90 = 81.$$

De maximale hoogte van de boog van de brug is 81 meter.

- c** Je kunt het functievoorschrift van h ook schrijven als

$$h(a) = -0,01(a - 90)^2 + 81.$$

- 020 a** De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, -15)$.

b $f(x) = x^2 + 2x - 15$

Het product is -15 en de som is $+2$.

$$f(x) = (x - 3)(x + 5)$$

- c** De coördinaten van de grafiek van f met de x -as zijn $(3, 0)$ en $(-5, 0)$.

7 Kwadratische functies

- d $f(x) = x^2 + 2x - 15$
 $f(x) = (x+1)^2 - 1 - 15$
 $f(x) = (x+1)^2 - 16$
- e De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(-1, -16)$.

U5 a $f(x) = 3x^2 + 12x - 8$
 $f(x) = 3(x^2 + 4x) - 8$
 $f(x) = 3((x+2)^2 - 4) - 8$
 $f(x) = 3(x+2)^2 - 12 - 8$
 $f(x) = 3(x+2)^2 - 20$

De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(-2, -20)$.

- b A $g(x) = 2x^2 - 10x + 9$
 $g(x) = 2(x^2 - 5x) + 9$
 $g(x) = 2\left(x - 2\frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{1}{4} + 9$
 $g(x) = 2\left(x - 2\frac{1}{2}\right)^2 - 12\frac{1}{2} + 9$
 $g(x) = 2\left(x - 2\frac{1}{2}\right)^2 - 3\frac{1}{2}$
 De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $\left(2\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}\right)$.
- B $h(x) = -3x^2 + 21x - 14$
 $h(x) = -3(x^2 - 7x) - 14$
 $h(x) = -3\left(x - 3\frac{1}{2}\right)^2 - 12\frac{1}{4} - 14$
 $h(x) = -3\left(x - 3\frac{1}{2}\right)^2 - 36\frac{3}{4} - 14$
 $h(x) = -3\left(x - 3\frac{1}{2}\right)^2 - 50\frac{3}{4}$
 De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $\left(3\frac{1}{2}, -50\frac{3}{4}\right)$.

U6 a $2x^2 + 3x - 2 = 0$
 $D = 3^2 - 4 \times 2 \times -2 = 9 + 16 = 25$
 $x = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times 2}$ of $x = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times 2}$
 $x = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2}$ of $x = \frac{-3 - 5}{4} = -2$

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ en $(-2, 0)$.

- b Uit de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as volgt dat je het functievoorschrift van f kunt schrijven als $f(x) = a(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.
 Uit $a = 2$ volgt dat je het functievoorschrift van f kunt schrijven als $f(x) = 2(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.
- c $3x^2 + 13x + 12 = 0$

$D = 13^2 - 4 \times 3 \times 12 = 169 - 144 = 25$
 $x = \frac{-13 + \sqrt{25}}{2 \times 3}$ of $x = \frac{-13 - \sqrt{25}}{2 \times 3}$
 $x = \frac{-13 + 5}{6} = -1\frac{1}{3}$ of $x = \frac{-13 - 5}{6} = -3$

Uit de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as volgt dat je het functievoorschrift van g kunt schrijven als $g(x) = a\left(x + 1\frac{1}{3}\right)(x+3)$.

Uit $a = 3$ volgt dat je het functievoorschrift van g kunt schrijven als $g(x) = 3\left(x + 1\frac{1}{3}\right)(x+3)$.

$2x^2 - x - 15 = 0$
 $D = (-1)^2 - 4 \times 2 \times -15 = 1 + 120 = 121$
 $x = \frac{1 + \sqrt{121}}{2 \times 2}$ of $x = \frac{1 - \sqrt{121}}{2 \times 2}$
 $x = \frac{1 + 11}{4} = 3$ of $x = \frac{1 - 11}{4} = -2\frac{1}{2}$

Uit de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de x -as volgt dat je het functievoorschrift van h kunt schrijven als $h(x) = a(x-3)\left(x + 2\frac{1}{2}\right)$.

Uit $a = 2$ volgt dat je het functievoorschrift van h kunt schrijven als $h(x) = 2(x-3)\left(x + 2\frac{1}{2}\right)$.

7.4 Parabolen schetsen

intro De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(3, -4)$.

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn $(3, 0)$ en $(4, 0)$, dus functie g hoort bij parabool 2 of bij parabool 3.

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de y -as zijn $(0, -4)$, dus functie h hoort bij parabool 1.

De x -coördinaat van de top van de grafiek van f is $x = 3$ en de x -coördinaat van de top van de grafiek van g is $x = 3\frac{1}{2}$, dus functie f hoort bij parabool 2 en functie g hoort bij parabool 3.

- 23 a** Je kunt uit het functievoorschrift van f opmaken dat de grafiek van f een dalparabool is, omdat $a = \frac{1}{2}$.
- b** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(-1, 0)$ en $(5, 0)$.
- c** De top van de grafiek van f ligt onder de x -as, omdat de grafiek van f een dalparabool is die de x -as in twee punten snijdt.
- d** De top van de grafiek van f ligt rechts van de y -as, omdat de symmetrieas bij $x = (-1 + 5) : 2 = 2$ ligt.
- e** Grafiek 2 hoort bij de functie f .
- f** De grafiek van g is een dalparabool, omdat $a = \frac{1}{2}$ en dat klopt in grafiek 1.
- $$\frac{1}{2}(x+1)^2 - 2 = 0$$
- $$\frac{1}{2}(x+1)^2 = 2$$
- $$(x+1)^2 = 4$$
- $$x+1 = 2 \text{ of } x+1 = -2$$
- $$x = 1 \text{ of } x = -3$$
- De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn $(1, 0)$ en $(-3, 0)$ en dat klopt in grafiek 1.
- De top van de grafiek van g ligt onder de x -as, omdat de grafiek van g een dalparabool is die de x -as in twee punten snijdt en dat klopt in grafiek 1.
- De top van de grafiek van g is het punt $(-1, -2)$ en dat klopt in grafiek 1.
- 24 a** De grafiek van h is een bergparabool, omdat $a = -3$.
- b** De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(2, 4)$.
- c** Nee, je weet nu nog niet welke van de twee geschetste grafieken bij de functie h hoort.
- d** $h(0) = -3 \times (0 - 2)^2 + 4 = -3 \times 4 + 4 = -8$
- e** Grafiek 2 hoort bij de functie h , omdat de grafiek van h de y as onder de x -as snijdt.
- f** De coördinaten van de top van de grafiek van k zijn $(1, 2)$ en de coördinaten van de top van de grafiek van l zijn $(-1, 2)$.
- Bij grafiek 1 kan de functie $k(x) = -2(x - 1)^2 + 2$ horen.

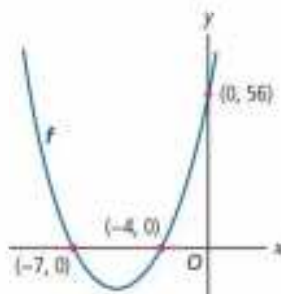
7 Kwadratische functies

- 25 a** De grafiek van f is een dalparabool, want $a = 2$.

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(-4, 0)$ en $(-7, 0)$.

De top van de grafiek van f ligt links van de y -as.

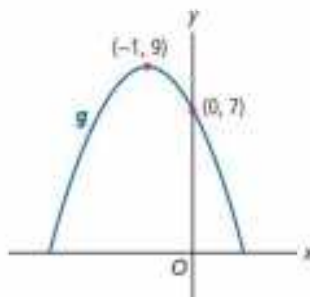
De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, 56)$.



- b** De grafiek van g is een bergparabool, want $a = -2$.

De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(-1, 9)$.

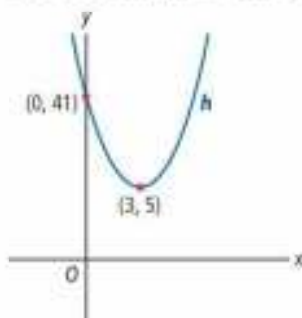
De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as zijn $(0, 7)$.



- c** De grafiek van h is een dalparabool, want $a = 4$.

De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(3, 5)$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de y -as zijn $(0, 41)$.

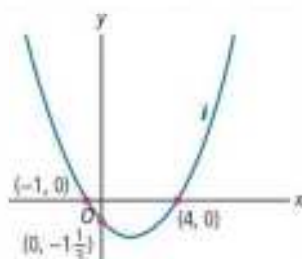


- d** De grafiek van i is een dalparabool, want $a = \frac{1}{3}$.

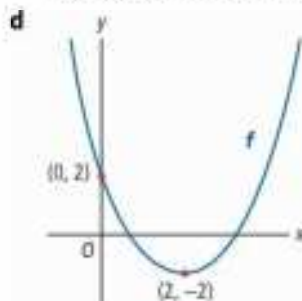
De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van i met de x -as zijn $(4, 0)$ en $(-1, 0)$.

De top van de grafiek van i ligt rechts van de y -as.

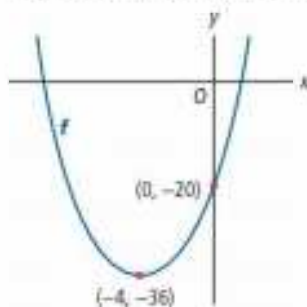
De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van i met de y -as zijn $(0, -1\frac{1}{3})$.



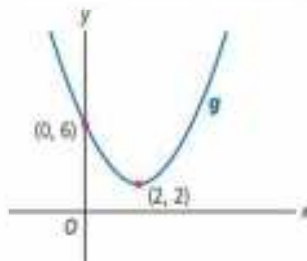
- 26 a** De grafiek van f is een dalparabool, omdat $a = 1$.
b De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, 2)$.
c $f(x) = x^2 - 4x + 2$
 $f(x) = (x - 2)^2 - 4 + 2$
 $f(x) = (x - 2)^2 - 2$
 De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(2, -2)$.



- 27 a** De grafiek van f is een dalparabool, omdat $a = 1$.
 De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, -20)$.
 $f(x) = x^2 + 8x - 20$
 $f(x) = (x + 4)^2 - 16 - 20$
 $f(x) = (x + 4)^2 - 36$
 De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(-4, -36)$.



- b** De grafiek van g is een dalparabool, omdat $a = 1$.
 De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as zijn $(0, 6)$.
 $g(x) = x^2 - 4x + 6$
 $g(x) = (x - 2)^2 - 4 + 6$
 $g(x) = (x - 2)^2 + 2$
 De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(2, 2)$.



7 Kwadratische functies

- c De grafiek van h is een dalparabool, omdat $a = 1$.

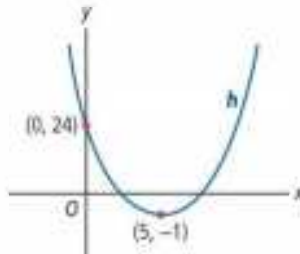
De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de y -as zijn $(0, 24)$.

$$h(x) = x^2 - 10x + 24$$

$$h(x) = (x - 5)^2 - 25 + 24$$

$$h(x) = (x - 5)^2 - 1$$

De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(5, -1)$.



- d De grafiek van i is een dalparabool, omdat $a = 1$.

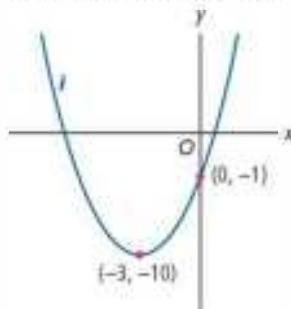
De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van i met de y -as zijn $(0, -1)$.

$$i(x) = x^2 + 6x - 1$$

$$i(x) = (x + 3)^2 - 9 - 1$$

$$i(x) = (x + 3)^2 - 10$$

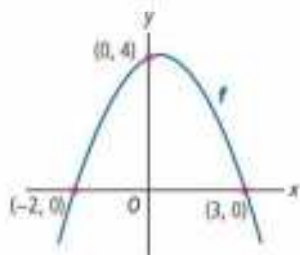
De coördinaten van de top van de grafiek van i zijn $(-3, -10)$.



- 28 a De grafiek van f is een bergparabool, want $a = -\frac{2}{3}$.

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(-2, 0)$ en $(3, 0)$. De top van de grafiek van f ligt rechts van de y -as.

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, 4)$.



- b De grafiek van g is een dalparabool, omdat $a = 1$.

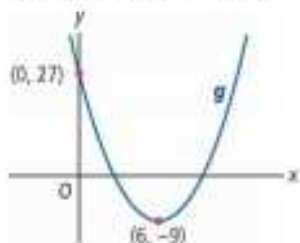
De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as zijn $(0, 27)$.

$$g(x) = x^2 - 12x + 27$$

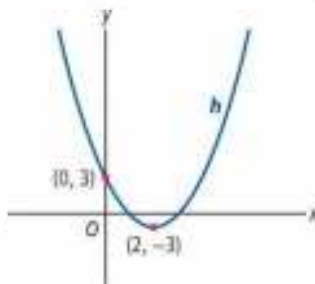
$$g(x) = (x - 6)^2 - 36 + 27$$

$$g(x) = (x - 6)^2 - 9$$

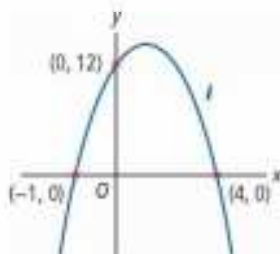
De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(6, -9)$.



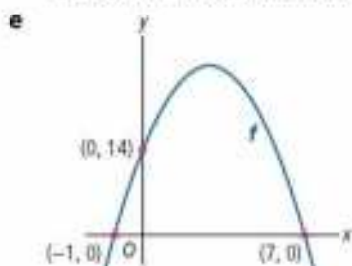
- c De grafiek van h is een dalparabool, want $a = 1\frac{1}{2}$.
 De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(2, -3)$.
 De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de y -as zijn $(0, 3)$.



- d De grafiek van i is een bergparabool, want $a = -3$.
 $i(x) = -3x^2 + 9x + 12$
 $i(x) = -3(x^2 - 3x - 4)$
 $i(x) = -3(x + 1)(x - 4)$
 De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van i met de x -as zijn $(-1, 0)$ en $(4, 0)$.
 De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van i met de y -as zijn $(0, 12)$.

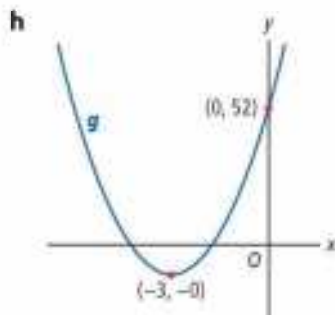


- 025 a De grafiek van f is een bergparabool, want $a = -2$.
 De grafiek van g is een dalparabool, want $a = 6$.
 b De snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn de punten $(-1, 0)$ en $(7, 0)$.
 c De top van de grafiek van f ligt rechts van de y -as, omdat de symmetrieas bij $x = (-1 + 7) : 2 = 3$ ligt.
 d $f(0) = -2(0 + 1)(0 - 7) = 14$
 De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, 14)$.

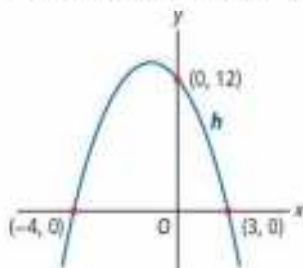


- f De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(-3, -2)$.
 g $g(0) = 6 \times (0 + 3)^2 - 2 = 6 \times 9 - 2 = 52$
 De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as zijn $(0, 52)$ en dat punt ligt boven de x -as.

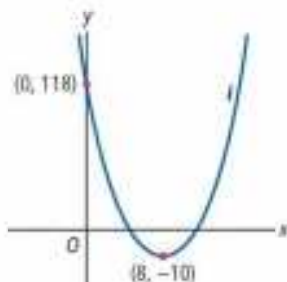
7 Kwadratische functies



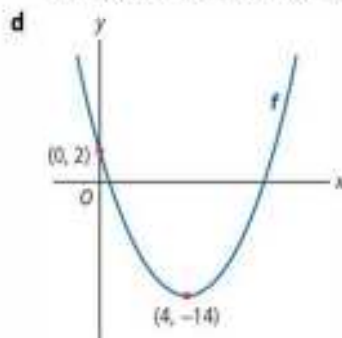
- i** De grafiek van *h* is een bergparabool, want $a = -1$.
 De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van *h* met de *x*-as zijn $(-4, 0)$ en $(3, 0)$.
 De top van de grafiek van *h* ligt links van de *y*-as.
 De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van *h* met de *y*-as zijn $(0, 12)$.



- j** De grafiek van *i* is een dalparabool, want $a = 2$.
 De coördinaten van de top van de grafiek van *i* zijn $(8, -10)$.
 De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van *i* met de *y*-as zijn $(0, 118)$.



- 027 a** De grafiek van *f* is een dalparabool, want $a = 1$.
b De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van *f* met de *y*-as zijn $(0, 2)$.
c $f(x) = x^2 - 8x + 2$
 $f(x) = (x - 4)^2 - 16 + 2$
 $f(x) = (x - 4)^2 - 14$
 De coördinaten van de top van de grafiek van *f* zijn $(4, -14)$.



U7 a Invullen van $a = 1$ en $p = 3$ geeft de functie $f(x) = x^2 + 3x + 18$.

De grafiek van f is een dalparabool, want $a = 1$.

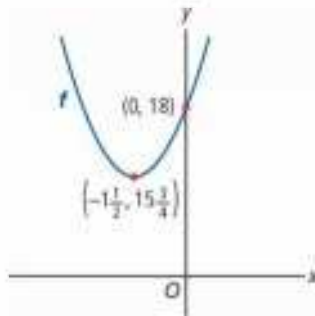
De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, 18)$.

$$f(x) = x^2 + 3x + 18$$

$$f(x) = \left(x + 1\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4} + 18$$

$$f(x) = \left(x + 1\frac{1}{2}\right)^2 + 15\frac{3}{4}$$

De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $\left(-1\frac{1}{2}, 15\frac{3}{4}\right)$.



b Invullen van $a = 2$, $x = p$ en $y = -3$ geeft

$$2p^2 + p \times p + 6p = -3$$

$$3p^2 + 6p + 3 = 0$$

$$p^2 + 2p + 1 = 0$$

$$(p + 1)^2 = 0$$

$$p + 1 = 0$$

$$p = -1$$

Daarbij hoort de functie $f(x) = 2x^2 - x - 6$

De grafiek van f is een dalparabool, want $a = 2$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, -6)$.

$$f(x) = 2x^2 - x - 6$$

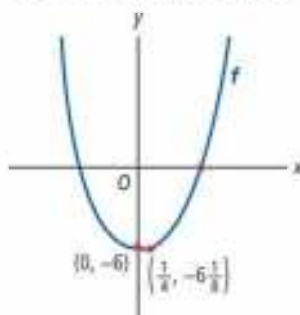
$$f(x) = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) - 6$$

$$f(x) = 2\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right) - 6$$

$$f(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} - 6$$

$$f(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - 6\frac{1}{8}$$

De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $\left(\frac{1}{4}, -6\frac{1}{8}\right)$.



7 Kwadratische functies

- c Invullen van $x = -2$ en $y = -24$ geeft $2(-2 + 4)(-2 - p) = -24$, oftewel

$$4(-2 - p) = -24, \text{ dus } -2 - p = -6 \text{ en } p = 4.$$

Daarbij hoort de functie $g(x) = 2(x + 4)(x - 4)$

De grafiek van g is een dalparabool, want $a = 2$.

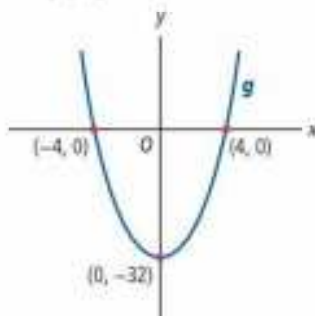
De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, -32)$.

$$2(x + 4)(x - 4) = 0$$

$$x + 4 = 0 \text{ of } x - 4 = 0$$

$$x = -4 \text{ of } x = 4$$

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn $(-4, 0)$ en $(4, 0)$.



7.5 Functies bij parabolen

intro De coördinaten van de top van de getekende grafiek zijn $(4, 8)$, dus A wordt de functie $W(q) = -2(q - 4)^2 + 8$.

De coördinaten van de snijpunten van de getekende grafiek met de x -as zijn $(2, 0)$ en $(6, 0)$, dus C wordt de functie $W(q) = -2(q - 2)(q - 6)$.

$$W(q) = -2(q - 4)^2 + 8$$

$\times$	q	-4
q	q^2	$-4q$
-4	$-4q$	$+16$

$$W(q) = -2(q^2 - 8q + 16) + 8$$

$$W(q) = -2q^2 + 16q - 32 + 8$$

$$W(q) = -2q^2 + 16q - 24$$

B wordt de functie $W(q) = -2q^2 + 16q - 24$.

Of:

$$W(q) = -2(q - 2)(q - 6)$$

$\times$	q	-6
q	q^2	$-6q$
-2	$-2q$	$+12$

$$W(q) = -2(q^2 - 8q + 12)$$

$$W(q) = -2q^2 + 16q - 24$$

- 29 a De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(0, 1)$ en daarbij past een functievoorschrift van de vorm $f(x) = a(x - 0)^2 + 1$, oftewel $f(x) = ax^2 + 1$.
- b Invullen van bijvoorbeeld $x = 2$ en $y = -1$ geeft $a \times 2^2 + 1 = -1$, oftewel $4a + 1 = -1$, dus $4a = -2$ en $a = -\frac{1}{2}$.
- c De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(2, -1)$.
Invullen geeft het functievoorschrift $g(x) = a(x - 2)^2 - 1$.
- d De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as zijn $(0, 1)$.
Invullen van $x = 0$ en $y = 1$ geeft $a \times (0 - 2)^2 - 1 = 1$, oftewel $4a - 1 = 1$, dus $4a = 2$ en $a = \frac{1}{2}$.
- e De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de x -as zijn $(-1, 0)$ en $(3, 0)$. Invullen geeft het functievoorschrift $h(x) = a(x + 1)(x - 3)$.
- f De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de y -as zijn $(0, -3)$.
Invullen van $x = 0$ en $y = -3$ geeft $a(0 + 1)(0 - 3) = -3$, oftewel $-3a = -3$, dus $a = 1$.

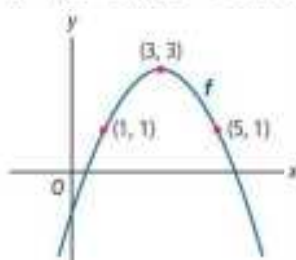
- 30 a** De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, 3)$, dus $c = 3$.
- b** Invullen van $x = 1$, $y = -1$ en $c = 3$ geeft $a \times 1^2 + b \times 1 + 3 = -1$, oftewel $a + b + 3 = -1$.
- c** Invullen van $x = 5$, $y = 3$ en $c = 3$ geeft $a \times 5^2 + b \times 5 + 3 = 3$, oftewel $25a + 5b + 3 = 3$.
- d** Bij opdracht b vond je dat a en b moeten voldoen aan de vergelijking $a + b + 3 = -1$ en bij opdracht c vond je dat a en b moeten voldoen aan de vergelijking $25a + 5b + 3 = 3$, dus a en b moeten aan het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} a + b + 3 = -1 \\ 25a + 5b + 3 = 3 \end{cases}$ voldoen.
- e** Eerst herleiden.
- $$\begin{array}{ll} a + b + 3 = -1 & 25a + 5b + 3 = 3 \\ b = -a - 4 & 5b = -25a \\ & b = -5a \end{array}$$
- Dan gelijkstellen.
- $$\begin{array}{l} -a - 4 = -5a \\ 4a - 4 = 0 \\ 4a = 4 \\ a = 1 \end{array}$$
- Invullen geeft $b = -1 - 4 = -5$.
- De oplossing van het stelsel vergelijkingen is $a = 1$ en $b = -5$.
- f** Het functievoorschrift bij de grafiek van f is $f(x) = x^2 - 5x + 3$.

- 31** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(1, 0)$ en $(4, 0)$. Invullen geeft het functievoorschrift $f(x) = a(x - 1)(x - 4)$.
- De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, 6)$. Invullen van $x = 0$ en $y = 6$ geeft $a(0 - 1)(0 - 4) = 6$, oftewel $4a = 6$, dus $a = 1\frac{1}{2}$. Het functievoorschrift bij de parabool f is $f(x) = 1\frac{1}{2}(x - 1)(x - 4)$.
- De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(2, 3)$. Invullen geeft het functievoorschrift $g(x) = a(x - 2)^2 + 3$.
- Invullen van $x = 0$ en $y = -1$ geeft $a \times (0 - 2)^2 + 3 = -1$, oftewel $4a + 3 = -1$, dus $4a = -4$ en $a = -1$.
- Het functievoorschrift bij de parabool g is $g(x) = -(x - 2)^2 + 3$.
- De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de y -as zijn $(0, 4)$. Invullen geeft het functievoorschrift $h(x) = ax^2 + bx + 4$.
- Invullen van $x = -1$ en $y = 0$ geeft $a \times (-1)^2 + b \times -1 + 4 = 0$, oftewel $a - b + 4 = 0$. Invullen van $x = 2$ en $y = 6$ geeft $a \times 2^2 + b \times 2 + 4 = 6$, oftewel $4a + 2b + 4 = 6$.
- Eerst herleiden.
- $$\begin{array}{ll} a - b + 4 = 0 & 4a + 2b + 4 = 6 \\ -b = -a - 4 & 2b = -4a + 2 \\ b = a + 4 & b = -2a + 1 \end{array}$$
- Dan gelijkstellen.
- $$\begin{array}{l} a + 4 = -2a + 1 \\ 3a + 4 = 1 \\ 3a = -3 \\ a = -1 \end{array}$$
- Invullen geeft $b = -1 + 4 = 3$.
- Het functievoorschrift bij de parabool h is $h(x) = -x^2 + 3x + 4$.

7 Kwadratische functies

- 32 a** De parabool gaat door de punten $(1, 1)$ en $(5, 1)$, dus de symmetrieas ligt bij $x = (1 + 5) : 2 = 3$ en het punt $(3, 3)$ is de top van de parabool.

b



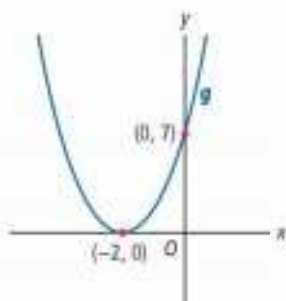
- c** De coördinaten van de top van de parabool zijn $(3, 3)$.

Invullen geeft het functievoorschrift $f(x) = a(x - 3)^2 + 3$.

Invullen van $x = 1$ en $y = 1$ geeft $a \times (1 - 3)^2 + 3 = 1$, oftewel $4a + 3 = 1$, dus $4a = -2$ en $a = -\frac{1}{2}$.

Het functievoorschrift bij de parabool is $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 3$.

33 a



- b** De coördinaten van de top van de parabool zijn $(-2, 0)$. Invullen geeft het functievoorschrift $g(x) = a(x + 2)^2 + 0$, oftewel $g(x) = a(x + 2)^2$.

Invullen van $x = 0$ en $y = 7$ geeft $a \times (0 + 2)^2 = 7$, oftewel $4a = 7$, dus $a = 1\frac{3}{4}$.

Het functievoorschrift bij de parabool is $g(x) = 1\frac{3}{4}(x + 2)^2$.

- 031 a** Je gebruikt hier de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$, omdat de coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y -as en twee willekeurige punten bekend zijn.
- b** De coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y -as zijn $(0, 16)$, dus $c = 16$.
- c** Invullen van $x = 2$, $y = 24$ en $c = 16$ geeft $a \times 2^2 + b \times 2 + 16 = 24$, oftewel $4a + 2b + 16 = 24$.
Invullen van $x = 4$, $y = 8$ en $c = 16$ geeft $a \times 4^2 + b \times 4 + 16 = 8$, oftewel $16a + 4b + 16 = 8$.
- d** $16a + 4b + 16 = 8$
 $4b = -16a - 8$
 $b = -4a - 2$
- e** $-2a + 4 = -4a - 2$
 $2a + 4 = -2$
 $2a = -6$
 $a = -3$
- f** Invullen geeft $b = -2 \times -3 + 4 = 10$.
- g** Het functievoorschrift bij de parabool is $f(x) = -3x^2 + 10x + 16$.

- U9 a** Invullen van $x = -2$ en $y = -28$ geeft $a \times (-2)^2 + b \times -2 + c = -28$, oftewel $4a - 2b + c = -28$.
 Invullen van $x = 1$ en $y = -13$ geeft $a \times 1^2 + b \times 1 + c = -13$, oftewel $a + b + c = -13$.
 Invullen van $x = 4$ en $y = -16$ geeft $a \times 4^2 + b \times 4 + c = -16$, oftewel $16a + 4b + c = -16$.

Het stelsel van drie vergelijkingen is
$$\begin{cases} 4a - 2b + c = -28 \\ a + b + c = -13 \\ 16a + 4b + c = -16 \end{cases}$$

- b** $a + b + c = -13$
 $c = -a - b - 13$
- c** $4a - 2b - a - b - 13 = -28$ $16a + 4b - a - b - 13 = -16$
 $3a - 3b - 13 = -28$ $15a + 3b - 13 = -16$
- d** Eerst herleiden.
 $-3b = -3a - 15$ $3b = -15a - 3$
 $b = a + 5$ $b = -5a - 1$
 Dan gelijkstellen.
 $a + 5 = -5a - 1$
 $6a + 5 = -1$
 $6a = -6$
 $a = -1$
 Invullen geeft $b = -1 + 5 = 4$ en $c = - -1 - 4 - 13 = -16$.
- e** Het functievoorschrift bij de parabool is $f(x) = -x^2 + 4x - 16$.

7.6 Gemengde opdrachten

- 34 a** De coördinaten van de snijpunten van de parabool bij de functie f met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(-1, 0)$. Bij de functie f hoort parabool 5.
- b** De coördinaten van het snijpunt van de parabool bij de functie g met de y -as zijn $(0, 2)$. Bij de functie g hoort parabool 2.
- c** De coördinaten van de top van de parabool bij de functie h zijn $(0, -2)$. Bij de functie h hoort parabool 4.
- d** De coördinaten van de snijpunten van de parabool bij de functie i met de x -as zijn $(3, 0)$ en $(-1, 0)$. Bij de functie i hoort parabool 1.
- e** De coördinaten van het snijpunt van de parabool bij de functie j met de y -as zijn $(0, 0)$. Bij de functie j hoort parabool 3 of parabool 5. Maar parabool 5 hoort bij de functie f , dus de functie j hoort bij parabool 3.
- f** De coördinaten van de top van de parabool bij de functie k zijn $(2, 0)$. Bij de functie k hoort parabool 6.

35 a $g(x) = (x + 5)^2 - 9$

$\times$	x	$+5$
x	x^2	$+5x$
$+5$	$+5x$	$+25$

$$g(x) = x^2 + 10x + 25 - 9$$

$$g(x) = x^2 + 10x + 16$$

$$h(x) = -2(x + 3)(x - 4)$$

$\times$	x	-4
x	x^2	$-4x$
$+3$	$+3x$	-12

$$h(x) = 2(x^2 - x - 12)$$

$$h(x) = 2x^2 - 2x - 24$$

7 Kwadratische functies

$$\begin{array}{ll}
 \text{b} & g(x) = (x+5)^2 - 9 & i(x) = x^2 - 4x - 32 \\
 & g(x) = x^2 + 10x + 16 & i(x) = (x+4)(x-8) \\
 & g(x) = (x+2)(x+8) & \\
 \text{c} & h(x) = -2(x+3)(x-4) & i(x) = x^2 - 4x - 32 \\
 & h(x) = 2x^2 - 2x - 24 & i(x) = (x-2)^2 - 4 - 32 \\
 & h(x) = 2(x^2 - x) - 24 & i(x) = (x-2)^2 - 36 \\
 & h(x) = 2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) - 24 & \\
 & h(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 24 & \\
 & h(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 24\frac{1}{2} &
 \end{array}$$

d	snijpunt met de y-as	snijpunten met de x-as	top
g	(0, 16)	(-2, 0) en (-8, 0)	(-5, -9)
h	(0, -24)	(-3, 0) en (4, 0)	$\left(\frac{1}{2}, -24\frac{1}{2}\right)$
i	(0, -32)	(-4, 0) en (8, 0)	(2, -36)

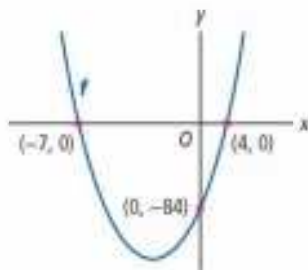
- 36** De coördinaten van de top van de parabool bij de functie f zijn (0, -3).
Invullen geeft het functievoorschrift $f(x) = a(x-0)^2 - 3$, oftewel $f(x) = ax^2 - 3$.
Invullen van bijvoorbeeld $x = 2$ en $y = 1$ geeft $a \times 2^2 - 3 = 1$, oftewel $4a - 3 = 1$, dus $4a = 4$ en $a = 1$.
Het functievoorschrift bij de parabool is $f(x) = x^2 - 3$.
De coördinaten van de top van de parabool bij de functie g zijn (2, 3).
Invullen geeft het functievoorschrift $g(x) = a(x-2)^2 + 3$.
Invullen van bijvoorbeeld $x = 1$ en $y = 1$ geeft $a \times (1-2)^2 + 3 = 1$, oftewel $a + 3 = 1$, dus $a = -2$.
Het functievoorschrift bij de parabool is $g(x) = -2(x-2)^2 + 3$.
De coördinaten van de snijpunten van de parabool bij de functie h met de x-as zijn (0, 0) en (3, 0).
Invullen geeft het functievoorschrift $h(x) = a(x-0)(x-3)$, oftewel $h(x) = ax(x-3)$.
Invullen van bijvoorbeeld $x = 1$ en $y = -3$ geeft $a \times 1 \times (1-3) = -3$, oftewel $-2a = -3$, dus $a = 1\frac{1}{2}$.
Het functievoorschrift bij de parabool is $h(x) = 1\frac{1}{2}x(x-3)$.

- 37** De coördinaten van de snijpunten van de boog met de horizontale as zijn (-80, 0) en (80, 0).
De formule bij de boog is van de vorm $h = d(a-80)(a+80)$.
Invullen van $a = 0$ en $h = 120$ geeft $d(0-80)(0+80) = 120$, oftewel $-6400d = 120$, dus $d = -\frac{120}{6400} = -\frac{3}{160}$.
De formule bij de boog is $h = -\frac{3}{160}(a-80)(a+80)$.
Of:
De coördinaten van de top van de boog zijn (0, 120).
De formule bij de boog is van de vorm $h = d(a-0)^2 + 120$, oftewel $h = da^2 + 120$.
Invullen van bijvoorbeeld $a = 80$ en $h = 0$ geeft $d \times 80^2 + 120 = 0$, oftewel $6400d + 120 = 0$, dus $6400d = -120$ en $d = -\frac{120}{6400} = -\frac{3}{160}$.
De formule bij de boog is $h = -\frac{3}{160}a^2 + 120$.

- 38 a** De grafiek van f is een dalparabool, want $a = 3$.

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(4, 0)$ en $(-7, 0)$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, -84)$.



- b** De grafiek van g is een dalparabool, want $a = 1$.

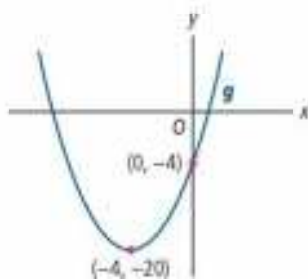
De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as zijn $(0, -4)$.

$$g(x) = x^2 + 8x - 4$$

$$g(x) = (x + 4)^2 - 16 - 4$$

$$g(x) = (x + 4)^2 - 20$$

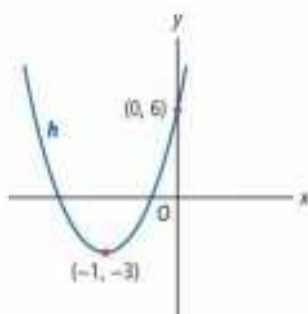
De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(-4, -20)$.



- c** De grafiek van h is een dalparabool, want $a = 9$.

De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(-1, -3)$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de y -as zijn $(0, 6)$.



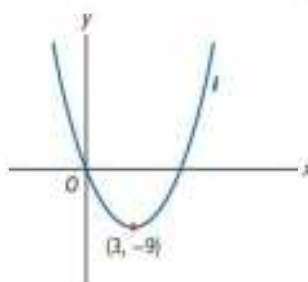
- d** De grafiek van i is een dalparabool, want $a = 1$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van i met de y -as zijn $(0, 0)$.

$$i(x) = x^2 - 6x$$

$$i(x) = (x - 3)^2 - 9$$

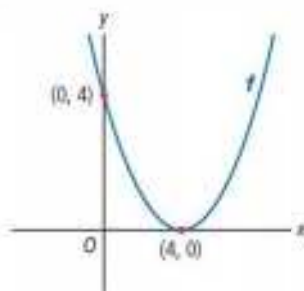
De coördinaten van de top van de grafiek van i zijn $(3, -9)$.



7 Kwadratische functies

- 39 a** Invullen van $v = 20$ geeft $h(t) = -5t^2 + 20t + 60$.
 $-5t^2 + 20t + 60 = 0$
 $t^2 - 4t - 12 = 0$
 $(t + 2)(t - 6) = 0$
 $t + 2 = 0$ of $t - 6 = 0$
 $t = -2$ (voldoet niet) of $t = 6$
 Na 6 seconden komt de kogel op de grond terecht.
- b** De symmetrieas is de lijn $t = (-2 + 6) : 2 = 2$.
 Na 2 seconden bereikt de kogel zijn maximale hoogte.
- c** Invullen van $t = 2$ geeft $h(2) = -5 \times 2^2 + 20 \times 2 + 60 = 80$.
 De kogel komt maximaal 80 meter hoog.
- d** Invullen van $v = 5$ geeft $h(t) = -5t^2 + 5t + 60$.
 $-5t^2 + 5t + 60 = 0$
 $t^2 - t - 12 = 0$
 $(t + 3)(t - 4) = 0$
 $t + 3 = 0$ of $t - 4 = 0$
 $t = -3$ (voldoet niet) of $t = 4$
 De symmetrieas is de lijn $t = (-3 + 4) : 2 = \frac{1}{2}$.
 Invullen van $t = \frac{1}{2}$ geeft $h(\frac{1}{2}) = -5 \times (\frac{1}{2})^2 + 5 \times \frac{1}{2} + 60 = 61\frac{1}{4}$.
 Deze kogel komt maximaal $61\frac{1}{4}$ meter boven de grond.

40 a



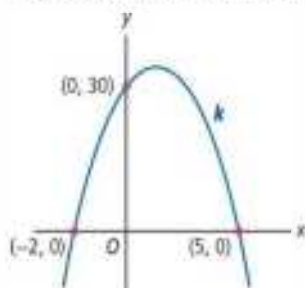
- b** De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(4, 0)$.
 Het functievoorschrift bij de grafiek van f is van de vorm
 $f(x) = a(x - 4)^2 + 0$, oftewel $f(x) = a(x - 4)^2$.
 Invullen van $x = 0$ en $y = 4$ geeft $a \times (0 - 4)^2 = 4$, oftewel $16a = 4$, dus $a = \frac{1}{4}$.
 Het functievoorschrift bij de grafiek van f is $f(x) = \frac{1}{4}(x - 4)^2$.
- 41** De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(2, 4)$. De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn dan $(2 + 3, 4 + 4)$, oftewel $(5, 8)$.
 Het functievoorschrift bij de grafiek van h is $h(x) = -0,5(x - 5)^2 + 8$.

Samenvatting

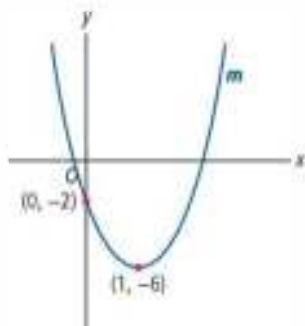
- S1 a** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn $(-9, 0)$ en $(5, 0)$.
- b** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de x -as zijn $(1\frac{1}{2}, 0)$ en $(2, 0)$.
- S2 a** De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(-1, -6)$.
- b** Het functievoorschrift bij de grafiek van h is $h(x) = -(x - 4)^2 - 9$.

- S3 a** $g(x) = x^2 - 8x + 15$
 $g(x) = (x - 3)(x - 5)$
 De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn $(3, 0)$ en $(5, 0)$.
- b** $g(x) = x^2 - 8x + 15$
 $g(x) = (x - 4)^2 - 16 + 15$
 $g(x) = (x - 4)^2 - 1$
 De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(4, -1)$.

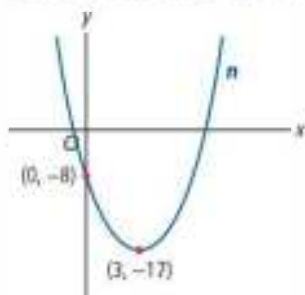
- S4 a** De grafiek van k is een bergparabool, want $a = -3$.
 De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van k met de x -as zijn $(-2, 0)$ en $(5, 0)$.
 De top van de grafiek van k ligt rechts van de y -as.
 De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van k met de y -as zijn $(0, 30)$.



- b** De grafiek van m is een dalparabool, want $a = 4$.
 De coördinaten van de top van de grafiek van m zijn $(1, -6)$.
 De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van m met de y -as zijn $(0, -2)$.



- c** De grafiek van n is een dalparabool, want $a = 1$.
 De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van n met de y -as zijn $(0, -8)$.
 $n(x) = x^2 - 6x - 8$
 $n(x) = (x - 3)^2 - 9 - 8$
 $n(x) = (x - 3)^2 - 17$
 De coördinaten van de top van de grafiek van n zijn $(3, -17)$.



7 Kwadratische functies

- S5** De coördinaten van de snijpunten van de parabool g met de x -as zijn $(1, 0)$ en $(4, 0)$. Invullen geeft het functievoorschrift $g(x) = a(x - 1)(x - 4)$.
Invullen van $x = 2$ en $y = 1$ geeft $a(2 - 1)(2 - 4) = 1$, oftewel $-2a = 1$, dus $a = -\frac{1}{2}$.

Het functievoorschrift bij de parabool g is $g(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)(x - 4)$.

De coördinaten van het snijpunt van de parabool h met de y -as zijn $(0, -1)$.

Invullen geeft het functievoorschrift $h(x) = ax^2 + bx - 1$.

Invullen van $x = -1$ en $y = 6$ geeft $a \times (-1)^2 + b \times -1 - 1 = 6$, oftewel $a - b - 1 = 6$.

Invullen van $x = 4$ en $y = -9$ geeft $a \times 4^2 + b \times 4 - 1 = -9$, oftewel $16a + 4b - 1 = -9$.

Eerst herleiden.

$$a - b - 1 = 6$$

$$-b = -a + 7$$

$$b = a - 7$$

$$16a + 4b - 1 = -9$$

$$4b = -16a - 8$$

$$b = -4a - 2$$

Dan gelijkstellen.

$$a - 7 = -4a - 2$$

$$5a = 5$$

$$a = 1$$

Invullen geeft $b = 1 - 7 = -6$.

Het functievoorschrift bij de parabool h is $h(x) = x^2 - 6x - 1$.

Test jezelf

- T1 a** De formule van de symmetrieas is $x = (9 - 3) : 2 = 3$.
Invullen van $x = 3$ geeft $f(3) = 4(3 - 9)(3 + 3) = -144$.
De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(3, -144)$.
- b** De formule van de symmetrieas is $x = (-4 - 10) : 2 = -7$.
Invullen van $x = -7$ geeft $g(-7) = -(-7 + 4)(-7 + 10) = 9$.
De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(-7, 9)$.
- c** De formule van de symmetrieas is $x = (7 - 13) : 2 = -3$.
Invullen van $x = -3$ geeft $h(-3) = -3(-3 - 7)(-3 + 13) = 300$.
De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(-3, 300)$.
- T2 a** Invullen van $p = 20$ geeft $W(20) = -20(20 - 10)(20 - 50) + 4500 = 10\,500$.
Als er 20 producten worden verkocht is de winst 10 500 euro.
- b** De formule van de symmetrieas is $p = (10 + 50) : 2 = 30$.
Invullen van $p = 30$ geeft $W(30) = -20(30 - 10)(30 - 50) + 4500 = 12\,500$.
De maximale winst die het bedrijf kan maken is 12 500 euro.

c $W(p) = -20(p - 10)(p - 50) + 4500$

$\times$	p	-50
p	p^2	$-50p$
-10	$-10p$	$+500$

$$W(p) = -20(p^2 - 60p + 500) + 4500$$

$$W(p) = -20p^2 + 1200p - 10\,000 + 4500$$

$$W(p) = -20p^2 + 1200p - 5500$$

$$-20p^2 + 1200p - 5500 = 0$$

$$p^2 - 60p + 275 = 0$$

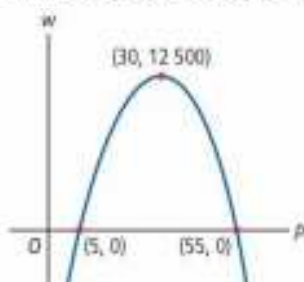
$$(p - 5)(p - 55) = 0$$

$$p - 5 = 0 \text{ of } p - 55 = 0$$

$$p = 5 \text{ of } p = 55$$

Als het bedrijf tussen 5 en 55 producten maakt, dan maakt het bedrijf winst.

d



- T3 a De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(5, 2)$. De grafiek is een dalparabool, want $a = 0,1$.
- b De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(0, \frac{2}{3})$. De grafiek is een bergparabool, want $a = -2$.
- c De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(-7, 25)$. De grafiek is een bergparabool, want $a = -\frac{3}{7}$.
- d De coördinaten van de top van de grafiek van i zijn $(2, -5)$. De grafiek is een dalparabool, want $a = 3$.

- T4 a De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, -18)$.

b $f(x) = x^2 - 3x - 18$

$$f(x) = (x + 3)(x - 6)$$

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn

$$(-3, 0) \text{ en } (6, 0).$$

c $f(x) = x^2 - 3x - 18$

$$f(x) = \left(x - 1\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4} - 18$$

$$f(x) = \left(x - 1\frac{1}{2}\right)^2 - 20\frac{1}{4}$$

De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $\left(1\frac{1}{2}, -20\frac{1}{4}\right)$.

- d De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn

$$(-1, 0) \text{ en } (11, 0). \text{ De symmetrieas ligt bij } x = (-1 + 11) : 2 = 5.$$

$$\text{Invullen van } x = 5 \text{ geeft } g(5) = 2(5 + 1)(5 - 11) = -72.$$

De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(5, -72)$.

e $(x + 1)^2 - 9 = 0$

$$(x + 1)^2 = 9$$

$$x + 1 = 3 \text{ of } x + 1 = -3$$

$$x = 2 \text{ of } x = -4$$

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de x -as zijn $(2, 0)$

en $(-4, 0)$.

7 Kwadratische functies

- T5** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(-1, 0)$ en $(3, 0)$.

Het functievoorschrift van f is van de vorm $f(x) = a(x+1)(x-3)$.

Invullen van $x = 0$ en $y = -3$ geeft $a(0+1)(0-3) = -3$, oftewel $-3a = -3$, dus $a = 1$.

Het functievoorschrift van f is $f(x) = (x+1)(x-3)$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as zijn $(0, -2)$.

Het functievoorschrift van g is van de vorm $g(x) = ax^2 + bx - 2$.

Invullen van $x = -1$ en $y = 0$ geeft $a \times (-1)^2 + b \times -1 - 2 = 0$, oftewel $a - b - 2 = 0$.

Invullen van $x = 3$ en $y = 4$ geeft $a \times 3^2 + b \times 3 - 2 = 4$, oftewel

$$9a + 3b - 2 = 4.$$

Eerst herleiden.

$$a - b - 2 = 0$$

$$9a + 3b - 2 = 4$$

$$-b = -a + 2$$

$$3b = -9a + 6$$

$$b = a - 2$$

$$b = -3a + 2$$

Dan gelijkstellen.

$$a - 2 = -3a + 2$$

$$4a = 4$$

$$a = 1$$

Invullen geeft $b = 1 - 2 = -1$.

Het functievoorschrift van g is $g(x) = x^2 - x - 2$.

De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(2, 3)$.

Het functievoorschrift van h is van de vorm $h(x) = a(x-2)^2 + 3$.

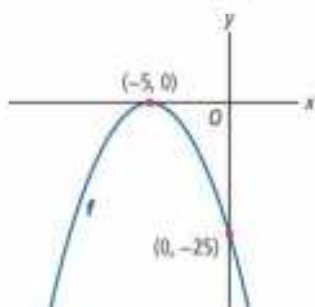
Invullen van $x = 0$ en $y = 2$ geeft $a \times (0-2)^2 + 3 = 2$, oftewel $4a + 3 = 2$, dus $4a = -1$ en $a = -\frac{1}{4}$.

Het functievoorschrift van h is $h(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 3$.

- T6 a** De grafiek van f is een bergparabool, want $a = -1$.

De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(-5, 0)$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, -25)$.



- b** De grafiek van g is een dalparabool, want $a = 1$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as zijn $(0, 0)$.

$$g(x) = x^2 + 8x$$

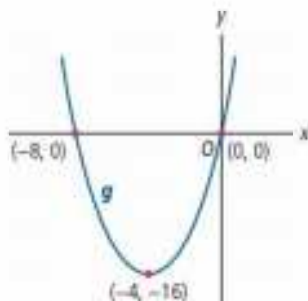
$$g(x) = x^2 + 8x$$

$$g(x) = x(x + 8)$$

$$g(x) = (x + 4)^2 - 16$$

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn $(0, 0)$

en $(-8, 0)$. De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(-4, -16)$.

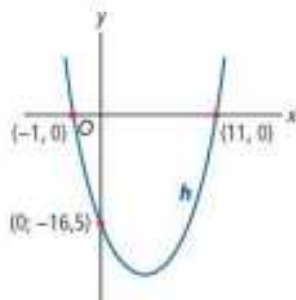


- c** De grafiek van h is een dalparabool, want $a = 1,5$.

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de x -as zijn

$(-1, 0)$ en $(11, 0)$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de y -as zijn $(0, -16,5)$.



- d** De grafiek van i is een dalparabool, want $a = 1$.

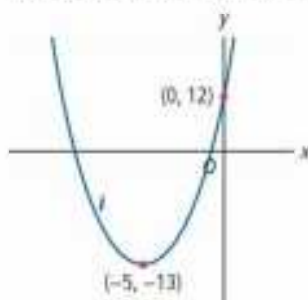
De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van i met de y -as zijn $(0, 12)$.

$$i(x) = x^2 + 10x + 12$$

$$i(x) = (x + 5)^2 - 25 + 12$$

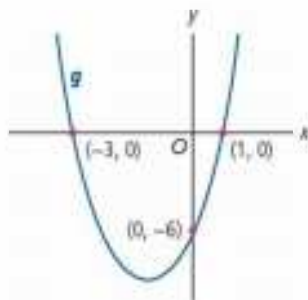
$$i(x) = (x + 5)^2 - 13$$

De coördinaten van de top van de grafiek van i zijn $(-5, -13)$.



7 Kwadratische functies

- T7 a** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van $g(x) = 2(x+3)(x-1)$ met de x -as zijn $(-3, 0)$ en $(1, 0)$.
- b** De grafiek van g is een dalparabool, want $a = 2$.
De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as zijn $(0, -6)$.



- c** Invullen van $x = 5$ geeft $g(5) = 2(5+3)(5-1) = 64$.
Nee, het punt $(5, 60)$ ligt niet op de grafiek van g .
- d** Invullen van $x = 0$ en $y = 9$ geeft $a(0+3)(0-1) = 9$, oftewel $-3a = 9$, dus $a = -3$.
- T8 a** De coördinaten van het snijpunt van de getekende grafiek met de y -as zijn $(0, 0)$, dus $c = 0$.
- b** Invullen van $c = 3$ geeft $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$.
Oplossen van $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 = 0$ geeft $D = 2^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 3 = 4 - 6 = -2$.
Nee, de parabool bij $c = 3$ heeft geen snijpunten met de x -as, want $D < 0$.
- c** Invullen van $c = -4$ geeft $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$.
Oplossen van $\frac{1}{2}x^2 + 2x - 4 = 0$ geeft $D = 2^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times -4 = 4 + 8 = 12$.
De parabool bij $c = -4$ heeft twee snijpunten met de x -as, want $D > 0$.
- d** Oplossen van $\frac{1}{2}x^2 + 2x + c = 0$ geeft $D = 2^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times c = 4 - 2c$.
Oplossen van $D = 0$ geeft $4 - 2c = 0$, oftewel $2c = 4$, dus $c = 2$.

Extra oefening

- E1 a** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(1, 0)$ en $(6, 0)$.
- b** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn $(-3, 0)$ en $(8, 0)$.
- c** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de x -as zijn $(-2, 0)$ en $(-3, 0)$.
- d** De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van i met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(-1, 0)$.
- E2 a** De formule van de symmetrieas is $x = (-1 - 3) : 2 = -2$.
Invullen van $x = -2$ geeft $f(-2) = -2(-2+1)(-2+3) = 2$.
De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(-2, 2)$.
- b** De formule van de symmetrieas is $x = (-4 + 6) : 2 = 1$.
Invullen van $x = 1$ geeft $g(1) = 4(1+4)(1-6) = -100$.
De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(1, -100)$.
- c** De formule van de symmetrieas is $x = (-2 + 4) : 2 = 1$.
Invullen van $x = 1$ geeft $h(1) = -(1+2)(1-4) = 9$.
De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(1, 9)$.
- d** De formule van de symmetrieas is $x = (-2 + 5) : 2 = 1\frac{1}{2}$.
Invullen van $x = 1\frac{1}{2}$ geeft $i(1\frac{1}{2}) = 10(1\frac{1}{2}+2)(1\frac{1}{2}-5) = -122\frac{1}{2}$.
De coördinaten van de top van de grafiek van i zijn $(1\frac{1}{2}, -122\frac{1}{2})$.

- E3** a De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(-1, 3)$.
 b De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(2, 4)$.
 c De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(-1, 0)$.
 d De coördinaten van de top van de grafiek van i zijn $(-1, 3)$.
 e De coördinaten van de top van de grafiek van j zijn $(2, 4)$.
 f De coördinaten van de top van de grafiek van k zijn $(0, 3)$.
- E4** Het functievoorschrift bij de grafiek van h is $h(x) = 3(x - 1)^2 + 2$.
- E5** a De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(-4, 0)$ en $(8, 0)$.
 b $f(x) = (x + 4)(x - 8)$
- | | | |
|----------|-------|-------|
| $\times$ | x | -8 |
| x | x^2 | $-8x$ |
| $+4$ | $+4x$ | -32 |
- $f(x) = x^2 - 4x - 32$
- c De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, -32)$.
 d $f(x) = (x + 4)(x - 8)$
 $f(x) = x^2 - 4x - 32$
 $f(x) = (x - 2)^2 - 4 - 32$
 $f(x) = (x - 2)^2 - 36$
 e De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(2, -36)$.

- E6** a $g(x) = (x + 5)(x - 3)$
- | | | |
|----------|-------|-------|
| $\times$ | x | -3 |
| x | x^2 | $-3x$ |
| $+5$ | $+5x$ | -15 |
- $g(x) = x^2 + 2x - 15$
 De coördinaat van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as zijn $(0, -15)$.
 $h(x) = (x + 3)^2 - 81$
- | | | |
|----------|-------|-------|
| $\times$ | x | $+3$ |
| x | x^2 | $+3x$ |
| $+3$ | $+3x$ | $+9$ |
- $h(x) = x^2 + 6x + 9 - 81$
 $h(x) = x^2 + 6x - 72$
 De coördinaat van het snijpunt van de grafiek van h met de y -as zijn $(0, -72)$.
 b $h(x) = (x + 3)^2 - 81$
 $h(x) = x^2 + 6x - 72$
 $h(x) = (x - 6)(x + 12)$
 De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de x -as zijn $(6, 0)$ en $(-12, 0)$.
 $i(x) = x^2 - 10x - 24$
 $i(x) = (x + 2)(x - 12)$
 De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van i met de x -as zijn $(-2, 0)$ en $(12, 0)$.

7 Kwadratische functies

c $g(x) = (x + 5)(x - 3)$

$$g(x) = x^2 + 2x - 15$$

$$g(x) = (x + 1)^2 - 1 - 15$$

$$g(x) = (x + 1)^2 - 16$$

De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(-1, -16)$.

De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(-3, -81)$.

$$i(x) = x^2 - 10x - 24$$

$$i(x) = (x - 5)^2 - 25 - 24$$

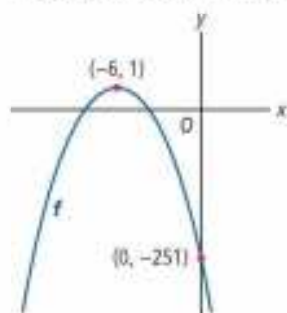
$$i(x) = (x - 5)^2 - 49$$

De coördinaten van de top van de grafiek van i zijn $(5, -49)$.

E7 a De grafiek van f is een bergparabool, want $a = -7$.

De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(-6, 1)$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, -251)$.



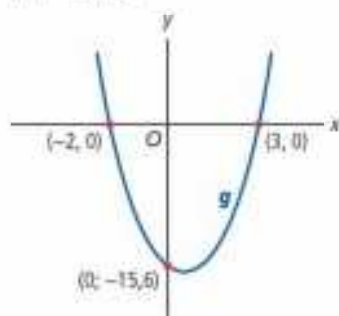
b De grafiek van g is een dalparabool, want $a = 2,6$.

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as zijn

$(-2, 0)$ en $(3, 0)$. De top van de grafiek van g ligt rechts van de y -as.

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as zijn

$(0, -15,6)$.



c De grafiek van h is een dalparabool, want $a = 1$.

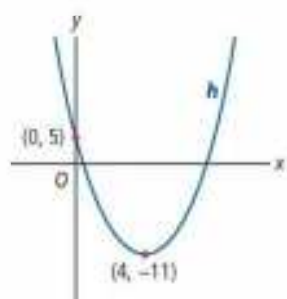
De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de y -as zijn $(0, 5)$.

$$h(x) = x^2 - 8x + 5$$

$$h(x) = (x - 4)^2 - 16 + 5$$

$$h(x) = (x - 4)^2 - 11$$

De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(4, -11)$.



E8 a De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as zijn $(0, 2)$, dus $c = 2$ en er geldt $f(x) = ax^2 + bx + 2$.

b Invullen van $x = 1$ en $y = 7$ geeft $a \times 1^2 + b \times 1 + 2 = 7$, oftewel $a + b + 2 = 7$.

c Invullen van $x = 4$ en $y = 4$ geeft $a \times 4^2 + b \times 4 + 2 = 4$, oftewel $16a + 4b + 2 = 4$.

d Eerst herleiden.

$$a + b + 2 = 7$$

$$b = -a + 5$$

$$16a + 4b + 2 = 4$$

$$4b = -16a + 2$$

$$b = -4a + \frac{1}{2}$$

Dan gelijkstellen.

$$-a + 5 = -4a + \frac{1}{2}$$

$$3a + 5 = \frac{1}{2}$$

$$3a = -4\frac{1}{2}$$

$$a = -1\frac{1}{2}$$

Invullen geeft $b = -(-1\frac{1}{2}) + 5 = 6\frac{1}{2}$.

e Het functievoorschrift bij de grafiek van f is $f(x) = -1\frac{1}{2}x^2 + 6\frac{1}{2}x + 2$.

E9 De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(3, 0)$. Het functievoorschrift van f is van de vorm $f(x) = a(x - 0)(x - 3)$, oftewel $f(x) = ax(x - 3)$.

Invullen van $x = 1$ en $y = 2$ geeft $a(1 - 0)(1 - 3) = 2$, oftewel $-2a = 2$, dus $a = -1$.

Het functievoorschrift van f is $f(x) = -x(x - 3)$.

De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(1, -2)$.

Het functievoorschrift van g is van de vorm $g(x) = a(x - 1)^2 - 2$.

Invullen van $x = 0$ en $y = -1$ geeft $a \times (0 - 1)^2 - 2 = -1$, oftewel $a - 2 = -1$, dus $a = 1$.

Het functievoorschrift van g is $g(x) = (x - 1)^2 - 2$.

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de y -as zijn $(0, 3)$, dus $c = 3$. Het functievoorschrift van h is van de vorm $h(x) = ax^2 + bx + 3$.

Invullen van $x = -2$ en $y = 0$ geeft $a \times (-2)^2 + b \times -2 + 3 = 0$, oftewel $4a - 2b + 3 = 0$.

Invullen van $x = 2$ en $y = 2$ geeft $a \times 2^2 + b \times 2 + 3 = 2$, oftewel

$$4a + 2b + 3 = 2.$$

Eerst herleiden.

$$4a - 2b + 3 = 0$$

$$-2b = -4a - 3$$

$$b = 2a + 1\frac{1}{2}$$

$$4a + 2b + 3 = 2$$

$$2b = -4a - 1$$

$$b = -2a - \frac{1}{2}$$

Dan gelijkstellen.

$$2a + 1\frac{1}{2} = -2a - \frac{1}{2}$$

$$4a + 1\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$4a = -2$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

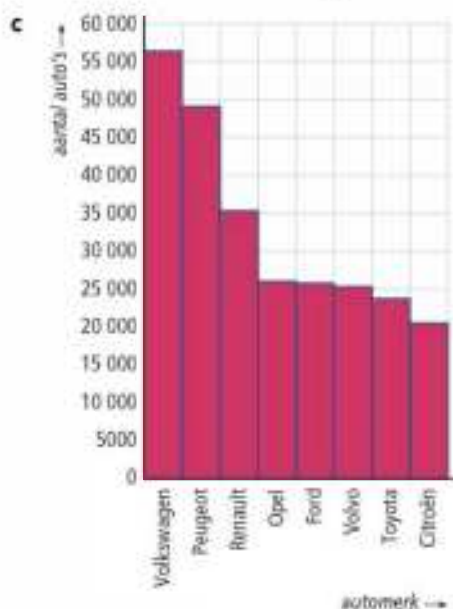
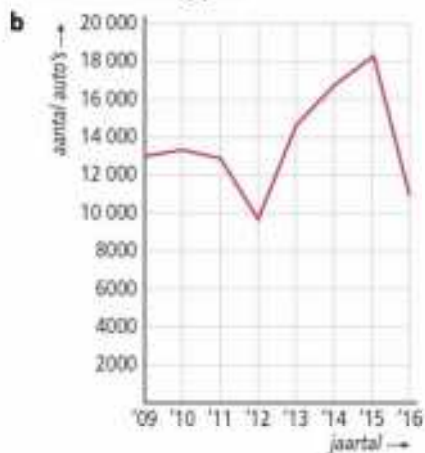
Invullen geeft $b = 2 \times -\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Het functievoorschrift van h is $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$.

8 Statistiek

Voorkennis

- V1 a Bij de rechter tabel is het zinvol een lijndiagram te tekenen, want daar zit een ontwikkeling in de tijd in. De linker tabel bestaat uit los van elkaar staande merken en typen.



d

aantal auto's	13 147	1	10 858
percentage	100	0,007...	82,589...

Tussen 2009 en 2016 is de verkoop van de Volkswagen Golf met ongeveer $100 - 83 = 17\%$ gedaald.

e

aantal auto's	25 474	1	56 666
percentage	100	0,003...	222,446...

In 2015 zijn er ongeveer $222 - 100 = 122\%$ meer Volkswagens verkocht dan Opels.

- V2 a Er zijn 30 waarnemingen.
 b Het gemiddelde cijfer van de leerlingen in klas 3A voor dit proefwerk is $(7 + 7 + 3 + 6 + \dots + 6 + 7 + 7 + 10) : 30 = 190 : 30 = 6,3$.
 c De frequentie van het cijfer 8 is 3.

d

<i>cijfer</i>	<i>frequentie</i>
3	2
4	1
5	6
6	7
7	8
8	3
9	2
10	1

e De modus is 6.

Het 15e cijfer is 6. Het 16e cijfer is 6. De mediaan is 6.

V3 a

<i>aantal telaatkomers</i>	<i>frequentie</i>
1	2
2	5
3	2
4	3
5	1
7	1

b Week 43 was de herfstvakantie en toen waren er natuurlijk geen telaatkomers.

c Er waren 3 weken met 4 telaatkomers.

d De modus is 2 telaatkomers.

e Het gemiddelde aantal telaatkomers over de veertien lesweken is
 $(2 \times 1 + 5 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 1 \times 5 + 1 \times 7) : 14 = 42 : 14 = 3$ telaatkomers per week.

V4 a Het lichtste ei dat nog in klasse 3 thuishoort, is precies 58,0 gram.

b Het zwaarste ei dat nog in klasse 3 thuishoort, is iets minder dan 63,0 gram.

c

<i>klasse</i>	<i>frequentie</i>
1	4
2	7
3	13
4	12
5	7
6	5
7	2

d Er komen vier eieren in klasse 1.

V5 Het totale gewicht van de 50 eieren is

$$4 \times 70,5 + 7 \times 65,5 + 13 \times 60,5 + 12 \times 55,5 + 7 \times 50,5 + 5 \times 45,5 + 2 \times 40,5 = 2855 \text{ gram.}$$

Het gemiddelde gewicht van de 50 eieren is $2855 : 50 = 57,1$ gram.

8 Statistiek

8.1 Absoluut en relatief

intro 3000 ongevallen is natuurlijk heel veel, maar ten opzichte van het totaal aantal vluchten (en dat zijn er heel veel!) valt het dan wel weer mee.

- 1 a** Het hoogste cijfer in klas 3B is een 9,4.
b In klas 3A zijn 21 voldoende behaald.
c In klas 3B zijn ook 21 voldoende behaald.
d In klas 3A behaalde 21 van de 25 leerlingen een voldoende.

<i>aantal leerlingen</i>	25	1	21
<i>percentage</i>	100	4	84

In klas 3A behaalde 84% van de leerlingen een voldoende.

- e** In klas 3B behaalde 21 van de 30 leerlingen een voldoende.

<i>aantal leerlingen</i>	30	1	21
<i>percentage</i>	100	3,333...	70

In klas 3B behaalde 70% van de leerlingen een voldoende.

- f** Klas 3A heeft het proefwerk het best gemaakt, want in deze klas zijn naar verhouding de meeste voldoende behaald.

- 2 a** In 1990 ging het om 36 van de 72 verkeersdoden.

<i>aantal verkeersdoden</i>	72	36
<i>percentage</i>	100	50

In 1990 was het percentage in diep water ongeveer 50%.

In 1995 ging het om 30 van de 60 verkeersdoden.

In 1995 was het percentage in diep water ongeveer 50%.

In 2000 ging het om 25 van de 51 verkeersdoden.

In 2000 was het percentage in diep water ongeveer 49%.

In 2005 ging het om 23 van de 47 verkeersdoden.

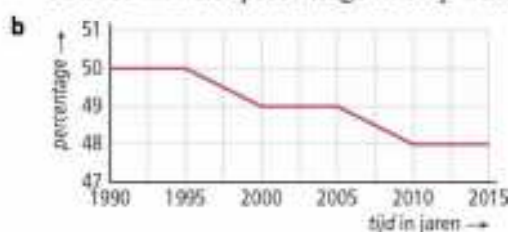
In 2005 was het percentage in diep water ongeveer 49%.

In 2010 ging het om 21 van de 44 verkeersdoden.

In 2010 was het percentage in diep water ongeveer 48%.

In 2015 ging het om 20 van de 42 verkeersdoden.

In 2015 was het percentage in diep water ongeveer 48%.



- c** De uitspraak lijkt te kloppen, want de grafiek laat een daling zien, maar de verschillen tussen ongeveer 50% en ongeveer 48% zijn niet erg groot. Daar komt bij dat bij een klein beetje onnauwkeurig aflezen, de grafiek er anders uit kan komen te zien.

- 3 a** De absolute frequentie van de klassieke cd's is 18.

<i>aantal cd's</i>	80	1	18
<i>percentage</i>	100	1,25	22,5

De relatieve frequentie van de klassieke cd's is 22,5%.

- b De relatieve frequentie van de hiphop cd's is 12,5%.

<i>aantal cd's</i>	72	0,72	9
<i>percentage</i>	100	1	12,5

De absolute frequentie de hiphop cd's is 9.

- 4 a De getallen 1565 en 1731 geven absolute frequenties weer.

- b De percentages geven relatieve frequenties weer.

	<i>school A</i>	<i>school B</i>
<i>onderbouw</i>	626	814
<i>bovenbouw vmbo</i>	282	242
<i>bovenbouw havo</i>	344	346
<i>bovenbouw vwo</i>	313	329

- d Nee, school A heeft absoluut gezien twee leerlingen minder in de bovenbouw havo dan school B.

- e De uitspraak klopt niet altijd. Je ziet dat bijvoorbeeld aan de drie afdelingen van de bovenbouw. Bij school B zijn de relatieve frequenties lager dan bij school A. Maar bij school B zijn de absolute frequenties bij de bovenbouw vmbo lager dan bij school A en bij de bovenbouw havo en bij de bovenbouw vwo hoger.

- 5 a De getallen bij de verticale as stellen relatieve frequenties voor.

- b Je kunt aflezen dat er in 1980 per 100 000 inwoners 0,5 inwoners aan griep gestorven zijn. In 1980 had Nederland 14,1 miljoen inwoners en dat is $141 \times 100\,000$ inwoners. In dat jaar zijn $141 \times 0,5 = 70$ Nederlanders aan griep gestorven.

- c In 1986 zijn er per 100 000 inwoners 3 aan griep gestorven.

In 1986 is 0,003% van de Nederlandse bevolking aan griep gestorven.

- d De uitspraak moet zijn: 'In Nederland was de sterfte aan griep in 1990 in verhouding drie keer zo hoog als in 1980.'

- 6 a

<i>aantal aansluitingen</i> × miljoen	18,6	1	19,8
<i>percentage ten opzichte van 2007</i>	100	5,3763...	106,451...

Het percentage dat bij het jaar 2008 hoort is ongeveer 106,5.

- b

<i>tijd in jaren</i>	2007	2008	2009	2010	2011
<i>aantal aansluitingen</i> × miljoen	18,6	19,8	19,4	19,0	17,9
<i>percentage ten opzichte van 2007</i>	100	106,5	104,3	102,2	96,2

- 7 a In 2012 was de gemiddelde prijs van een huis 228 000 euro.

<i>prijs</i> × 1000 euro	240	1	228
<i>percentage</i>	100	0,416...	95

De prijs is in 2012 met $100 - 95 = 5\%$ gedaald.

- b

<i>tijd in jaren</i>	2008	2010	2011	2012	2014	2016
<i>prijs</i> × 1000 euro	248	240	240	228	221	244
<i>indexcijfer ten opzichte van 2011</i>	103,3	100	100	95	92,1	101,7

8 Statistiek

- 03 a 68 is de absolute frequentie.

<i>aantal wonderlijke wereldplaatjes</i>	160	1	68
<i>percentage</i>	100	0,625	42,5

Roan had al 42,5% van de wonderlijke wereldplaatjes gespaard.

- c De relatieve frequentie is 42,5%.

<i>aantal wonderlijke wereldplaatjes</i>	160	1,6	52
<i>percentage</i>	100	1	32,5

Tirza had 52 van die plaatjes.

- e De absolute frequentie is 52 en de relatieve frequentie is 32,5%.

U1

	<i>week 31 in kg</i>	<i>week 32 in kg</i>	<i>toename in kg</i>
<i>Elstar</i>	108	143,5	35,5
<i>Jonagold</i>	62,1	87,5	25,4
<i>Golden Delicious</i>	67,5	73,5	6
<i>Granny Smith</i>	32,4	45,5	13,1

Voor Elstar is de toename van de verkoop in absolute getallen het grootst.

- U2 a Bij 2004 is het indexcijfer 100, dus het jaar 2004 is als basisjaar genomen.

- b In 2002 waren de voedselprijzen 80% van die in 2004.

In 2012 waren de voedselprijzen 202% van die in 2014.

- c In 2009 en in 2012 zijn de voedselprijzen ten opzichte van het jaar daarvoor gedaald.

- d Het indexcijfer van 2010 is 170 en het indexcijfer van 2011 is 226.

<i>indexcijfer</i>	170	1	226
<i>percentage</i>	100	0,588...	132,941...

Het indexcijfer is met ongeveer 33% gestegen, dus de voedselprijzen ook.

Carel heeft gelijk.

8.2 Indeling in klassen

intro Sommige mensen hebben liever kleine spruitjes, anderen liever grote spruitjes.

Nee, veel spruitjes hebben een gemiddelde grootte. Hele kleine en hele grote spruitjes zullen minder vaak voorkomen.

- 8 a Zijn lengte komt in de klasse vanaf 125 tot 135 cm.
 b Haar lengte komt in de klasse vanaf 95 tot 105 cm.
 c De lengte van het kleinste kind dat nog tot de eerste klasse kan behoren is 85,0 cm.
 d De lengte van het grootste kind is 94,999 999... cm.
 e Het klassenmidden van de eerste klasse is 90 cm.
 f De modale klasse is de klasse vanaf 115 tot 125 cm.
 g $12 + 34 + 64 + 77 + 56 + 42 + 55 + 35 = 375$
 De mediaan daarvan is het kind met nummer $(375 + 1) : 2 = 188$.
 In de klassen vanaf 85 tot 125 cm zitten $12 + 34 + 64 + 77 = 187$ kinderen.
 De mediaan zit dus in de klasse vanaf 125 tot 135 cm.
 h Deze dag mogen $64 + 77 + 56 = 197$ kinderen van de attractie gebruik maken.

9 a

<i>aantal mm regen</i>	<i>frequentie</i>
$[0, 5)$	10
$[5, 10)$	2
$[10, 15)$	4
$[15, 20)$	4
$[20, 25)$	6
$[25, 30)$	6
$[30, 35)$	4
$[35, 40)$	1
$[40, 45)$	4
$[45, 50)$	1

$[0, 5)$	10
$[5, 10)$	2
$[10, 15)$	4
$[15, 20)$	4
$[20, 25)$	6
$[25, 30)$	6
$[30, 35)$	4
$[35, 40)$	1
$[40, 45)$	4
$[45, 50)$	1

b De klassenbreedte is 5 millimeter.**c** De klassengrenzen van de vierde klasse zijn 15 mm en 20 mm.**d** De gemiddelde regenval is $(10 \times 2,5 + 2 \times 7,5 + 4 \times 12,5 + 4 \times 17,5 + 6 \times 22,5 + 6 \times 27,5 + 4 \times 32,5 + 1 \times 37,5 + 4 \times 42,5 + 1 \times 47,5) : 42 = 845 : 42 \approx 20,1$ mm per dag.**e** Het werkelijk gemiddelde is $822 : 42 = 19,6$ mm regen per dag.

<i>aantal mm regen per dag</i>	$822 : 42$	$845 : 42$
<i>percentage</i>	100	102,798...

Het antwoord bij opdracht d wijkt ongeveer 2,8% van het werkelijke gemiddelde af.

f De modale klasse is de klasse $[0, 5)$.**g** Er is van 42 dagen de hoeveelheid regen genoteerd.

De mediaan ligt dan tussen dag nummer 21 en dag nummer 22.

In de klassen tot 20 mm zitten $10 + 2 + 4 + 4 = 20$ dagen.De mediaan ligt in de klasse $[20, 25)$.**10 a** De klasse $[40, 45)$ loopt vanaf 40 jaar tot 45 jaar. Het klassenmidden is 42,5 jaar.**b** In de klasse $[40, 45)$ komen de gewichten vanaf 40 kg tot 45 kg terecht. Het klassenmidden van deze klasse is 42,5 kg.**c** In de klasse $[40, 45)$ zitten de aantallen vanaf 40 kaartjes tot 45 kaartjes oftewel 40, 41, 42, 43 en 44 kaartjes. Het klassenmidden van deze klasse is 42 kaartjes.**11 a** De klasse 18 tot en met 21 jaar is de modale klasse.**b** In de klasse $[10, 14)$ zitten de leeftijden vanaf 10 jaar tot 14 jaar, dus dat zijn de leeftijden 10, 11, 12 en 13 jaar.**c** De intervalnotatie van de laatste klasse is $[38, 42)$.**d** De klassenbreedte is $10 - 6 = 4$ jaar, $14 - 10 = 4$ jaar, $18 - 14 = 4$ jaar, enzovoort.**e** De klasse 10 tot en met 13 jaar loopt vanaf 10 jaar tot 14 jaar en het klassenmidden daarvan is $(10 + 14) : 2 = 12$ jaar.**f** De gemiddelde leeftijd van de leden is

$$(25 \times 8 + 30 \times 12 + 35 \times 16 + 40 \times 20 + 35 \times 24 + 25 \times 28 + 5 \times 32 + 0 \times 36 + 5 \times 40) : 200 = 3820 : 200 = 19,1 \text{ jaar.}$$

g De mediaan zit tussen lid nummer 100 en lid nummer 101 in.In de klassen 6 tot en met 17 jaar zitten $25 + 30 + 35 = 90$ leden.

De mediaan ligt in de klasse 18 tot en met 21 jaar.

8 Statistiek

- 12 a** De klassenbreedte hierbij is 2 jaar.
- b** De klassengrenzen van de eerste klasse zijn 6 jaar en 8 jaar en het klassenmidden is 7 jaar. De klassengrenzen van de laatste klasse zijn 40 jaar en 42 jaar en het klassenmidden is 41 jaar.
- c** Er zijn $12 + 13 + 14 + 16 + 17 = 72$ pupillen, $18 + 19 + 21 + 20 + 15 = 93$ junioren en $14 + 11 + 5 + 5 = 35$ senioren lid.
- d** Het staafdiagram geeft de beste informatie over de leeftijden van de leden, want daarin zie je per twee jaar het aantal leden.
- 13 a** De rechterklassengrens hoort nu ook bij de klasse. De twee klassen zijn niet even breed.
- b** De eerste klasse eindigt bij 199 gram, de tweede begint bij 200 gram. De gewichten zijn dus afgerond op hele grammen. De werkelijke klassengrenzen van de klasse $[200, 219]$ zijn 199,5 gram en 219,5 gram (vanaf 199,5 gram tot 219,5 gram). Het klassenmidden is $(199,5 + 219,5) : 2 = 209,5$ gram.
- c** De klassenmiddens zijn 184,5 gram, 209,5 gram, 229,5 gram, 249,5 gram en 274,5 gram.
Het gemiddelde gewicht van de peren is
 $(14 \times 184,5 + 36 \times 209,5 + 60 \times 229,5 + 48 \times 249,5 + 42 \times 274,5) : 200 = 47\,400 : 200 = 237$ gram.
- d** De gewichten van de peren binnen een klasse moeten gelijk verdeeld zijn over de hele klasse.
- 09 a** Bij 58 staat een puntige haak. Bij 66 staat een rechte haak.
- b** De klassengrenzen 41 en 47 horen er bij, de klassengrenzen 12 en 19 niet.
- c** Bij 24 staat een dicht rondje, dus 24 hoort er bij. Ook 29 hoort er bij.
- d** $[24, 29]$
- e** $B [36, 40)$, $C (29, 33]$ en $D (80, 82)$
- U3 a** De klassenbreedte 2 jaar geeft de meeste informatie.
- b** Er zijn $12 + 13 + 14 + 16 + 17 = 72$ pupillen, $18 + 19 + 21 + 20 + 15 = 93$ junioren en $14 + 11 + 5 + 5 = 35$ senioren lid.
- c** Hij heeft met een klassenbreedte 10 jaar gerekend, maar in het diagram een klassenbreedte van 2 jaar getekend.
- d** Er zitten 13 leden in de klasse vanaf 8 tot 10 jaar, dus van 8 of 9 jaar.
In het staafdiagram lees je af dat bij de pupillen en junioren geldt dat bij een iets hogere leeftijd er meer leden zijn. Dus waarschijnlijk zijn er van de 13 leden van 8 of 9 jaar iets meer 9 jaar dan 8 jaar.
De vereniging heeft waarschijnlijk 6 leden van 8 jaar en 7 leden van 9 jaar.

8.3 Spreidingsmaten

intro Nee, de temperaturen in Amsterdam lopen uiteen van 2°C tot 19°C , die van Irkoetsk van -28°C tot 18°C .

- 14 a** De gemiddelde jaartemperatuur in Brest is
 $(6 + 6 + 7 + 10 + 12 + 15 + 17 + 16 + 15 + 12 + 10 + 6) : 12 = 132 : 12 = 11^\circ\text{C}$.
 De gemiddelde jaartemperatuur in Pueblo is
 $(0 + 1 + 5 + 10 + 15 + 20 + 24 + 23 + 18 + 11 + 5 + 0) : 12 = 132 : 12 = 11^\circ\text{C}$.

- b In Pueblo is het verschil tussen de hoogste en de laagste temperatuur veel groter dan in Brest.
- 15** Bij de groep brugklasleerlingen zullen de leeftijden dichter rondom het gemiddelde liggen, want die kinderen zijn allemaal 11, 12 of 13 jaar oud. Bij een groep docenten kan de leeftijd variëren van ongeveer 20 jaar tot ruim 60 jaar.
- 16** a
- | | | | | | | | | | | | | |
|----------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| <i>nummer van de maand</i> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| <i>afwijking in °C</i> | 5 | 5 | 4 | 1 | 1 | 4 | 6 | 5 | 4 | 1 | 1 | 5 |
- b Het gemiddelde van deze afwijkingen is
 $(5 + 5 + 4 + 1 + 1 + 4 + 6 + 5 + 4 + 1 + 1 + 5) : 12 = 42 : 12 = 3,5 \text{ °C}$.
- c De gemiddelde afwijking van het jaargemiddelde in Pueblo is
 $(11 + 10 + 6 + 1 + 4 + 9 + 13 + 12 + 7 + 0 + 6 + 11) : 12 = 90 : 12 = 7,5 \text{ °C}$.
 In Brest is die gemiddelde afwijking kleiner dan in Pueblo.
- 17** a De gemiddelde middagtemperatuur is
 $(18 + 20 + 24 + 27 + 25 + 23 + 17) : 7 = 154 : 7 = 22 \text{ °C}$.
- b De gemiddelde afwijking van die gemiddelde middagtemperatuur is
 $(4 + 2 + 2 + 5 + 3 + 1 + 5) : 7 = 22 : 7 = 3,1 \text{ °C}$.
- 18** a De mediaan is 40,5 seconden.
 b De mediaan van de langzaamste helft van de tijden is 44,5 seconden.
 c De mediaan van de snelste helft van de tijden is 36 seconden.
 d Dat verschil is $46 - 25 = 21$ seconden.
- 19** Het eerste kwartiel is 16, het derde kwartiel is 26, de kwartielfstand is $26 - 16 = 10$ en de spreidingsbreedte is $40 - 14 = 26$.
- 20** a De kwartielfstand van rij A is $55 - 15 = 40$.
 De kwartielfstand van rij B is $68,5 - 1,5 = 67$.
 De kwartielfstand van rij C is $37,5 - 32,5 = 5$.
- b Van rij A is het gemiddelde 35.
 De afwijkingen van het gemiddelde zijn 35, 25, 15, 5, 5, 15, 25 en 35.
 De gemiddelde afwijking van het gemiddelde van rij A is $160 : 8 = 20$.
 Van rij B is het gemiddelde 35.
 De afwijkingen van het gemiddelde zijn 35, 34, 33, 32, 32, 33, 34 en 35.
 De gemiddelde afwijking van het gemiddelde van rij B is $268 : 8 = 33,5$.
 Van rij C is het gemiddelde 35.
 De afwijkingen van het gemiddelde zijn 35, 3, 2, 1, 1, 2, 3 en 35.
 De gemiddelde afwijking van het gemiddelde van rij C is $82 : 8 = 10,25$.
 De gemiddelde afwijking van het gemiddelde is bij rij C het kleinst. De waarnemingen van rij C liggen het dichtst bij het gemiddelde van de rij.
- c Bij elke rij is de spreidingsbreedte $70 - 0 = 70$. De rijen zijn echter zeer verschillend zodat de spreidingsbreedte geen geschikte maat voor de spreiding is.
- 017** a $(15 + 23 + 31 + 37 + 19 + 44 + 27) : 7 = 196 : 7 = 28$ minuten.
 b De afwijkingen op de andere dagen zijn 5, 3, 9, 9, 16 en 1 minuten.
 c De gemiddelde afwijking van het gemiddelde is
 $(13 + 5 + 3 + 9 + 9 + 16 + 1) : 7 = 56 : 7 = 8$ minuten.

8 Statistiek

- 019** a De mediaan zit tussen de laatste waarneming van de eerste rij en de eerste waarneming van de tweede rij. Beide zijn 52, dus de mediaan is 52.
 b Van de 13 waarnemingen van de eerste rij is de 7e waarneming de mediaan, en dat is 41.
 c Het derde kwartiel is de 7e waarneming van de tweede rij, en dat is 60.
 d De kwartielfstand is $60 - 41 = 19$.
 e De spreidingsbreedte is $80 - 32 = 48$.
 f Het eerste kwartiel is $(19 + 20) : 2 = 19,5$,
 het derde kwartiel is $(29 + 33) : 2 = 31$.
 De kwartielfstand is $31 - 19,5 = 11,5$.
 De spreidingsbreedte is $43 - 17 = 26$.
- U4** A Als de prijzen met 5 cent stijgen, blijft de spreidingsbreedte gelijk, want de spreidingsbreedte is het verschil tussen de hoogste prijs en de laagste prijs en zowel de hoogste prijs als de laagste prijs stijgt met 5 cent.
 Als de prijzen met 5 procent stijgen, stijgt de spreidingsbreedte met 5%, want de spreidingsbreedte is het verschil tussen de hoogste prijs en de laagste prijs en zowel de hoogste prijs als de laagste prijs stijgt met 5%.
- B Als de prijzen met 5 cent stijgen, stijgt de mediaan met 5 cent, want alle prijzen stijgen met 5 cent.
 Als de prijzen met 5 procent stijgen, stijgt de mediaan met 5%, want alle prijzen stijgen met 5%.
- C Als de prijzen met 5 cent stijgen, stijgt het gemiddelde met 5 cent, want alle prijzen stijgen met 5 cent.
 Als de prijzen met 5 procent stijgen, stijgt het gemiddelde met 5%, want alle prijzen stijgen met 5%.
- D Als de prijzen met 5 cent stijgen, blijft de gemiddelde afwijking van het gemiddelde gelijk, want het gemiddelde stijgt met 5 cent, maar ook alle prijzen stijgen met 5 cent, dus de afwijkingen van het gemiddelde blijven hetzelfde.
 Als de prijzen met 5 procent stijgen, stijgt de gemiddelde afwijking van het gemiddelde met 5%, want het gemiddelde stijgt met 5%, maar ook alle prijzen stijgen met 5%, dus de afwijkingen van het gemiddelde stijgen ook met 5%.
- E Als de prijzen met 5 cent stijgen, stijgen de kwartielen met 5 cent, want alle prijzen stijgen met 5 cent.
 Als de prijzen met 5 procent stijgen, stijgen de kwartielen met 5%, want alle prijzen stijgen met 5%.
- F Als de prijzen met 5 cent stijgen, blijft de kwartielfstand gelijk, want de kwartielfstand is het verschil tussen het derde kwartiel en het eerste kwartiel en zowel het derde kwartiel als het eerste kwartiel stijgt met 5 cent.
 Als de prijzen met 5 procent stijgen, stijgt de kwartielfstand met 5%, want de kwartielfstand is het verschil tussen het derde kwartiel en het eerste kwartiel en zowel het derde kwartiel als het eerste kwartiel stijgt met 5%.
- U5** Het kan bijvoorbeeld gaan om de getallen 4, 8, 9, 11, 12 en 16.

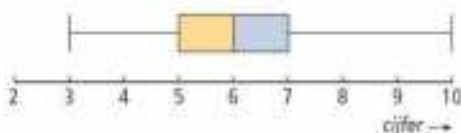
8.4 Boxplot

intro Van de 20 kinderen komen er telkens vijf in een lengteklasse.

De lengteklasse M bevat kinderen met de lengte 161 cm tot en met 165 cm.

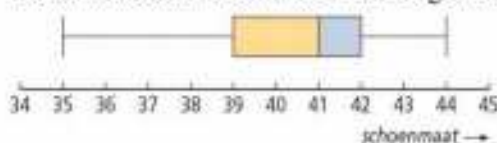
De lengteklasse XL bevat kinderen met de lengte 169 cm tot en met 174 cm.

- 21**
- a De mediaan is Cito-score 538.
 - b $Q_1 = 536,5$ en $Q_3 = 540,5$ dus de kwartielfstand is $540,5 - 536,5 = 4$.
 - c Tussen Q_1 en Q_3 liggen 16 van de 32 Cito-scores en dat is 50% van de Cito-scores.
 - d Kleiner dan Q_1 zijn 8 van de 32 Cito-scores en dat is 25% van de Cito-scores.
- 22**
- a Tussen 30 en 55 zit 25% van de waarnemingen.
 - b Groter dan 30 is 75% van de waarnemingen.
- 23**
- a Ongeveer 75% van de ondervraagde mensen slaapt meer dan 6 uur per etmaal.
 - b Ongeveer 50%, dus 472 van de ondervraagde mensen slapen tussen 6 uur en 8 uur per etmaal.
 - c Tussen 6 uur en 7,5 uur slaap zit ongeveer 25%, dus 236 van de ondervraagde mensen. Tussen 7,5 uur en 8 uur slaap zit ook ongeveer 25%, dus ook 236 van de ondervraagde mensen. Ja, in beide delen zitten 236 mensen.
- 24**
- a De kwartielfstand van de gewichten van de meisjes is $54 - 47 = 7$ kg.
 - b De kwartielfstand van de gewichten van de jongens is $63 - 58 = 5$ kg.
 - c De spreidingsbreedte van de gewichten van de meisjes is $60 - 45 = 15$ kg. De spreidingsbreedte van de gewichten van de jongens is $70 - 55 = 15$ kg. Bij beide groepen is de spreidingsbreedte even groot.
 - d Ja, zelfs meer dan driekwart. De lichtste jongen weegt 55 kg en het derde kwartiel bij de meisjes is 54 kg.
 - e Het zwaarste meisje weegt 60 kg en 50% van de jongens weegt meer.
- 25**
- a Op volgorde: 1, 2, 4, 6, 6, 8, 8, 9.
De mediaan is 6, $Q_1 = 3$ en $Q_3 = 8$. Ze zijn goed getekend.
 - b Tussen 3 en 6 ligt één getal, dat is 12,5% van de rij getallen.
Tussen 6 en 8 liggen nul getallen, dat is dus 0% van de rij getallen.
 - c Volgens de boxplot van Jo is dat 25% voor beide.
 - d Bij een klein aantal getallen kloppen de percentages niet. Het maakt dan veel uit of bijvoorbeeld de mediaan wel of niet meegeteld moet worden.
- 26**
- a Het totaal van de frequenties is $5 + 8 + 22 + 36 + 43 + 12 + 9 + 3 = 138$.
 - b De mediaan ligt precies tussen het 69e cijfer en het 70e cijfer, dus neem je het gemiddelde van die twee cijfers.
Het 69e cijfer is een 6 en het 70e cijfer is een 6, dus de mediaan is een 6.
 - c Het eerste kwartiel is het 35e cijfer en dat is een 5.
Het derde kwartiel is het 104e cijfer en dat is een 7.
 - d e



8 Statistiek

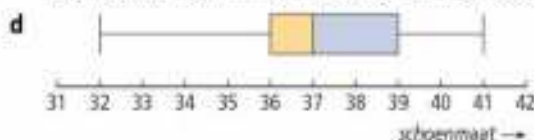
- 27** De totale frequentie is $12 + 19 + 31 + 44 + 58 + 89 + 116 + 77 + 65 + 21 = 532$.
 De mediaan ligt tussen de 266e en de 267e schoenmaat, dus schoenmaat 41.
 Het eerste kwartiel ligt tussen de 133e schoenmaat en de 134e schoenmaat, dus schoenmaat 39.
 Het derde kwartiel ligt tussen de 399e schoenmaat en de 400e schoenmaat, dus schoenmaat 42.
 De kleinste is schoenmaat 35 en de grootste is schoenmaat 44.



- 28 a**
-

- b** Bij de zilveruitjes is de spreidingsbreedte $162 - 152 = 10$.
 Bij de Amsterdamse uitjes is de spreidingsbreedte $160 - 152 = 8$.
 Bij de zilveruitjes is de spreidingsbreedte het grootst.
- c** Bij beide soorten uitjes ligt Q_1 bij de 63e pot en ligt Q_3 bij de 188e pot.
 Bij de zilveruitjes is de $Q_1 = 155$ en $Q_3 = 159$.
 Bij de zilveruitjes is de kwartielfstand $159 - 155 = 4$.
 Bij de Amsterdamse uitjes is de $Q_1 = 154$ en $Q_3 = 157$.
 Bij de Amsterdamse uitjes is de kwartielfstand $157 - 154 = 3$.
 Bij de zilveruitjes is de kwartielfstand het grootst.
 De kwartielfstand is in de boxplot de breedte van de box. De box is bij de zilveruitjes breder dan die bij de Amsterdamse uitjes.
- 023 a** Uit de boxplot lees je af: mediaan = 2700 en $Q_1 = 2000$.
 Tussen de mediaan en Q_1 ligt 25% van alle waarnemingen.
- b** $Q_1 = 2000$ dus 75% van de spaarlampen ging meer dan 2000 uren mee.
- c** 75% van 560 is $560 : 4 \times 3 = 420$.
 420 spaarlampen gingen meer dan 2000 branduren mee.
- d** In beide gevallen gaat het om 25% van de spaarlampen.

- 027 a** $11 + 16 + 25 + 40 + 52 + 73 + 96 + 58 + 37 + 12 = 420$, klopt.
- b** $420 : 2 = 210$, dus de mediaan is het midden tussen de eerste 210 waarnemingen en de tweede 210 waarnemingen.
 $210 : 2 = 105$, dat betekent dat het eerste kwartiel het midden is tussen de 105e waarneming en de 106e waarneming.
 Zo ook is het derde kwartiel het midden tussen de 315e waarneming en de 316e waarneming.
- c** De 210e schoenmaat is 37, de 211e schoenmaat is 37, dus de mediaan is 37.
 De 105e schoenmaat is 36, de 106e schoenmaat is 36, dus $Q_1 = 36$.
 De 315e schoenmaat is 39, de 316e schoenmaat is 39, dus $Q_3 = 39$.



- U6** Bij staafdiagram 1 hoort een boxplot waarvan de mediaan precies in het midden ligt, Q_1 ligt precies midden tussen de kleinste waarde en de mediaan en Q_3 ligt precies midden tussen de mediaan en de grootste waarde. Bij staafdiagram 1 hoort boxplot C.
- Bij staafdiagram 2 hoort een boxplot waarvan de afstand tussen de kleinste waarde en Q_1 , tussen Q_1 en de mediaan, tussen de mediaan en Q_3 en tussen Q_3 en de grootste waarde steeds kleiner wordt. Bij staafdiagram 2 hoort boxplot A.
- Bij staafdiagram 3 hoort een boxplot waarvan de mediaan precies in het midden ligt, Q_1 ligt dichterbij de mediaan dan bij de kleinste waarde en Q_3 ligt dichterbij de mediaan dan bij de grootste waarde. Bij staafdiagram 3 hoort boxplot D.
- Bij staafdiagram 4 hoort een boxplot waarvan de mediaan precies in het midden ligt, Q_1 ligt dichterbij de kleinste waarde dan bij de mediaan en Q_3 ligt dichterbij de grootste waarde dan bij de mediaan. Bij staafdiagram 4 hoort boxplot B.

8.5 Data verwerken

intro In alle drie de situaties heeft de speler een voorkeur voor bepaalde plekken op het tennisveld en op het dartsbord en in het doel. De tennisser links, in het midden en rechts; de darter voor de 20 en de 19 en bij voetbal in de hoeken.

- 29 a** Volgens de peiling in de laatste week boekten de VVD, SP, D66, SGP, PvdD en 50+ winst ten opzichte van 2010.

b Nee, volgens de laatste peiling zouden ze $35 + 14 + 18 = 67$ zetels halen.

c In 2010 haalde de PvdA 30 van de 150 zetels en dat is 20% van de kiezers.

d

<i>aantal mensen</i> in miljoenen	12,5	0,125	9,425
-----------------------------------	------	-------	-------

<i>percentage</i>	100	1	75,4
-------------------	-----	---	------

In 2010 gingen 9,425 miljoen mensen stemmen.

In 2010 haalde de SP 15 van de 150 zetels en dat is 10% van de kiezers.

In 2010 stemden ongeveer 0,9425 miljoen mensen oftewel 942 500 mensen op de SP.

- e** Volgens het diagram haalde de VVD in de week van 10 augustus tot 17 augustus een winst van $35 - 32 = 3$ zetels. Als dat ook de vier weken daarna zou gebeuren, dan zou de VVD zelfs op $35 + 4 \times 3 = 47$ zetels uitkomen. De uitspraak van Mark zou dan uitkomen. Op deze manier verder redenerend zou de VVD dan bijvoorbeeld 38 weken later op $35 + 38 \times 3 = 149$ zetels uitkomen en dat is natuurlijk ondenkbaar.

Verder verlopen peilingen niet zo mooi regelmatig, maar grilliger. Het is dus maar de vraag of de uitspraak van Mark zou uitkomen. Misschien even googelen naar de echte uitslag van de verkiezingen op 12 september 2012?

- 30 a**
- | | | | |
|--------------------------------|-----|-----|-------|
| <i>aantal ton</i> in miljoenen | 270 | 2,7 | 54,27 |
| <i>percentage</i> | 100 | 1 | 20,1 |

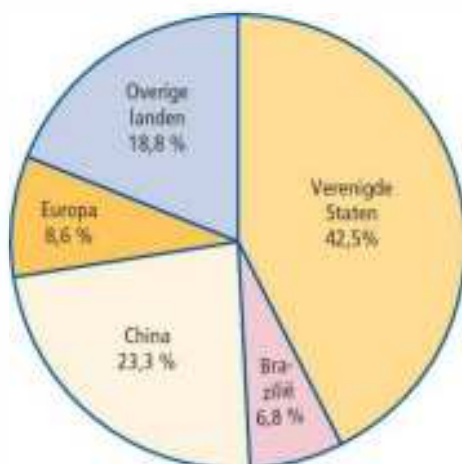
Van de sojabonen kwam 54,27 miljoen ton uit Argentinië.

- b** In de Verenigde Staten werd $34,6 - 20,1 = 14,5\%$ sojabonen meer verbouwd dan in Argentinië.

8 Statistiek

- c Uit de overige landen kwam $730 - 310 - 50 - 170 - 63 = 137$ miljoen ton.

<i>aantal ton in miljoenen</i>	730	1	310	50	170	63	137
<i>percentage</i>	100	0,136...	42,465...	6,849...	23,287...	8,630...	18,767...
<i>aantal graden</i>	360	0,493...	153	25	84	31	68



- 31 a** Het is niet mogelijk een grafiek bestaande uit één lijn te tekenen die in de buurt van zoveel mogelijk van de 100 punten ligt. Het is wel mogelijk een grafiek bestaande uit een soort kring te tekenen die in de buurt van zoveel mogelijk van de 100 punten ligt. Die kring wordt dan aan de onderkant ongeveer begrensd door de lijn door de punten (0, 500) en (10, 2000) en aan de bovenkant door de lijn door de punten (0, 1200) en (10, 2300).
- b** Als het aantal uren sport per week toeneemt, dan neemt ook de hoogte van het inkomen toe.
- c** Nee, die uitspraak geldt niet voor elke man die ondervraagd is, zie bijvoorbeeld de punt bij (10, 450).
- d** Van de ondervraagde mannen die 6 uur per week aan sport doen, ligt het inkomen tussen 1500 euro en 2000 euro.
- 32 a** In grafiek A bestaat wel een verband tussen de twee grootheden. Als de gemiddelde maandtemperatuur in maart toeneemt, dan neemt de vinddag vanaf 1 maart af.
In grafiek B bestaat geen verband tussen de twee grootheden.
In grafiek C bestaat wel een verband tussen de twee grootheden. Als de diameter op 30 cm hoogte toeneemt, dan neemt ook de diameter op 150 cm toe.
- b** Nee, die kans is niet groot.
- c** Als de diameter op 30 cm hoogte 100 cm is, dan ligt de diameter van de boom op 150 cm ongeveer tussen 80 cm en 100 cm.
- d** Als de gemiddelde maandtemperatuur 6°C is, dan wordt het eerste kievietsei ongeveer tussen 9 maart en 11 maart gevonden.
- e** Als het eerste kievietsei op 4 maart wordt gevonden, dan is de gemiddelde maandtemperatuur ongeveer 7°C of 8°C .
- f** Van die boom is de diameter op 30 cm hoogte 5 cm en is de diameter op 150 cm hoogte 20 cm. Het is bijzonder dat die boom breder wordt op grotere hoogte.

- 33 a** De laagste bloeddruk voor het gebruik van het medicijn is 138.
De laagste bloeddruk na het gebruik van het medicijn is 124.
- b** In de vierde boxplot is de spreidingsbreedte het grootst.
De bloeddrukken lopen van 126 tot 184, dus de spreidingsbreedte is $184 - 126 = 58$.
- c** Ja, voor de vierde boxplot is ook de kwartielafstand het grootst.
 $Q_1 = 139$, $Q_3 = 159$, dus de kwartielafstand is $159 - 139 = 20$.
- d** Bij de leeftijdsgroep $[60, 75)$ verschillen de boxplots weinig van elkaar, dus bij die leeftijdsgroep geeft het medicijn de minste verandering.

- 032 a** Beschrijving B past het beste bij de puntenwolk.
- b** Bij een totale afstand van 5000 km hoort een gemiddelde snelheid van 30 km/uur.
- c** Bij een gemiddelde snelheid van 35 km/uur ligt de totale afstand tussen 3800 km en 4700 km.

- U7** De onderste grafiek gaat ongeveer door de punten $(4; 8,5)$ en $(7; 5,5)$.

De richtingscoëfficiënt is $\frac{5,5 - 8,5}{7 - 4} = \frac{-3}{3} = -1$.

De lijn is van de vorm $N = -W + b$.

Invullen van $W = 4$ en $N = 8,5$ geeft $8,5 = -4 + b$, dus $b = 12,5$.

Een formule die bij de onderste grafiek hoort is $N = -W + 12,5$.

De bovenste grafiek gaat ongeveer door de punten $(7, 8)$ en $(9; 6,5)$.

De richtingscoëfficiënt is $\frac{6,5 - 8}{9 - 7} = \frac{-1,5}{2} = -0,75$.

De lijn is van de vorm $N = -0,75W + b$.

Invullen van $W = 7$ en $N = 8$ geeft $8 = -0,75 \times 7 + b$ oftewel $8 = -5,25 + b$, dus $b = 13,25$.

Een formule die bij de bovenste grafiek hoort is $N = -0,75W + 13,25$.

8.6 Gemengde opdrachten

- 34 a** Bij Nederland hoort bij de klasse 35-39 jaar het indexcijfer 132 en hoort bij de klasse 25-29 jaar het indexcijfer 100.
In Nederland verdient iemand dan 32% meer.
- b** Bij Finland hoort bij de klasse 30-34 jaar het indexcijfer 112 en hoort bij de klasse 55-59 jaar het indexcijfer 128.

gemiddelde salaris in euro's per maand	2800	25	3200
indexcijfer	112	1	128

In Finland is het gemiddelde salaris van mensen uit de klasse 55-59 jaar 3200 euro per maand.

- c** Bij Zweden hoort bij de klasse 40-44 jaar het indexcijfer 123 en hoort bij de klasse 35-39 jaar het indexcijfer 119.

indexcijfer	119	1	123
percentage	100	0,840...	103,361...

Een Zweed van 40-44 jaar verdient gemiddeld 3,4% meer dan een Zweed van 35-39 jaar.

8 Statistiek

- 35**
- a De modus is 20 cm.
 - b De mediaan is het gemiddelde van 15 cm en 16 cm, dus 15,5 cm.
 - c De spreidingsbreedte is $32 - 4 = 28$ cm.
 $Q_1 = (8 + 8) : 2 = 8$ cm en $Q_3 = (22 + 24) : 2 = 23$ cm
dus de kwartielaafstand is $23 - 8 = 15$ cm.
 - d

lengte in cm	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)
frequentie	2	10	5	4	8	6	1
 - e De klasse [5, 10) is de modale klasse.
 - f De klassengrenzen van de klasse [10, 15) zijn 10 en 15.
- 36**
- a Het zijn absolute frequenties.
 - b In 2008 behaalde Nederland 5 zilveren medailles, in 2012 waren dat er 6.
De absolute frequentie nam dus met 1 toe.
 - c In 2008 behaalde Nederland in totaal $4 + 5 + 7 = 16$ medailles, waarvan 5 zilveren.

aantal medailles	16	1	5
percentage	100	6,25	31,25

De relatieve frequentie van het aantal zilveren medailles in 2008 is 31,25%.
In 2012 behaalde Nederland in totaal $8 + 6 + 6 = 20$ medailles, waarvan 6 zilveren.

aantal medailles	20	1	6
percentage	100	5	30

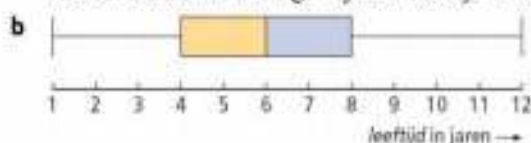
De relatieve frequentie van het aantal zilveren medailles in 2012 is 30%.
De relatieve frequentie nam af met $31,25 - 30 = 1,25\%$.
 - d De aantallen gouden medailles van klein naar groot zijn: 2, 2, 4, 4, 6, 7, 8, 12.
Het gemiddelde aantal gouden medailles is
 $(2 + 2 + 4 + 4 + 6 + 7 + 8 + 12) : 8 = 45 : 8 = 5,625$.
Er is geen modus.
De mediaan is $(4 + 6) : 2 = 5$ gouden medailles.
- 37**
- a Het laagste cijfer bij de jongens is 4,6.
 - b Bij de meisjes haalde 25% een cijfer hoger dan 7,5.
 - c Er hadden 57 meisjes en ook 57 jongens een cijfer onder de 7.
De 57 meisjes betreft 50% van de meisjes, dus er deden 114 meisje mee.
De 57 jongens betreft 75% van de jongens, dus er deden 76 jongens mee.
In totaal deden er $114 + 76 = 190$ leerlingen mee aan het proefwerk.
 - d Van de meisjes heeft 50% meer dan een 7, terwijl dat bij de jongens maar 25% is.
Het hoogste cijfer van de meisjes is veel hoger dan het hoogste cijfer van de jongens.
 - e In beide groepen heeft 25% minder dan 5,5.
- 38**
- a Het gaat over $8 + 18 + 25 + 28 + 30 + 31 + 39 + 32 + 25 + 8 + 4 + 2 = 250$ verkochte auto's.
De mediaan ligt tussen auto 125 en 126 in. Beide auto's zijn 6 jaar oud, want
 $8 + 18 + 25 + 28 + 30 = 109$ en $8 + 18 + 25 + 28 + 30 + 31 = 140$.
De mediaan ligt bij een leeftijd van 6 jaar.

Het eerste kwartiel ligt bij auto 63. Deze auto is 4 jaar oud, want $8 + 18 + 25 = 51$ en $8 + 18 + 25 + 28 = 79$. Het eerste kwartiel ligt bij een leeftijd van 4 jaar.

Het derde kwartiel ligt bij auto $126 + 62 = 188$ of $250 - 62 = 188$.

Deze auto is 8 jaar oud, want $8 + 18 + 25 + 28 + 30 + 31 + 39 = 179$ en $8 + 18 + 25 + 28 + 30 + 31 + 39 + 32 = 211$.

Het derde kwartiel ligt bij een leeftijd van 8 jaar.



c De modus is een leeftijd van 7 jaar.

d Van de verkochte auto's waren er $8 + 18 + 25 + 28 + 30 + 31 = 140$ jonger dan 7 jaar.

aantal verkochte auto's	250	1	140
percentage	100	0,4	56

Van de verkochte auto's was 56% jonger dan de modus.

e f

leeftijd in jaren	[1, 4)	[4, 7)	[7, 10)	[10, 13)
aantal verkochte auto's	51	89	96	14
percentage	20,4	35,6	38,4	5,6

Samenvatting

S1 a De getallen in de tweede kolom geven absolute frequenties weer.

b De getallen in de derde kolom geven relatieve frequenties weer.

c Er zijn in totaal 773 952 woningen verkocht waarvan 110 044 in 2013.

aantal verkochte woningen	773 952	1	110 044
percentage	100	0,000129...	14,218...

Van de verkochte woningen is ongeveer 14,22% in 2013 verkocht.

d

aantal verkochte woningen	773 952	7739,52	153 552,0768
percentage	100	1	19,84

In 2014 zijn er 153 552 woningen verkocht.

S2 a De klasse 15 tot 18 is in intervalnotatie $[15, 18)$.

b De klassengrenzen van de derde klasse zijn 18 en 21.

c De klassenbreedte is $15 - 12 = 3$ cm.

d De klassen 21 tot 24 cm is in intervalnotatie $[21, 24)$.

S3 De gemiddelde armlengte is

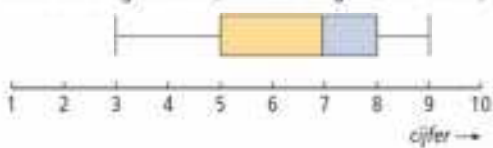
$$(54 + 57 + 57 + 63 + 68 + 70 + 71 + 73 + 75 + 82) : 10 = 670 : 10 = 67.$$

De afwijkingen van het gemiddelde zijn 13, 10, 10, 4, 1, 3, 4, 6, 8 en 15.

De gemiddelde afwijking van het gemiddelde is

$$(13 + 10 + 10 + 4 + 1 + 3 + 4 + 6 + 8 + 15) : 10 = 74 : 10 = 7,4.$$

8 Statistiek

- S4 a** Er zijn 14 beenlengten gemeten.
De 7e beenlengte is 79 cm, de 8e beenlengte is 81 cm.
De mediaan is $(79 + 81) : 2 = 80$ cm.
De 4e beenlengte is 69 cm, dus $Q_1 = 69$ cm.
De 11e beenlengte is 89 cm, dus $Q_3 = 89$ cm.
- b** De spreidingsbreedte is $99 - 64 = 35$ cm.
- c** De kwartielafstand is $89 - 69 = 20$ cm.
- S5 a** 75% had een leeftijd tussen de 18 jaar en de 39 jaar.
- b** 25% had een leeftijd tussen de 26 jaar en de 31 jaar.
25% van 28 376 is $28\,376 : 4 = 7094$ mensen.
- c** 25% van die mensen had een leeftijd tussen de 39 jaar en de 79 jaar.
Waarschijnlijk zijn er maar heel weinig mensen die nog trouwen als ze 60 jaar of ouder zijn (die van 79 jaar zal een uitzondering zijn).
Dus iets minder dan een kwart van de mensen zal een leeftijd hebben tussen de 39 jaar en de 59 jaar. Dat zijn ongeveer 7000 mensen.
- S6 a** De modus is 8.
Het totaal van de frequenties is $2 + 8 + 13 + 18 + 19 + 22 + 6 = 88$.
Het 44e cijfer is 7, het 45e cijfer is ook 7. De mediaan is 7.
- b** Het 22e cijfer is 5, het 23e cijfer is ook 5, dus $Q_1 = 5$.
Het 66e cijfer is 8, het 67e cijfer is ook 8, dus $Q_3 = 8$.
- 
- c** De boxplot geeft het beste beeld van de werkhouding van de leerlingen. In de boxplot staat de meeste informatie.
- S7 a** Als de uitbarsting langer duurt, is de tijd tussen twee uitbarstingen groter.
- b** Bij een uitbarsting van 4,5 minuten zit de tijd tussen twee uitbarstingen tussen 75 minuten en 95 minuten. In intervalnotatie: $(75, 95)$.
- c** In 2030 zijn er 10% meer personen dan in 2015.
In 2030 zijn er 18% meer huishoudens dan in 2015.

Test jezelf

- T1 a** De aantallen auto's zijn absolute getallen en de aantallen auto's per 1000 inwoners zijn relatieve getallen.
- b** In 2012 was de stijging 6 op 464 auto's per 1000 inwoners.
- | | | | |
|---------------------------------|-----|----------|----------|
| aantal auto's per 1000 inwoners | 464 | 1 | 6 |
| percentage | 100 | 0,215... | 1,293... |
- In 2011 was de stijging ongeveer 1,3%.
In 2012 was de stijging 2 op 470 en dat is ongeveer 0,4%.
In 2013 was de stijging -1 op 472 en dat is ongeveer -0,2%.
In 2014 was de stijging 1 op 471 en dat is ongeveer 0,2%.
In 2015 was de stijging 5 op 472 en dat is ongeveer 1,1%.
In 2016 was de stijging 4 op 477 en dat is ongeveer 0,8%.
In 2011 was de procentuele stijging van het aantal auto's per 1000 inwoners het grootst.

c	aantal auto's	472	1	7 979 083
	aantal inwoners	1000	2,118...	16 904 836,86

In het jaar 2015 was het aantal inwoners van Nederland ongeveer 16 905 000.

d	aantal auto's	7 932 290	1	7 735 547	8 222 974
	percentage	100	0,000 012 6...	97,519...	103,664...

Het indexcijfer voor 2011 was ongeveer 97,5 en het indexcijfer voor 2017 was ongeveer 103,7.

- T2**
- a Het gemiddelde aantal snoekbaarzen per vangst is op locatie A 37, op locatie B 19 en op locatie C 37.
 - b Het gemiddelde op locatie A is 37 snoekbaarzen per vangst.
De afwijkingen van het gemiddelde zijn 27, 21, 15, 9, 3, 3, 9, 15, 21 en 27.
De gemiddelde afwijking van het gemiddelde op locatie A is $150 : 10 = 5$ snoekbaarzen per vangst.
Het gemiddelde op locatie B is 19 snoekbaarzen per vangst.
De afwijkingen van het gemiddelde zijn 9, 7, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7 en 9.
De gemiddelde afwijking van het gemiddelde op locatie B is $50 : 10 = 5$ snoekbaarzen per vangst.
Het gemiddelde op locatie C is 37 snoekbaarzen per vangst.
De afwijkingen van het gemiddelde zijn 27, 26, 25, 24, 23, 23, 24, 25, 26 en 27.
De gemiddelde afwijking van het gemiddelde op locatie C is $250 : 10 = 25$ snoekbaarzen per vangst.
De volgorde is eerst B, dan A en daarna C.
 - c De spreidingsbreedte op locatie A is $64 - 10 = 54$ snoekbaarzen per vangst.
 - d Het eerste kwartiel op locatie A is 22 snoekbaarzen per vangst en het derde kwartiel op locatie A is 52 snoekbaarzen per vangst.
 - e De kwartiellafstand op locatie A is $52 - 22 = 30$ snoekbaarzen per vangst.
 - f De kleinste gemiddelde afwijking van het gemiddelde is op locatie B.
En de kleinste kwartiellafstand is ook op locatie B, dus de locatie met de kleinste gemiddelde afwijking van het gemiddelde heeft ook de kleinste kwartiellafstand.

- T3**
- a Iemand van 60 jaar behoort tot de klasse 60-79 jaar. Dat is de klasse $[60, 80)$.
 - b De klassengrenzen zijn 60 jaar en 80 jaar en de klassenbreedte is 20 jaar.
 - c De klasse 80-99 jaar is slechts 1% en al bijna niet te zien, dus de klasse 100 jaar en ouder zal helemaal niet meer te zien zijn.
 - d
- | | | | | | |
|----------------------|-----------|------------|------------|------------|-------------|
| leeftijd in jaren | $[0, 20)$ | $[20, 40)$ | $[40, 60)$ | $[60, 80)$ | $[80, 100)$ |
| relatieve frequentie | 25 | 33 | 29 | 12 | 1 |
- e Het totaal van de frequenties is $25 + 33 + 29 + 12 + 1 = 100$ (%).
De gemiddelde leeftijd is
 $(25 \times 10 + 33 \times 30 + 29 \times 50 + 12 \times 70 + 1 \times 90) : 100 = 36,2$ jaar.
 - f De modale klasse geeft een beter beeld. Bij de berekening van het gemiddelde is uitgegaan van de klassenmiddens en dat zijn schattingen.

- T4**
- a Bij dit onderzoek zijn $21 + 16 + 34 + 15 + 8 + 9 + 5 + 4 + 1 + 1 = 114$ gezinnen betrokken.
 - b In Klaverdal wonen
 $21 \times 0 + 16 \times 1 + 34 \times 2 + 15 \times 3 + 8 \times 4 + 9 \times 5 + 5 \times 6 + 4 \times 7 + 1 \times 8 + 1 \times 9 = 281$ kinderen.
 - c Het gemiddelde aantal kinderen per gezin is $281 : 114 = 2,5$.

8 Statistiek

- d Er hebben $15 + 8 + 9 + 5 + 4 + 1 + 1 = 43$ gezinnen meer dan 2,5 kinderen.

aantal gezinnen	114	1	43
percentage	100	0,8771...	37,7192...

Ongeveer 38% van de gezinnen heeft meer dan het gemiddeld aantal kinderen.

- e De grootste elf gezinnen hebben samen $5 \times 6 + 4 \times 7 + 1 \times 8 + 1 \times 9 = 75$ kinderen.

aantal kinderen	281	1	75
percentage	100	0,3558...	26,6903...

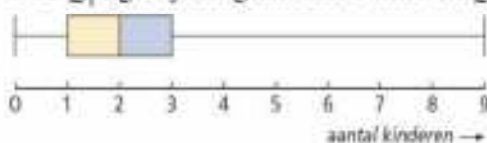
Ongeveer 27% van de kinderen woont in één van de grootste elf gezinnen.

- f De mediaan ligt tussen gezin nummer 57 en gezin nummer 58.

De mediaan ligt bij een gezin met 2 kinderen.

Verder ligt Q_1 bij gezin nummer 29 en ligt Q_3 bij gezin nummer 86.

Dus Q_1 ligt bij een gezin met 1 kind en Q_3 ligt bij een gezin met 3 kinderen.



- T5 a De klasse $[25, 40)$ is de modale klasse, omdat deze klasse de grootste frequentie heeft.

- b Het gaat over $68\,000 + 378\,000 + 199\,000 + 303\,000 + 106\,000 = 1\,054\,000$ bezitters van een motorrijbewijs. De mediaan ligt tussen bezitter 527 000 en 527 001. Beide bezitters liggen in de klasse $[40, 50)$, dus de mediaan ligt in de klasse $[40, 50)$.

Het eerste kwartiel ligt tussen bezitter 263 500 en 263 501 in. Beide bezitters liggen in de klasse $[25, 40)$, dus Q_1 ligt in de klasse $[25, 40)$.

Het derde kwartiel ligt tussen bezitter 790 500 en bezitter 790 501 in. Beide bezitters liggen in de klasse $[50, 65)$, dus Q_3 ligt in de klasse $[50, 65)$.

- c De eerste klasse begint bij een leeftijd van 18,0 jaar en eindigt bij een leeftijd van 24 jaar.

Het klassenmidden van de eerste klasse is dus $(18 + 24) : 2 = 21$ jaar.

- d De gemiddelde leeftijd van een bezitter van een motorrijbewijs is $(68 \times 21 + 378 \times 32 + 199 \times 44,5 + 303 \times 57 + 106 \times 81,5) : 1054 = 48\,289,5 : 1054 = 45,82$, dus 46 jaar.

- e De bezitters van een motorrijbewijs zullen ongeveer gelijkmatig verdeeld zitten over de leeftijden in de klasse $[25, 40)$.

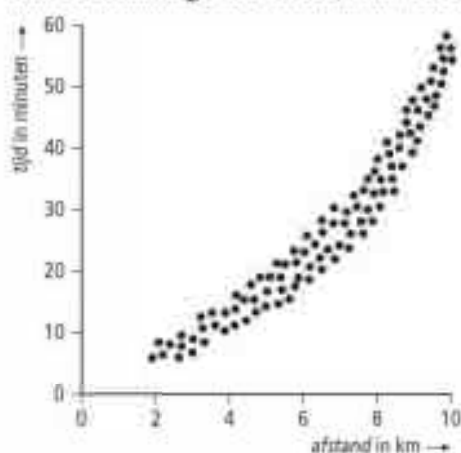
In de klasse $[25, 30)$ zitten de leeftijden 25, 26, 27, 28, 29 jaar en dat zijn vijf leeftijden. In de klasse $[25, 40)$ zitten de leeftijden 25, 26, ..., 44 jaar en dat zijn vijftien leeftijden. Ongeveer $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ deel is $[25, 30)$ jaar.

- T6 a
- | | | |
|----------------|----|----|
| aantal minuten | 12 | 60 |
| aantal km | 4 | 20 |

Erik legde de 4 km af in 12 minuten met een gemiddelde snelheid van 20 km/uur en daarbij hoort de punt bij het pijltje.

- b Als de afstand groter wordt, dan wordt de gemiddelde snelheid lager.
c De hardlopers legden een afstand van 4 km af met gemiddelde snelheid tussen 20 km/uur en 24 km/uur.

- d Deze hardlopers legden een afstand af tussen 7,5 km en 9,5 km.
 e Als de afstand groter wordt, dan wordt de tijd ook groter.



Extra oefening

- E1 a De getallen 17 011 en 17 082 geven absolute frequenties weer.
 b De percentages geven relatieve frequenties weer.

<i>leeftijd</i>	1-1-2016	1-1-2017
0 tot en met 19	$0,2413 \times 17\,011\,000 = 4\,105\,000$	$0,2404 \times 17\,082\,000 = 4\,107\,000$
20 tot en met 44	$0,3452 \times 17\,011\,000 = 5\,872\,000$	$0,3425 \times 17\,082\,000 = 5\,851\,000$

- d Nee, 4 105 000 op 1-1-2016 is lager dan 4 107 000 op 1-1-2017.

<i>tijd in jaren</i>	<i>aantal huisdieren × 1 miljoen</i>	<i>indexcijfer</i>
2012	31,3	93,7
2013	31,6	94,6
2014	33,4	100
2015	34,2	102,4
2016	33,9	101,5

- E3 a Dan zou 6 kg gevangen vis in de klasse $[6, 8)$ terecht komen.

<i>gewicht in kg</i>	<i>frequentie</i>
$[0, 2)$	1
$[2, 4)$	0
$[4, 6)$	4
$[6, 8)$	4
$[8, 10)$	6
$[10, 12)$	6
$[12, 14)$	3

- c De klassenbreedte is hier 2 kg gevangen vis.

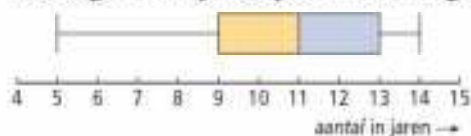
- d Het gemiddelde is

$$(1 \times 1 + 0 \times 3 + 4 \times 5 + 4 \times 7 + 6 \times 9 + 6 \times 11 + 3 \times 13) : 24 = 208 : 24 = 8\frac{2}{3} \text{ kg}$$

gevangen vis per deelnemer.

8 Statistiek

- E4** Het gemiddelde maandsalaris is
 $(1 \times 26\,000 + 2 \times 5\,000 + 4 \times 2250 + 9 \times 2\,000 + 10 \times 1\,500) : 26 =$
 $78\,000 : 26 = 3\,000$ euro.
 De gemiddelde afwijking van het gemiddelde is
 $(1 \times 23\,000 + 2 \times 2\,000 + 4 \times 750 + 9 \times 1\,000 + 10 \times 1\,500) : 26 =$
 $54\,000 : 26 = 2\,080$ euro.
- E5** **a** Er zijn 28 waarnemingen.
 De 14e waarneming is 61, de 15e waarneming is 62.
 De mediaan is $(61 + 62) : 2 = 61,5$.
 De 7e waarneming is 49 en de 8e waarneming is 51, dus $Q_1 = 50$.
 De 21e waarneming is 65 en de 22e waarneming is 66, dus $Q_3 = 65,5$.
- b** De kwartielfstand is $65,5 - 50 = 15,5$.
- c** De spreidingsbreedte is $80 - 41 = 39$.
- E6** Het 13e maandsalaris is 2000 euro en het 14e maandsalaris is 2000 euro, dus de mediaan is 2000 euro.
 Het 7e maandsalaris is 1500 euro dus $Q_1 = 1500$ euro.
 Het 20e maandsalaris is 2250 euro dus $Q_3 = 2250$ euro.
 De kwartielfstand is $2250 - 1500 = 750$ euro.
 De spreidingsbreedte is $26\,000 - 1500 = 24\,500$ euro.
- E7** **a** De kleinste schoenmaat bij de jongens is 34.
b Van de meisjes heeft 25% een schoenmaat groter dan 38,5.
c De grootste schoenmaat bij de meisjes is 41,5. Van de jongens heeft 50% een schoenmaat die groter is dan de grootste schoenmaat bij de meisjes.
- E8** De totale frequentie is $13 + 20 + 32 + 45 + 57 + 88 + 110 + 115 + 95 + 91 = 666$.
 De mediaan ligt tussen de 333e leeftijd en de 334e leeftijd en dat is 11 jaar.
 Het eerste kwartiel is de 167e leeftijd en dat is 9 jaar.
 Het derde kwartiel is de 500e leeftijd en dat is 13 jaar.
 De laagste leeftijd is 5 jaar en de hoogste leeftijd is 14 jaar.



- E9** **a** Van 25 leerlingen zijn de data verwerkt.
- b** Ja, er bestaat wel een verband, want als het cijfer voor wiskunde hoger wordt, dan wordt het cijfer voor natuurkunde ook hoger.
- c** Waarschijnlijk niet. De vakken natuurkunde en wiskunde zijn beide exacte vakken en als je goed bent in het ene exacte vak, dan ben je vaak ook goed in het andere exacte vak. Bij geschiedenis en wiskunde is dat niet het geval. Als je goed bent in geschiedenis, dan hoef je helemaal nog niet goed te zijn in wiskunde.

9 Functies en algebra

Voorkennis

V1 a Bij de tabellen A, B en D zijn de variabelen x en y recht evenredig.

b A: $y = 3,5x$

C: $y = 2x + 2$

B: $y = 4x$

D: $y = 1,5x$

V2 a $6^3 \times 6^5 = 6^8$

e $p^4 \times p^9 = p^{13}$

b $4^3 \times 4^5 \times 4 = 4^9$

f $t^2 \times t^2 \times t^2 = t^6$

c $(7^6)^2 = 7^{12}$

g $a^3 \times (a^3)^5 = a^3 \times a^{15} = a^{18}$

d $\frac{5^{16}}{5^4} = 5^{12}$

h $\frac{(u^4)^2}{u^4} \times u^8 = \frac{u^8}{u^4} \times u^8 =$

$u^4 \times u^8 = u^{12}$

V3 a $10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

b $2\sqrt{5} - 7\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 4\sqrt{6}$

c $6 + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 7 + 9\sqrt{5} = 13 + 3\sqrt{2} + 9\sqrt{5}$

d $-3\sqrt{4} + 8\sqrt{15} + 7 - 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = -6 + 8\sqrt{15} + 7 - 3\sqrt{3} =$
 $1 + 8\sqrt{15} - 3\sqrt{3}$

V4 a $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$

b $\sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{70}$

c $3\sqrt{2} \times 5\sqrt{18} = 15\sqrt{36} = 15 \times 6 = 90$

d $8\sqrt{5} \times -2\sqrt{6} \times -4 = 64\sqrt{30}$

e $(3\sqrt{14})^2 = 3\sqrt{14} \times 3\sqrt{14} = 9 \times 14 = 126$

f $(2\sqrt{38})^2 = 2\sqrt{38} \times 2\sqrt{38} = 4 \times 38 = 152$

V5 a $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

e $\frac{14}{25} - \frac{2}{5} = \frac{14}{25} - \frac{10}{25} = \frac{4}{25}$

b $\frac{3}{8} + \frac{3}{4} = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$

f $\frac{18}{21} - \frac{3}{14} = \frac{36}{42} - \frac{9}{42} = \frac{27}{42} = \frac{9}{14}$

c $\frac{6}{13} + \frac{2}{13} + \frac{5}{13} = \frac{13}{13} = 1$

g $\frac{27}{100} - \frac{3}{20} = \frac{27}{100} - \frac{15}{100} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$

d $\frac{5}{12} + \frac{7}{15} = \frac{25}{60} + \frac{28}{60} = \frac{53}{60}$

h $\frac{45}{81} - \frac{3}{27} = \frac{5}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

V6 a $\frac{5}{6} \times \frac{7}{7} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$

d $\frac{9}{13} \times \frac{7}{8} = \frac{63}{104}$

b $\frac{14}{15} \times \frac{3}{7} = \frac{42}{105} = \frac{2}{5}$

e $1\frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{16}$

c $\frac{12}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

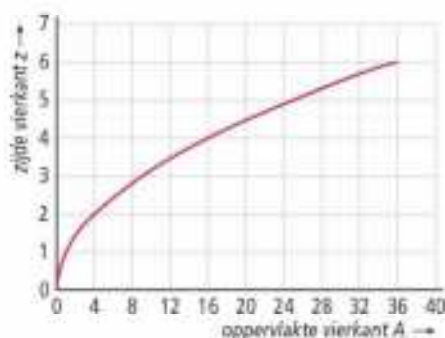
f $\frac{5}{13} \times 2 = \frac{5}{13} \times \frac{2}{1} = \frac{10}{13}$

9.1 Wortelfuncties

intro Hoe ver je de horizon ziet, hangt af van hoe hoog je staat en hoe lang je bent. Sta je bijvoorbeeld op een hoogte van 4 meter en heb je je ogen op 1,76 meter hoogte, dan is $d = 3,6\sqrt{5,76} = 3,6 \times 2,4 = 8,64$. Je ziet de horizon dan 8,64 km ver.

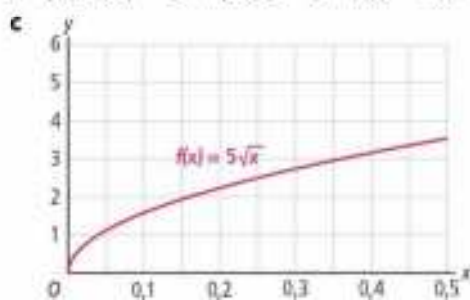
1 a

oppervlakte vierkant A	0	1	4	9	16	25	36
zijde vierkant z	0	1	2	3	4	5	6

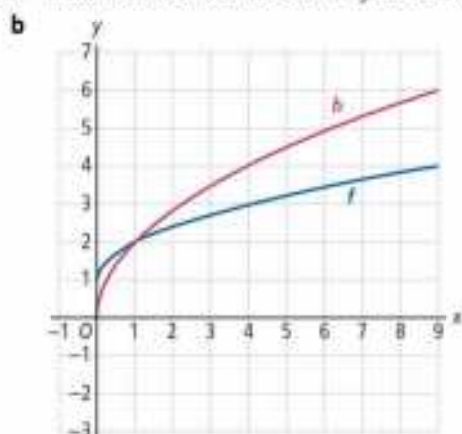


- b** Voor een vierkant geldt: $\text{oppervlakte} = \text{zijde}^2$, dus $A = z^2$.
Daaruit volgt $z = \sqrt{A}$.
- c** Je kunt voor A alleen getallen groter dan of gelijk aan 0 invullen omdat er geen negatieve oppervlakte bestaat.
- 2 a** Links van de verticale as bestaat de grafiek niet omdat de wortel uit een negatief getal niet bestaat.

b $f(0,25) = 5 \times \sqrt{0,25} = 5 \times 0,5 = 2,5$



- d** Rond het punt waar de grafiek begint loopt de grafiek bijna verticaal en bijna rond.
- 3 a** De kleinste waarde waarbij de functie f nog een uitkomst heeft, is $x = 0$.



- c** De coördinaten van het randpunt van de grafiek van f zijn $(0, 1)$.
- d** Zie de tekening bij opdracht b.
- e** De coördinaten van het randpunt van de grafiek van h zijn $(0, 0)$.

9 Functies en algebra

4 a Invullen van $x = 0$ geeft $f(x) = \sqrt{0-3} = \sqrt{-3}$ en de wortel uit een negatief getal bestaat niet.

b De kleinste waarde waarbij de functie f nog een uitkomst heeft is $x = 3$.

c Daarbij hoort de uitkomst $f(x) = \sqrt{3-3} = \sqrt{0} = 0$.

d

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3



e De coördinaten van het randpunt zijn (3, 0).

5 a $3x - 12 = 0$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

b $k(4) = 2 + \sqrt{3 \times 4 - 12} = 2 + \sqrt{0} = 2$

c Het randpunt is (4, 2).

6 a $x - 7 = 0$

$$x = 7$$

$$f(7) = 8 + \sqrt{0} = 8$$

Het randpunt is (7, 8).

b $4x - 12 = 0$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

$$g(3) = \sqrt{0} = 0$$

Het randpunt is (3, 0).

c $10 - 2x = 0$

$$10 = 2x$$

$$x = 5$$

$$h(5) = \sqrt{0} + 13 = 13$$

Het randpunt is (5, 13).

d $6x + 42 = 0$

$$6x = -42$$

$$x = -7$$

$$k(-7) = 5 - \sqrt{0} = 5$$

Het randpunt is (-7, 5).

7 a $x + 1 = 0$

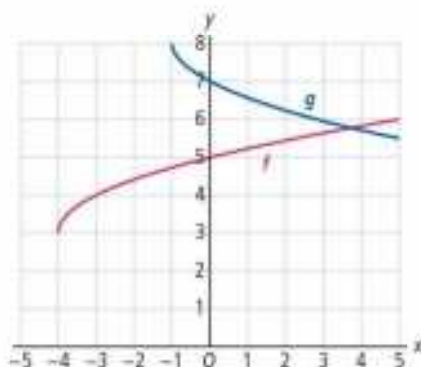
$$x = -1$$

$$g(-1) = 8 - \sqrt{0} = 8$$

Het randpunt is (-1, 8).

b

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(x)$	8	7	6,59	6,27	6	5,76	5,55	5,35	5,17	5



c De grafiek van f is stijgend en die van g dalend.

8 a $6 - x = 0$

$x = 6$

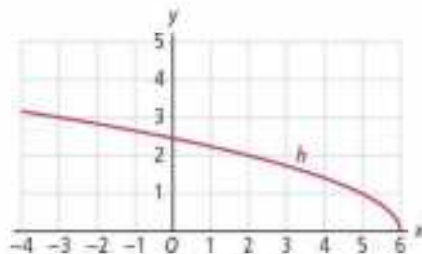
$h(6) = \sqrt{0} = 0$

Het randpunt is (6, 0).

b Als $x > 6$, dan is $6 - x < 0$ en de wortel uit een negatief getal bestaat niet.

c

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$h(x)$	3	2,83	2,65	2,45	2,24	2	1,73	1,41	1	0

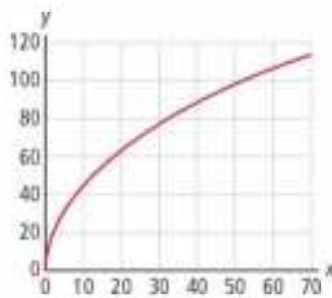


9 a $v = 14\sqrt{62} \approx 110,2$

De auto had een snelheid van ongeveer 110 km per uur.

b

s	0	10	20	30	40	50	60	70
v	0	44,3	62,6	76,7	88,5	99,0	108,4	117,1



c Bij $v = 50$ lees je af: $s \approx 13$.

De lengte van het remspoor is ongeveer 13 meter.

d Bij $s = 10$ is $v = 44$.

Bij $s = 20$ is $v = 63$.

De snelheid verdubbelt niet als de lengte van het remspoor verdubbelt.

06 a $3x - 6 = 0$

$3x = 6$

$x = 2$

b $f(2) = 7 + \sqrt{3 \times 2 - 6}$
 $= 7 + \sqrt{6 - 6} = 7 + \sqrt{0} = 7$ dus $y = 7$

c Het randpunt is (2, 7).

9 Functies en algebra

d $x - 9 = 0$

$$x = 9$$

$$g(9) = 2 + \sqrt{9 - 9} = 2 + \sqrt{0} = 2$$

Het randpunt is (9, 2).

e $3x + 15 = 0$

$$3x = -15$$

$$x = -5$$

$$h(-5) = \sqrt{3 \times -5 + 15} = \sqrt{0} = 0$$

Het randpunt is (-5, 0).

f $18 - 6x = 0$

$$6x = 18$$

$$x = 3$$

$$h(3) = \sqrt{0} - 14 = -14$$

Het randpunt is (3, -14).

g $8x + 56 = 0$

$$8x = -56$$

$$x = -7$$

$$k(-7) = 17 - \sqrt{0} = 17$$

Het randpunt is (-7, 17).

U1 a $25 - x^2 = 0$

$$x^2 = 25$$

$$x = -5 \text{ of } x = 5$$

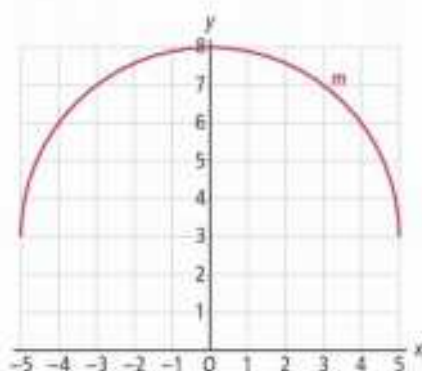
$$m(-5) = 3 + \sqrt{0} = 3 \text{ en } m(5) = 3 + \sqrt{0} = 3$$

De randpunten zijn (-5, 3) en (5, 3).

b Bij $x = 6$ en $x = -6$ is de uitkomst van $25 - x^2$ negatief. In dat geval bestaat $\sqrt{25 - x^2}$ niet.

c Voor de waarden vanaf -5 tot en met 5 heeft de functie een uitkomst.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$m(x)$	3	6	7	7,58	7,90	8	7,90	7,58	7	6	3



U2 $8 - x = 0$

$$x = 8$$

$$h(8) = 10 - 2\sqrt{0} = 10$$

Het randpunt is (8, 10).

De functie heeft een uitkomst als $8 - x \geq 0$, dus als $x \leq 8$.

De grafiek ligt dus links van de lijn $x = 8$.

Omdat $2\sqrt{8 - x} \geq 0$ is de uitkomst van $h(x) = 10 - 2\sqrt{8 - x}$ altijd kleiner dan of gelijk aan 10. De grafiek ligt dus onder de lijn $y = 10$.

Hierbij hoort grafiek A.

9.2 Rekenen met wortels

intro Oppervlakte linker rechthoek is $6\sqrt{3} \times 2\frac{1}{2}\sqrt{24} = 15\sqrt{72}$.

Oppervlakte rechter rechthoek is $5\sqrt{a} \times 3\sqrt{6} = 15\sqrt{6a}$.

De oppervlakten zijn gelijk als $6a = 72$, dus als $a = 12$.

- 10 a $2\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$
 b $\sqrt{6} + 9\sqrt{3} - 4\sqrt{6} = -3\sqrt{6} + 9\sqrt{3}$
 c $8\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 7\sqrt{5} = 11\sqrt{2} - 7\sqrt{5}$
 d $\sqrt{7} + \sqrt{9} = \sqrt{7} + 3$
 e $\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \sqrt{15}$
 f $\sqrt{13} \times \sqrt{a} = \sqrt{13a}$
 g $5\sqrt{2} \times 9\sqrt{8} = 45\sqrt{16} = 45 \times 4 = 180$
 h $2\sqrt{3p} \times 3\sqrt{11q} = 6\sqrt{33pq}$
- 11 a $\sqrt{60} = \sqrt{5} \times \sqrt{12}$
 $\sqrt{60} = \sqrt{6} \times \sqrt{10}$
 b Bij $\sqrt{60} = \sqrt{4} \times \sqrt{15}$ is $\sqrt{4}$ gelijk aan een geheel getal.
 c Omdat $\sqrt{4} = 2$ is $\sqrt{60} = \sqrt{4} \times \sqrt{15} = 2 \times \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$.
- 12 a $\sqrt{600} = \sqrt{100} \times \sqrt{6} = 10\sqrt{6}$
 b $\sqrt{45} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
 c $\sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
 d $\sqrt{98} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
 e $\sqrt{25x} = \sqrt{25} \times \sqrt{x} = 5\sqrt{x}$
 f $\sqrt{8a} = \sqrt{4} \times \sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$
 g $\sqrt{75p} = \sqrt{25} \times \sqrt{3p} = 5\sqrt{3p}$
 h $3\sqrt{49p} = 3 \times \sqrt{49} \times \sqrt{p} = 3 \times 7 \times \sqrt{p} = 21\sqrt{p}$
 i $5\sqrt{200m} = 5 \times \sqrt{100} \times \sqrt{2m} = 5 \times 10 \times \sqrt{2m} = 50\sqrt{2m}$
 j $2\sqrt{18q} = 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2q} = 2 \times 3 \times \sqrt{2q} = 6\sqrt{2q}$
- 13 a $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{8}} = \sqrt{3}$
 b $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = \sqrt{4} = 2$
 c $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}} = \sqrt{5}$
 d $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{9} = 3$
 e $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{15}} = \sqrt{3}$
 f $\frac{\sqrt{44}}{\sqrt{11}} = \sqrt{4} = 2$
- 14 a $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{6b} = \sqrt{30ab}$
 b $\sqrt{7x} \cdot \sqrt{2y} = \sqrt{14xy}$
 c $\frac{\sqrt{25pq}}{\sqrt{5p}} = \sqrt{\frac{25pq}{5p}} = \sqrt{5q}$
 d $\frac{\sqrt{18a^3b^3}}{\sqrt{3ab^2}} = \sqrt{\frac{18a^3b^3}{3ab^2}} = \sqrt{6ab}$
 e $2\sqrt{5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20}$
 f $7\sqrt{3} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{147}$
 g $\frac{10\sqrt{3p}}{5\sqrt{p}} = \frac{10}{5} \cdot \sqrt{\frac{3p}{p}} = 2\sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12}$
 h $\frac{\sqrt{65p^3q^2}}{\sqrt{13p^2q^2}} = \sqrt{\frac{65p^3q^2}{13p^2q^2}} = \sqrt{5p}$
- 15 a Ze telt ongelijksoortige wortels bij elkaar op en dat kan niet.
 b De antwoorden 2 en 4 zijn goed.
- 16 a $2\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{35}$
 b $2\sqrt{7} + 3\sqrt{5} =$ kan niet korter
 c $9\sqrt{6} - \sqrt{6} = 8\sqrt{6}$
 d $9\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 9\sqrt{36} = 9 \cdot 6 = 54$
 e $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{3b} = \sqrt{15ab}$
 f $\sqrt{5a} + \sqrt{3b} =$ kan niet korter
 g $3\sqrt{2p} \cdot 7\sqrt{2q} = 21\sqrt{4pq} = 21 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{pq} = 21 \cdot 2 \cdot \sqrt{pq} = 42\sqrt{pq}$
 h $3\sqrt{2p} + 7\sqrt{2q} = 10\sqrt{2p}$

9 Functies en algebra

17 a functie f :

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	3	4,24	5,20	6	6,71	7,35

b functie g :

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	3	4,24	5,20	6	6,71	7,35

De tabellen van f en g zijn gelijk.

c $3\sqrt{x} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{9x}$

18 a $f(x) = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x}$
 $f(x) = 5\sqrt{x}$

c $h(x) = \sqrt{4x} + 6\sqrt{x}$
 $h(x) = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x} + 6\sqrt{x}$
 $h(x) = 2\sqrt{x} + 6\sqrt{x}$
 $h(x) = 8\sqrt{x}$

b $g(x) = 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{x}$
 $g(x) = 6\sqrt{5x}$

d $k(x) = 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2x} - 5\sqrt{6x}$
 $k(x) = 6\sqrt{6x} - 5\sqrt{6x}$
 $k(x) = \sqrt{6x}$

014 a $\sqrt{15m} \cdot \sqrt{2n} = \sqrt{30mn}$

b $\frac{\sqrt{42m^2n^2}}{\sqrt{7mn}} = \sqrt{\frac{42m^2n^2}{7mn}} = \sqrt{\frac{6mn}{1}} = \sqrt{6mn}$

016 a Wortels vermenigvuldigen kan altijd, wortels optellen alleen als het gelijksoortige wortels betreft. En $\sqrt{3a}$ en $\sqrt{5b}$ zijn niet gelijksoortig.

b Er worden twee gelijksoortige wortels van elkaar afgetrokken.

c $\sqrt{9pq} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{pq} = 3 \cdot \sqrt{pq} = 3\sqrt{pq}$

d $6\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{5} = 12\sqrt{30}$

e $6\sqrt{6} + 2\sqrt{5} =$ kan niet korter

f $8\sqrt{10} - \sqrt{10} = 7\sqrt{10}$

h $\sqrt{13a} \cdot \sqrt{2b} = \sqrt{26ab}$

i $\sqrt{13a} + \sqrt{2b} =$ kan niet korter

j $8\sqrt{5m} \cdot 3\sqrt{5n} = 24\sqrt{25mn} =$
 $24 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{mn} = 24 \cdot 5 \cdot \sqrt{mn} =$
 $120\sqrt{mn}$

g $8\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 8 \cdot \sqrt{100} = 8 \cdot 10 = 80$

k $8\sqrt{5m} + 3\sqrt{5m} = 11\sqrt{5m}$

U3 $f(x) = \sqrt{12x + 16} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3x + 4} = 2\sqrt{3x + 4}$

$h(x) = 9\sqrt{18x} = 9 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2x} = 9 \cdot 3 \cdot \sqrt{2x} = 27\sqrt{2x}$

$k(x) = 3\sqrt{4x} = 3 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{x} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{x} = 6\sqrt{x}$

$l(x) = \sqrt{48x + 64} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3x + 4} = 4\sqrt{3x + 4}$

De functies f en m zijn hetzelfde, de functies g en l zijn hetzelfde, de functies h en j zijn hetzelfde en de functies i en k zijn hetzelfde.

U4 $\frac{2\sqrt{24a^3b^2}}{\sqrt{3a^2b}} + 5\sqrt{6a} \cdot \sqrt{3b} = 2 \cdot \sqrt{\frac{24a^3b^2}{3a^2b}} + 5\sqrt{18ab} =$

$2\sqrt{8ab} + 5\sqrt{18ab} = 2 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{2ab} + 5 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2ab} =$
 $2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2ab} + 5 \cdot 3 \cdot \sqrt{2ab} = 4\sqrt{2ab} + 15\sqrt{2ab} = 19\sqrt{2ab}$

9.3 Gebroken functies

intro De rechthoek van Janice is twee keer zo lang als die van Rik.
Een rechthoek met een oppervlakte van 24 cm^2 kan een breedte $0,01 \text{ cm}$ hebben.
(Dan wordt de rechthoek wel heel erg lang.) Een breedte 0 cm is niet mogelijk.

- 19 a** Lia doet er $30 : 15 = 2$ uur over.
b Ze moet dan met een snelheid van 30 km per uur rijden.

c	snelheid in km per uur	5	10	15	30
	tijd in uren	6	3	2	1

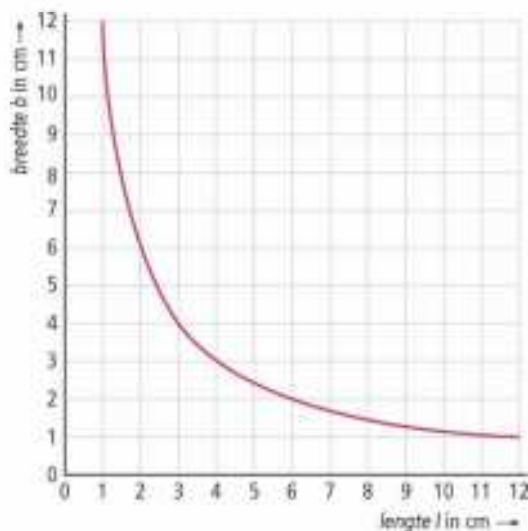
- d $5 \times 6 = 30$, $10 \times 3 = 30$, $15 \times 2 = 30$ en $30 \times 1 = 30$
Er komt telkens 30 uit.

- 20 a** tabel A: $5 \times 24 = 120$, $10 \times 12 = 120$, $15 \times 8 = 120$ en $20 \times 6 = 120$
In tabel A zijn x en y omgekeerd evenredig.
tabel B: $2 \times 7,5 = 15$, $3 \times 5 = 15$, $4 \times 3,75 = 15$ en $5 \times 3 = 15$
In tabel B zijn x en y omgekeerd evenredig.
tabel C: $5 \times 12 = 60$, $10 \times 9 = 90$
In tabel C zijn x en y niet omgekeerd evenredig.
tabel D: $5 \times 20 = 100$, $10 \times 10 = 100$, $20 \times 5 = 100$ en $40 \times 2,5 = 100$
In tabel D zijn x en y omgekeerd evenredig.

b A $y = \frac{120}{x}$ C $y = -0,6x + 15$

B $y = \frac{15}{x}$ **D** $y = \frac{100}{x}$

- | | | | | | | | |
|-------------|-------------------|----|---|---|---|---|----|
| 21 a | length l in cm | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 |
| | breedte b in cm | 12 | 6 | 4 | 3 | 2 | 1 |



- b** De lengte en de breedte van deze rechthoek zijn omgekeerd evenredig want als de lengte twee keer zo groot wordt, dan wordt de breedte twee keer zo klein.
- c** Omdat $l \times b = 12$, geldt $b = \frac{12}{l}$
- d** $b(l) = \frac{12}{l}$
- e** $b(100) = 0,12$, $b(10) = 1,2$, $b(1) = 12$, $b(0,1) = 120$ en $b(0,01) = 1200$.

9 Functies en algebra

22 a Bij $x = 4$ is $f(10) = \frac{4}{10} = 0,4$.

b $f(x) = \frac{1}{2}$ geeft $\frac{4}{x} = \frac{1}{2}$ dus $x = 8$.

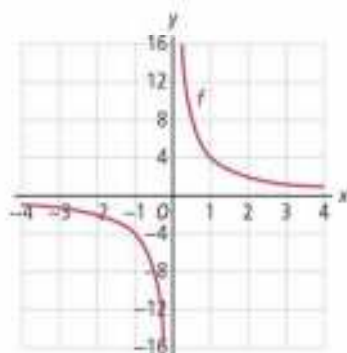
$f(x) = -\frac{1}{2}$ geeft $\frac{4}{x} = -\frac{1}{2}$ dus $x = -8$.

c Voor de functiewaarde bij $x = 0$ zou je 4 moeten delen door 0, en delen door 0 kan niet.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	-1	-2	-4	-8	-16	-	16	8	4	2	1

e Telkens geldt: $x \times y = \text{constant}$, namelijk 4.

f

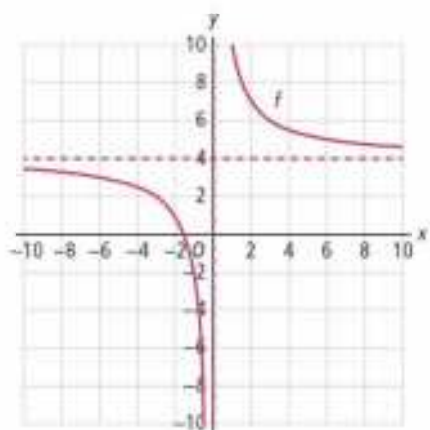


23 a Bij $x = 0$ bestaat er geen functiewaarde.

x	1	10	100	1000
$f(x)$	10	4,6	4,06	4,006

c De functiewaarde komt dan steeds dichterbij 4.

x	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	3,4	3,25	3	2,5	1	-	7	5,5	5	4,75	4,6



e De horizontale asymptoot is de lijn $y = 4$.

f De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.

24 a Tussen de weerstand en de oppervlakte van de doorsnede van de draad bestaat een omgekeerd evenredig verband.

b $R(A) = \frac{0,2}{A}$

c $R(0,0001) = \frac{0,2}{0,0001} = 2000$

Bij een zeer dunne draad met een doorsnede van $0,0001 \text{ mm}^2$ is de weerstand met 2000 Ohm zeer groot.

d Invullen van $A = 8$ geeft $R(8) = \frac{0,2}{8} = 0,025$.

De weerstand van de draad is 0,025 Ohm.

020 a $2 \times 180 = 360$, $3 \times 120 = 360$, $15 \times 24 = 360$ en $6 \times 60 = 360$

Het product van x en y is steeds hetzelfde, dus er is sprake van een omgekeerd evenredig verband.

b Bij de tabel hoort de formule $x \times y = 360$.

c De formule uit opdracht b kun je ook schrijven als $y = \frac{360}{x}$ of $x = \frac{360}{y}$

023 a Bij $x = 0$ bestaat er geen functiewaarde.

b $f(10) = 3 + \frac{5}{10} = 3,5$, $f(20) = 3 + \frac{5}{20} = 3,25$, $f(50) = 3 + \frac{5}{50} = 3,1$ en

$f(100) = 3 + \frac{5}{100} = 3,05$

c Als x steeds groter wordt, naderen de functiewaarden naar 3.

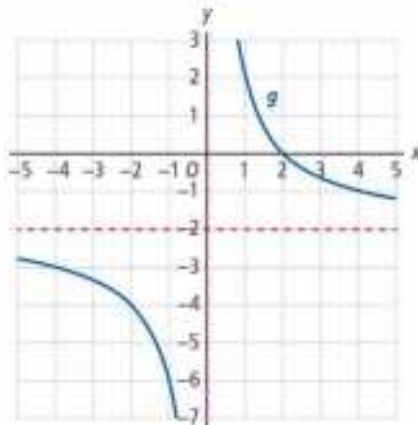
d De horizontale asymptoot is de lijn $y = 3$.

De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.

e Bij $x = 0$ bestaat er geen functiewaarde.

f

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-2,8	-3	$-3\frac{1}{3}$	-4	-6	-	2	0	$-\frac{2}{3}$	-1	-1,2



g De horizontale asymptoot is de lijn $y = -2$.

De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.

U5 a Als a positief is, is de grafiek dalend.

Als a negatief is, is de grafiek stijgend.

b Als de grafiek door $(2, 3)$ gaat, is $g(2) = 3$.

$g(2) = \frac{a}{2}$ en uit $\frac{a}{2} = 3$ volgt $a = 6$.

U6 a Als $x - 2 = 0$, dus als $x = 2$, dan heeft de functie geen functiewaarde.

De grafiek heeft de lijn $x = 2$ als verticale asymptoot.

Als x heel groot wordt, nadert de functiewaarde naar 8.

De grafiek heeft de lijn $y = 8$ als horizontale asymptoot.

9 Functies en algebra

- b Een gebroken functie heeft geen verticale asymptoot als de noemer voor geen enkele waarde van x gelijk is aan 0.

Een voorbeeld daarvan is $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$

9.4 Rekenen met breuken

intro Als je bij beide functies een tabel maakt, zie je dat de functies hetzelfde zijn.

25 a

x	0	2	4	6	8	10	12	14
y	0	$1\frac{2}{7}$	$2\frac{4}{7}$	$3\frac{6}{7}$	$5\frac{1}{7}$	$6\frac{3}{7}$	$7\frac{5}{7}$	9

- b Per stap van 2 is de toename telkens $1\frac{2}{7}$, dus constant. Dus is f een lineaire functie.

c $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{7}$ geeft $f(x) = \frac{7x}{14} + \frac{2x}{14}$ dus $f(x) = \frac{9x}{14}$

26 a $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{3x}{5}$ is gelijk aan $f(x) = \frac{4x}{5}$

b $g(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x$ is gelijk aan $g(x) = \frac{3}{4}x + \frac{2}{4}x$ dus $g(x) = 1\frac{1}{4}x$

c $h(x) = \frac{2x}{5} + \frac{3}{7}$ is gelijk aan $h(x) = \frac{14x}{35} + \frac{15}{35}$ dus $h(x) = \frac{14x + 15}{35}$

d $k(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x}$ is gelijk aan $k(x) = \frac{5}{x}$

e $l(x) = \frac{2}{3} + \frac{5}{x}$ is gelijk aan $l(x) = \frac{2x}{3x} + \frac{15}{3x}$ dus $l(x) = \frac{2x + 15}{3x}$

f $m(x) = \frac{4}{5x} + \frac{3}{2x}$ is gelijk aan $m(x) = \frac{8}{10x} + \frac{15}{10x}$ dus $m(x) = \frac{23}{10x}$

27 a $\frac{14}{35} = \frac{2}{5}$

Teller en noemer zijn beide door 7 gedeeld.

- b Als je de teller x door x deelt, houd je 1 over.

c $\frac{2 \cdot 3 \cdot x}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x} = \frac{3 \cdot x}{3 \cdot 5 \cdot x \cdot x} = \frac{x}{5 \cdot x \cdot x} = \frac{1}{5 \cdot x} = \frac{1}{5x}$
klopt.

- 28 a $15x^2$ en $20x^3$ kun je beide door 5 en door x^2 delen.

b $\frac{15x^2}{20x^3} = \frac{3 \cdot 5 \cdot x \cdot x}{4 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{3}{4x}$

c $\frac{28p^3}{21p^5} = \frac{4 \cdot 7 \cdot p \cdot p \cdot p}{3 \cdot 7 \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p} = \frac{4}{3p^2}$

29 a $\frac{36a^2}{28a} = \frac{4 \cdot 9 \cdot a \cdot a}{4 \cdot 7 \cdot a} = \frac{9a}{7}$

c $\frac{4x}{8x^3} = \frac{4 \cdot x}{4 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{2x^2}$

b $\frac{45x^4}{60x^2} = \frac{15 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{15 \cdot 4 \cdot x \cdot x} = \frac{3x^2}{4}$

d $\frac{26x^2}{65x^5} = \frac{13 \cdot 2 \cdot x \cdot x}{13 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{2}{5x^3}$

$$30 \text{ a } \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$\text{b } 5 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\text{c } \frac{2}{x} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{7x}$$

$$\text{d } \frac{1}{3x^2} \cdot \frac{6x^3}{x^2} = \frac{6x^3}{3x^4} = \frac{2}{x}$$

$$\text{e } 3x \cdot \frac{2x^2}{15x^3} = \frac{3x}{1} \cdot \frac{2x^2}{15x^3} = \frac{6x^3}{15x^3} = \frac{2}{5}$$

$$\text{f } \frac{2x}{9} \cdot \frac{3}{10x^2} = \frac{6x}{90x^2} = \frac{1}{15x}$$

31 a Hij heeft de breuk gesplitst.

b Hij heeft elke breuk vereenvoudigd.

c f is een lineaire functie.

d $g(x) = \frac{30x - 45}{5}$ wordt $g(x) = \frac{30x}{5} - \frac{45}{5}$ dus $g(x) = 6x - 9$.

$$32 \text{ a } g(x) = \frac{6 - 8x}{4}$$

$$g(x) = \frac{6}{4} - \frac{8x}{4}$$

$$g(x) = 1\frac{1}{2} - 2x$$

$$\text{b } m(x) = \frac{14 - 35x}{7}$$

$$m(x) = \frac{14}{7} - \frac{35x}{7}$$

$$m(x) = 2 - 5x$$

$$\text{c } n(x) = \frac{10x + 36}{100}$$

$$n(x) = \frac{10x}{100} + \frac{36}{100}$$

$$n(x) = 0,1x + 0,36$$

$$\text{d } k(x) = \frac{12(2x + 3)}{6}$$

$$k(x) = \frac{24x + 36}{6}$$

$$k(x) = \frac{24x}{6} + \frac{36}{6}$$

$$k(x) = 4x + 6$$

$$33 \text{ a } a(x) = \frac{x^2 - 8x}{x}$$

$$a(x) = \frac{x^2}{x} - \frac{8x}{x}$$

$$a(x) = x - 8$$

$$\text{b } b(x) = \frac{3x^2 - 12x}{x}$$

$$b(x) = \frac{3x^2}{x} - \frac{12x}{x}$$

$$b(x) = 3x - 12$$

$$\text{c } c(x) = \frac{20x^2 + 16x}{4x}$$

$$c(x) = \frac{20x^2}{4x} + \frac{16x}{4x}$$

$$c(x) = 5x + 4$$

$$\text{d } d(x) = \frac{6x^3 + 8x^2}{2x^2}$$

$$d(x) = \frac{6x^3}{2x^2} + \frac{8x^2}{2x^2}$$

$$d(x) = 3x + 4$$

$$026 \text{ a } f(x) = \frac{8x}{17} + \frac{3x}{17} \text{ geeft } f(x) = \frac{8x + 3x}{17} \text{ dus } f(x) = \frac{11x}{17}$$

$$\text{b } g(x) = \frac{16x}{72} + \frac{45x}{72} \text{ dus } g(x) = \frac{61x}{72}$$

$$\text{c } h(x) = \frac{11}{3x} + \frac{5}{4x}$$

$$h(x) = \frac{44}{12x} + \frac{15}{12x} \text{ wordt } h(x) = \frac{44 + 15}{12x} \text{ en dus } h(x) = \frac{59}{12x}$$

9 Functies en algebra

032 a $\frac{18x}{3}$ is te vereenvoudigen tot $6x$ en $\frac{12}{3}$ is te vereenvoudigen tot 4.

b $f(x) = 6x + 4$

c $g(x) = \frac{14x + 42}{7}$

$$g(x) = \frac{14x}{7} + \frac{42}{7}$$

$$g(x) = 2x + 6$$

d $m(x) = \frac{27x + 9}{3}$

$$m(x) = \frac{27x}{3} + \frac{9}{3}$$

$$m(x) = 9x + 3$$

e $n(x) = \frac{65 - 26x}{13}$

$$n(x) = \frac{65}{13} - \frac{26x}{13}$$

$$n(x) = 5 - 2x$$

f $k(x) = \frac{8(4x + 2)}{16}$

$$k(x) = \frac{32x + 16}{16}$$

$$k(x) = \frac{32x}{16} + \frac{16}{16}$$

$$k(x) = 2x + 1$$

U7 a $\frac{2x^2}{7x^3} \cdot \frac{5x^3}{8x} = \frac{10x^5}{56x^4} = \frac{5}{28}x$

c $\frac{12p}{15} \cdot \frac{6p^4}{4p^2} \cdot 3p =$

$$\frac{72p^5}{60p^2} \cdot \frac{3p}{1} = \frac{216p^6}{60p^2} = 3\frac{3}{5}p^4$$

b $9x^3 \cdot \frac{7x}{54x^2} = \frac{63x^4}{54x^2} = 1\frac{1}{6}x^2$

d $2p \cdot \frac{14}{3p^3} \cdot 9p^3 =$

$$\frac{2p}{1} \cdot \frac{14}{3p^3} \cdot \frac{9p^3}{1} =$$

$$\frac{252p^3}{3p^3} = 84$$

U8 Bij $x = 0$ heeft de functie f geen uitkomst, maar de functie g wel.
Bij $x = 0$ zijn $f(x)$ en $g(x)$ dus niet gelijk.

9.5 Machtsfuncties

intro Van klein naar groot:

$$(-1)^5, 0^8, \left(-\frac{1}{3}\right)^8, \left(\frac{1}{2}\right)^4, 0,4^3, \left(\frac{1}{2}\right)^3, (-1)^4, (-2)^6 \text{ en } 3^5$$

34 a $h(3) = 0,4 \times 3^5 = 97,2$

De raket is na drie seconden 97,2 meter hoog.

b $h(10) = 0,4 \times 10^5 = 40\,000$

Na tien seconden is de raket 40 000 meter hoog.

c $h(7) = 6722,8$

$$h(8) = 13\,107,2$$

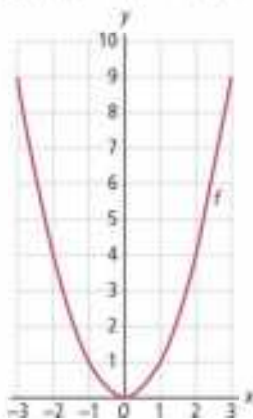
$$h(7,5) = 9492,19$$

$$h(7,6) = 10\,142,10$$

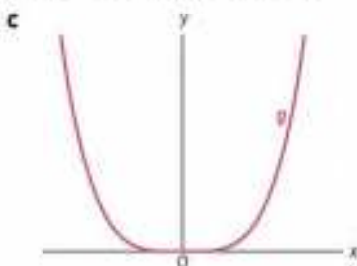
Na 7,6 seconden is de raket ongeveer 10 km hoog.

35 a

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



- b** Bij $x = 0$ is de functiewaarde gelijk aan 0.
c Bij alle waarden van $x \neq 0$ is de functiewaarde groter dan 0.
d De top is $(0, 0)$.
e De grafiek ligt nergens onder de x -as en is symmetrisch in de y -as.
- 36 a** $g(-2) = (-2)^3 = -8$
b $g(-4) = (-4)^3 = -64$ en $g(4) = 4^3 = 64$
c Bij $x = 0$ is $g(x) = 0$.
d Bij $x > 0$ is $g(x) > 0$.
e Nee, de grafiek van g heeft geen top.
f De grafiek heeft 1 snijpunt met de lijn $y = 7$ en ook 1 snijpunt met de lijn $y = -4$.
- 37 a** $h(-2) = (-2)^4 = 16$
b $h(-5) = (-5)^4 = 625$ en $h(5) = 5^4 = 625$
c Bij $x = 0$ is $h(x) = 0$.
d Bij alle waarden van $x \neq 0$ is $h(x) > 0$.
e De top is $(0, 0)$.
f De grafiek heeft 2 snijpunten met de lijn $y = 7$ en geen snijpunten met de lijn $y = -4$.
- 38 a** De grafiek heeft geen top. Voor $x < 0$ is $k(x) < 0$ en voor $x > 0$ is $k(x) > 0$.
b $k(-2) = (-2)^5$ is negatief omdat 5 oneven is.
c $k(-1)$ is ook negatief, maar $k(4)$ is positief.
- 39 a** $x = -3$ want $g(-3) = (-3)^4 = 81$.
b Nee, want de grafiek van k snijdt de lijn $y = 125$ maar één keer. (Dat komt omdat de exponent 3 oneven is.)
- 40 a** De grafiek van f heeft één snijpunt met de lijn $y = -8$.
 De vergelijking $x^3 = -8$ heeft dus één oplossing.
b $x = -2$ want $(-2)^3 = -8$



9 Functies en algebra

- d De vergelijking $x^4 = 81$ heeft 2 oplossingen, want de grafiek van g heeft twee snijpunten met de lijn $y = 81$.
- e De grafiek van g heeft geen snijpunten met de lijn $y = -1$.
- f n is even en $c < 0$.

- 41 a** Als $h = 24$ cm, dan is $r = 12$ cm.

$$I = 3,67 \cdot 12^3 = 6341,76$$

De inhoud van de vaas is $6341,76 \text{ cm}^3$.

- b** Als $h = 13$ cm, dan is $r = 6,5$ cm.

$$I = 3,67 \cdot 6,5^3 = 1007,87375$$

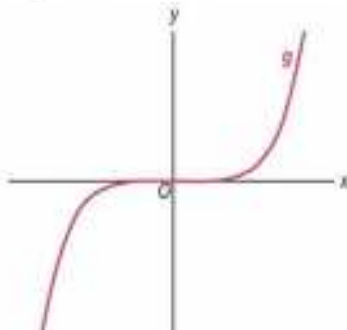
De inhoud is dan ongeveer $1008 \text{ cm}^3 = 1,008 \text{ dm}^3$ en dat is meer dan 1 liter.

- c** $h = 13$ geeft $I = 0,46 \cdot 13^3 = 1010,62$.

De inhoud is dan ongeveer 1011 cm^3 , en dat komt vrijwel overeen met het antwoord bij opdracht b.

- 039 a** Bij $x = -2$ is de functiewaarde ook 16.

b



- c** De horizontale lijn $y = 243$ snijdt de grafiek van g slechts één keer.

- 040 a** De vergelijking $x^3 = 5$ heeft één oplossing.

- b** De grafiek van g heeft twee snijpunten met de lijn $y = 11$.

- c** De vergelijking $x^4 = 11$ heeft twee oplossingen.

- d** De lijn $y = -11$ heeft geen snijpunten met de grafiek van $g(x) = x^4$.

- e** Als n oneven is, heeft elke horizontale lijn precies één snijpunt met de grafiek van $f(x) = x^n$. Dan heeft de vergelijking $x^n = c$ precies één oplossing. Als de vergelijking $x^n = c$ geen oplossing heeft, moet n dus even zijn.

- f** De lijn $y = c$ snijdt de grafiek van $f(x) = x^n$ niet in het geval $c < 0$.

Bij $c < 0$ heeft de vergelijking $x^n = c$ (met n even) dus geen oplossing.

- U9** Als $x = -6$, dan is $-2x$ positief en $(-2x)^3$ ook.

$4x$ is dan negatief.

x^4 is positief.

$3x$ is dan negatief en $(3x)^5$ ook.

$-x$ is dan positief en $(-x)^6$ ook.

positief $\times$ negatief $\times$ positief $\times$ negatief $\times$ positief = positief

De uitkomst van $f(-6)$ is positief.

U10 a A $x^4 = \frac{1}{16}$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{1}{2}$$

B $x^3 = -27$

$$x = -3$$

b aantal oplossingen van $x^n = c$

	$c < 0$	$c = 0$	$c > 0$
n even	geen	één	twee
n oneven	één	één	één

9.6 Rekenen met machten

intro Bijvoorbeeld met een tabel van beide formules:

t	0	6	12	30	60
s	0	176,4	705,6	4410	17 640
T	0	0,1	0,2	0,5	1
S	0	0,1764	0,7056	4,41	17,64

S in kilometers komt overeen met s in meters.

42 a $k(x) = 4^3 \cdot x^3$

$$k(x) = 64 \cdot x^3$$

b $f(x) = (6x)^4$

$$f(x) = 6x \cdot 6x \cdot 6x \cdot 6x$$

$$f(x) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$$

$$f(x) = 6^4 \cdot x^4$$

$$f(x) = 1296 \cdot x^4$$

$$m(x) = (-3x)^2$$

$$m(x) = -3x \cdot -3x$$

$$m(x) = -3 \cdot -3 \cdot x \cdot x$$

$$m(x) = (-3)^2 \cdot x^2$$

$$m(x) = 9 \cdot x^2$$

43 a $\left(\frac{2}{x}\right)^4 = \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{2^4}{x^4}$

b $\left(\frac{-3}{p}\right)^5 = \frac{-3}{p} \cdot \frac{-3}{p} \cdot \frac{-3}{p} \cdot \frac{-3}{p} \cdot \frac{-3}{p} = \frac{-3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3}{p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p} = \frac{(-3)^5}{p^5}$

44 a $(7p)^2 = 7^2 \cdot p^2 = 49p^2$

b $(4x)^3 = 4^3 \cdot x^3 = 64x^3$

c $(-2ab)^5 = (-2)^5 \cdot a^5 \cdot b^5 = -32a^5b^5$

d $(-5x^2y)^4 = (-5)^4 \cdot (x^2)^4 \cdot y^4 = 625x^8y^4$

e $(m^2n^3)^4 = (m^2)^4 \cdot (n^3)^4 = m^8n^{12}$

f $(3a^2b)^3 = 3^3 \cdot (a^2)^3 \cdot b^3 = 27a^6b^3$

g $(-9xy^4)^2 = (-9)^2 \cdot x^2 \cdot (y^4)^2 = 81x^2y^8$

h $(-10p^{12}q^3)^5 = (-10)^5 \cdot (p^{12})^5 \cdot (q^3)^5 = -100\,000p^{60}q^{15}$

9 Functies en algebra

$$\begin{aligned}
 45 \text{ a } \left(\frac{3}{x}\right)^2 &= \frac{3^2}{x^2} = \frac{9}{x^2} \\
 \text{b } \left(\frac{-4}{m}\right)^3 &= \frac{(-4)^3}{m^3} = \frac{-64}{m^3} \\
 \text{c } \left(\frac{q}{4p^5}\right)^5 &= \frac{q^5}{(4p^5)^5} = \frac{q^5}{4^5 \cdot (p^5)^5} = \frac{q^5}{1024p^{25}} \\
 \text{d } \left(\frac{-2}{a^2}\right)^4 &= \frac{(-2)^4}{(a^2)^4} = \frac{16}{a^8} \\
 \text{e } \left(\frac{3p^2}{q^5}\right)^2 &= \frac{(3p^2)^2}{(q^5)^2} = \frac{3^2 \cdot (p^2)^2}{q^{10}} = \frac{9p^4}{q^{10}} \\
 \text{f } \left(\frac{3}{4x}\right)^3 &= \frac{3^3}{(4x)^3} = \frac{27}{4^3 \cdot x^3} = \frac{27}{64x^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 46 \text{ a } y &= (2x^2)^4 \cdot 5x^3 \\
 y &= 2^4 \cdot (x^2)^4 \cdot 5 \cdot x^3 \\
 y &= 16 \cdot x^8 \cdot 5 \cdot x^3 \\
 y &= 80x^{11} \\
 \text{b } y &= \frac{8x^3 \cdot (5x)^2 \cdot x^2}{(2x^2)^2} \\
 y &= \frac{8 \cdot x^3 \cdot 5^2 \cdot x^2 \cdot x^2}{2^2 \cdot (x^2)^2} \\
 y &= \frac{8 \cdot x^3 \cdot 25 \cdot x^4}{4 \cdot x^4} \\
 y &= \frac{200x^7}{4x^4} \\
 y &= 50x^3 \\
 \text{c } y &= 6x^6 + (3x^2)^3 \\
 y &= 6x^6 + 3^3 \cdot (x^2)^3 \\
 y &= 6x^6 + 27x^6 \\
 y &= 33x^6 \\
 \text{d } y &= \frac{8x^5 + 2x \cdot (x^2)^2}{5x^3} \\
 y &= \frac{8x^5 + 2x \cdot x^4}{5x^3} \\
 y &= \frac{8x^5 + 2x^5}{5x^3} \\
 y &= \frac{10x^5}{5x^3} \\
 y &= 2x^2
 \end{aligned}$$

47 Jim denkt dat de rekenregel $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ ook voor optellen geldt.

$$\begin{aligned}
 48 \text{ a } y &= (-3x)^2 \\
 y &= (-3)^2 \cdot x^2 \\
 y &= 9x^2 \\
 \text{b } y &= (x+6)^2 \\
 y &= (x+6)(x+6) \\
 y &= x^2 + 12x + 36 \\
 \text{c } y &= (2x+8)^2 \\
 y &= (2x+8)(2x+8) \\
 y &= 4x^2 + 32x + 64 \\
 \text{d } y &= (x^2+5)^2 \\
 y &= (x^2+5)(x^2+5) \\
 y &= x^4 + 10x^2 + 25 \\
 \text{e } y &= (8-3x)^2 \\
 y &= (8-3x)(8-3x) \\
 y &= 9x^2 - 48x + 64 \\
 \text{f } y &= (8x)^2 \\
 y &= 8^2 \cdot x^2 \\
 y &= 64x^2 \\
 \text{g } y &= (-5+4x)^2 \\
 y &= (-5+4x)(-5+4x) \\
 y &= 16x^2 - 40x + 25 \\
 \text{h } y &= (5x^2)^2 \\
 y &= 5^2 \cdot (x^2)^2 \\
 y &= 25x^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 44 \text{ a } (5p)^3 &= 5^3 \cdot p^3 = 125p^3 \\
 \text{b } (-3pq)^4 &= (-3)^4 \cdot p^4 \cdot q^4 = 81p^4q^4 \\
 \text{c } (2x^3y^2)^5 &= 2^5 \cdot (x^3)^5 \cdot (y^2)^5 = 32x^{15}y^{10} \\
 \text{d } (4a)^3 &= 4^3 \cdot a^3 = 64a^3 \\
 \text{e } (6x)^2 &= 6^2 \cdot x^2 = 36x^2 \\
 \text{f } (-4pq)^4 &= (-4)^4 \cdot p^4 \cdot q^4 = 256p^4q^4 \\
 \text{g } (-3x^3y^2)^3 &= (-3)^3 \cdot (x^3)^3 \cdot (y^2)^3 \\
 &= -27x^9y^6 \\
 \text{h } (a^3b^2)^5 &= (a^3)^5 \cdot (b^2)^5 = a^{15}b^{10} \\
 \text{i } (5a^4b)^2 &= 5^2 \cdot (a^4)^2 \cdot b^2 = 25a^8b^2 \\
 \text{j } (-2p^4q)^6 &= (-2)^6 \cdot (p^4)^6 \cdot q^6 = \\
 &= 64p^{24}q^6 \\
 \text{k } (-2p^{10}q^4)^{10} &= \\
 &= (-2)^{10} \cdot (p^{10})^{10} \cdot (q^4)^{10} = \\
 &= 1024p^{100}q^{40}
 \end{aligned}$$

$$045 \text{ a } \left(\frac{-6}{a}\right)^2 = \frac{(-6)^2}{a^2} = \frac{36}{a^2}$$

$$\text{b } \left(\frac{4x^2}{y^3}\right)^3 = \frac{(4x^2)^3}{(y^3)^3} = \frac{4^3 \cdot (x^2)^3}{y^9} = \frac{64x^6}{y^9}$$

$$U11 \quad f(x) = \frac{(x^2 \cdot (2x+3) - 3x^2)^4}{(x \cdot \sqrt{2x})^4 \cdot x^6}$$

$$f(x) = \frac{(2x^3 + 3x^2 - 3x^2)^4}{x^4 \cdot \sqrt{2x} \cdot \sqrt{2x} \cdot \sqrt{2x} \cdot \sqrt{2x} \cdot x^6}$$

$$f(x) = \frac{(2x^3)^4}{x^4 \cdot 2x \cdot 2x \cdot x^6}$$

$$f(x) = \frac{2^4 \cdot (x^3)^4}{4x^{12}} \text{ ofwel } f(x) = \frac{16x^{12}}{4x^{12}} \text{ en dus } f(x) = 4$$

9.7 Gemengde opdrachten

$$49 \text{ a } a(x) = \frac{5x^3 + 7x^2}{x^2}$$

$$a(x) = \frac{5x^3}{x^2} + \frac{7x^2}{x^2}$$

$$a(x) = 5x + \frac{7}{x}$$

$$\text{b } b(x) = (6x-3)^2$$

$$b(x) = (6x-3)(6x-3)$$

$$b(x) = 36x^2 - 18x - 18x + 9$$

$$b(x) = 36x^2 - 36x + 9$$

$$\text{c } c(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^3)^2 \cdot 4x}{2x^2}$$

$$c(x) = \frac{3x^2 \cdot x^6 \cdot 4x}{2x^2}$$

$$c(x) = \frac{12x^9}{2x^2}$$

$$c(x) = 6x^7$$

$$\text{d } d(x) = 3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{5x}$$

$$d(x) = 12\sqrt{10x}$$

$$\text{e } e(x) = \frac{\sqrt[3]{6x^3}}{\sqrt[3]{2x^2}}$$

$$e(x) = \sqrt[3]{\frac{6x^3}{2x^2}}$$

$$e(x) = \sqrt[3]{3x}$$

$$\text{f } f(x) = x^3 \cdot (-4x^4)^3$$

$$f(x) = x^3 \cdot (-4)^3 \cdot (x^4)^3$$

$$f(x) = x^3 \cdot -64 \cdot x^{12}$$

$$f(x) = -64x^{15}$$

$$\text{g } g(x) = \frac{9x \cdot x^5}{3x^8}$$

$$g(x) = \frac{9x^6}{3x^8}$$

$$g(x) = \frac{3}{x^2}$$

$$\text{h } h(x) = 10x^3 + 4x \cdot x^2$$

$$h(x) = 10x^3 + 4x^3$$

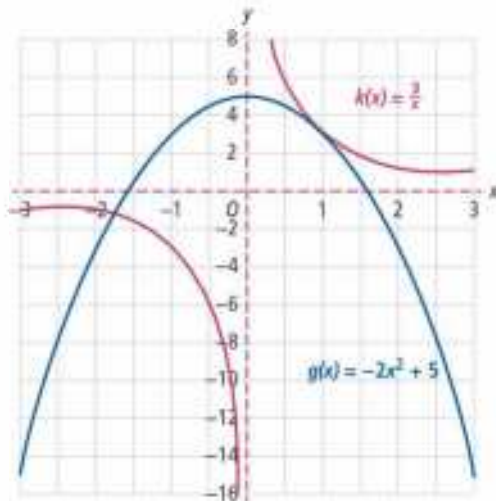
$$h(x) = 14x^3$$

- 50 a De functie f is een lineaire functie, g is een kwadratische functie, h is een wortelfunctie, k is een gebroken functie en l is een constante functie.

9 Functies en algebra

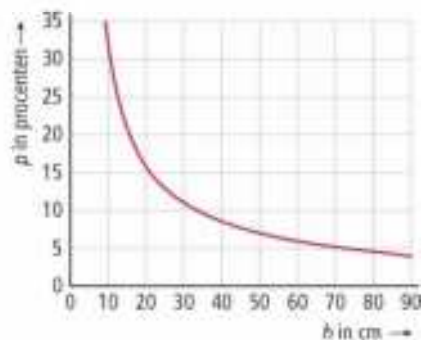
b	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	$g(x)$	-13	-3	3	5	3	-3	-13

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$k(x)$	-1	-1,5	-3	-6	-	6	3	1,5	1



- c** De coördinaten van dat punt zijn $(1, 3)$.
- d** $f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$, $g(1) = -2 \times 1^2 + 5 = -2 + 5 = 3$,
 $h(1) = \sqrt{2 \times 1 + 7} = \sqrt{9} = 3$, $k(1) = \frac{3}{1} = 3$ en $l(1) = 3$
- e** $2x + 7 = 0$
 $2x = -7$
 $x = -3\frac{1}{2}$
 Het randpunt is $(-3\frac{1}{2}, 0)$.

51 a



- b** $p(h) = \frac{320}{h}$
- c** $\frac{320}{h} = 5$ $\frac{320}{h} = 10$
 $h = 64$ $h = 32$

De hoogte boven de grondwaterstand moet tussen 32 cm en 64 cm liggen. De wortels van deze planten moeten tussen $90 - 64 = 26$ cm en $90 - 32 = 58$ cm in de grond gestopt worden.

- 52 a** Invullen van $t = 0$ geeft $T = 4 + \frac{75}{0 + 5} = 19$. Op het moment dat Peter het blikje in de koelkast zet is de temperatuur van het blikje 19°C .

$$b \quad 5 = 4 + \frac{75}{t+5}$$

$$\frac{75}{t+5} = 1$$

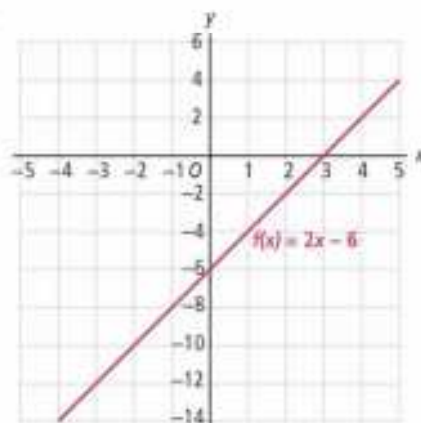
$$t+5 = 75$$

$$t = 70$$

Na 70 minuten heeft het blikje sinas een temperatuur van 5 °C.

- c Op den duur krijgt het blikje sinas volgens de formule een temperatuur van 4 °C. Dat betekent dat de grafiek van T een horizontale asymptoot heeft.

53 a



- b De top is het punt $(0, -12)$, dus $b = -12$.

De grafiek gaat door het punt $(2, 0)$, dus $g(2) = 0$.

$$g(2) = a \cdot 2^2 - 12$$

$$4a - 12 = 0 \text{ dus } a = 3$$

De gekozen waarden zijn $a = 3$ en $b = -12$.

- c Invullen van $x = 1$ en $y = 1$ geeft $1 = a \times 1 + b$ oftewel $a + b = 1$. Het punt $(1, 1)$ ligt op de grafiek van f voor alle getallen a en b waarvoor geldt dat $a + b = 1$. Er zijn dus oneindig veel mogelijkheden.

- d Invullen van $x = 1$ en $y = 1$ geeft $1 = b + \frac{a}{1}$ oftewel $a + b = 1$. Het punt $(1, 1)$

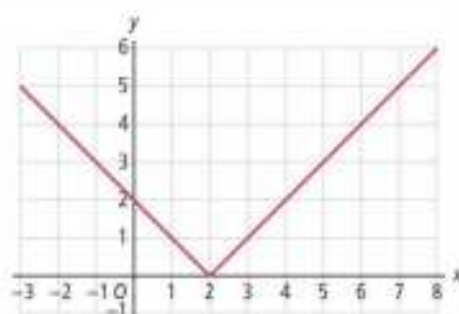
ligt op de grafiek van h voor alle getallen a en b waarvoor geldt dat $a + b = 1$.

Invullen van $x = 1$ en $y = 1$ geeft $1 = a \cdot \sqrt{b \times 1}$ oftewel $a \cdot \sqrt{b} = 1$. Het punt $(1, 1)$ ligt op de grafiek van i voor alle getallen a en b waarvoor geldt dat $a \cdot \sqrt{b} = 1$.

54 a

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$h(x)$	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6

b



- c De grafiek bestaat uit twee halve lijnen.
 d Bij $x \geq 2$ heeft Janneke gelijk. Voor $x \leq 2$ heeft Janneke geen gelijk, want voor die waarden van x is de grafiek dalend.

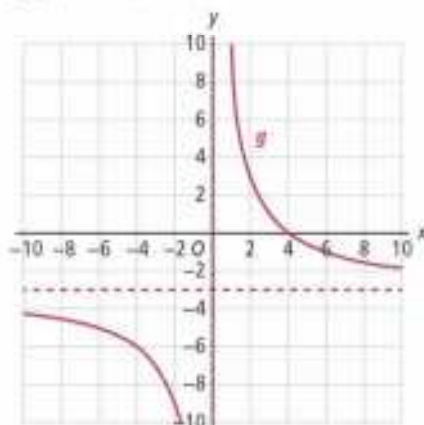
9 Functies en algebra

Samenvatting

- S1** De functie k is een gebroken functie met functiewaarden voor $x \neq 0$.
 De functie l is een machtsfunctie met functiewaarden voor elke waarde van x .
 De functie m is een wortelfunctie met functiewaarden als $4x - 18 \geq 0$, dus voor $x \geq 4\frac{1}{2}$.

S2 a b

x	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
$g(x)$	-4,2	-4,5	-5	-6	-9	-	3	0	-1	-1,5	-1,8



- c** De horizontale asymptoot is de lijn $y = -3$.
d De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.
- S3 a** Van de functies f en h heeft de grafiek een top, want deze machtsfuncties hebben een even exponent.
b De grafiek van f heeft twee snijpunten met de lijn $y = 18$ en geen snijpunten met de lijn $y = -4$.
- S4** $10 - 5x = 0$
 $10 = 5x$ geeft $x = 10 : 5$ dus $x = 2$
 $h(2) = 5 + \sqrt{0} = 5$
 Het randpunt is $(2, 5)$.

S5 a $\sqrt{6m} \cdot \sqrt{11n} = \sqrt{66mn}$

b $5\sqrt{a} \cdot 6\sqrt{5b} = 30\sqrt{5ab}$

c $3\sqrt{7a} + 5\sqrt{7a} - 2\sqrt{7a} = 6\sqrt{7a}$

d $7\sqrt{5x} + 3\sqrt{5x} + \sqrt{2x} =$
 $10\sqrt{5x} + \sqrt{2x}$

S6 a $4\sqrt{15} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{240}$

b $\frac{\sqrt{36k^2}}{\sqrt{24k}} = \sqrt{\frac{36k^2}{24k}} = \sqrt{1\frac{1}{2}k}$

S7 a $\frac{5}{4x} + \frac{2}{3x} =$

$\frac{15}{12x} + \frac{8}{12x} = \frac{23}{12x}$

b $\frac{8x^2}{9y} \cdot \frac{6y^2}{2xy} = \frac{48x^2y}{18xy^2} = \frac{8x}{3y}$

S8 a Bij tabel B hoort een omgekeerd evenredig verband, want $3 \times 36 = 108$, $6 \times 18 = 108$, $24 \times 4,5 = 108$ en $54 \times 2 = 108$.

b $p \times q = 108$, $p = \frac{108}{q}$ en $q = \frac{108}{p}$

S9 a $(3a^2b^4)^3 = 3^3 \cdot (a^2)^3 \cdot (b^4)^3 = 27a^6b^{12}$ c $(3a+5)^2 = (3a+5)(3a+5) = 9a^2 + 15a + 15a + 25 = 9a^2 + 30a + 25$

b $\left(\frac{2a}{3b}\right)^4 = \frac{(2a)^4}{(3b)^4} = \frac{2^4 \cdot a^4}{3^4 \cdot b^4} = \frac{16a^4}{81b^4}$

d $\left(\frac{2m^2}{5n^3}\right)^4 = \frac{(2m^2)^4}{(5n^3)^4} = \frac{2^4 \cdot (m^2)^4}{5^4 \cdot (n^3)^4} = \frac{16m^8}{625n^{12}}$

Test jezelf

T1 a $x - 1 \geq 0$ geeft $x \geq 1$, dus f heeft functiewaarden voor $x \geq 1$.
 $28 - 4x \geq 0$ geeft $x \leq 7$, dus g heeft functiewaarden voor $x \leq 7$.

b $x - 1 = 0$ $28 - 4x = 0$
 $x = 1$ $x = 7$
 $f(1) = 2 \cdot \sqrt{0} = 0$ $g(7) = \sqrt{0} = 0$

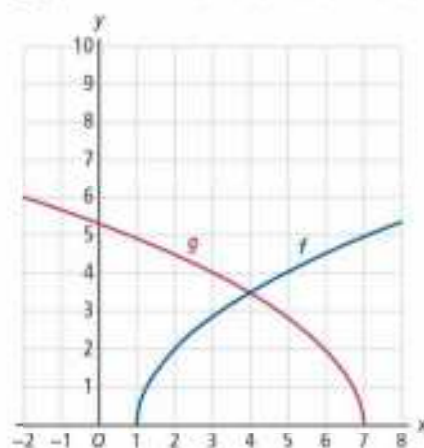
De grafiek van f heeft randpunt $(1, 0)$.

De grafiek van g heeft randpunt $(7, 0)$.

c

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	-	-	-	0	2	2,8	3,5	4	4,5	4,9	5,3

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(x)$	6	5,7	5,3	4,9	4,5	4	3,5	2,8	2	0	-



d Punt S heeft coördinaten $(4; 3,5)$.
e $k(41) = 27$ geeft $a\sqrt{2 \cdot 41 - 1} = 27$
 $a\sqrt{81} = 27$
 $9a = 27$
 $a = 3$

9 Functies en algebra

T2 a $f(x) = 2\sqrt{x} + 5\sqrt{x} + \sqrt{x}$
 $f(x) = 8\sqrt{x}$

b $g(x) = \frac{2x}{5} + \frac{3x}{10}$
 $g(x) = \frac{4x}{10} + \frac{3x}{10}$
 $g(x) = \frac{7x}{10}$

c $h(x) = \frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x$
 $h(x) = \frac{3}{12}x + \frac{8}{12}x$
 $h(x) = \frac{11}{12}x$

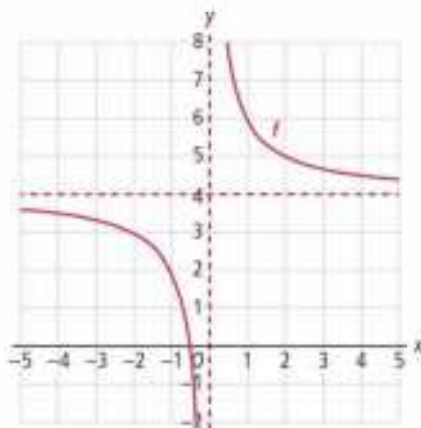
d $i(x) = 4\sqrt{2x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{2x}$
 $i(x) = 6\sqrt{2x} + 3\sqrt{x}$

e $j(x) = \frac{8}{3x} + \frac{x}{2}$
 $j(x) = \frac{16}{6x} + \frac{3x^2}{6x}$
 $j(x) = \frac{16 + 3x^2}{6x}$

f $k(x) = \frac{3}{5x} + \frac{1}{4x}$
 $k(x) = \frac{12}{20x} + \frac{5}{20x}$
 $k(x) = \frac{17}{20x}$

T3 a

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	3,6	3,5	$3\frac{1}{3}$	3	2	-	6	5	$4\frac{2}{3}$	4,5	4,4



- b** De horizontale asymptoot is de lijn $y = 4$.
c De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.
d De horizontale asymptoot is de lijn $y = -2$, dus $a = -2$.
 $g(1) = 1$ geeft $-2 + \frac{b}{1} = 1$ ofwel $-2 + b = 1$ dus $b = 3$.

T4 a $f(x) = \frac{16x + 8}{4}$
 $f(x) = \frac{16x}{4} + \frac{8}{4}$
 $f(x) = 4x + 2$

b $h(x) = \frac{120 - 45x}{15}$
 $h(x) = \frac{120}{15} - \frac{45x}{15}$
 $h(x) = 8 - 3x$

c $l(x) = \frac{-2(9x + 14)}{4}$
 $l(x) = \frac{-18x - 28}{4}$
 $l(x) = \frac{-18x}{4} - \frac{28}{4}$
 $l(x) = -4\frac{1}{2}x - 7$

d $m(x) = \frac{10(2,5 - 4,5x)}{5}$
 $m(x) = \frac{25 - 45x}{5}$
 $m(x) = \frac{25}{5} - \frac{45x}{5}$
 $m(x) = 5 - 9x$

T5 a $0,3 \times 20 = 6$; $0,5 \times 12 = 6$; $2 \times 3 = 6$ en $4 \times 1,5 = 6$

x en y zijn omgekeerd evenredig.

Formules: $x \cdot y = 6$, $y = \frac{6}{x}$ en $x = \frac{6}{y}$

b $2 \times 60 = 120$; $3 \times 40 = 120$; $4 \times 30 = 120$ en $5 \times 24 = 120$

x en y zijn omgekeerd evenredig.

Formules: $x \cdot y = 120$, $y = \frac{120}{x}$ en $x = \frac{120}{y}$

T6 a $(6x)^2 = 6^2 \cdot x^2 = 36x^2$

d $(-6p^2q)^4 = (-6)^4 \cdot (p^2)^4 \cdot q^4 = 1296p^8q^4$

b $(9 + 2x)^2 = (9 + 2x)(9 + 2x) = 81 + 18x + 18x + 4x^2 = 4x^2 + 36x + 81$

e $(3p^5q^6)^4 = 3^4 \cdot (p^5)^4 \cdot (q^6)^4 = 81p^{20}q^{24}$

c $\left(\frac{5p}{13}\right)^2 = \frac{(5p)^2}{13^2} = \frac{5^2 \cdot p^2}{169} = \frac{25p^2}{169}$

f $\left(\frac{1}{5p^3}\right)^4 = \frac{1^4}{(5p^3)^4} = \frac{1}{5^4 \cdot (p^3)^4} = \frac{1}{625p^{12}}$

T7 a $2\sqrt{6} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{30} = \sqrt{120}$

e $\sqrt{5p^2q} \cdot \sqrt{3pq^2} = \sqrt{15p^3q^3}$

b $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3x} \cdot \sqrt{5y} = \sqrt{30xy}$

f $3\sqrt{2ab} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2ab} = \sqrt{18ab}$

c $7\sqrt{3p} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{3p} = \sqrt{147p}$

g $3\sqrt{7w} \cdot \sqrt{z} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7wz} = \sqrt{63wz}$

d $\frac{\sqrt{12ab}}{\sqrt{6b}} = \sqrt{2a}$

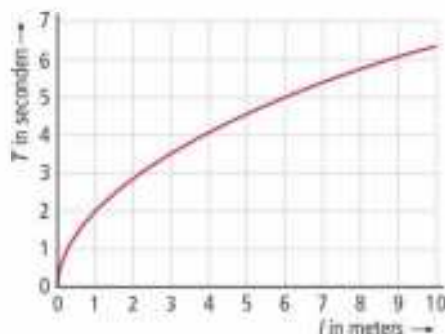
h $\frac{8\sqrt{pqr}}{4\sqrt{pr}} = 2\sqrt{q} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{q} = \sqrt{4q}$

T8 a 85 cm geeft $l = 0,85$ m

$2,01 \cdot \sqrt{0,85} = 1,85$, dus de slingertijd is ongeveer 1,85 seconden.

b

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8
T	0	2,01	2,84	3,48	4,02	4,49	4,92	5,32	5,69



c Bij ongeveer 6,2 meter is de slingertijd 5 seconden.

Controle: $2,01 \cdot \sqrt{6,2} = 5,00$, klopt.

d $2,01\sqrt{l} = \sqrt{2,01^2} \cdot \sqrt{l} = \sqrt{4,04} \cdot \sqrt{l} = \sqrt{4,04l}$
dus $p = 4,04$.

9 Functies en algebra

Extra oefening

E1 a Invullen van $x = 0$ geeft $f(0) = 1 + \sqrt{0-4} = 1 + \sqrt{-4}$, maar de wortel uit een negatief getal bestaat niet.

b $x - 4 = 0$

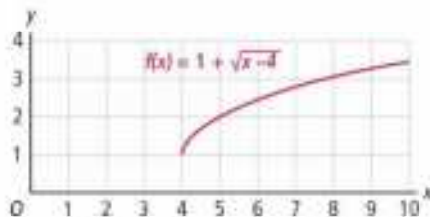
$x = 4$

$f(4) = 1 + \sqrt{0} = 1$

Het randpunt is $(4, 1)$.

c

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	-	-	-	-	1	2	2,4	2,7	3	3,2	3,4



E2 a $x - 5 = 0$

$x = 5$

$g(5) = -2 + \sqrt{0} = -2$

Het randpunt is $(5, -2)$.

b $x = 0$

$h(0) = \sqrt{0} - 15 = -15$

Het randpunt is $(0, -15)$.

c $4x + 20 = 0$

$4x = -20$

$x = -5$

$k(-5) = \sqrt{0} + 9 = 9$

Het randpunt is $(-5, 9)$.

d $3 - 2x = 0$

$2x = 3$ dus $x = 1\frac{1}{2}$

$m(1\frac{1}{2}) = 16 - \sqrt{0} = 16$

Het randpunt is $(1\frac{1}{2}, 16)$.

E3 a $\sqrt{19} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{57}$

b $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{3y} = \sqrt{6xy}$

c $6\sqrt{7} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{252}$

d $\frac{\sqrt{111}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{111}{3}} = \sqrt{37}$

e $\sqrt{5a^2b} \cdot \sqrt{7ab^2} = \sqrt{35a^3b^3}$

f $3\sqrt{a} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{9a}$

g $2\sqrt{5x} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5x} = \sqrt{20x}$

h $\frac{\sqrt{85a^5b^7}}{\sqrt{17a^3b^6}} = \sqrt{\frac{85a^5b^7}{17a^3b^6}} = \sqrt{5a^2b}$

E4 a $\frac{2x}{3} \cdot \frac{6}{8} = \frac{12x}{24} = \frac{x}{2}$ (of $\frac{1}{2}x$)

b $7 \cdot \frac{1}{5x} = \frac{7}{5x}$

c $\frac{x}{6} \cdot \frac{3}{4x^2} = \frac{3x}{24x^2} = \frac{1}{8x}$

d $\frac{5x}{11} \cdot \frac{3}{7x} = \frac{15x}{77x} = \frac{15}{77}$

e $\frac{5}{x} + \frac{2}{x} = \frac{7}{x}$

f $\frac{13}{4x} - \frac{2}{x} = \frac{13}{4x} - \frac{8}{4x} = \frac{5}{4x}$

g $\frac{7}{8x} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8x} - \frac{2x}{8x} = \frac{7-2x}{8x}$

h $\frac{-3x}{12x^2} + \frac{1}{4x} = \frac{-1}{4x} + \frac{1}{4x} = 0$

E5 a In tabel A en in tabel D zijn x en y omgekeerd evenredig en in tabel B en in tabel C niet.

b Bij tabel A hoort de formule $x \cdot y = 70$ of $y = \frac{70}{x}$ of $x = \frac{70}{y}$

Bij tabel B hoort de formule $y = 2\frac{1}{2}x$.

Bij tabel C hoort de formule $y = -\frac{3}{4}x - 3$.

Bij tabel D hoort de formule $x \cdot y = -8$ of $y = \frac{-8}{x}$ of $x = \frac{-8}{y}$

E6 a $f(x) = \frac{-8x + 12}{4}$

$$f(x) = \frac{-8x}{4} + \frac{12}{4}$$

$$f(x) = -2x + 3$$

b $g(x) = \frac{180 - 15x}{-30}$

$$g(x) = \frac{180}{-30} + \frac{-15x}{-30}$$

$$g(x) = -6 + \frac{1}{2}x$$

c $h(x) = \frac{2\frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2}}{5}$

$$h(x) = \frac{2\frac{1}{2}x}{5} - \frac{7\frac{1}{2}}{5}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$$

d $k(x) = \frac{-14(1 - 3x)}{21}$

$$k(x) = \frac{-14 + 42x}{21}$$

$$k(x) = \frac{-14}{21} + \frac{42x}{21}$$

$$k(x) = -\frac{2}{3} + 2x$$

E7 a $2^3 \cdot (2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^6 = 2^9$

b $5^4 \cdot 5^8 \cdot 5 = 5^4 \cdot 5^8 \cdot 5^1 = 5^{13}$

c $7^2 \cdot 7^5 \cdot (7^3)^2 = 7^2 \cdot 7^5 \cdot 7^6 = 7^{13}$

d $\frac{3^4 \cdot 3 \cdot 3^2}{3^3} = \frac{3^7}{3^3} = 3^4$

e $y = x^4 \cdot x^2 \cdot x$ wordt $y = x^7$

f $y = (t^3)^3 \cdot (t^2)^2$
 $y = t^9 \cdot t^4$ dus $y = t^{13}$

g $y = a \cdot a^2 \cdot a^3$ wordt $y = a^6$

h $y = \frac{x^2 \cdot x^4}{(x^3)^2}$
 $y = \frac{x^7}{x^6}$ dus $y = x$

E8 a $(-3 + x)^2 = (-3 + x)(-3 + x) =$
 $9 - 3x - 3x + x^2 =$
 $x^2 - 6x + 9$

b $(-3x)^2 = (-3)^2 \cdot x^2 = 9x^2$

c $\left(\frac{6a}{7}\right)^2 = \frac{(6a)^2}{7^2} = \frac{6^2 \cdot a^2}{7^2} = \frac{36a^2}{49}$

d $(3a^2b^3)^4 = 3^4 \cdot (a^2)^4 \cdot (b^3)^4 =$
 $81a^8b^{12}$

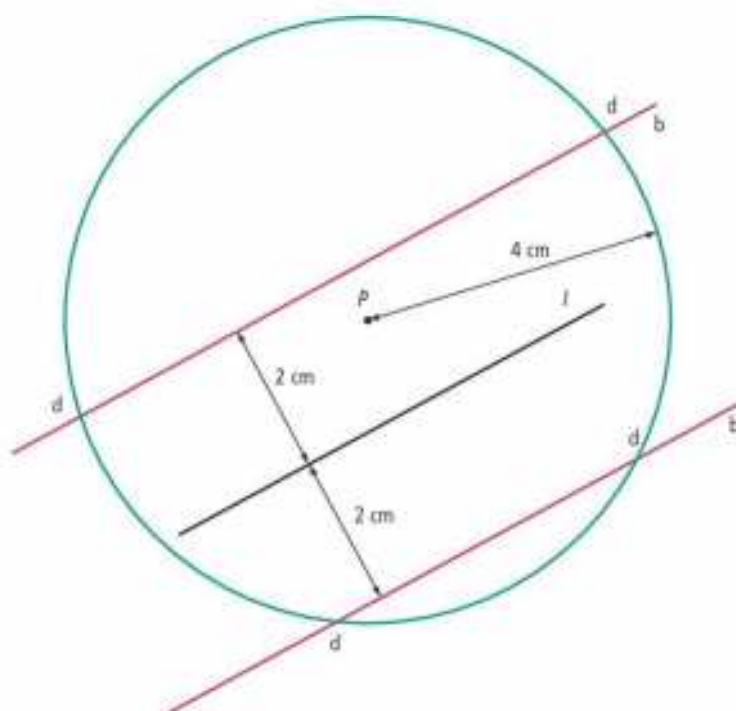
e $(-5pq^2)^3 = (-5)^3 \cdot p^3 \cdot (q^2)^3 =$
 $-125p^3q^6$

f $\left(\frac{-2}{5x^4}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{(5x^4)^4} = \frac{16}{5^4 \cdot (x^4)^4} =$
 $\frac{16}{625x^{16}}$

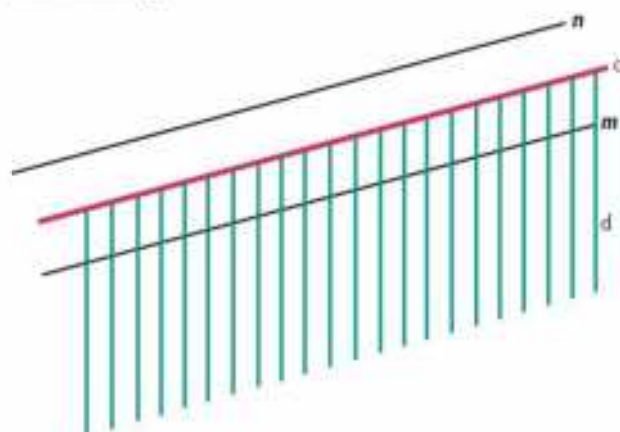
10 Redeneren in driehoeken

Voorkennis

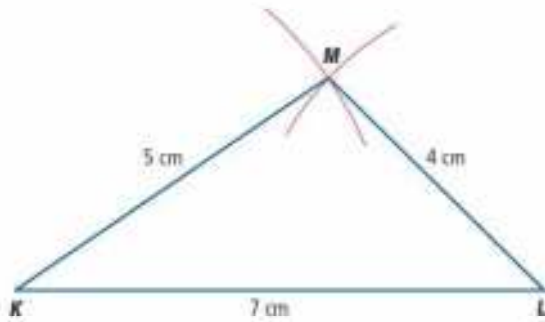
- V1
- De afstand van punt P tot lijn l is 14 mm.
 - De punten op een afstand van 2 cm van lijn l liggen op twee lijnen evenwijdig aan l .
 - De punten op een afstand van 4 cm van punt P liggen op een cirkel met straal 4 cm en middelpunt P .
 - De vier snijpunten van de cirkel met de twee evenwijdige lijnen liggen op 2 cm afstand van lijn l en op 4 cm afstand van punt P .



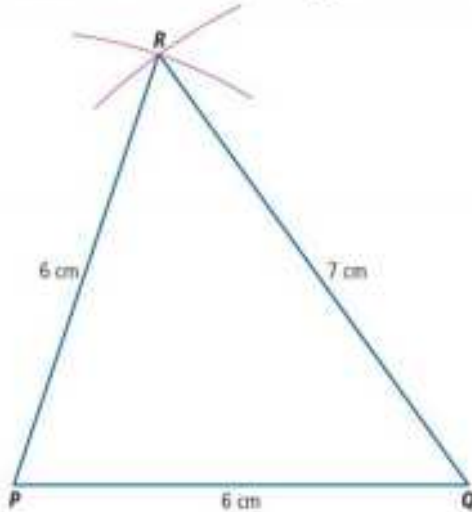
- V2
- De afstand tussen lijn m en lijn n is 14 mm.
 -
 - Punten even ver van de lijnen n en m liggen op de lijn precies in het midden tussen de twee lijnen n en m .
 - Zie tekening.



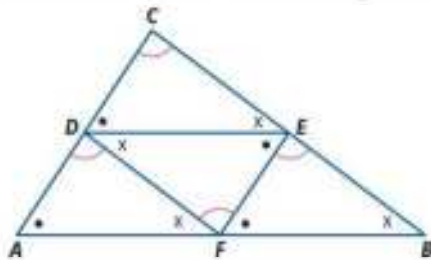
V3 a

b $\triangle KLM$ is een stomphoekige driehoek.

c

d $\triangle PQR$ is een gelijkbenige driehoek.V4 a Punt D ligt op het midden van zijde AC , want de driehoeken AFD en DEC zijn hetzelfde. Dus is $AD = DC$.Zo is ook E het midden van zijde BC en F het midden van zijde AB .

b



c De zijden AB en DE lopen evenwijdig omdat $\angle A = \angle CDE$.
 De zijden AC en EF lopen evenwijdig omdat $\angle ACE = \angle FEB$.
 De zijden BC en DF lopen evenwijdig omdat $\angle B = \angle AFD$.

V5 a $\angle A = 24^\circ$ en $\angle E = 24^\circ$ b $\angle A$ en $\angle E$ zullen vermoedelijk even groot zijn.c $\angle A + \angle C + \angle D_2 = 180^\circ$ dus

$$\angle A = 180^\circ - \angle C - \angle D_2 \quad (1)$$

$$\angle B_2 + \angle C + \angle E = 180^\circ \text{ dus}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle E = 180^\circ - \angle C - \angle B_2 \\ \angle B_2 = \angle D_2 \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \angle E = 180^\circ - \angle C - \angle D_2 \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt $\angle A = \angle E$.d De hoekensom van een driehoek is 180° .

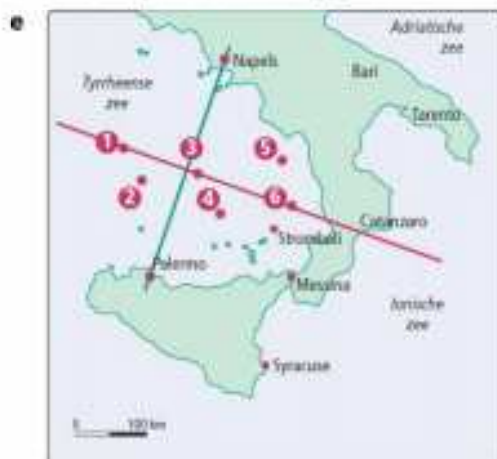
e Bij twee snijdende lijnen zijn de overstaande hoeken even groot.

10 Redeneren in driehoeken

10.1 Middelloodlijn

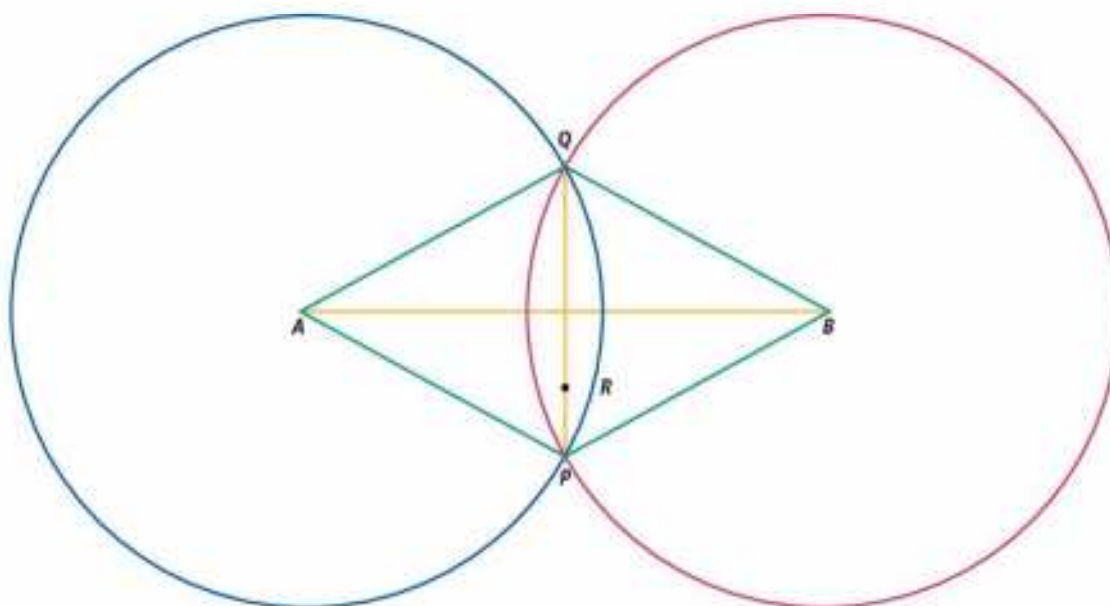
intro Robin moet het elastiek zo naar achteren trekken dat beide stukken elastiek even lang zijn.

- 1 a De afstand van Stromboli tot Napels is ongeveer 250 km.
- b De afstand van Stromboli tot Palermo is ongeveer 180 km.
- c Beide afstanden zijn ongeveer 290 km.
- d De schepen 1, 3 en 6 liggen even ver van Napels als van Palermo.

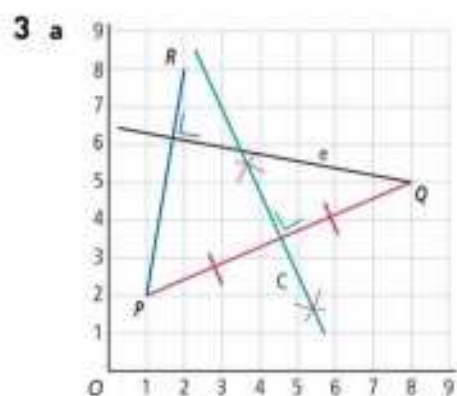


f De hoek is 90° .

2 a

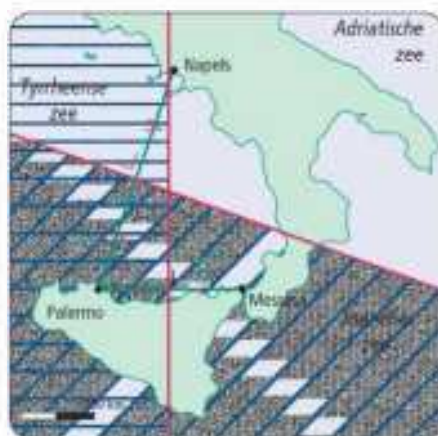


- b $AP = BP = 4$ cm en $AQ = BQ = 4$ cm
- c Zie de tekening hierboven. De symmetrieassen zijn de lijnen AB en PQ .
- d De symmetrieassen snijden elkaar loodrecht middendoor.
- e Vierhoek $APBR$ is symmetrisch in de lijn PR en dus een vlieger.
- f Van een vlieger zijn de zijden twee aan twee even lang. De zijden AR en BR zijn even lang, dus ligt punt R even ver van punt A als van punt B .



- b** Het snijpunt moet op gelijke afstanden liggen van de eindpunten van het lijnstuk.
c Zie de tekening bij opdracht a.
d Nee, punt *R* ligt niet op deze middelloodlijn.
e Zie de tekening bij opdracht a.

4 a b

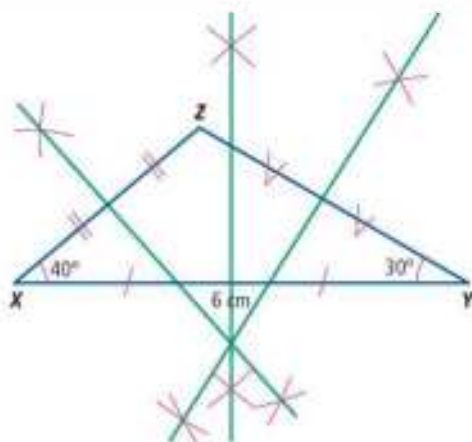


- d** De schepen in het dubbel gearceerde gebied in de tekening rechts bevinden zich dichterbij Palermo dan bij Messina of Napels.

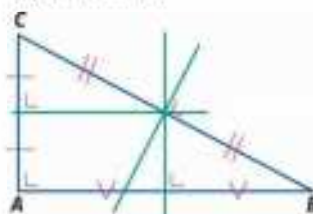
10 Redeneren in driehoeken

- 5 Punt M ligt op de middelloodlijn van zijde AC , dus $AM = CM$.
 Punt M ligt op de middelloodlijn van zijde BC dus $BM = CM$.
 Dus $AM = BM$
 Dus punt M ligt op de middelloodlijn van zijde AB .

6 a

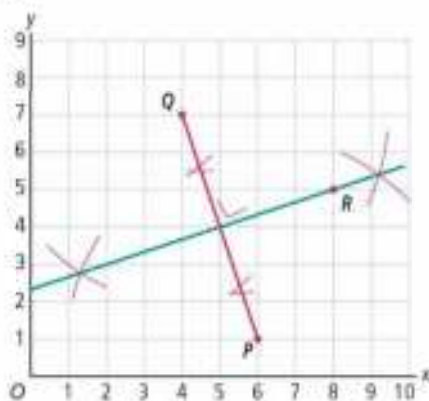


- b $\triangle XYZ$ is een stomphoekige driehoek, want $\angle Z = 180^\circ - 40^\circ - 30^\circ = 110^\circ$.
 c Zie de tekening bij opdracht a.
 d Het snijpunt van de drie middelloodlijnen ligt buiten de driehoek.
 e Bijvoorbeeld:



- f Het snijpunt van de drie middelloodlijnen ligt op het midden van de schuine zijde.
- 7 a Bij stomphoekige driehoeken ligt het snijpunt van de middelloodlijnen buiten de driehoek.
 b Bij scherphoekige driehoeken ligt het snijpunt van de middelloodlijnen binnen de driehoek.
 c Bij rechthoekige driehoeken ligt het snijpunt op de driehoek en wel precies op het midden van de langste zijde.
- 03 a Klopt.
 b Je zoekt een punt op gelijke afstanden van P en Q .
 c Het snijpunt ligt op gelijke afstanden van P en Q .

d e

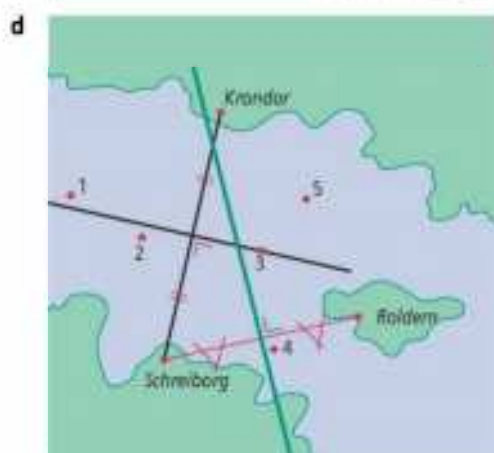
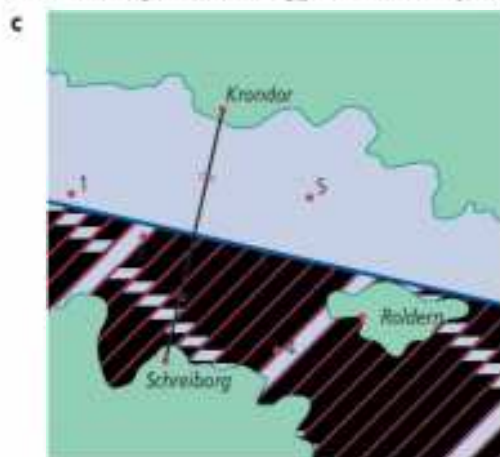


f Ja, punt $R(8, 5)$ ligt op de middelloodlijn van lijnstuk PQ .

g Punt R heeft gelijke afstanden tot P en Q .

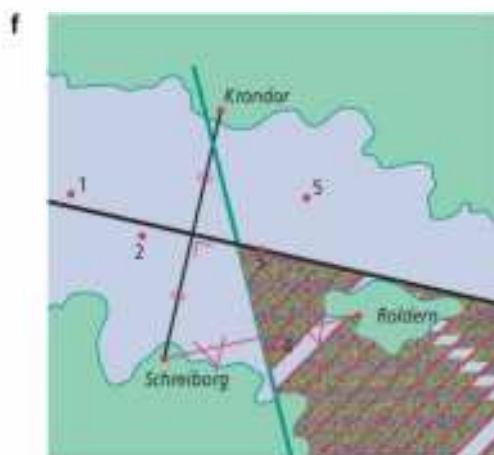
04 a Schip 3 ligt op de middelloodlijn van het lijnstuk tussen Krondor en Schreiborg, dus de afstanden tot deze plaatsen zijn even groot.

b De schepen 1 en 5 liggen dichterbij Krondor.



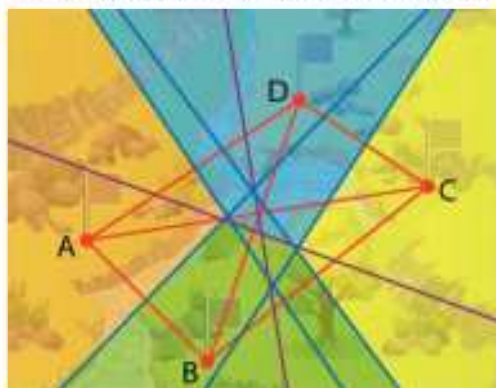
e De schepen 1 en 2 liggen dichterbij Schreiborg dan bij Roldem.

10 Redeneren in driehoeken



U1 Teken de middelloodlijn van lijnstuk AB en die van lijnstuk AD . Het vlakdeel dat begrensd wordt door deze middelloodlijnen en waar punt A in ligt, hoort bij A .

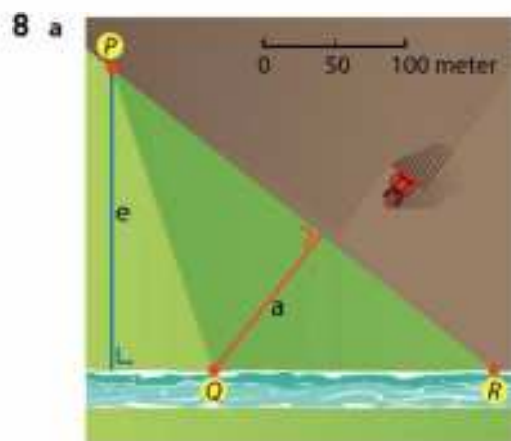
Teken op dezelfde manier het gebied dat bij punt C hoort. De twee gebieden die overblijven horen bij B en D . Door de middelloodlijn van lijnstuk BD te tekenen, verdeel je dat gebied op de juiste wijze.



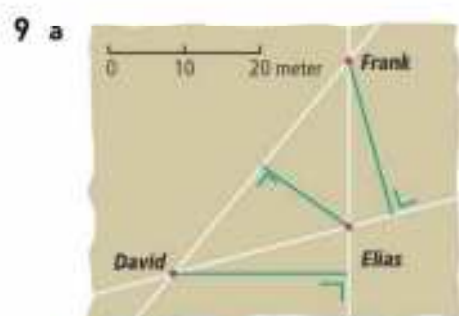
10.2 Hoogtelijn

intro

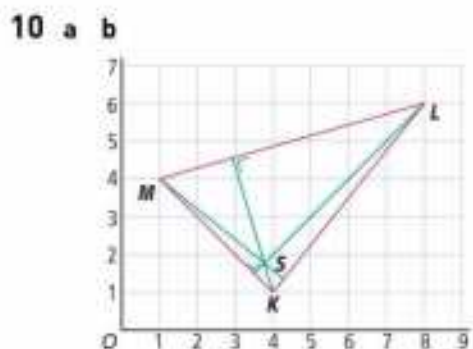




- b Het is een loodlijn.
- c In de tekening is de lengte van het hek 2,2 cm, dat is in werkelijkheid $2,2 \times 50 = 110$ m, want de schaal is 1 cm: 50 m.
- d De kortste route van P naar de sloot over eigen land is langs de lijn PQ .
De lengte van PQ in de tekening is 4,3 cm.
De afvoerpijp moet dus minstens $4,3 \times 50 = 215$ m lang worden.
- e Zie de tekening bij opdracht a.
- f De loodlijn heeft in de tekening een lengte van 4,0 cm.
De afvoerpijp wordt in dat geval $4,0 \times 50 = 200$ m lang.



- b De lengte van de hoogtelijn is de afstand van een snijpunt tot de tegenoverliggende lijn.
- c David legt de grootste afstand af. In de tekening is de afstand 2,5 cm.
In werkelijkheid is die afstand $2,5 \times 10 = 25$ meter.
Heen en terug is de afstand dus 50 meter.

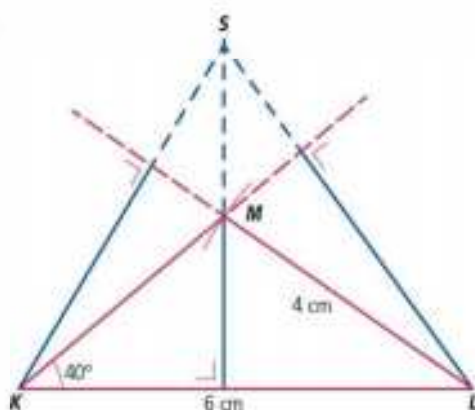


- c De hoogtelijn uit M gaat vermoedelijk ook door punt S .

10 Redeneren in driehoeken

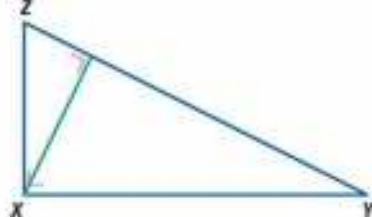
- 11 a** Van vierhoek $ABQC$ zijn de overstaande zijden twee aan twee evenwijdig.
Dan is de vierhoek een parallellogram. Voor vierhoek $ABCP$ geldt hetzelfde.
- b** In een parallellogram zijn de overstaande zijden twee aan twee even lang.
 $ABQC$ is een parallellogram, dus is $AB = CQ$.
 $ABCP$ is een parallellogram, dus is $AB = CP$.
Dan is ook $CQ = CP$.
- c** $PQ = PC + CQ$ en $PC = AB$ en $CQ = AB$ dus is $PQ = 2 \times AB$.
- d** De hoogtelijn uit C staat loodrecht op zijde AB . Omdat zijde PQ evenwijdig is aan zijde AB , staat de hoogtelijn uit C ook loodrecht op zijde PQ . Verder is C het midden van zijde PQ . De hoogtelijn uit C is dus hetzelfde als de middelloodlijn van zijde PQ .
- e** De redeneringen over de hoogtelijnen uit A en B verlopen op dezelfde manier als die over de hoogtelijn uit C .
De hoogtelijn uit B staat loodrecht op zijde AC . Omdat zijde RQ evenwijdig is aan zijde AC , staat de hoogtelijn uit B ook loodrecht op zijde RQ . Verder is B het midden van zijde RQ . De hoogtelijn uit B is dus hetzelfde als de middelloodlijn van zijde RQ .
De hoogtelijn uit A staat loodrecht op zijde BC . Omdat zijde PR evenwijdig is aan zijde BC , staat de hoogtelijn uit A ook loodrecht op zijde PR . Verder is A het midden van zijde PR . De hoogtelijn uit A is dus hetzelfde als de middelloodlijn van zijde PR .
- f** De middelloodlijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt.

12 a



- b** Het is een stomphoekige driehoek.
- c** Zie de tekening bij opdracht a.
- d** Zie de tekening bij opdracht a.
De hoogtelijnen snijden elkaar in punt S .
- e** Omdat $\angle M$ groter is dan 90° , valt het hoogtepunt buiten de driehoek.

f



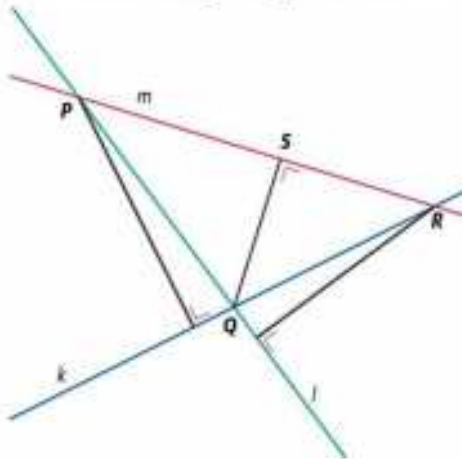
De hoogtelijn uit Y valt samen met zijde XY .
De hoogtelijn uit Z valt samen met zijde XZ .

- g** Het hoogtepunt is punt X .

- 13 a** De oppervlakte is $8 \times 3 : 2 = 12$.
b Neem als basis $AB = 6$, dan is de hoogte CD .
 Er geldt: $\text{oppervlakte} = AB \times CD : 2$.
 Dus $6 \times CD : 2 = 12$. Dit geeft $6 \times CD = 24$, dus $CD = 24 : 6 = 4$.

- 14 a** In $\triangle PUR$ is $\angle P + \angle U + \angle R = 180^\circ$.
 In $\triangle PUR$ is $\angle R = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.
 In $\triangle RVT$ is $\angle R + \angle V + \angle T = 180^\circ$.
 In $\triangle RVT$ is $\angle V = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.
 Dus $\angle RVT = 40^\circ$.
b Zie opdracht a.
 In $\triangle RVT$ is $\angle RTV = 90^\circ$, $\angle TRV = 50^\circ$ en $\angle RVT = 40^\circ$.
c In $\triangle PQR$ is $\angle P + \angle Q + \angle R = 180^\circ$.
 In $\triangle PQR$ is $\angle R = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$.
 $\angle PRQ = \angle PRU + \angle QRU$, dus $\angle QRU = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$.
 In $\triangle RVS$ is $\angle R + \angle V + \angle S = 180^\circ$.
 In $\triangle RVS$ is $\angle V = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ$.
 Verder is $\angle RVT + \angle RVS + \angle SVQ = 180^\circ$ (gestrekte hoek).
 Dus is $\angle SVQ = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$.
 De overige drie hoeken bij V zijn overstaande hoeken van de drie berekende hoeken.
 De hoeken bij V zijn dus $80^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 40^\circ$ en 60° .

- 09 a** Lijn QS is een hoogtelijn.
b $QS = 21$ mm
c De afstand van Q tot lijn m is 21 mm.
d

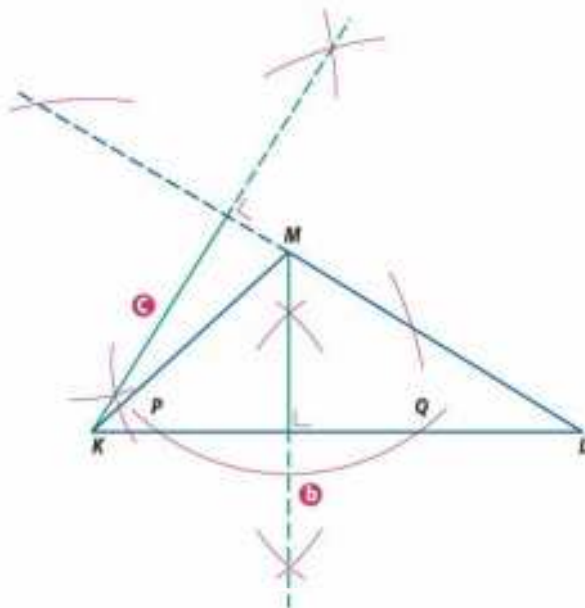


- e** De afstand van punt P tot lijn k is 35 mm.
f Teken eerst de hoogtelijn vanuit punt R op lijn l .
 Zie de tekening bij opdracht d.
 De afstand van punt R tot lijn l is 29 mm.
- 013 a** De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $8 \times 6 : 2 = 24$.
b Als je zijde BC als basis neemt, is de hoogte de lengte van lijnstuk AD .
c $\frac{1}{2} \times 10 \times AD = 24$
 $5 \times AD = 24$
 $AD = 24 : 5$ dus $AD = 4,8$

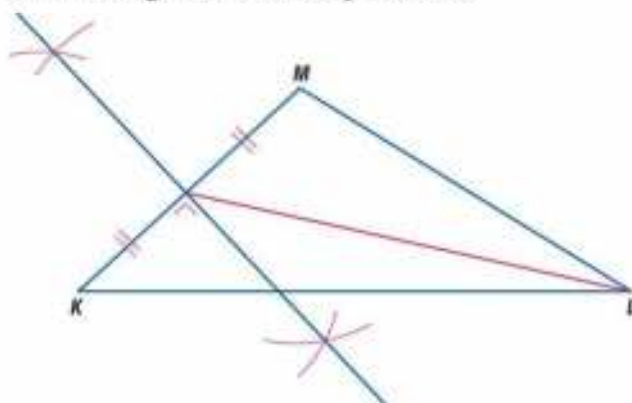
10 Redeneren in driehoeken

- U2 a** De punten P en Q liggen op een cirkel met middelpunt M , dus M ligt op gelijke afstanden van P en Q . Dus M ligt op de middelloodlijn van lijnstuk PQ . En omdat deze middelloodlijn ook loodrecht op zijde KL staat, is deze middelloodlijn tevens de hoogtelijn uit M .

b c



- d** De zwaartelijn uit punt L gaat door het midden van zijde KM . Door de middelloodlijn van zijde KM te construeren, vind je het midden van zijde. Je kunt vervolgens de zwaartelijn tekenen.



10.3 Deellijn

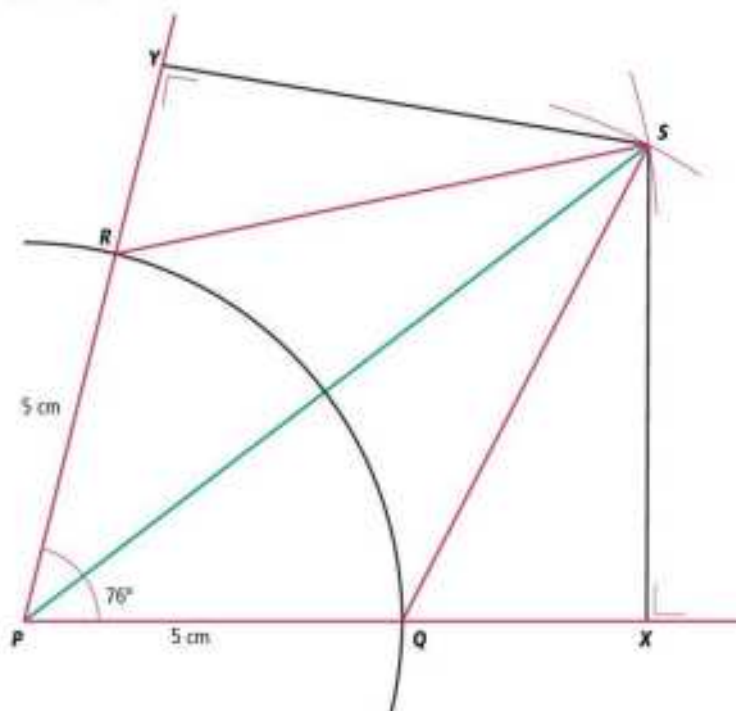
intro Ze kan het stuk taart horizontaal precies middendoor snijden of de hoek van de taartpunt middendoor delen.

- 15 a** De afstand van het schip Pluto tot Uruguay is op de kaart 15 mm en dat is in werkelijkheid $15 \times 2\,000\,000 = 30\,000\,000$ mm, dus 30 km.
De afstand tot Argentinië is op de kaart 8 mm en dat is in werkelijkheid $8 \times 2\,000\,000 = 16\,000\,000$ mm, dus 16 km.
- b** De schepen Argo en Irene liggen even ver van de kust van Uruguay als van Argentinië.



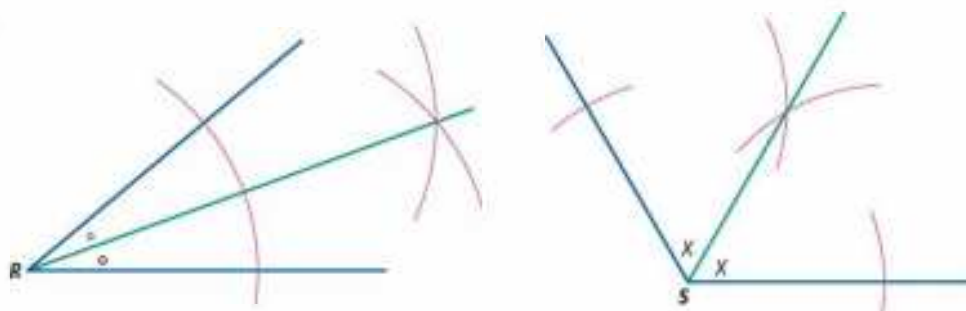
d De hoeken zijn even groot en zijn beide 20° .

16 a b c d



- e** De symmetrieas verdeelt hoek P in twee hoeken van 38° .
- f** Zie de tekening bij opdracht a.
- g** Van de driehoeken PXS en PYS zijn de overeenkomstige hoeken gelijk (de hoeken bij P zijn gelijk en de hoeken X en Y zijn beide 90° en dus zijn de hoeken bij S ook gelijk). De driehoeken PXS en PYS zijn dus gelijkvormig. Omdat de zijde PS voor beide driehoeken dezelfde is, is de factor gelijk aan 1 en zijn de twee driehoeken precies hetzelfde (congruent).
Dan is ook $SX = SY$.

17 a



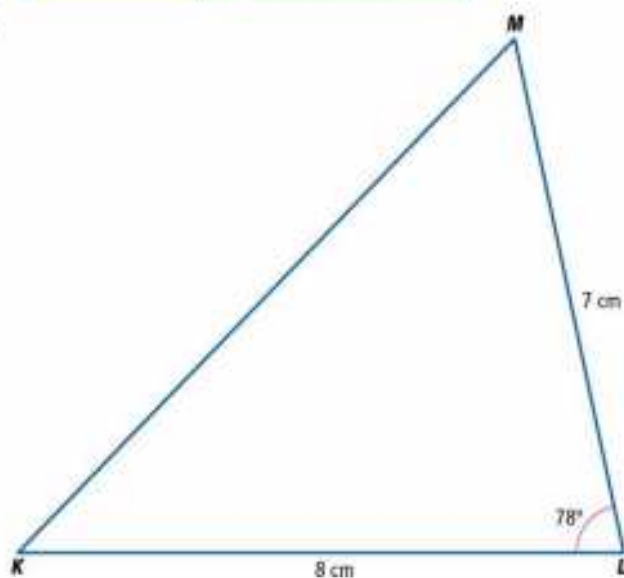
b klopt

10 Redeneren in driehoeken

18 a b c



19 a



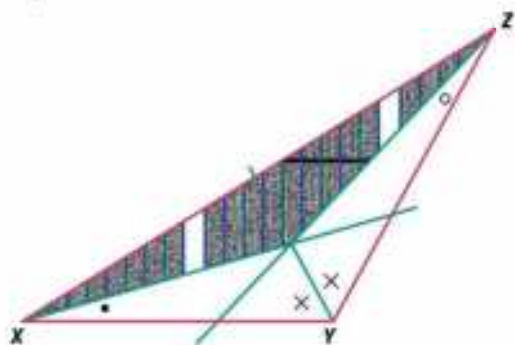
b -

c De deellijnen gaan vermoedelijk door één punt.

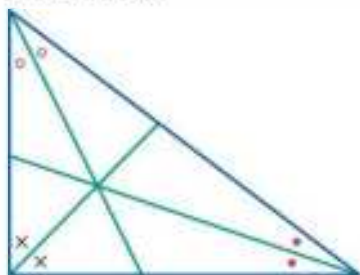
- 20 Punt S ligt op de deellijn van hoek A , dus $SX = SZ$.
 Punt S ligt op de deellijn van hoek B , dus $SX = SY$.
 Dus $SZ = SY$.
 Dus punt S ligt ook op de deellijn van hoek C .

21 a b

Bijvoorbeeld:

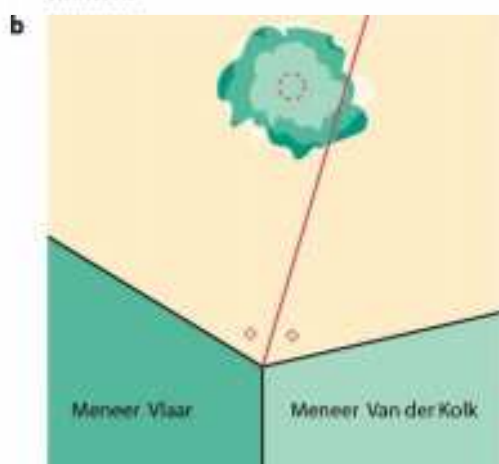


c Bijvoorbeeld:



d Een deellijn moet een hoek middendoor delen en ligt dus altijd binnen de driehoek. Dan is het niet mogelijk dat de drie deellijnen elkaar buiten de driehoek snijden.

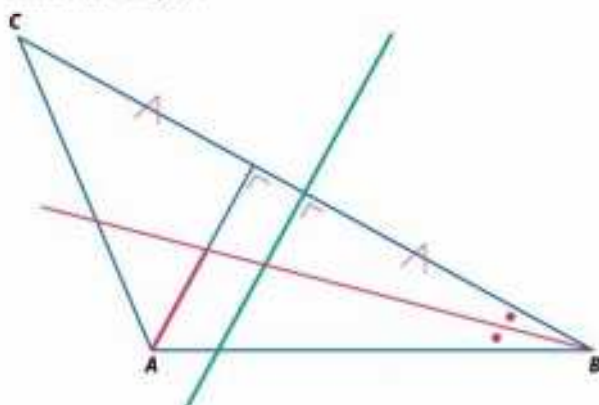
18 a Die punten liggen op de deellijn van de hoek die de twee tuinen met elkaar maken.



c De boom komt bij meneer Vlaar in de tuin te staan.

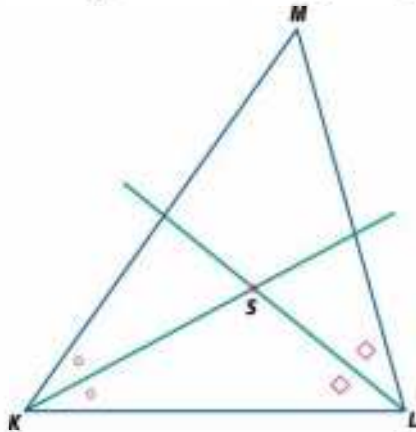
d De electriciteitsmast staat op de deellijn.

U3 Teken de deellijn van hoek B , de middelloodlijn van zijde BC en de hoogtelijn uit punt A . Het gevraagde punt P ligt op het stukje van de hoogtelijn uit A onder de deellijn (en automatisch aan de kant van C van de middelloodlijn).



10 Redeneren in driehoeken

- U4** Teken lijn KS en teken een lijn vanuit K die met lijn KS dezelfde hoek maakt als lijn KL . Teken op dezelfde manier een lijn vanuit L . Het snijpunt van de twee lijnen is punt M .



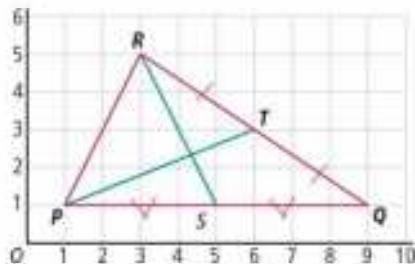
10.4 Zwaartelijijn

intro In de derde situatie valt de kast om.

Om de kast op één hoekpunt te laten balanceren, moet het rode puntje zich precies boven het hoekpunt van de kast bevinden.

- 22** a -
 b Het punt is inderdaad het midden van die zijde.
 c Dat geldt ook bij de andere hoekpunten.

- 23** a b c

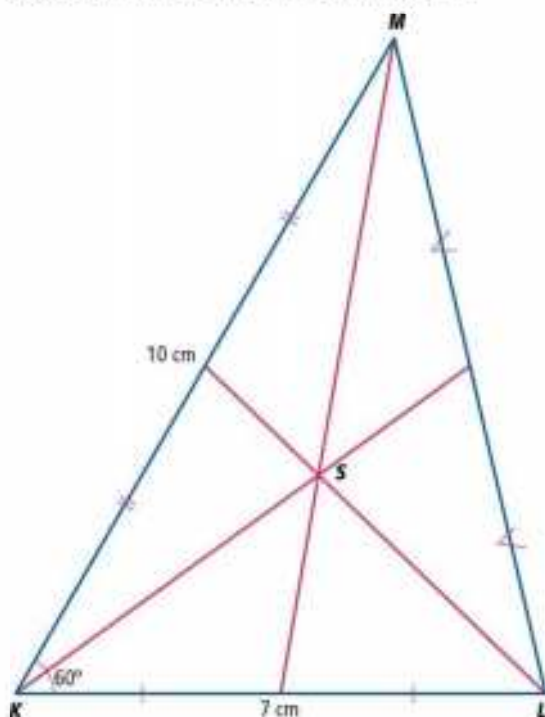


- d** Neem als basis $PQ = 8$. Dan is de hoogte de afstand van R tot de lijn PQ en dus gelijk aan 4.
 De oppervlakte van $\triangle PQR$ is $8 \times 4 : 2 = 16$.
- e** Voor de oppervlakte van $\triangle PRS$ neem je als basis $PS = 4$ en als hoogte de afstand van R tot de lijn PS en die is 4.
 De oppervlakte van $\triangle PRS$ is $4 \times 4 : 2 = 8$.
 Voor de oppervlakte van $\triangle QRS$ neem je als basis $SQ = 4$ en als hoogte de afstand van R tot de lijn QS (= de lijn PQ) en die is 4.
 De oppervlakte van $\triangle QRS$ is $4 \times 4 : 2 = 8$.
 De zwaartelijijn deelt de driehoek in twee precies even grote driehoeken.
- f** Omdat lijnstuk PT een zwaartelijijn is, zal de oppervlakte van $\triangle PRT$ gelijk zijn aan de helft van de oppervlakte van $\triangle PQR$, dus oppervlakte $\triangle PRT$ is 8.

- 24** Het bovenvlak van het stuk kaas heeft de vorm van een driehoek. Je kunt langs de drie zwaartelijnen in die driehoek het stuk kaas verticaal in twee gelijke stukken verdelen. De vierde manier is het stuk kaas horizontaal middendoor snijden.

25 a b

De tekening hieronder is schaal 1 op 2.



- c** De drie zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar vermoedelijk in één punt.
- 26 a** Omdat $AC = 2 \times DC$ (AC en DC zijn overeenkomstige zijden), is de factor 2.
- b** Omdat de driehoeken DEC en ABC gelijkvormig zijn, lopen de zijden DE en AB evenwijdig. Dan is $\angle E$ in $\triangle DEZ$ gelijk aan $\angle A$ in $\triangle BAZ$ (Z-hoeken). Ook is $\angle D$ in $\triangle DEZ$ gelijk aan $\angle B$ in $\triangle BAZ$ (Z-hoeken). De overeenkomstige hoeken van de driehoeken DEZ en BAZ zijn gelijk, dus de twee driehoeken zijn gelijkvormig.
- c** Omdat $AB = 2 \times DE$, is de factor gelijk aan 2.
- d** Je moet de lengte van EZ met 2 vermenigvuldigen om de lengte van de overeenkomstige zijde AZ te krijgen. Dus geldt $AZ : EZ = 2 : 1$.
- e** $BZ : DZ = 2 : 1$
- 27 a** $\triangle EFS$ is gelijkvormig met $\triangle ACS$ met factor 2.
 AS en ES zijn overeenkomstige zijden, dus geldt $AS : ES = 2 : 1$.
- b** CS en FS zijn overeenkomstige zijden met factor 2, dus geldt $CS : FS = 2 : 1$.
- c** De punten S en Z liggen beide op zwaartelijn AE in een verhouding $2 : 1$.
 Punt Z en punt S zijn hetzelfde punt.
- d** De drie zwaartelijnen snijden elkaar in één punt, dat de zwaartelijnen verdeelt in stukken met verhouding $2 : 1$.

10 Redeneren in driehoeken

- 28 a** De driehoeken KLM en PLQ zijn gelijkvormig (met factor 2). Daaruit volgt dat $\angle P$ in $\triangle PLQ$ gelijk is aan $\angle K$ in $\triangle KLM$, dus is $\angle P = 90^\circ$. Daarmee staat PQ ook loodrecht op zijde KL .
- b** Lijn PQ snijdt zijde KL in het midden van de zijde en staat loodrecht op die zijde.
- c** $KS : SQ = 2 : 1$, dus $KS = \frac{2}{3} \times KQ$. Dus eerst KQ berekenen.

zijde	kwadraat
$PQ = 9$	81
$KP = 12$	<u>144</u> +
$KQ = \dots$	225

$$KQ = \sqrt{225} = 15$$

$$KS = \frac{2}{3} \times 15 = 10$$

$$QS = \frac{1}{3} \times 15 = 5$$

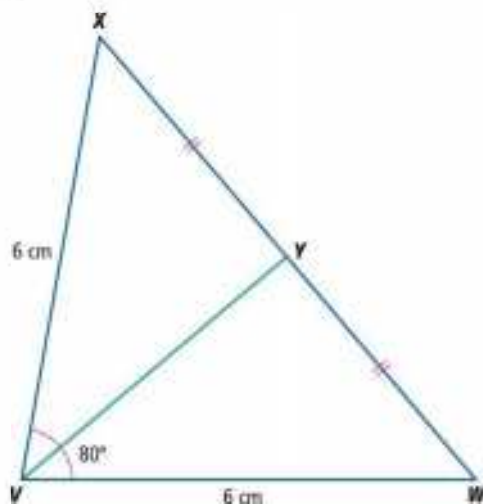
d

zijde	kwadraat
$MK = 18$	324
$KP = 12$	<u>144</u> +
$MP = \dots$	468

$$MP = \sqrt{468} = \sqrt{36} \times \sqrt{13} = 6\sqrt{13}$$

e $MS = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{13} = 4\sqrt{13}$ en $PS = \frac{1}{3} \times 6\sqrt{13} = 2\sqrt{13}$

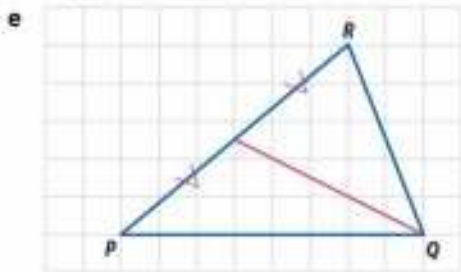
29 a b



- c** Omdat $WY = XY$ en $VW = VX$ zijn de zijden van $\triangle VWY$ even groot als de overeenkomstige zijden van $\triangle VXY$. De twee driehoeken zijn dus gelijkvormig. Maar dan zijn de overeenkomstige hoeken ook even groot, dus de twee hoeken bij V zijn even groot. Daarom is lijn VY ook een deellijn. Verder zijn de hoeken bij Y ook even groot (en samen een gestrekte hoek van 180°). Dus de hoeken bij Y zijn elk 90° en dat maakt de lijn VY ook een middelloodlijn.

- 30** De hoeken bij B zijn 60° , want $\triangle ABE$ en $\triangle BCD$ zijn gelijkzijdig.
 Omdat lijnstuk BE een zwaartelijn is, is B het midden van lijnstuk AC . Dus is $AB = BC$ en dus ook $BE = EC$. Daarmee is $\triangle BCE$ gelijkbenig met hoeken 120° , 30° en 30° .
 De hoeken bij C zijn daardoor beide 30° , evenals de hoeken bij D .
 Dus is $\angle S_1 = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$.

- 023** a In beide situaties is een zwaartelijn getekend.
 b De basis is $PQ = 8$ en de hoogte is 5.
 De oppervlakte is $8 \times 5 : 2 = 20$ roostervierkantjes.
 c Van $\triangle PSR$ is de basis $PS = 4$. De hoogte is dan 5.
 De oppervlakte van $\triangle PSR$ is $4 \times 5 : 2 = 10$ roostervierkantjes.
 De oppervlakte van $\triangle QRS$ is dan $20 - 10 = 10$ roostervierkantjes.
 De oppervlakten zijn gelijk.
 d De oppervlakte van $\triangle PRT$ is 10 roostervierkantjes, want lijnstuk PT is een zwaartelijn (en die verdeelt de driehoek in twee stukken met gelijke oppervlakte).



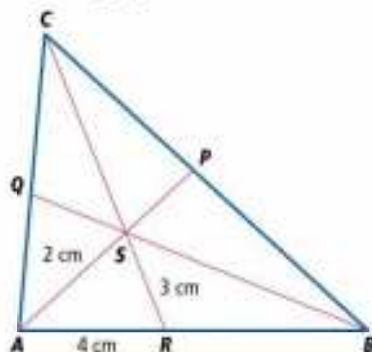
- 028** a Punt S is het zwaartepunt van de driehoek.
 b Punt S deelt de zwaartelijnen in stukken met verhouding $2 : 1$.
 c Omdat $FS + SH = FH$ en $FS : SH = 2 : 1$, is $FS = \frac{2}{3} \times FH$.

d

zijde	kwadraat
$HE = 3$	9
$EF = 4$	16 +
$FH = \dots$	25

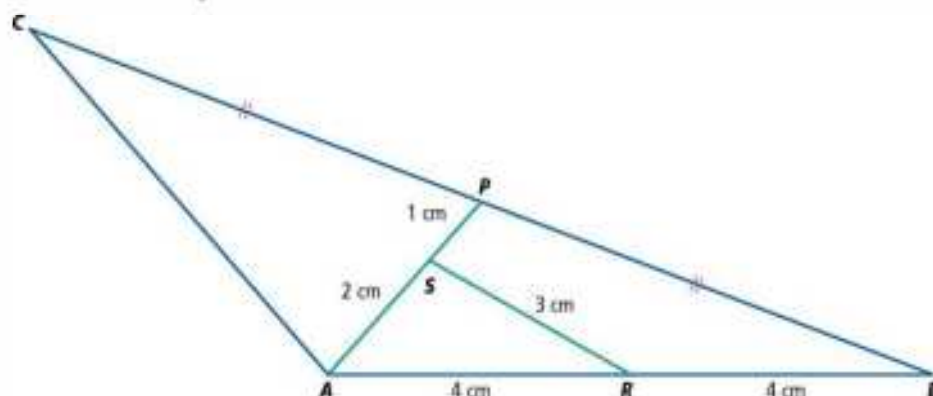
$$FH = \sqrt{25} = 5 \text{ en } FS = \frac{2}{3} \times 5 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

- U5** a Een mogelijke schets:



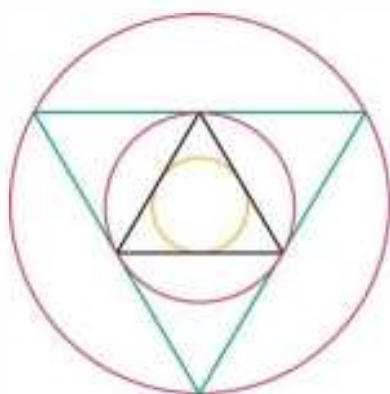
10 Redeneren in driehoeken

- b Construeer eerst $\triangle ARS$ met zijden 2 cm, 3 cm en 4 cm. Verleng zijde AR tot $AB = 8$ cm. Verleng zijde AS met $SP = 1$ cm. Maak lijnstuk BP twee keer zo lang om punt C te vinden. Teken tot slot zijde AC .

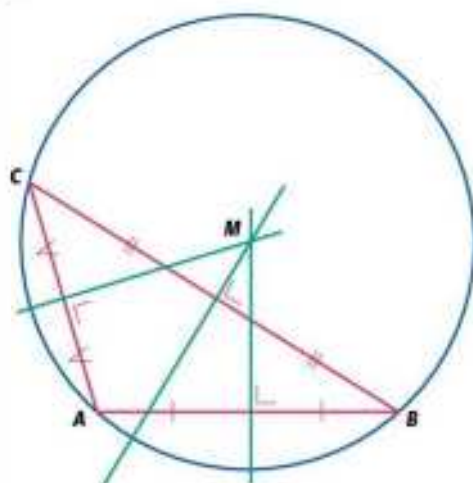


10.5 Ingeschreven en omgeschreven cirkel

Intro



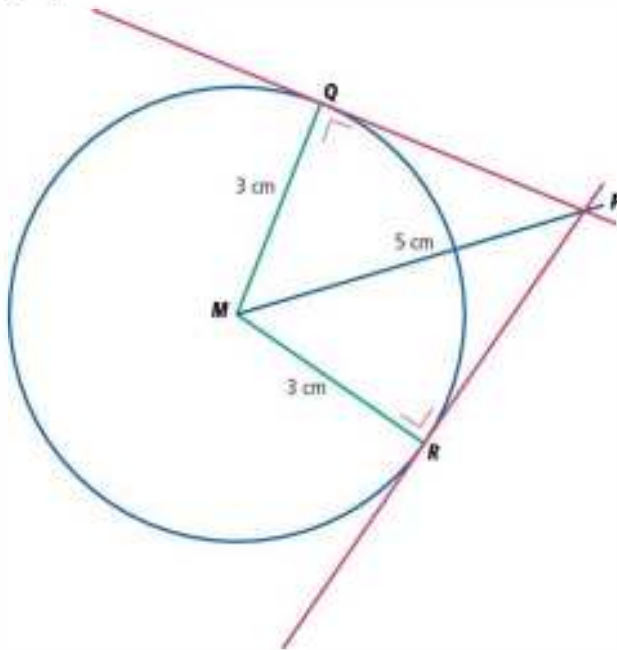
31 a b



- c M ligt op de middelloodlijn van zijde AB , dus geldt $AM = BM$.
 M ligt op de middelloodlijn van zijde AC , dus geldt $AM = CM$.
 Dus geldt $AM = BM = CM$.
 De punten A , B en C liggen op gelijke afstand van punt M en liggen dus op de cirkel met straal AM .
- d Zie de tekening bij opdracht a.

10 Redeneren in driehoeken

34 a b c



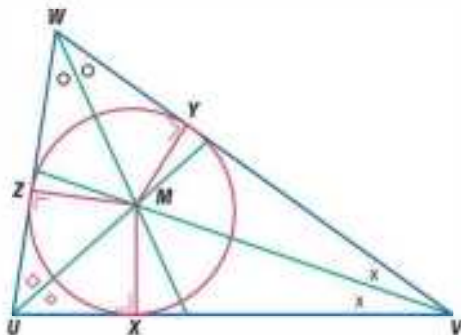
- d De lijn PQ raakt de cirkel en staat dus loodrecht op de straal MQ .
Dus is $\angle MQP = 90^\circ$.
De lijn PR raakt de cirkel en staat dus loodrecht op de straal MR .
Dus is $\angle MRP = 90^\circ$.

e

zijde	kwadraat
$PQ = \dots$	16
$QM = 3$	$\frac{9}{+}$
$MP = 5$	25
$PQ = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$	

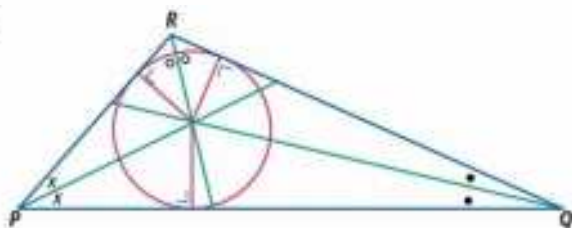
- f PR bereken je op precies dezelfde manier als PQ , met dezelfde getallen. Dan krijg je dezelfde uitkomst, dus $PQ = PR$.
- g De overeenkomstige zijden van de driehoeken PRM en PQM zijn even lang, dus de twee driehoeken PRM en PQM zijn gelijkvormig. De twee hoeken bij hoekpunt P zijn dus even groot. Lijn MP deelt de hoek middendoor en is dus deellijn van hoek P .

35 a b c

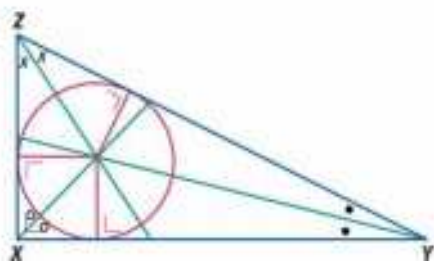


- d Punt M ligt op de deellijn van hoek U , dus $MX = MZ$.
Punt M ligt op de deellijn van hoek V , dus $MX = MY$.
Hieruit volgt: $MX = MY = MZ$.
- e De punten Y en Z liggen op dezelfde afstand van M als punt X .
- f Zie de tekening bij opdracht a.

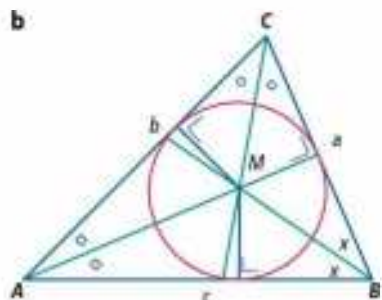
36 a



b

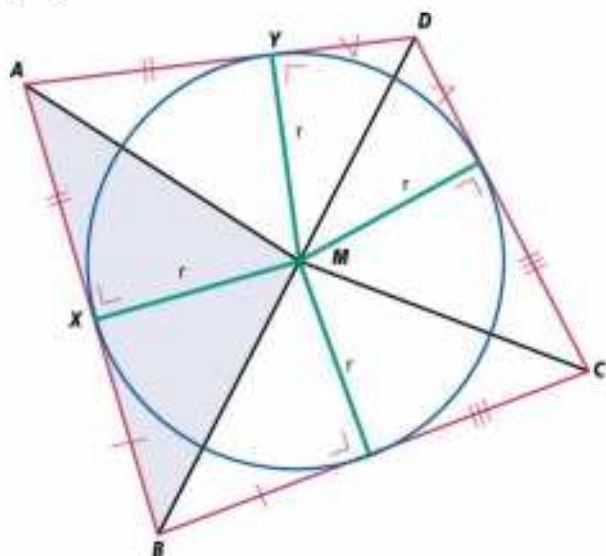


37 a b



- c Neem in $\triangle ABM$ als basis $AB = c$, dan is de hoogte de afstand van punt M tot zijde AB , en die is r . Dan geldt:
 $\text{oppervlakte } \triangle ABM = AB \times \text{hoogte} : 2$ ofwel $\text{oppervlakte } \triangle ABM = \frac{1}{2} \times r \times c$.
- d Op de manier van opdracht d geldt ook:
 $\text{oppervlakte } \triangle BCM = \frac{1}{2} \times r \times a$ en $\text{oppervlakte } \triangle ACM = \frac{1}{2} \times r \times b$
 $\text{oppervlakte } \triangle ABC = \text{opp } \triangle ABM + \text{opp } \triangle BCM + \text{opp } \triangle ACM$
 $\text{oppervlakte } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times r \times a + \frac{1}{2} \times r \times b + \frac{1}{2} \times r \times c$ ofwel
 $\text{oppervlakte } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times r \times (a + b + c)$

38 a b c



10 Redeneren in driehoeken

- d Omdat $MX = MY$ (= straal van de cirkel) ligt M op de deellijn van hoek A . De twee hoeken bij punt A zijn even groot. Van de driehoeken AYM en AXM zijn de overeenkomstige hoeken even groot en dus zijn de driehoeken AYM en AXM gelijkvormig. De factor is 1 omdat de zijde AM in beide driehoeken de langste zijde is. Dus geldt $AX = AY$.
- e Bij elk hoekpunt zijn er telkens twee lijnstukken even lang, zie de tekening bij opdracht a. De zijden AB en CD bestaan uit dezelfde lijnstukken als de zijden BC en AD . Dus geldt $AB + CD = AD + BC$.
- f Zie de tekening bij opdracht a.
- g Zie de tekening bij opdracht a.
- h Neem bij $\triangle ABM$ als basis de zijde AB , dan is de hoogte XM , want XM staat loodrecht op AB .

De oppervlakte van $\triangle ABM$ is $AB \times XM : 2$ ofwel $\frac{1}{2} \times r \times AB$.

- i oppervlakte vierhoek $ABCD =$
 opp $\triangle ABM$ + opp $\triangle BCM$ + opp $\triangle CMD$ + opp $\triangle DMA =$

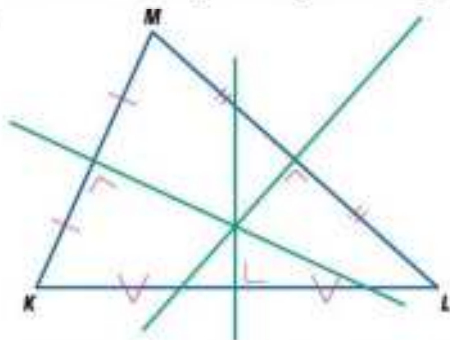
$$\frac{1}{2} \times r \times AB + \frac{1}{2} \times r \times BC + \frac{1}{2} \times r \times CD + \frac{1}{2} \times r \times AD =$$

$$\frac{1}{2} \times r \times (AB + CD) + \frac{1}{2} \times r \times (BC + AD) =$$

$$2 \times \frac{1}{2} \times r \times (AB + CD) = r \times (AB + CD)$$

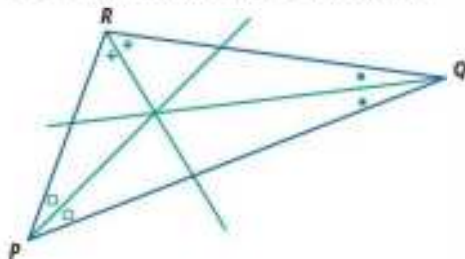
- 032 a $\triangle KLM$ is een scherphoekige driehoek.
 b De middelloodlijn van zijde LM is getekend.

c

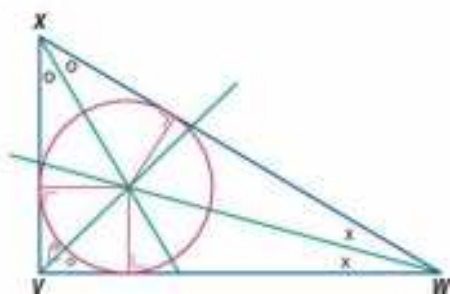


- 036 a $\triangle PQR$ is een stomphoekige driehoek.
 b De deellijn van hoek P is getekend.

c

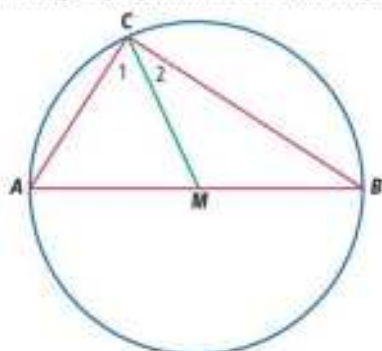


d



U6 a M ligt op lijnstuk AB omdat lijnstuk AB een middellijn van de cirkel is.

b



c Omdat $AM = CM$ (= straal), is $\triangle ACM$ gelijkbenig. En dan zijn de basishoeken A en C_1 even groot.

d $\angle A + \angle B + \angle C_{12} = 180^\circ$

$$\angle A = \angle C_1$$

$$\angle B = \angle C_2$$

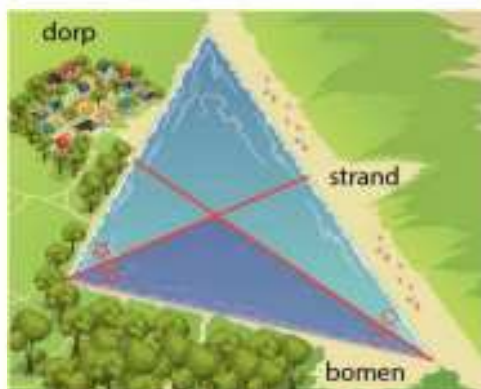
Hieruit volgt $\angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_{12} = 180^\circ$.

Dus $\angle C_{12} = 90^\circ$.

e ja

10.6 Gemengde opdrachten

39 a

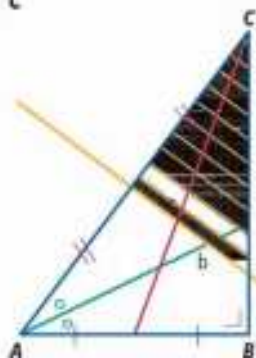


b De getekende lijnen zijn de deellijnen. Alle punten op de deellijn liggen even ver van de benen van de hoek, dus in dit geval even ver van de oevers.

10 Redeneren in driehoeken

- 40 a De tekening is op schaal 1 : 2.

b c



- d Het hoogtepunt van $\triangle ABC$ is punt B .
 e Omdat de driehoek rechthoekig is, ligt het snijpunt van de middelloodlijnen in het midden van zijde AC . En dat is dus ook het middelpunt van de omgeschreven cirkel.
 f Zie de tekening bij opdracht a.

- 41 a Het middelpunt is $M(2, 4)$. De straal is de afstand van M tot bijvoorbeeld punt $B(7, 4)$. De straal is dus $7 - 2 = 5$.

b De cirkel snijdt de horizontale as in de punten $D(-1, 0)$ en $E(5, 0)$.

c De afstand van M tot de verticale as is 2. De afstand MF is 5.

Met het punt $(0, 4)$ vormen de punten M en F een rechthoekige driehoek.

zijde	kwadraat
2	4
$h = \dots$	$\frac{21}{25} +$
$MF = 5$	25

$$h = \sqrt{21}$$

Punt F ligt $\sqrt{21}$ boven het punt $(0, 4)$ en punt G ligt $\sqrt{21}$ onder het punt $(0, 4)$.

De exacte coördinaten van F en G zijn $(0, 4 + \sqrt{21})$ en $(0, 4 - \sqrt{21})$.

- d De straal van deze cirkel is de afstand van M tot zijde BC . Deze afstand is kleiner dan de afstand tot de zijden AB en AC . Deze cirkel raakt de zijden AB en AC niet en is kleiner dan de ingeschreven cirkel. De straal van deze cirkel is kleiner dan die van de ingeschreven cirkel.

- 42 a $\triangle ABC$ is een gelijkbenige driehoek.

b Omdat de punten E en D de middens zijn van de zijden AC en BC , is $\triangle ABC$ een vergroting van $\triangle EDC$ met factor 2. Een vergroting van een driehoek geeft een gelijkvormige driehoek.

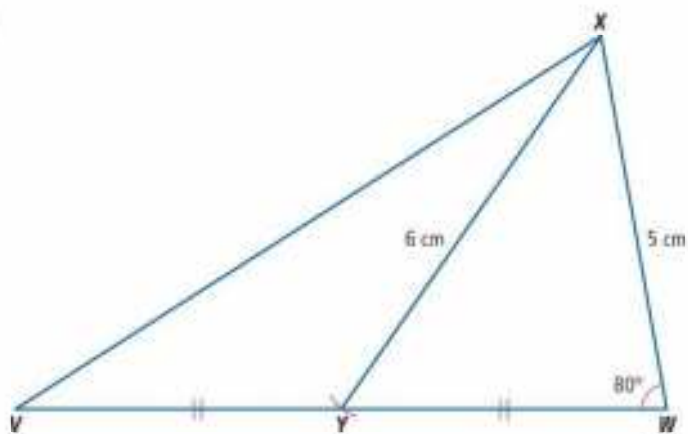
c Noem M het midden van zijde AB . Dan is $\triangle AMC$ rechthoekig en $AM = 2,5$ cm.

zijde	kwadraat
$AM = 2,5$	6,25
$MC = \dots$	$\frac{36}{25} +$
$AC = 6,5$	42,25

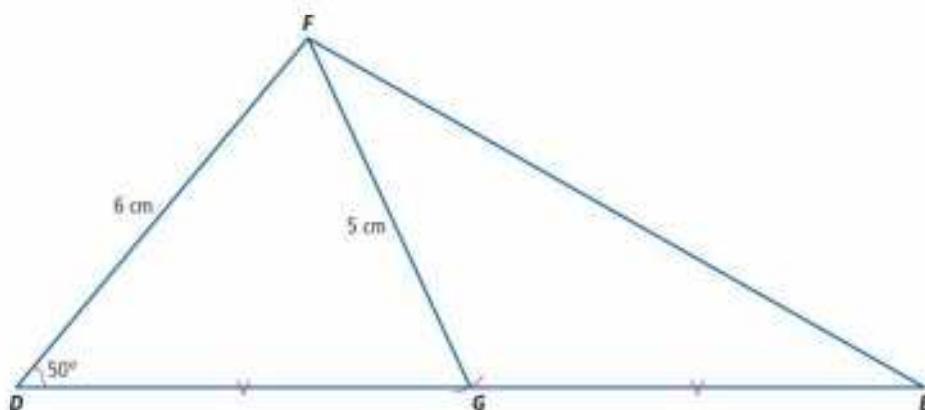
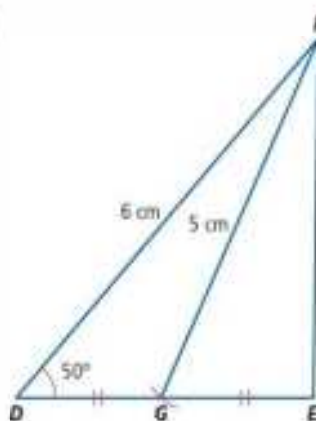
$MC = \sqrt{36} = 6$ cm, dus de afstand van punt C tot zijde AB is 6 cm.

- d De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $5 \times 6 : 2 = 15$ cm².
 e De afmetingen zijn met 0,5 vermenigvuldigd, dus moet je de oppervlakte met $0,5^2 = 0,25$ vermenigvuldigen.
 f Punt S is het zwaartepunt van $\triangle ABC$, dus er geldt $CS : MS = 2 : 1$.
 $CS = \frac{2}{3} \times CM = \frac{2}{3} \times 6 = 4$ cm

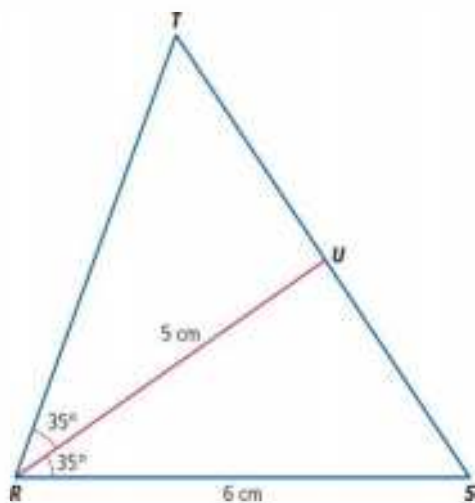
43 a



b



c

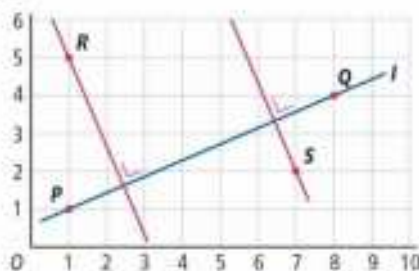


10 Redeneren in driehoeken

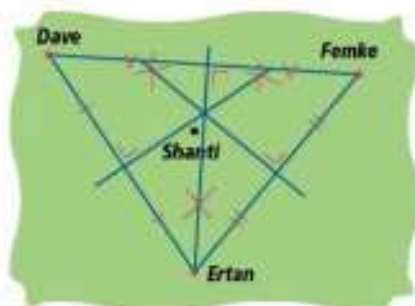
- 44 a** $\angle M_{12} = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$
 In $\triangle LMS$ is $\angle M_2 = 40^\circ : 2 = 20^\circ$, $\angle L_2 = 50^\circ : 2 = 25^\circ$, dus
 $\angle S_3 = 180^\circ - 20^\circ - 25^\circ = 135^\circ$.
- b** Als $\angle L_{12} = 72^\circ$, is $\angle M_{12} = 180^\circ - 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.
 In $\triangle LMS$ is dan $\angle M_2 = 18^\circ : 2 = 9^\circ$ en $\angle L_2 = 72^\circ : 2 = 36^\circ$, dus
 $\angle S_3 = 180^\circ - 9^\circ - 36^\circ = 135^\circ$.
- c** Vermoedelijk is altijd $\angle S_3 = 135^\circ$.
- d** $\angle L_2 = \frac{1}{2}x^\circ$ en $\angle M_{12} = 180^\circ - 90^\circ - x^\circ$ dus
 $\angle M_1 = \angle M_2 = \frac{1}{2}(90^\circ - x^\circ) = 45^\circ - \frac{1}{2}x^\circ$
 $\angle L_2 + \angle M_2 = \frac{1}{2}x^\circ + 45^\circ - \frac{1}{2}x^\circ = 45^\circ$
 Of:
 De hoeken L en M zijn samen $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$,
 De hoeken L_2 en M_2 zijn samen de helft van 90° , dus 45° .
- e** $\angle S_3 = 180^\circ - (\angle L_2 + \angle M_2) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Samenvatting

S1 a b



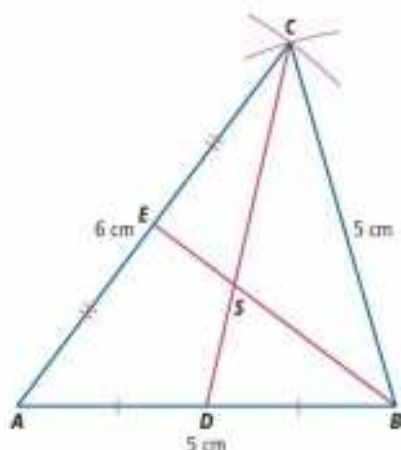
S2 a



- b** Shanti staat het dichtst bij Ertan.

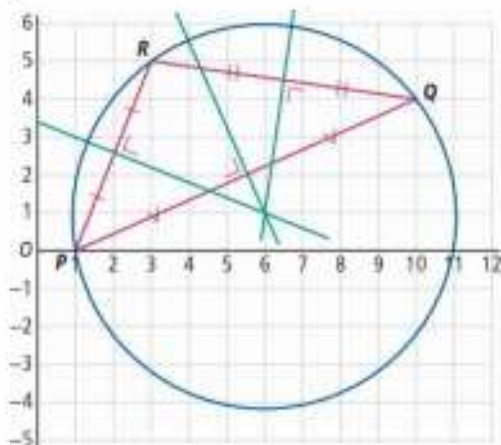
10 Redeneren in driehoeken

S6 a b



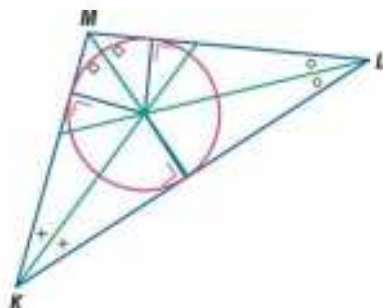
- c Punt S is het zwaartepunt.
 d $\triangle ABC$ is gelijkbenig met $AB = BC$. De zwaartelijn BE is dan tevens de middelloodlijn van zijde AC .
 e
- | zijde | kwadraat |
|--------------|--------------------|
| $AE = 3$ | 9 |
| $BE = \dots$ | $\underline{16} +$ |
| $AB = 5$ | 25 |
- $BE = \sqrt{16} = 4$
 f Omdat S het zwaartepunt is, geldt $BS : ES = 2 : 1$.
 BS is $\frac{2}{3}$ van BE , dus $BS = \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

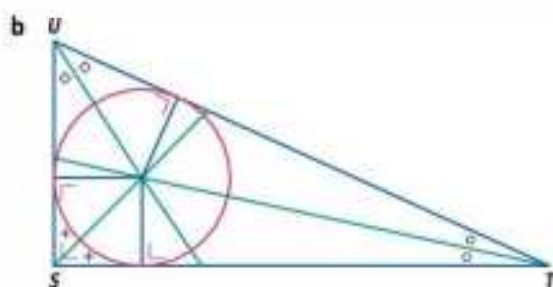
S7 a b



- c $\triangle PQR$ is een stomphoekige driehoek.
 d Het middelpunt van de cirkel ligt buiten de driehoek.

S8 a

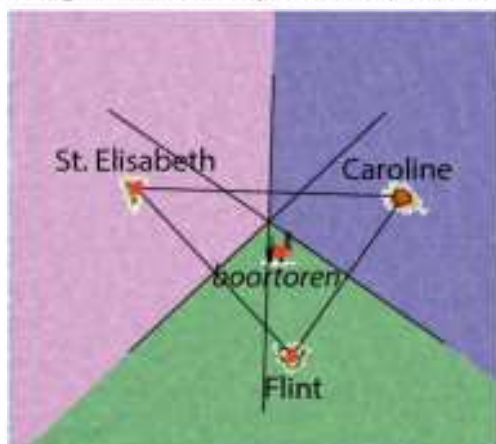




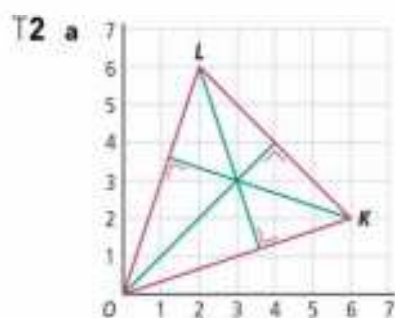
- c** Nee, het middelpunt van de ingeschreven cirkel ligt altijd binnen de driehoek. Het middelpunt is het snijpunt van de deellijnen van de hoeken en de deellijnen liggen vanzelfsprekend binnen de driehoek.

Test jezelf

- T1 a** De boortoren ligt het dichtst bij het eiland Flint.
b Het gebied wordt netjes verdeeld door de drie middelloodlijnen.



- c** De drie eilandjes vormen een scherphoekige driehoek. Flint, Caroline en de boortoren vormen een stomphoekige driehoek.
d De lijn die de kortste afstand van de boortoren tot een zijde van de driehoek aangeeft, is een loodlijn. De boortoren ligt het verst af van de verbindingslijn tussen St. Elisabeth en Caroline.



10 Redeneren in driehoeken

- b De lengte van zijde OK berekenen met behulp van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van lengte 6 en 2.

zijde	kwadraat
2	4
6	<u>36</u> +
$OK = \dots$	40
$OK = \sqrt{40}$	

De lengte van zijde OL berekenen met behulp van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van lengte 6 en 2.

zijde	kwadraat
2	4
6	<u>36</u> +
$OL = \dots$	40
$OL = \sqrt{40}$	

De zijden OK en OL zijn even lang.

- c Zie de tekening bij opdracht a.
 d De hoogtelijn uit O is tevens een deellijn.
 e $\triangle OKL$ is een gelijkbenige driehoek en dus zijn de hoeken bij K en L even groot. De hoeken die de hoogtelijn maakt met zijde KL zijn ook even groot (90°), en dus zijn de hoeken waarin de hoogtelijn de hoek bij O verdeelt ook even groot. Dus de hoogtelijn is ook een deellijn.
 f De hoogtelijn zit in een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van lengte 4 en 4.

zijde	kwadraat
4	16
4	<u>16</u> +
$h = \dots$	32

De lengte van de hoogtelijn is $\sqrt{32}$.

Zijde KL zit in een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van lengte 4 en 4.

zijde	kwadraat
4	16
4	<u>16</u> +
$KL = \dots$	32
$KL = \sqrt{32}$	

De hoogtelijn en zijde KL hebben beide lengte $\sqrt{32}$.

- T3 a De lijnen KO , LP en MN zijn zwaartelijnen.

zijde	kwadraat
$KN = 3$	9
$MN = \dots$	<u>36</u> +
$KM = 3\sqrt{5}$	45
$MN = \sqrt{36} = 6$	

- c $MS : NS = 2 : 1$, dus $NS = \frac{1}{3} \times 6 = 2$.

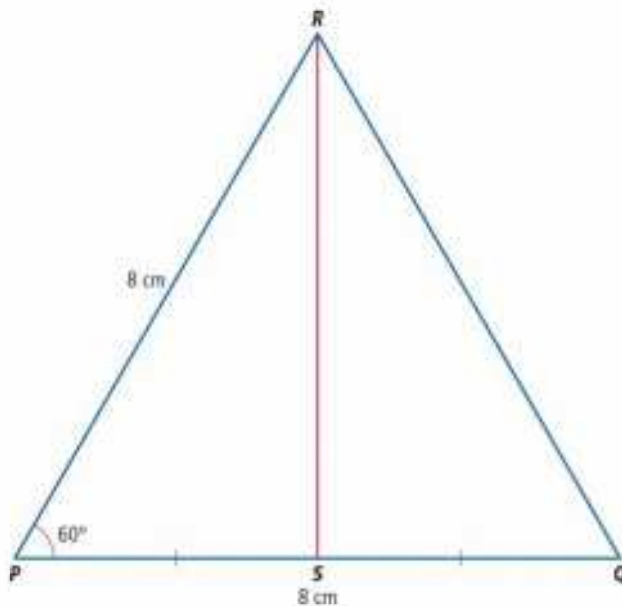
In $\triangle KNS$:

zijde	kwadraat
$KN = 3$	9
$NS = 2$	<u>4</u> +
$KS = \dots$	13
$KS = \sqrt{13}$	

- d Omdat lijnstuk LP een zwaartelijn is, is de oppervlakte van $\triangle LMP$ de helft van de oppervlakte van $\triangle KLM$.

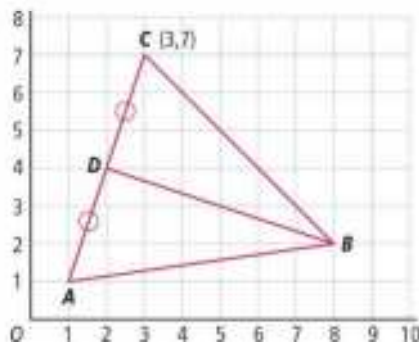
oppervlakte $\triangle KLM = 6 \times 6 : 2 = 18$, dus oppervlakte $\triangle LMP = 9$.

T4 a b



- c De driehoeken PRS en RQS zijn gelijkvormig met factor 1, want de overeenkomstige zijden zijn even lang. De overeenkomstige hoeken zijn dus ook even groot. De lijn RS is daarom ook een deellijn.
Verder zijn de hoeken bij S even groot, dus $180^\circ : 2 = 90^\circ$.
Omdat de lijn RS loodrecht door het midden van zijde PQ gaat, is de lijn RS ook een middelloodlijn.
- d Omdat $PQ = PR$, is $\triangle PQR$ een gelijkbenige driehoek en dus is $\angle Q = \angle R$.
 $\angle P + \angle Q + \angle R = 180^\circ$ dus $\angle Q + \angle R = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
 $\angle Q = 120^\circ : 2 = 60^\circ$ en $\angle R = 60^\circ$
Een driehoek met drie gelijke hoeken is een gelijkzijdige driehoek.
- e Voor de zwaartelijn uit punt P of uit punt Q kun je dezelfde redenering hanteren als bij opdracht c. Ook als de zijden een andere lengte hebben dan 8 cm (maar wel allemaal dezelfde lengte), blijft de redenering hetzelfde.

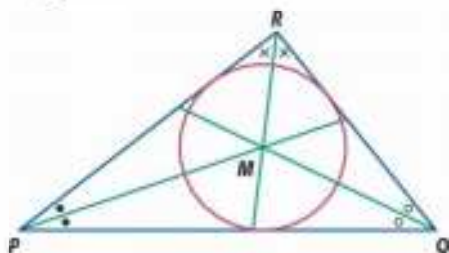
T5 a



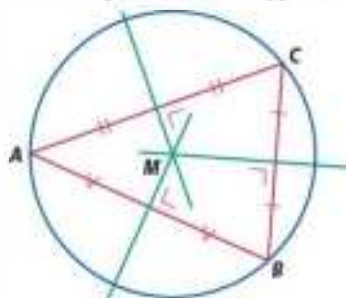
- b Punt C is het punt $(3, 7)$.
- c $\triangle ABC$ is een gelijkbenige driehoek, want $AB = BC$.
- d Omdat $AB = BC$, is lijn BD ook hoogtelijn, dus ook middelloodlijn.
- e Vanuit punt D naar punt E moet je 2 omhoog, en dus 6 naar links. Je komt dan in het punt $(-4, 6)$, dus $x = -4$.

10 Redeneren in driehoeken

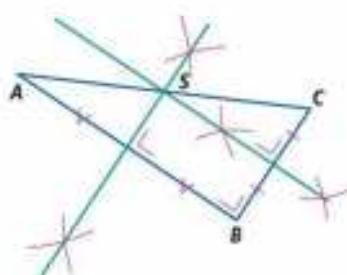
- T6 a** Het is een ingeschreven cirkel.
b Het middelpunt van de cirkel is het snijpunt van de deellijnen van de hoeken P , Q en R .



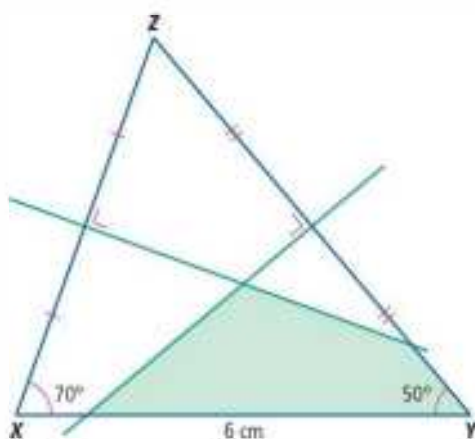
- T7** Het middelpunt is het snijpunt van de middelloodlijnen.



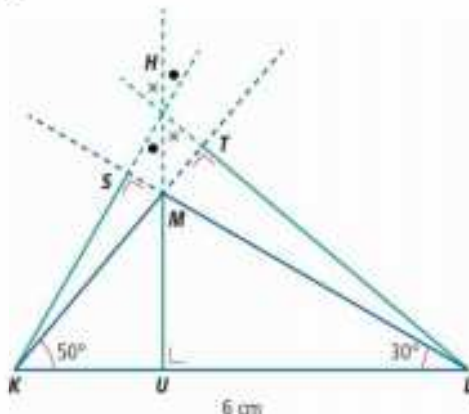
Extra oefening

- E1 a**
- 
- b** Punt S ligt op de driehoek. In een rechthoekige driehoek ligt het snijpunt van de middelloodlijnen in het midden van de langste zijde.

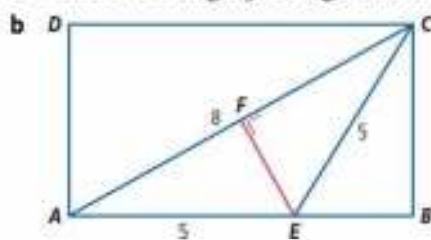
- E2 a**



- b** $\triangle XYZ$ is een scherphoekige driehoek.
c Zie de tekening bij opdracht a.
d Zie de tekening bij opdracht a.

E3 a b

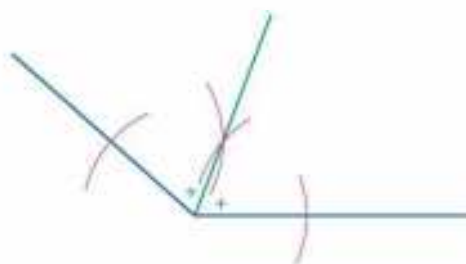
- c In $\triangle KLS$ geldt $\angle K + \angle S + \angle L = 180^\circ$,
dus $\angle K = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.
- d In $\triangle KUH$ is $\angle K + \angle U + \angle H = 180^\circ$,
dus $\angle H = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.
Beide hoeken bij H met een stip erin zijn 30° .
In $\triangle KLT$ is $\angle L = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.
In $\triangle ULH$ is $\angle H = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.
Beide hoeken bij H met een kruis erin zijn 50° .
De overige twee hoeken bij H zijn $180^\circ - 50^\circ - 30^\circ = 100^\circ$.
De hoeken bij H zijn dus 30° , 50° en 100° .

E4 a $\triangle AEC$ is een gelijkbenige driehoek.

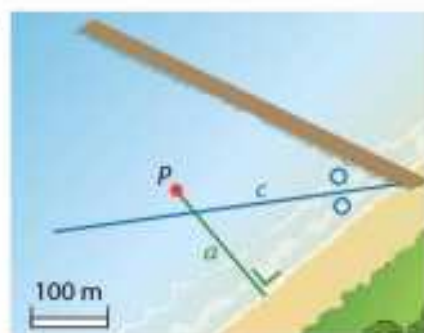
- c Omdat $AE = CE$ is F het midden van lijnstuk AC .
- | zijde | kwadraat |
|--------------|---------------|
| $AF = 4$ | 16 |
| $EF = \dots$ | $\frac{9}{+}$ |
| $AE = 5$ | 25 |
- $EF = \sqrt{9} = 3$
oppervlakte $\triangle AEC = 8 \times 3 : 2 = 12$
- d Als je als basis $AE = 5$ neemt, dan is de hoogte BC .
oppervlakte $\triangle AEC = 5 \times BC : 2$
dus $5 \times BC : 2 = 12$
 $5 \times BC = 24$
 $BC = 24 : 5 = 4,8$
- e Eerst AB berekenen:
- | zijde | kwadraat |
|--------------|-------------------|
| $AB = \dots$ | 40,96 |
| $BC = 4,8$ | $\frac{23,04}{+}$ |
| $AC = 8$ | 64 |
- $AB = \sqrt{40,96} = 6,4$
oppervlakte rechthoek $ABCD = 6,4 \times 4,8 = 30,72$

10 Redeneren in driehoeken

E5

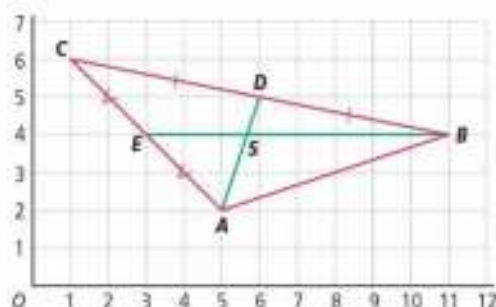


E6 a



- b De afstand is 18 mm, en dat is ongeveer 180 meter.
- c Zie de tekening bij opdracht a.
- d Paquita ligt dichterbij de pier dan bij het strand, dus kan ze beter naar de pier toe zwemmen.

E7 a b



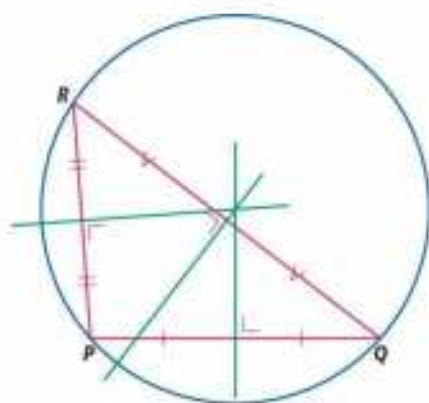
- c Nee, de zwaartelijijn deelt de hoek niet middendoor. Als de zwaartelijijn de hoek middendoor deelt, is de driehoek gelijkbenig en geldt $AB = AC$. Maar in deze driehoek zijn AB en AC niet even lang.
- d De oppervlakte van $\triangle ABC$ bereken je met inlijsten.
De rechthoek om $\triangle ABC$ heeft als oppervlakte $10 \times 4 = 40$.
De driehoeken die eraf vallen hebben als oppervlakte:
 $4 \times 4 : 2 = 8$, $6 \times 2 : 2 = 6$ en $10 \times 2 : 2 = 10$.
De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $40 - 8 - 6 - 10 = 16$.
Omdat AD een zwaartelijijn is, is de oppervlakte van $\triangle ABD$ de helft van die van $\triangle ABC$.
De oppervlakte van $\triangle ABD$ is $16 : 2 = 8$.
- e Zie de tekening bij opdracht a.

- f Lijnstuk AD is de langste zijde van een driehoek met rechthoekszijden van lengte 1 en van lengte 3.

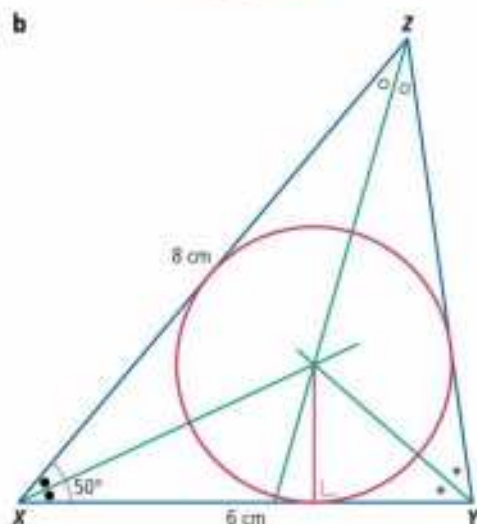
zijde	kwadraat
1	1
3	9
$AD = \dots$	10
$AD = \sqrt{10}$	

$$AS : SD = 2 : 1 \text{ dus } AS = \frac{2}{3} \sqrt{10}$$

E8



E9 a b



11A Vergelijkingen en ongelijkheden

Voorkennis

V1 a $\sqrt[3]{8} = 2$

b $\sqrt[3]{-1} = -1$

c $\sqrt[3]{-27} = -3$

d $\sqrt[3]{1000} = 10$

V2 a $\sqrt[3]{18} \approx 2,62$

b $\sqrt[3]{-100} \approx -4,64$

c $\sqrt[3]{-8,5} \approx -2,04$

d $\sqrt[3]{0,8} \approx 0,93$

V3 A $[-4, 1]$ hoort bij 3.

B $\langle -4, 3]$ hoort bij 1.

C $\langle -3, 1)$ hoort bij 4.

D $[-3, 4)$ hoort bij 2.

V4 a $5x - 6 = 3x + 9$

$2x - 6 = 9$

$2x = 15$

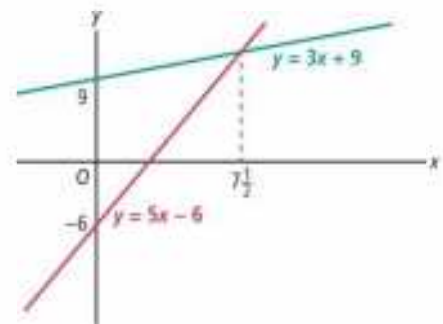
$x = 7\frac{1}{2}$

$y = 5 \times 7\frac{1}{2} - 6$ dus $y = 31\frac{1}{2}$

Het snijpunt is $(7\frac{1}{2}, 31\frac{1}{2})$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $x > 7\frac{1}{2}$.



b $-7x + 8 = -7 - 2x$

$8 = -7 + 5x$

$15 = 5x$

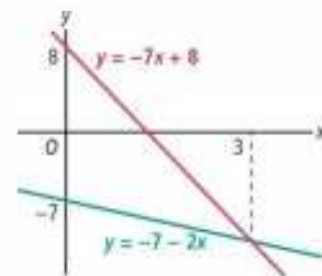
$x = 3$

$y = -7 \times 3 + 8$ dus $y = -13$

Het snijpunt is $(3, -13)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $x > 3$.



c $4x = x - 30$

$3x = -30$

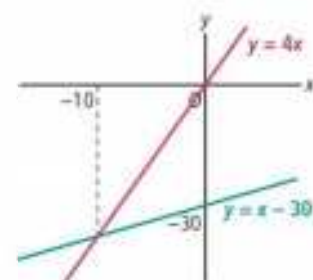
$x = -10$

$y = 4 \times -10$ dus $y = -40$

Het snijpunt is $(-10, -40)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $x > -10$.



d $4 - x = 18 + 2x$

$4 = 18 + 3x$

$-14 = 3x$

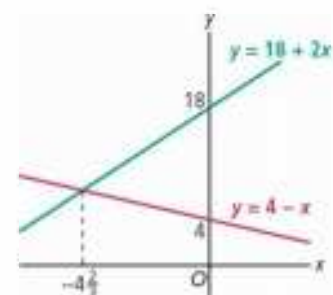
$x = -4\frac{2}{3}$

$y = 4 - (-4\frac{2}{3})$ dus $y = 8\frac{2}{3}$

Het snijpunt is $(-4\frac{2}{3}, 8\frac{2}{3})$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $x > -4\frac{2}{3}$.



V5 a $f(0) = 2 \cdot 0^2 + 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, dus bij $x = 0$ is $y = -\frac{1}{2}$.

b $2x^2 + x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$$2x^2 + x = 0$$

$$x(2x + 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 2x + 1 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 2x = -1$$

$$x = 0 \text{ of } x = -\frac{1}{2}$$

c $2x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$

$$a = 2, b = 1 \text{ en } c = -\frac{1}{2} \text{ geeft } D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -\frac{1}{2} = 5$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \text{ of } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\text{Snijpunten met de } x\text{-as zijn } \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}, 0\right) \text{ en } \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, 0\right).$$

V6 Nienke: ontbinden in factoren

Rien: kwadraat afsplitsen

Daan: bordje leggen

V7 a $x^2 - 11x + 24 = 0$

$$(x - 3)(x - 8) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ of } x - 8 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = 8$$

d $-x^2 + 6x + 3 = 11$

$$-x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x - 2)(x - 4) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ of } x - 4 = 0$$

$$x = 2 \text{ of } x = 4$$

b $(x - 3)^2 - 2 = 14$

$$(x - 3)^2 = 16$$

$$x - 3 = 4 \text{ of } x - 3 = -4$$

$$x = 7 \text{ of } x = -1$$

e $x^2 + x = 12 + 2x$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$x - 4 = 0 \text{ of } x + 3 = 0$$

$$x = 4 \text{ of } x = -3$$

c $x^2 + 7x = 8$

$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$(x + 8)(x - 1) = 0$$

$$x + 8 = 0 \text{ of } x - 1 = 0$$

$$x = -8 \text{ of } x = 1$$

f $3x^2 - 8x - 3 = 0$

$$a = 3, b = -8 \text{ en } c = -3$$

$$D = (-8)^2 - 4 \times 3 \times -3 = 100$$

$$x = \frac{8 + \sqrt{100}}{2 \times 3} \text{ of } x = \frac{8 - \sqrt{100}}{2 \times 3}$$

$$x = 3 \text{ of } x = -\frac{1}{3}$$

V8 a Bij f hoort 3, bij g hoort 1 en bij h hoort 2.

b Grafiek 1 heeft 1 snijpunt met de lijn $y = -10$, grafiek 2 heeft er geen en grafiek 3 heeft er 2.

c Grafiek 3 heeft geen snijpunt met de lijn $y = 10$.

11A.1 Gebroken vergelijkingen

intro Het vermogen van de magnetron is 800 watt, want $4000 : 800 = 5$.

1 a Als je x steeds verder van 0 kiest, nadert de waarde van y naar 0.

b $f(1000) = \frac{12}{1000} = 0,012$ en $f(-1000) = \frac{12}{-1000} = -0,012$

11A Vergelijkingen en ongelijkheden

- c Je kunt niet delen door 0.
 d Als je x steeds dichterbij 0 kiest, komt de waarde van y steeds verder van 0 te liggen.
 e $\frac{12}{x} = 12000$ geeft $x = \frac{12}{12000}$ dus
 $x = 0,001$

- 2 a Omdat $72 : 12 = 6$.

$$x - 5 = 12$$

$$x = 17$$

$$\text{b } \frac{72}{x-5} = 8$$

$$x - 5 = 9$$

$$x = 14$$

$$\frac{72}{x-5} = 144$$

$$x - 5 = 0,5$$

$$x = 5,5$$

- 3 a Er wordt links en rechts 2 afgetrokken.

- b Op het bordje moet het getal 9 staan omdat $\frac{45}{9} = 5$.

$$\text{c } \frac{45}{2p-7} = 3$$

$$2p - 7 = 15 \quad (\text{want } \frac{45}{15} = 3)$$

$$2p = 22$$

$$p = 11$$

$$\text{4 a } \frac{18}{2x+1} = 2$$

$$2x + 1 = 9$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$$\text{d } \frac{45}{11-4x} + 7 = 12$$

$$\frac{45}{11-4x} = 5$$

$$11 - 4x = 9$$

$$4x = 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\text{b } \frac{-16}{6a-10} = -8$$

$$6a - 10 = 2$$

$$6a = 12$$

$$a = 2$$

$$\text{e } 18 + \frac{70}{3m+1} = 4$$

$$\frac{70}{3m+1} = -14$$

$$3m + 1 = -5$$

$$3m = -6$$

$$m = -2$$

$$\text{c } \frac{100}{-7+2p} = -4$$

$$-7 + 2p = -25$$

$$2p = -18$$

$$p = -9$$

$$\text{f } 1 - \frac{20}{4a} = 5$$

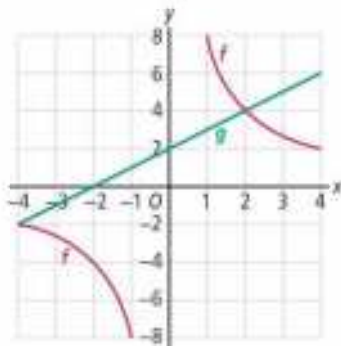
$$\frac{20}{4a} = -4$$

$$4a = -5$$

$$a = -1\frac{1}{4}$$

5 a

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	-2,7	-4	-8	-	8	4	2,7	2
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6



- b** De snijpunten zijn $(-4, -2)$ en $(2, 4)$.

$$f(-4) = \frac{8}{-4} = -2; g(-4) = -4 + 2 = -2, \text{ klopt}$$

$$f(2) = \frac{8}{2} = 4; g(2) = 2 + 2 = 4, \text{ klopt}$$

c $x \cdot \frac{8}{x} = \frac{x}{1} \cdot \frac{8}{x} = \frac{8x}{x} = \frac{8}{1} = 8$

d $8 = x^2 + 2x$
 $x^2 + 2x - 8 = 0$
 $(x + 4)(x - 2) = 0$
 $x + 4 = 0$ of $x - 2 = 0$
 $x = -4$ of $x = 2$

- e** ja

6 a $x - 2 = \frac{3}{x}$
 $x(x - 2) = x \cdot \frac{3}{x}$
 $x^2 - 2x = 3$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x - 3)(x + 1) = 0$
 $x - 3 = 0$ of $x + 1 = 0$
 $x = 3$ of $x = -1$

b $\frac{-40}{x - 12} = x + 2$
 $(x - 12) \cdot \frac{-40}{x - 12} = (x - 12)(x + 2)$
 $-40 = x^2 + 2x - 12x - 24$
 $0 = x^2 - 10x + 16$
 $(x - 2)(x - 8) = 0$
 $x - 2 = 0$ of $x - 8 = 0$
 $x = 2$ of $x = 8$

c $x + 7 = \frac{-9}{x - 3}$
 $(x - 3)(x + 7) = (x - 3) \cdot \frac{-9}{x - 3}$
 $x^2 - 3x + 7x - 21 = -9$
 $x^2 + 4x - 12 = 0$
 $(x + 6)(x - 2) = 0$
 $x + 6 = 0$ of $x - 2 = 0$
 $x = -6$ of $x = 2$

d $\frac{10}{x + 3} - 3 = -1$
 $\frac{10}{x + 3} = 2$
 $(x + 3) \cdot \frac{10}{x + 3} = 2(x + 3)$
 $10 = 2x + 6$
 $4 = 2x$
 $x = 2$

- 7 a** Op het moment dat de maaltijd in de diepvries wordt gelegd (op $u = 0$), is de maaltijd nog op kamertemperatuur.

$$T(0) = \frac{35}{0,5 \cdot 0 + 1} - 20 = 35 - 20 = 15$$

De kamertemperatuur is 15°C .

11A Vergelijkingen en ongelijkheden

$$\text{b } \frac{35}{0,5u+1} - 20 = -10$$

$$\frac{35}{0,5u+1} = 10$$

$$(0,5u+1) \cdot \frac{35}{0,5u+1} = 10(0,5u+1)$$

$$35 = 5u + 10$$

$$25 = 5u$$

$$u = 5$$

Na 5 uur is de temperatuur van de maaltijd -10°C .

$$8 \quad \frac{1380}{t+8} = 220 - 5t$$

$$(t+8) \cdot \frac{1380}{t+8} = (220 - 5t)(t+8)$$

$$1380 = 220t + 1760 - 5t^2 - 40t$$

$$5t^2 - 180t - 380 = 0$$

$$t^2 - 36t - 76 = 0$$

$$(t-38)(t+2) = 0$$

$$t-38 = 0 \text{ of } t+2 = 0$$

$$t = 38 \text{ of } t = -2$$

$t = -2$ vervalt want t is het aantal dagen na het begin van de droge periode.

Na 38 dagen is de watervoorraad van beide boeren gelijk.

$$04 \quad \text{a Ze legt het bordje op } 2k - 4.$$

$$\text{b } 120 : 6 = 20$$

$$\text{c } 2k - 4 = 6$$

$$2k = 10 \text{ dus } k = 5$$

$$06 \quad \text{a Links en rechts wordt met } x-1 \text{ vermenigvuldigd.}$$

$$\text{b } \frac{16}{x-1} \cdot (x-1) = \frac{16}{x-1} \cdot \frac{x-1}{1} = \frac{16(x-1)}{x-1} = \frac{16}{1} = 16$$

$$\text{c } x^2 + 5x - x - 5 = 16$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$(x+7)(x-3) = 0$$

$$x+7 = 0 \text{ of } x-3 = 0$$

$$x = -7 \text{ of } x = 3$$

$$\text{d } x(x+3) = \frac{10}{x+3} \cdot (x+3)$$

$$x^2 + 3x = 10$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$(x+5)(x-2) = 0$$

$$x+5 = 0 \text{ of } x-2 = 0$$

$$x = -5 \text{ of } x = 2$$

$$\text{e } 9 = \frac{27}{x+7}$$

$$9(x+7) = \frac{27}{x+7} \cdot (x+7)$$

$$9x + 63 = 27$$

$$9x = -36$$

$$x = -4$$

$$\text{f } (x-1) \cdot \frac{-10}{x-1} = (x-12)(x-1)$$

$$-10 = x^2 - x - 12x + 12$$

$$x^2 - 13x + 22 = 0$$

$$(x-2)(x-11) = 0$$

$$x-2 = 0 \text{ of } x-11 = 0$$

$$x = 2 \text{ of } x = 11$$

$$\text{g } (x-9)(x+7) = \frac{-60}{x-9} \cdot (x-9)$$

$$x^2 + 7x - 9x - 63 = -60$$

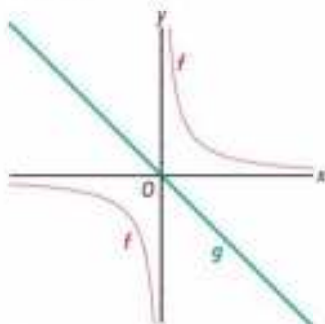
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x-3 = 0 \text{ of } x+1 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = -1$$

U1 $\frac{10}{x} = -2x$
 $x \cdot \frac{10}{x} = -2x \cdot x$
 $10 = -2x^2$
 $x^2 = -5$, geen oplossingen
 schets:



U2 $\frac{480}{t+6} = 68 - 4t$
 $(t+6) \cdot \frac{480}{t+6} = (68-4t)(t+6)$
 $480 = 68t + 408 - 4t^2 - 24t$
 $4t^2 - 44t + 72 = 0$
 $t^2 - 11t + 18 = 0$
 $(t-2)(t-9) = 0$
 $t-2 = 0$ of $t-9 = 0$
 $t = 2$ of $t = 9$
 In 2020 en in 2027 is de dagwaarde bij beide bedrijven even hoog.

11A.2 Exponentiële en wortelvergelijkingen

intro $\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{x}}}}} = 2$ geeft $\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{x}}}}} = 4$ en $\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{x}}}}} = 16$
 $\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{x}}}}} = 256$ en $\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{x}}}}} = 65\,536$ en $\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{\sqrt[16]{x}}}}} = 4\,294\,967\,296$
 $\sqrt{x} \approx 1,84 \times 10^{10}$ dus $x \approx 3,40 \times 10^{38}$
 Of: $x = \left(\left(\left(\left(\left(\left((2^2)^2 \right)^2 \right)^2 \right)^2 \right)^2 \right)^2 \right)^2 = 2^{2^7} = 2^{128} \approx 3,40 \times 10^{38}$

- 9 a Na tien dagen zijn er $8000 \cdot 2^{10} \approx 8\,000\,000$ algen per m^3 water.
 b Links en rechts delen door 8000 geeft links 2^t en rechts $64\,000 : 8000 = 8$,
 c $8 = 2^3$
 d Na drie dagen is het aantal algen gegroeid tot 64 000.
 e $8000 \cdot 2^t = 256\,000$
 $2^t = 32$
 $2^t = 2^5$
 $t = 5$

11A Vergelijkingen en ongelijkheden

10 a Links en rechts delen door 20 geeft links 3^x en rechts $1620 : 20 = 81$.

b	macht	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
	uitkomst	3	9	27	81	243	729

c Hugo krijgt de oplossing $x = 4$.

d A $3^x = 729$

$$3^x = 3^6$$

$$x = 6$$

C $5 + 3^x = 248$

$$3^x = 243$$

$$3^x = 3^5$$

$$x = 5$$

B $12 \cdot 3^x = 108$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$x = 2$$

D $8 \cdot 3^{x-1} = 648$

$$3^{x-1} = 81$$

$$3^{x-1} = 3^4$$

$$x - 1 = 4$$

$$x = 5$$

11 a $2^{4t+1} = 8$

b	macht	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
	uitkomst	2	4	8	16	32	64

$2^{4t+1} = 8$ kun je schrijven als $2^{4t+1} = 2^3$.

c $4t + 1 = 3$

$$4t = 2$$

$$t = \frac{1}{2}$$

d A $2^{8-t} = 32$

$$2^{8-t} = 2^5$$

$$8 - t = 5$$

$$t = 3$$

C $5 \cdot 2^b = 20$

$$2^b = 4$$

$$2^b = 2^2$$

$$b = 2$$

B $2^{2x} = 16$

$$2^{2x} = 2^4$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

D $2^{0,5t} - 6 = 58$

$$2^{0,5t} = 64$$

$$2^{0,5t} = 2^6$$

$$0,5t = 6$$

$$t = 12$$

12 a	macht	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6
	uitkomst	4	16	64	256	1024	4096

b A $4^{x-5} - 4 = 60$

$$4^{x-5} = 64$$

$$4^{x-5} = 4^3$$

$$x - 5 = 3$$

$$x = 8$$

C $25 \cdot 4^{m+1} = 400$

$$4^{m+1} = 16$$

$$4^{m+1} = 4^2$$

$$m + 1 = 2$$

$$m = 1$$

B $4^{10a-25} = 1024$

$$4^{10a-25} = 4^5$$

$$10a - 25 = 5$$

$$10a = 30$$

$$a = 3$$

D $2000 - 4^{2r} = -2096$

$$4^{2r} = 4096$$

$$4^{2r} = 4^6$$

$$2r = 6$$

$$r = 3$$

13 a $\sqrt{x-4}$ heeft alleen uitkomsten als $x - 4 \geq 0$.

Je kunt een functiewaarde berekenen bij $x \geq 4$.

b $f(85) = \sqrt{85-4} = \sqrt{81} = 9$

c $\sqrt{x-4} = 6$

$$x - 4 = 36$$

$$x = 40$$

14 a $\sqrt{5x+9} = 13$

$$5x+9 = 169$$

$$5x = 160$$

$$x = 32$$

b $\sqrt{4a-12} + 2 = 4$

$$\sqrt{4a-12} = 2$$

$$4a-12 = 4$$

$$4a = 16$$

$$a = 4$$

c $\sqrt{-2x+9} = 6$

$$-2x+9 = 36$$

$$-2x = 27$$

$$x = -13\frac{1}{2}$$

d $\sqrt{4-4m} = 3$

$$4-4m = 9$$

$$4m = -5$$

$$m = -1\frac{1}{4}$$

e $100 - \sqrt{\frac{1}{2}d+8} = 78$

$$\sqrt{\frac{1}{2}d+8} = 22$$

$$\frac{1}{2}d+8 = 484$$

$$\frac{1}{2}d = 476$$

$$d = 952$$

f $8\sqrt{3p+2} = 40$

$$\sqrt{3p+2} = 5$$

$$3p+2 = 25$$

$$3p = 23$$

$$p = 7\frac{2}{3}$$

15 a $\sqrt{13h} = 63$

$$13h = 3969$$

$$h = 305,307...$$

Je staat dan ongeveer 305 m hoog.

b Neem $h = 2 \times 305 = 610$ meter.

$$\text{Dan is } a = \sqrt{13 \times 610} \approx 89 \text{ km.}$$

89 is niet twee keer zo veel als 63.

Nee, je kunt dan niet twee keer zo ver kijken.

012 a $57 + 7 = 64$, klopt

<i>macht</i>	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6
<i>uitkomst</i>	4	16	64	256	1024	4096

$$4^{t-1} = 64 \text{ kun je schrijven als } 4^{t-1} = 4^3,$$

c $t-1 = 3$ dus de oplossing is $t = 4$.

d $4^{8-2t} = 1024$

$$4^{8-2t} = 4^5$$

$$8-2t = 5$$

$$2t = 3$$

$$t = 1\frac{1}{2}$$

e $4^{x+2} + 100 = 356$

$$4^{x+2} = 256$$

$$4^{x+2} = 4^4$$

$$x+2 = 4$$

$$x = 2$$

f $10 \cdot 4^{4b} = 160$

$$4^{4b} = 16$$

$$4^{4b} = 4^2$$

$$4b = 2$$

$$b = \frac{1}{2}$$

g $4000 - 4^{3q} = -96$

$$4^{3q} = 4096$$

$$4^{3q} = 4^6$$

$$3q = 6$$

$$q = 2$$

014 a Bart legt het bordje op $3q + 100$.

b $121 = 11^2$

c $3q + 100 = 121$

$$3q = 21$$

$$q = 7$$

11A Vergelijkingen en ongelijkheden

$$\text{U3 a } \frac{12}{\sqrt{x+9}} = 6$$

$$\sqrt{x+9} = 2$$

$$x+9=4$$

$$x=-5$$

$$\text{b } \frac{\sqrt{4-4m}}{2} + 3 = 8$$

$$\frac{\sqrt{4-4m}}{2} = 5$$

$$\sqrt{4-4m} = 10$$

$$4-4m=100$$

$$4m=-96$$

$$m=-24$$

$$\text{U4 a } A = 3^{5-1} = 3^4 = 81$$

Figuur nummer 5 heeft 81 blauwe driehoekjes.

$$\text{b } 3^{n-1} = 729$$

$$3^{n-1} = 3^6$$

$$n-1=6$$

$$n=7$$

11A.3 Parabool en lijn

intro $h=0$ geeft $-0,0075a^2 + 1,35a = 0$

$$a(-0,0075a + 1,35) = 0$$

$$a = 0 \text{ of } -0,0075a + 1,35 = 0$$

$$a = 0 \text{ of } a = 180$$

De top ligt bij $a = (0 + 180) : 2 = 90$.

$$h(90) = -0,0075 \times 90^2 + 1,35 \times 90 = -60,75 + 121,5 = 60,75$$

Het hoogste punt van de brug is 60,75 meter.

Bij de rode lijn past het beste de vergelijking $h(a) = 40$, dus C.

$$16 \text{ a } x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x-3=0 \text{ of } x+1=0$$

$$x=3 \text{ of } x=-1$$

De snijpunten met de horizontale as zijn (3, 0) en (-1, 0).

$$\text{b } x^2 - 2x - 3 = 5$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

$$x-4=0 \text{ of } x+2=0$$

$$x=4 \text{ of } x=-2$$

De snijpunten met de lijn $y=5$ zijn (4, 5) en (-2, 5).

$$\text{c } x^2 - 2x - 3 = -5$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$a=1, b=-2 \text{ en } c=2 \text{ geeft } D = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4$$

$D < 0$ dus geen oplossingen. De parabool snijdt de lijn $y=-5$ niet.

$$17 \text{ a } 4 - x^2 = 1 - 0,5x$$

$$-x^2 + 0,5x + 3 = 0$$

$$x^2 - 0,5x - 3 = 0$$

$$(x-2)(x+1,5) = 0$$

$$x-2=0 \text{ of } x+1,5=0$$

$$x=2 \text{ of } x=-1,5$$

- b $f(2) = 4 - 2^2 = 0$ dus $y = 0$
 $f(-1,5) = 4 - (-1,5)^2 = 1,75$ dus $y = 1,75$
 c $g(2) = 1 - 0,5 \times 2 = 0$, klopt
 $g(-1,5) = 1 - 0,5 \times -1,5 = 1,75$, klopt
 d De snijpunten zijn $(2, 0)$ en $(-1,5; 1,75)$.

18 a $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = 2x - 5$

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x - 2)(x - 6) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ of } x - 6 = 0$$

$$x = 2 \text{ of } x = 6$$

Invullen geeft $g(2) = 2 \times 2 - 5 = 4 - 5 = -1$ en $g(6) = 2 \times 6 - 5 = 12 - 5 = 7$.

Controle: $f(2) = \frac{1}{2} \times 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 2 - 4 + 1 = -1$ en

$f(6) = \frac{1}{2} \times 6^2 - 2 \times 6 + 1 = 18 - 12 + 1 = 7$ en dat klopt.

De snijpunten zijn $(2, -1)$ en $(6, 7)$.

b $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = 5\frac{1}{2} - 2x$

$$\frac{1}{2}x^2 = 4\frac{1}{2}$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \text{ of } x = -3$$

Invullen geeft $g(3) = 5\frac{1}{2} - 2 \times 3 = -\frac{1}{2}$ en $g(-3) = 5\frac{1}{2} - 2 \times -3 = 11\frac{1}{2}$.

Controle: $f(3) = \frac{1}{2} \times 3^2 - 2 \times 3 + 1 = -\frac{1}{2}$ en

$f(-3) = \frac{1}{2} \times (-3)^2 - 2 \times -3 + 1 = 11\frac{1}{2}$ en dat klopt.

De snijpunten zijn $(3, -\frac{1}{2})$ en $(-3, 11\frac{1}{2})$.

19 a $x^2 - 2x = 24 - 4x$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(x + 6)(x - 4) = 0$$

$$x + 6 = 0 \text{ of } x - 4 = 0$$

$$x = -6 \text{ of } x = 4$$

Invullen geeft $g(-6) = 24 - 4 \times -6 = 48$ en $g(4) = 24 - 4 \times 4 = 8$.

Controle: $f(-6) = (-6)^2 - 2 \times -6 = 48$ en $f(4) = 4^2 - 2 \times 4 = 8$ en dat klopt.

De snijpunten zijn $(-6, 48)$ en $(4, 8)$.

b $x(x + 2) = 2x + 9$

$$x^2 + 2x = 2x + 9$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \text{ of } x = -3$$

Invullen geeft $g(3) = 2 \times 3 + 9 = 15$ en $g(-3) = 2 \times -3 + 9 = 3$.

Controle: $f(3) = 3 \times (3 + 2) = 15$ en $f(-3) = -3 \times (-3 + 2) = 3$ en dat klopt.

De snijpunten zijn $(3, 15)$ en $(-3, 3)$.

c $2x^2 + 4x - 5 = x - 3$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$a = 2$, $b = 3$ en $c = -2$ geeft $D = 3^2 - 4 \times 2 \times -2 = 9 + 16 = 25$.

$$x = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times 2} \text{ of } x = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times 2}$$

11A Vergelijkingen en ongelijkheden

$$x = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{-3-5}{4} = -2$$

Invullen geeft $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 3 = -2\frac{1}{2}$ en $g(-2) = -2 - 3 = -5$.

Controle: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \frac{1}{2} - 5 = -2\frac{1}{2}$ en

$f(-2) = 2 \times (-2)^2 + 4 \times -2 - 5 = -5$ en dat klopt.

De snijpunten zijn $\left(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\right)$ en $(-2, -5)$.

20 a $4x^2 - 10x + 7 = 2x - 2$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$a = 4, b = -12 \text{ en } c = 9 \text{ geeft } D = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 0.$$

$$D = 0, \text{ dus één oplossing: } x = \frac{12 + \sqrt{0}}{2 \times 4} = 1\frac{1}{2}$$

b De vergelijking heeft maar één oplossing.

c $g\left(1\frac{1}{2}\right) = 2 \times 1\frac{1}{2} - 2 = 1$

Het gemeenschappelijk punt is $\left(1\frac{1}{2}, 1\right)$.

21 a $a = 20$ geeft $h = 10 + 0,05 \times 20 = 11$.

Het wegdek is dan 11 meter boven het water.

b $a = 20$ geeft $h = -0,01 \times 20^2 + 0,75 \times 20 + 10 = 21$

Op die plaats zit er $21 - 11 = 10$ meter tussen de boog en het wegdek.

c $a = 0$ geeft $h = 10 + 0,05 \times 0 = 10$.

Punt A zit inderdaad op een hoogte van 10 meter.

d $-0,01a^2 + 0,75a + 10 = 10 + 0,05a$

$$-0,01a^2 + 0,7a = 0$$

$$a(-0,01a + 0,7) = 0$$

$$a = 0 \text{ of } -0,01a + 0,7 = 0$$

$$a = 0 \text{ of } -0,01a = -0,7$$

$$a = 0 \text{ of } a = 70$$

$$a = 70 \text{ geeft } h = 10 + 0,05 \times 70 = 13,5.$$

Het hoogteverschil tussen A en B is $13,5 - 10 = 3,5$ meter.

18 a $x^2 = 5x + 6$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x - 6)(x + 1) = 0$$

$$x - 6 = 0 \text{ of } x + 1 = 0$$

$$x = 6 \text{ of } x = -1$$

b $f(-1) = (-1)^2 = 1$ en $f(6) = 6^2 = 36$

c $g(-1) = 5 \times -1 + 6 = -5 + 6 = 1$, klopt

$$g(6) = 5 \times 6 + 6 = 30 + 6 = 36, \text{ klopt}$$

d $x^2 = -8x$

$$x^2 + 8x = 0$$

$$x(x + 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x + 8 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -8$$

$$f(0) = 0^2 = 0 \text{ en } f(-8) = (-8)^2 = 64$$

Controle: $y = -8 \times 0 = 0$, klopt en $y = -8 \times -8 = 64$, klopt

De snijpunten zijn $(0, 0)$ en $(-8, 64)$.

020 a $-x^2 + 4x - 1 = -2x + 8$

b $-x^2 + 6x - 9 = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x - 3)(x - 3) = 0$

$x = 3$

Je krijgt één oplossing.

c De vergelijking heeft maar één oplossing.

d $g(3) = -2 \times 3 + 8 = -6 + 8 = 2$, dus $y = 2$

e Het gemeenschappelijke punt is $(3, 2)$.

U5 $-0,025a^2 + a = -0,25a + 15,625$

$-0,025a^2 + 1,25a - 15,625 = 0$

$a^2 - 50a + 625 = 0$

$(a - 25)(a - 25) = 0$

$a - 25 = 0$

$a = 25$

De vuurpijl raakt het dak.

U6 $TO = TK$ geeft $1,5a = 0,025a^2 + 0,25a + 10$.

$-0,025a^2 - 1,25a - 10 = 0$

$a^2 - 50a + 400 = 0$

$(a - 10)(a - 40) = 0$

$a - 10 = 0$ of $a - 40 = 0$

$a = 10$ of $a = 40$

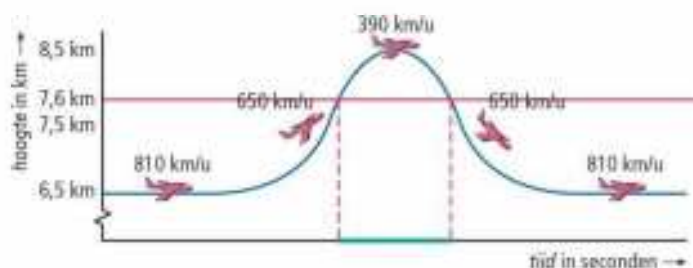
Bij 10 verkochte loempia's en bij 40 verkochte loempia's is de opbrengst gelijk aan de kosten, dus maakt Wim geen winst of verlies.

Tussen $a = 10$ en $a = 40$ ligt de grafiek van TK (dalparabool) lager dan de grafiek van TO (rechte lijn), dus is de opbrengst hoger dan de kosten.

Wim maakt winst als het aantal verkochte loempia's tussen 10 en 40 ligt.

11A.4 Intervallen

intro



22 a $2x + 1 = 8 - x$

$3x + 1 = 8$

$3x = 7$

$x = 2\frac{1}{3}$

oplossing: $x \geq 2\frac{1}{3}$

b Op de puntjes moet $2\frac{1}{3}$ staan.

c Een dicht rondje betekent dat het getal onder het rondje meegerekend moet worden.

d De oplossing schrijf je in de intervalnotatie als $[2\frac{1}{3}, \rightarrow)$.

11A Vergelijkingen en ongelijkheden

	ongelijkheidsnotatie	intervalnotatie
A	$x \leq 5$	$\langle \leftarrow, 5 \rangle$
B	$x > 1,2$	$\langle 1,2; \rightarrow \rangle$
C	$x \geq -3,6$	$[-3,6; \rightarrow \rangle$
D	$x < 8$	$\langle \leftarrow, 8 \rangle$

- 24 a $\langle 13; \rightarrow \rangle$ c $\langle \leftarrow; -2,5 \rangle$
 b $[-5; \rightarrow \rangle$ d $\langle \leftarrow, 20 \rangle$

- 25 a $\langle 2, 6 \rangle$
 b In dit interval liggen bijvoorbeeld $x = 3$ en $x = 4$.
 c $2 < 3$ en $2 < 4$, klopt.
 d Omdat op het interval geldt dat $2 < x$ en $x \leq 6$, kun je het interval in de ongelijkheidsnotatie schrijven als $2 < x \leq 6$.

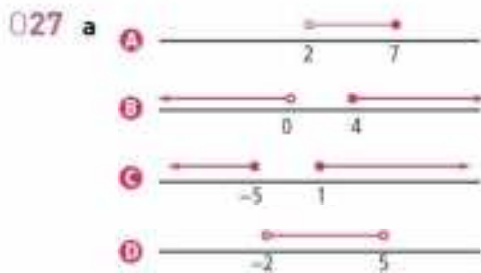
- 26 a $f(x) = g(x)$ geldt bij $x = -1$ en $x = 4$.
 b De oplossing van $f(x) \leq g(x)$ is $[-1, 4]$.
 c Er zijn twee losse stukken grafiek van f die hoger liggen dan de grafiek van g .
 d Je kunt de oplossing $x < -1$ of $x > 4$ ook in de intervalnotatie schrijven als $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ en $\langle 4, \rightarrow \rangle$.

- | | ongelijkheidsnotatie | intervalnotatie |
|---|------------------------|--|
| A | $x \leq -3$ of $x > 9$ | $\langle \leftarrow, -3 \rangle \cup \langle 9, \rightarrow \rangle$ |
| B | $1,5 \leq x < 6$ | $[1,5; 6 \rangle$ |
- b A $\langle 2, 14 \rangle$ C $\langle \leftarrow, -5 \rangle \cup [10, \rightarrow \rangle$
 B $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup [3, \rightarrow \rangle$ D $[-3; 2,5 \rangle$

	ongelijkheidsnotatie	intervalnotatie
A	$-4 < x \leq 4$	$\langle -4, 4 \rangle$
B	$x \leq 22$	$\langle \leftarrow, 22 \rangle$
C	$x > -31$	$\langle -31, \rightarrow \rangle$
D	$x < 0$ of $x > 0$	$\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$
E	$x \leq -12$ of $x > 15$	$\langle \leftarrow, -12 \rangle \cup \langle 15, \rightarrow \rangle$

- 29 a $x < 2$ of $x > 5$ ofwel $\langle \leftarrow, 2 \rangle \cup \langle 5, \rightarrow \rangle$
 b $2 \leq x \leq 5$ ofwel $[2, 5]$
 c $x < 1$ of $x > 7$ ofwel $\langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 7, \rightarrow \rangle$
 d $1 < x < 7$ ofwel $\langle 1, 7 \rangle$
 e $x \geq 5$ ofwel $[5, \rightarrow \rangle$
 f $x < 2$ ofwel $\langle \leftarrow, 2 \rangle$

- 30 a** In de periode tussen 6 weken en 16 weken is het aandeel A meer waard dan het aandeel B.
b Na ongeveer 12 weken is het verschil maximaal.

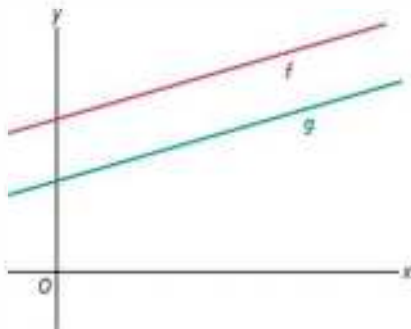


- b** A $\langle -2, 7 \rangle$ C $\langle \leftarrow, -5 \rangle \cup [1, \rightarrow)$
 B $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup [4, \rightarrow)$ D $\langle -2, 5 \rangle$

- c** Bij interval A horen de getallen tussen 3 en 10 waarbij 3 niet meetelt en 10 wel meetelt.
d $3 < x \leq 10$
e Voor interval B geldt $x \leq -1$ of $x > 6$.
f A $\langle 3, 10 \rangle$
 B $\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 6, \rightarrow)$

- 029 a** De snijpunten zitten bij $x = -4$ en $x = 1$.
b De x -coördinaten tellen wel mee bij de oplossing.
c Je kijkt waar de grafiek van f hoger ligt dan de grafiek van g .
d De oplossing van $f(x) \geq g(x)$ is $-4 \leq x \leq 1$ en geschreven in intervalnotatie $[-4, 1]$.

- U7 a** $f(x) < g(x)$ heeft geen oplossing als de twee grafieken evenwijdig lopen waarbij de grafiek van f hoger ligt dan die van g .
 Bijvoorbeeld:



- b** In dat geval is de oplossing van $f(x) > g(x)$ gelijk aan $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$ ofwel $\mathbb{R}$.

- U8 a** $x < 1$ of $x > 1$ **c** geen enkele waarde van x
b $\mathbb{R}$ **d** $x = 1$

11A Vergelijkingen en ongelijkheden

11A.5 Kwadratische ongelijkheden

intro Bij welke prijs de parabool hoger ligt dan rechte lijn maakt Brenda winst.

31 a $x^2 - 10 = -x - 4$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x + 3 = 0 \text{ of } x - 2 = 0$$

$$x = -3 \text{ of } x = 2$$

b De grafieken in de schets horen bij de functies $f(x) = x^2 - 10$ en $g(x) = -x - 4$.

c De grafiek van f ligt lager dan die van g bij waarden van x die liggen tussen -3 en 2 .

d De oplossing is $\langle -3, 2 \rangle$.

32 a $x^2 - 3x = x - 3$

b $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ of } x - 1 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = 1$$

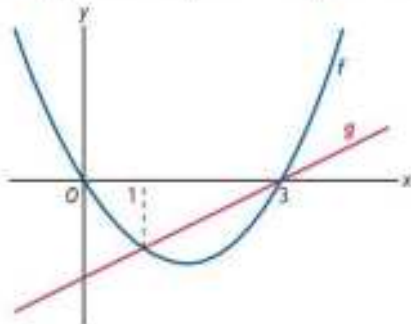
$$f(1) = 1^2 - 3 \times 1 = -2 \text{ en } f(3) = 3^2 - 3 \times 3 = 0$$

$$\text{Controle: } g(1) = 1 - 3 = -2, \text{ klopt en } g(3) = 3 - 3 = 0, \text{ klopt}$$

De snijpunten zijn $(1, -2)$ en $(3, 0)$.

c De grafiek van f is een dalparabool.

d



e De oplossing is $\langle 1, 3 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$.

33 De oplossing is $\langle -2, 1 \rangle$.

34 A $-x^2 + 3 = 4 - 2x$

$$-x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)(x - 1) = 0$$

$$x = 1$$

$$y = -1^2 + 3 = 2$$

Het gemeenschappelijke punt is $(1, 2)$.

In de schets lees je af dat de oplossing van de ongelijkheid $\mathbb{R}$ is.

B $x^2 - 6x - 8 = 4 - 2x$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x - 6)(x + 2) = 0$$

$$x - 6 = 0 \text{ of } x + 2 = 0$$

$$x = 6 \text{ of } x = -2$$

$$y = 4 - 2 \times 6 = -8 \text{ of } y = 4 - 2 \times -2 = 8$$

De snijpunten zijn $(6, -8)$ en $(-2, 8)$.

In de schets lees je af dat de oplossing van de ongelijkheid

$\langle -2, 6 \rangle \cup \langle 6, \infty \rangle$ is.

35 a $2x^2 = 4x + 6$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ of } x + 1 = 0$$

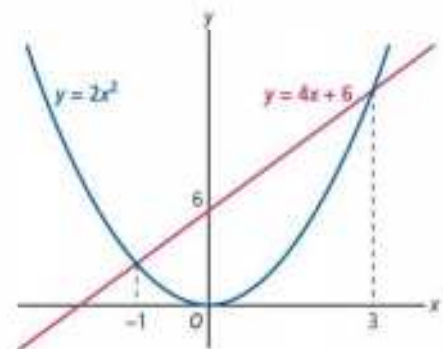
$$x = 3 \text{ of } x = -1$$

$$y = 2 \times 3^2 = 18 \text{ of } y = 2 \times (-1)^2 = 2$$

De snijpunten zijn (3, 18) en (-1, 2).

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$.



b $x^2 - 28 = -3x$

$$x^2 + 3x - 28 = 0$$

$$(x + 7)(x - 4) = 0$$

$$x + 7 = 0 \text{ of } x - 4 = 0$$

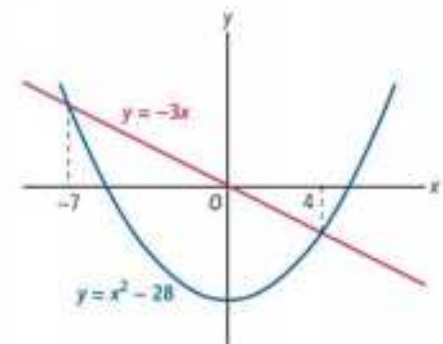
$$x = -7 \text{ of } x = 4$$

$$y = -3 \times -7 = 21 \text{ of } y = -3 \times 4 = -12$$

De snijpunten zijn (-7, 21) en (4, -12).

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\langle \leftarrow, -7 \rangle \cup [4, \rightarrow)$.



c $-x^2 - 2 = x - 8$

$$-x^2 - x + 6 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x + 3 = 0 \text{ of } x - 2 = 0$$

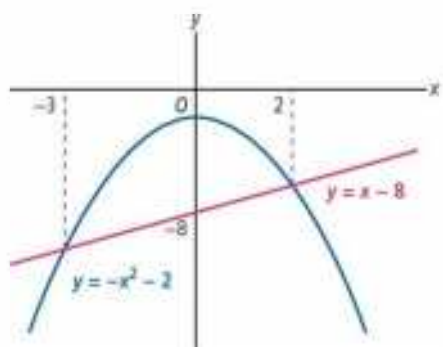
$$x = -3 \text{ of } x = 2$$

$$y = -3 - 8 = -11 \text{ of } y = 2 - 8 = -6$$

De snijpunten zijn (-3, -11) en (2, -6).

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\langle \leftarrow, -3 \rangle \cup [2, \rightarrow)$.



d $2x^2 - 6x = -10x + 16$

$$2x^2 + 4x - 16 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$x + 4 = 0 \text{ of } x - 2 = 0$$

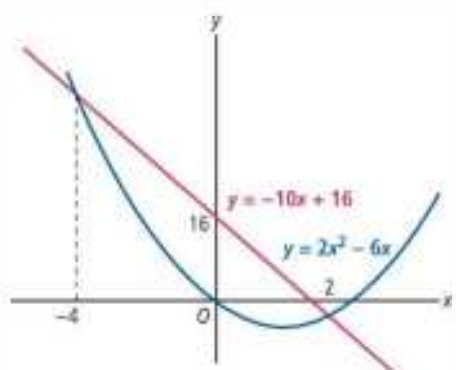
$$x = -4 \text{ of } x = 2$$

$$y = -10 \times -4 + 16 = 56 \text{ of } y = -10 \times 2 + 16 = -4$$

De snijpunten zijn (-4, 56) en (2, -4).

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\langle -4, 2 \rangle$.



36 a $-0,04a^2 + 5a = 0,6a + 40$

$$-0,04a^2 + 4,4a - 40 = 0$$

$$a^2 - 110a + 1000 = 0$$

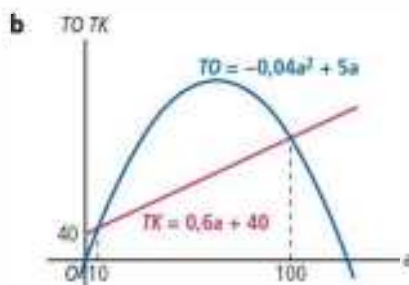
$$(a - 10)(a - 100) = 0$$

$$a - 10 = 0 \text{ of } a - 100 = 0$$

$$a = 10 \text{ of } a = 100$$

a is in tientallen, dus bij 100 tomatenplanten en bij 1000 tomatenplanten is de totale opbrengst gelijk aan de totale kosten.

11A Vergelijkingen en ongelijkheden



Er is winst als $TO > TK$, dus als het aantal tomatenplanten tussen 100 en 1000 ligt.

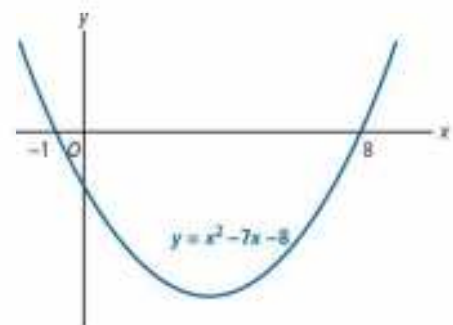
- 37 a De kaars brandt in $20 - 12 = 8$ uur op.
Per uur neemt de hoogte met $36 : 8 = 4,5$ cm af.
Een formule voor de rode kaars is $h = 36 - 4,5t$.

$$\begin{aligned} b \quad 29 - 0,5t^2 &= 36 - 4,5t \\ -0,5t^2 + 4,5t - 7 &= 0 \\ t^2 - 9t + 14 &= 0 \\ (t-2)(t-7) &= 0 \\ t-2 &= 0 \text{ of } t-7 = 0 \\ t &= 2 \text{ of } t = 7 \end{aligned}$$

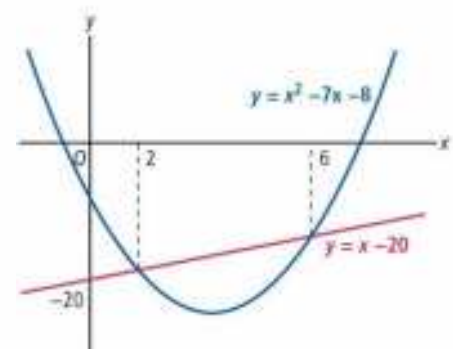
Om 14.00 uur en om 19.00 uur zijn de kaarsen even hoog.

- c Bij de start om 12.00 uur is de rode kaars hoger, om 14.00 uur zijn ze even hoog. Daarna is de blauwe kaars dus hoger (tot 19.00 uur).
De blauwe kaars is tussen 14.00 uur en 19.00 uur hoger dan de rode kaars.

- 38 a $x^2 - 7x - 8 = 0$
 $(x-8)(x+1) = 0$
 $x-8 = 0$ of $x+1 = 0$
 $x = 8$ of $x = -1$
De snijpunten zijn $(-1, 0)$ en $(8, 0)$.
Zie de schets hiernaast.
De oplossing is $\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup [8, \rightarrow \rangle$.



- b $x^2 - 7x - 8 = x - 20$
 $x^2 - 8x + 12 = 0$
 $(x-2)(x-6) = 0$
 $x-2 = 0$ of $x-6 = 0$
 $x = 2$ of $x = 6$
 $y = 2 - 20 = -18$ of $y = 6 - 20 = -14$
De snijpunten zijn $(2, -18)$ en $(6, -14)$.
Zie de schets hiernaast.
De oplossing is $\langle 2, 6 \rangle$.

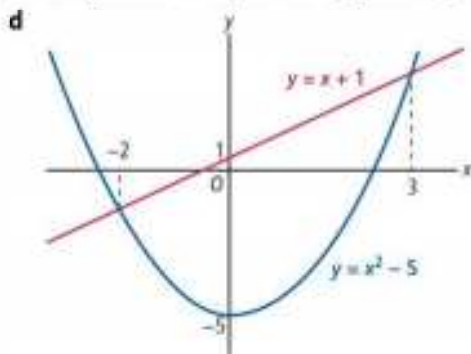


- 32 a $x^2 - 4x = -x$
 $x^2 - 3x = 0$
 $x(x-3) = 0$
 $x = 0$ of $x-3 = 0$
 $x = 0$ of $x = 3$
- b De oplossing van de ongelijkheid is $x < 0$ of $x > 3$ of in intervalnotatie geschreven $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$.

- 035 a** $x^2 - 5 = x + 1$
 $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x - 3)(x + 2) = 0$
 $x - 3 = 0$ of $x + 2 = 0$
 $x = 3$ of $x = -2$
 $y = 3 + 1 = 4$ of $y = -2 + 1 = -1$
 De snijpunten zijn $(3, 4)$ en $(-2, -1)$.

b De grafiek van f is een dalparabool die de y -as snijdt in $(0, -5)$.

c De grafiek van g is een stijgende lijn die de y -as snijdt in $(0, 1)$.



e Bij de waarden vanaf -2 tot en met 3 ligt de grafiek van f lager dan of even hoog als de grafiek van g .

f De oplossing van de ongelijkheid geschreven in de intervalnotatie is $[-2, 3]$.

- U9 a** De uitkomst van x^2 is altijd minstens 0 , dus kan $x^2 < -4$ geen oplossingen hebben.
- b** A bij F
 B bij H
 C bij E
 D bij G

11A.6 Machtsvergelijkingen

intro B De raket gaat steeds sneller.

- 39 a** Functie f hoort bij grafiek 1.
 Functie g hoort bij grafiek 3.
 Functie h hoort bij grafiek 4.
 Functie i hoort bij grafiek 2.
- b** De grafieken 1 en 4 hebben één snijpunt met de lijn $y = 4$, de grafieken 2 en 3 hebben twee snijpunten met de lijn $y = 4$.
- 40 a** De grafiek van f heeft één snijpunt met de lijn $y = -64$.
- b** $x^3 = -64$
 $x = \sqrt[3]{-64} = -4$
- c** De vergelijking $x^4 = 16$ heeft twee oplossingen.
- d** $2^4 = 16$ en $(-2)^4 = 16$, dus $x = 2$ of $x = -2$
- e** De uitkomst van x^4 is altijd minstens 0 .

11A Vergelijkingen en ongelijkheden

- 41** a $3x^6 = 192$
 $x^6 = 64$
 $x = 2$ of $x = -2$
- b $2p^5 = -64$
 $p^5 = -32$
 $p = -2$
- c $120 - a^3 = 56$
 $a^3 = 64$
 $a = 4$
- d $100 - x^4 = 181$
 $x^4 = -81$
geen oplossing
- e $x^5 + 4 = 36$
 $x^5 = 32$
 $x = 2$
- f $300 - t^4 = 219$
 $t^4 = 81$
 $t = -3$ of $t = 3$
- 42** a Omdat de exponent 3 oneven is.
b $\sqrt[3]{20} \approx 2,71$
c $x \approx -2,11$ of $x \approx 2,11$
- 43** a $2x^3 = 200$
 $x^3 = 100$
 $x = \sqrt[3]{100} \approx 4,64$
- b $1000x^4 = 0,1$
 $x^4 = 0,0001$
 $x = -\sqrt[4]{0,0001} = -0,1$ of
 $x = \sqrt[4]{0,0001} = 0,1$
- c $100 - 5x^6 = 100$
 $5x^6 = 0$
 $x^6 = 0$
 $x = 0$
- d $0,5x^7 + 100 = 50$
 $0,5x^7 = -50$
 $x^7 = -100$
 $x = \sqrt[7]{-100} \approx 1,93$
- e $10x^8 + 650 = 350$
 $10x^8 = -300$
 $x^8 = -30$
geen oplossing
- f $1000 - 2,5x^5 = 1250$
 $2,5x^5 = -250$
 $x^5 = -100$
 $x = \sqrt[5]{-100} \approx -2,51$
- 44** $n^8 = 65\,536$
 $n = -\sqrt[8]{65\,536} = -4$ of $n = \sqrt[8]{65\,536} = 4$
 $n = -4$ heeft hier geen betekenis.
De leerlingen kunnen bij elke vraag uit 4 antwoorden kiezen.
- 45** a $I = 6 \times 3^3 = 6 \times 27 = 162$
De inhoud is dan 162 liter.
- b $I = 384$ geeft $6b^3 = 384$.
 $b^3 = 64$
 $b = \sqrt[3]{64}$ dus $b = 4$
De afmetingen zijn 4 dm bij 12 dm bij 8 dm.
- c $6b^3 = 1000$
 $b^3 = 166\frac{2}{3}$
 $b = \sqrt[3]{166\frac{2}{3}} \approx 5,503 \dots$ dm, dus minimaal 56 cm.
De minimale maten van dit aquarium zijn 56 cm bij 168 cm bij 112 cm.
- 041** a Op het bordje moet 64 staan, want $2 \times 64 = 128$.
b $x^3 = 64$
 $x = 4$ want $4^3 = 64$.
c Op het bordje moet 625 staan, want $750 - 625 = 125$.
d $x^4 = 625$
 $x = -5$ of $x = 5$ want $(-5)^4 = 625$ en $5^4 = 625$.

e $1100 - x^3 = 100$

$$x^3 = 1000$$

$$x = 10$$

f $2x^4 = 162$

$$x^4 = 81$$

$$x = -3 \text{ of } x = 3$$

g $2x^5 = -64$

$$x^5 = -32$$

$$x = -2$$

h $8x^6 + 10 = 18$

$$8x^6 = 8$$

$$x^6 = 1$$

$$x = -1 \text{ of } x = 1$$

043 a Vergelijking A heeft twee oplossingen omdat de exponent 6 even is.

b $3x^6 = 12$

$$x^6 = 4$$

$$x = -\sqrt[6]{4} \text{ of } x = \sqrt[6]{4}$$

$$x \approx -1,26 \text{ of } x \approx 1,26$$

c De exponent 8 is even en een macht met een even exponent heeft geen negatieve uitkomsten.

U10 $8 \text{ liter} = 8 \text{ dm}^3 = 8000 \text{ cm}^3$

$$\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3 = 8000$$

$$\pi \cdot d^3 = 48000$$

$$d^3 = \frac{48000}{\pi}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{48000}{\pi}} = 24,81$$

De diameter van deze volleybal is ongeveer 25 cm.

U11 a Bij schets A hoort de ongelijkheid $0,5x^4 > 648$.

Bij schets B hoort de ongelijkheid $2x^3 \leq 250$.

b $2x^3 = 250$

$$x^3 = 125$$

$$x = 5$$

c De oplossing is $\langle \leftarrow, 5 \rangle$.

d $0,5x^4 = 648$

$$x^4 = 1296$$

$$x = -\sqrt[4]{1296} = -6 \text{ of } x = \sqrt[4]{1296} = 6$$

e De oplossing is $\langle \leftarrow, -6 \rangle \cup \langle 6, \rightarrow \rangle$.

11A.7 Gemengde opdrachten

46 a Aan het begin zijn er

$$120 + 90 \times 2^{0,5 \times 0} = 120 + 90 \times 2^0 = 120 + 90 \times 1 = 120 + 90 = 210 \text{ ratten.}$$

b $120 + 90 \cdot 2^{0,5t} = 3000$

$$90 \cdot 2^{0,5t} = 2880$$

$$2^{0,5t} = 32$$

$$2^{0,5t} = 2^5$$

$$0,5t = 5$$

$$t = 10$$

Na 10 weken is het aantal ratten gelijk aan 3000.

11A Vergelijkingen en ongelijkheden

$$\begin{aligned} \text{c } 120 + 90 \cdot 2^{0,5t} &= 5880 \\ 90 \cdot 2^{0,5t} &= 5760 \\ 2^{0,5t} &= 64 \\ 2^{0,5t} &= 2^6 \\ 0,5t &= 6 \\ t &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 120 + 90 \cdot 2^{0,5t} &= 23160 \\ 90 \cdot 2^{0,5t} &= 23040 \\ 2^{0,5t} &= 256 \\ 2^{0,5t} &= 2^8 \\ 0,5t &= 8 \\ t &= 16 \end{aligned}$$

In $16 - 12 = 4$ weken tijd neemt het aantal ratten toe van 5880 tot 23160.

$$47 \text{ a } 3\sqrt{4z-1} = 15$$

$$\sqrt{4z-1} = 5$$

$$4z-1 = 25$$

$$4z = 26$$

$$z = 6\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b } 0,5 \cdot 2^{m-5} &= 4 \\ 2^{m-5} &= 8 \\ 2^{m-5} &= 2^3 \\ m-5 &= 3 \\ m &= 8 \end{aligned}$$

$$\text{c } 36 = \frac{18}{2x-5}$$

$$2x-5 = \frac{1}{2}$$

$$2x = 5\frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{3}{4}$$

$$\text{d } -\sqrt{2p+3} = 6$$

$$\sqrt{2p+3} = -6$$

geen oplossing

$$\text{e } d = \frac{15}{d-2}$$

$$d(d-2) = \frac{15}{d-2} \cdot (d-2)$$

$$d^2 - 2d = 15$$

$$d^2 - 2d - 15 = 0$$

$$(d-5)(d+3) = 0$$

$$d-5 = 0 \text{ of } d+3 = 0$$

$$d = 5 \text{ of } d = -3$$

$$\text{f } 2x^4 + 8 = 520$$

$$2x^4 = 512$$

$$x^4 = 256$$

$$x = -\sqrt[4]{256} \text{ of } x = \sqrt[4]{256}$$

$$x = -4 \text{ of } x = 4$$

$$\text{g } \frac{4}{4+w} = 2w+10$$

$$(4+w) \cdot \frac{4}{4+w} = (2w+10)(4+w)$$

$$4 = 8w + 2w^2 + 40 + 10w$$

$$0 = 2w^2 + 18w + 36$$

$$w^2 + 9w + 18 = 0$$

$$(w+3)(w+6) = 0$$

$$w+3 = 0 \text{ of } w+6 = 0$$

$$w = -3 \text{ of } w = -6$$

$$\text{h } 0,5x^5 - 18 = 3$$

$$0,5x^5 = 21$$

$$x^5 = 42$$

$$x = \sqrt[5]{42} = 2,11$$

$$48 \text{ a } x^2 - 2 = -x + 4$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x+3 = 0 \text{ of } x-2 = 0$$

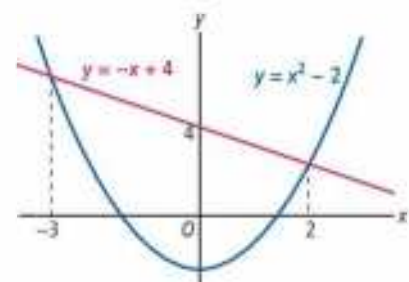
$$x = -3 \text{ of } x = 2$$

$$y = 3 + 4 = 7 \text{ of } y = -2 + 4 = 2$$

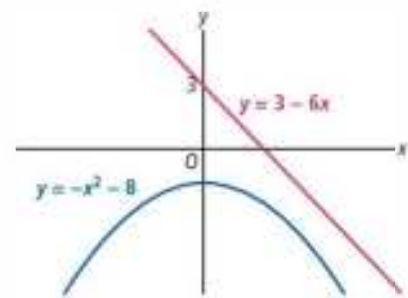
De snijpunten zijn $(-3, 7)$ en $(2, 2)$.

Zie de schets hiernaast.

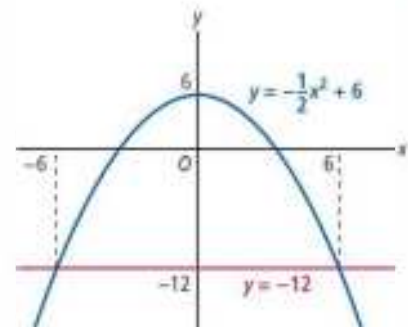
De oplossing is $-3 < x < 2$ ofwel $(-3, 2)$.



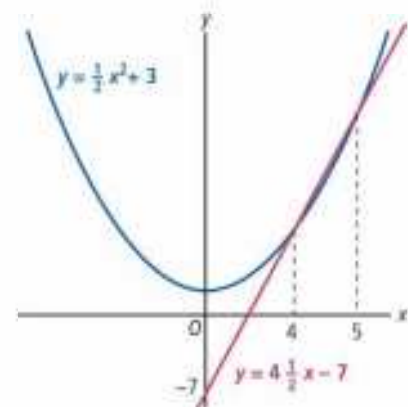
- b** $-x^2 - 8 = 3 - 6x$
 $-x^2 + 6x - 11 = 0$
 $x^2 - 6x + 11 = 0$
 $a = 1, b = -6$ en $c = 11$ geeft $D = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 11 = -8 < 0$
 Er zijn geen snijpunten.
 Zie de schets hiernaast.
 De oplossing is: alle waarden van x ofwel $\mathbb{R}$.



- c** $-\frac{1}{2}x^2 + 6 = -12$
 $-\frac{1}{2}x^2 = -18$
 $x^2 = 36$
 $x = -6$ of $x = 6$
 De snijpunten zijn $(-6, -12)$ en $(6, -12)$.
 Zie de schets hiernaast.
 De oplossing is $-6 < x < 6$ ofwel $\langle -6, 6 \rangle$.



- d** $\frac{1}{2}x^2 + 3 = 4\frac{1}{2}x - 7$
 $\frac{1}{2}x^2 - 4\frac{1}{2}x + 10 = 0$
 $x^2 - 9x + 20 = 0$
 $(x - 4)(x - 5) = 0$
 $x - 4 = 0$ of $x - 5 = 0$
 $x = 4$ of $x = 5$
 $y = 4\frac{1}{2} \times 4 - 7 = 11$ of $y = 4\frac{1}{2} \times 5 - 7 = 15\frac{1}{2}$
 De snijpunten zijn $(4, 11)$ en $(5, 15\frac{1}{2})$.
 Zie de schets hiernaast.
 De oplossing is $4 < x < 5$ ofwel $\langle 4, 5 \rangle$.



- 49 a** $-0,0002a^2 + 0,16a + 18 = 33 - 0,01a$
 $-0,0002a^2 + 0,17a - 15 = 0$
 $a^2 - 850a + 75\,000 = 0$
 $(a - 100)(a - 750) = 0$
 $a - 100 = 0$ of $a - 750 = 0$
 $a = 100$ of $a = 750$
 $h = 33 - 0,01 \times 100 = 32$ of $h = 33 - 0,01 \times 750 = 25,5$
 $A(100, 32)$ en $B(750; 25,5)$
 Het hoogteverschil tussen de punten A en B is $32 - 25,5 = 6,5$ meter.
- b** Lijnstuk AB is de lange zijde van een rechthoekige driehoek met zijden $750 - 100 = 650$ m en $6,5$ m.
- | zijde | kwadraat |
|--------------|------------|
| 650 | 422 500 |
| 6,5 | 42,25 + |
| $AB = \dots$ | 422 542,25 |
- $AB = \sqrt{422\,542,25} \approx 650,032$
 De trein legt 650 m en 3 cm af.

11A Vergelijkingen en ongelijkheden

- c Bij $a = 0$ is $h = 18$.

$$-0,0002a^2 + 0,16a + 18 = 18$$

$$-0,0002a^2 + 0,16a = 0$$

$$a(-0,0002a + 0,16) = 0$$

$$a = 0 \text{ of } -0,0002a + 0,16 = 0$$

$$a = 0 \text{ of } -0,0002a = -0,16$$

$$a = 0 \text{ of } a = 800$$

De top ligt bij $a = 400$.

$$h = -0,0002 \times 400^2 + 0,16 \times 400 + 18 = 50$$

De boog van de brug is maximaal 50 meter boven het water.

50 a $W(6) = \frac{6 \times (6-1)}{2} = 15$, dus bij zes deelnemers zijn er 15 wedstrijden.

b $\frac{d(d-1)}{2} = 66$

$$d(d-1) = 132$$

$$d^2 - d - 132 = 0$$

$$(d-12)(d+11) = 0$$

$$d-12 = 0 \text{ of } d+11 = 0$$

$$d = 12 \text{ of } d = -11$$

$d = -11$ heeft hier geen betekenis. Er zijn bij 66 wedstrijden 12 deelnemers.

51 a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

- b Bij elk blokje heeft hij twee keuzes.

Bij n blokjes heeft hij $2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$ keuzes, dus kan hij 2^n verschillende torens maken.

c $2^n = 256$

$$2^n = 2^8$$

$n = 8$, zijn toren is dus 8 blokjes hoog.

d $k^5 = 32\,768$

$$k = \sqrt[5]{32\,768} = 8$$

Er zitten 8 verschillende kleuren in haar bak.

Samenvatting

- S1 a exponentiële vergelijking

- b wortelvergelijking

- c machtsvergelijking

- d gebroken vergelijking

S2 a $\frac{-24}{2x} + 3 = 9$

$$\frac{-24}{2x} = 6$$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

b $x + 11 = \frac{11}{x+1}$

$$(x+1)(x+11) = \frac{11}{x+1} \cdot (x+1)$$

$$x^2 + 11x + x + 11 = 11$$

$$x^2 + 12x = 0$$

$$x(x+12) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x + 12 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -12$$

S3 a $4^{2x+1} = 4096$

$$4^{2x+1} = 4^6$$

$$2x + 1 = 6$$

$$2x = 5$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

b $-3 \cdot 4x = -192$

$$4^x = 64$$

$$4^x = 4^3$$

$$x = 3$$

S4 a $\sqrt{6b+19} + 3 = 10$

$$\sqrt{6b+19} = 7$$

$$6b + 19 = 49$$

$$6b = 30$$

$$b = 5$$

b $5\sqrt{8-x} = 15$

$$\sqrt{8-x} = 3$$

$$8 - x = 9$$

$$x = -1$$

S5 $x^2 - 3x = 35 - x$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$(x-7)(x+5) = 0$$

$$x-7 = 0 \text{ of } x+5 = 0$$

$$x = 7 \text{ of } x = -5$$

$$f(7) = 7^2 - 3 \times 7 = 28 \text{ en } f(-5) = (-5)^2 - 3 \times -5 = 40$$

$$\text{Controle: } g(7) = 35 - 7 = 28, \text{ klopt en } g(-5) = 35 - -5 = 40, \text{ klopt.}$$

De snijpunten zijn (7, 28) en (-5, 40).

S6

	ongelijkheidsnotatie	intervalnotatie
A	$x > -1$	$\langle -1, \rightarrow$
B	$x \leq 6$	$\langle \leftarrow, 6]$
C	$x < 0$ of $x > 7$	$\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 7, \rightarrow$
D	$-8 < x \leq 5$	$\langle -8, 5]$
E	$x \leq -3$ of $x \geq 11$	$\langle \leftarrow, -3] \cup [11, \rightarrow$
F	$3 \leq x < 9$	$[3, 9)$

S7 a $130 - 4x^2 = 30$

$$4x^2 = 100$$

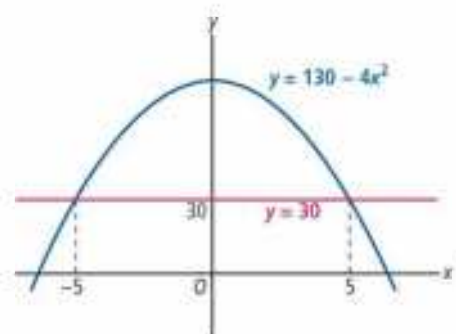
$$x^2 = 25$$

$$x = -5 \text{ of } x = 5$$

De snijpunten zijn (-5, 30) en (5, 30).

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $[-5, 5]$.



b $x^2 - 8x + 11 = x - 7$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$(x-3)(x-6) = 0$$

$$x-3 = 0 \text{ of } x-6 = 0$$

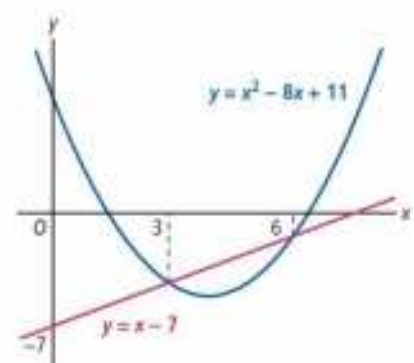
$$x = 3 \text{ of } x = 6$$

$$y = 3 - 7 = -4 \text{ of } y = 6 - 7 = -1$$

De snijpunten zijn (3, -4) en (6, -1).

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\langle 3, 6 \rangle$.



11A Vergelijkingen en ongelijkheden

- S8 a** $0,04x^6 = 625$
 $x^6 = 15\,625$
 $x = -\sqrt[6]{15\,625}$ of $x = \sqrt[6]{15\,625}$
 $x = -5$ of $x = 5$
- b** $1000x^3 = -3375$
 $x^3 = -3,375$
 $x = \sqrt[3]{-3,375}$
 $x = -1,5$
- c** $1000 - x^5 = 757$
 $x^5 = 243$
 $x = \sqrt[5]{243}$
 $x = 3$
- d** $-80 - \frac{1}{2}x^4 = 62$
 $-\frac{1}{2}x^4 = 142$
 $x^4 = -284$
geen oplossing

Test jezelf

- T1 a** $\frac{24}{5b-3} = 4$
 $5b - 3 = 6$
 $5b = 9$
 $b = 1,8$
- b** $1 + \frac{30}{7h} = 6$
 $\frac{30}{7h} = 5$
 $7h = 6$
 $h = \frac{6}{7}$
- c** $\frac{12}{x-2} = x-6$
 $(x-2) \cdot \frac{12}{x-2} = (x-6)(x-2)$
 $12 = x^2 - 2x - 6x + 12$
 $x^2 - 8x = 0$
 $x(x-8) = 0$
 $x = 0$ of $x - 8 = 0$
 $x = 0$ of $x = 8$
- d** $\frac{2}{x} = -2x + 4$
 $x \cdot \frac{2}{x} = x(-2x + 4)$
 $2 = -2x^2 + 4x$
 $2x^2 - 4x + 2 = 0$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x-1)^2 = 0$
 $x - 1 = 0$
 $x = 1$

- T2 a** $T(0) = 20 + \frac{24}{2} = 32$
De temperatuur aan het begin is 32°C .
- b** $T(10) = 20 + \frac{24}{7} = 23,4$
De temperatuur na 10 minuten is ongeveer $23,4^\circ\text{C}$.
- c** Neem bijvoorbeeld $t = 1000$.
 $T(1000) = 20 + \frac{24}{502} \approx 20,05$
Voor grote waarden van t nadert de temperatuur naar 20.
Het wordt op den duur dus 20°C .

$$\text{d } 20 + \frac{24}{\frac{1}{2}t + 2} = 23$$

$$\frac{24}{\frac{1}{2}t + 2} = 3$$

$$\frac{1}{2}t + 2 = 8$$

$$\frac{1}{2}t = 6$$

$$t = 6 \times 2 = 12$$

Na 12 minuten moet je het verwarmingselement inschakelen.

$$\text{T3 a } 7^{2a} = 343$$

$$7^{2a} = 7^3$$

$$2a = 3$$

$$a = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{e } 4\sqrt{t+1} = 12$$

$$\sqrt{t+1} = 3$$

$$t+1 = 9$$

$$t = 8$$

$$\text{b } 2 \cdot 7^p = 4802$$

$$7^p = 2401$$

$$7^p = 7^4$$

$$p = 4$$

$$\text{f } 4\sqrt{2u} + 3 = 19$$

$$4\sqrt{2u} = 16$$

$$\sqrt{2u} = 4$$

$$2u = 16$$

$$u = 8$$

$$\text{c } 7^{3k-1} - 1 = 2400$$

$$7^{3k-1} = 2401$$

$$7^{3k-1} = 7^4$$

$$3k-1 = 4$$

$$3k = 5$$

$$k = 1\frac{2}{3}$$

$$\text{g } 27 - 3\sqrt{3a} = 0$$

$$3\sqrt{3a} = 27$$

$$\sqrt{3a} = 9$$

$$3a = 81$$

$$a = 27$$

$$\text{d } 7^{-2+5a} = 49$$

$$7^{-2+5a} = 7^2$$

$$-2 + 5a = 2$$

$$5a = 4$$

$$a = \frac{4}{5}$$

$$\text{h } 6\sqrt{6-c} - 2 = 4$$

$$6\sqrt{6-c} = 6$$

$$\sqrt{6-c} = 1$$

$$6-c = 1$$

$$c = 5$$

$$\text{T4 a } 2\sqrt{l} = 1,4$$

$$\sqrt{l} = 0,7$$

$$l = 0,7^2 = 0,49$$

De lengte van de slinger is 0,49 m ofwel 49 cm.

- b Nee, neem bijvoorbeeld $l = 2 \times 0,49 = 0,98$. Dan is $T = 2 \times \sqrt{0,98} = 1,98$ en dat is niet twee keer zo groot als 1,4.

$$\text{T5 a } -x^2 + 3x + 10 = -3x - 6$$

$$-x^2 + 6x + 16 = 0$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$(x-8)(x+2) = 0$$

$$x-8 = 0 \text{ of } x+2 = 0$$

$$x = 8 \text{ of } x = -2$$

$$f(8) = -8^2 + 3 \times 8 + 10 = -30 \text{ en } f(-2) = -(-2)^2 + 3 \times -2 + 10 = 0$$

$$\text{Controle: } g(8) = -3 \times 8 - 6 = -30, \text{ klopt en } g(-2) = -3 \times -2 - 6 = 0, \text{ klopt.}$$

De snijpunten zijn (8, -30) en (-2, 0).

11A Vergelijkingen en ongelijkheden

$$\begin{aligned}
 \text{b } -x^2 + 3x + 10 &= -3x + 19 \\
 -x^2 + 6x - 9 &= 0 \\
 x^2 - 6x + 9 &= 0 \\
 (x-3)(x-3) &= 0 \\
 x-3 &= 0 \\
 x &= 3
 \end{aligned}$$

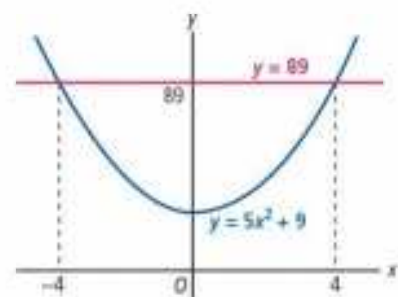
De vergelijking heeft maar één oplossing, dus de grafieken hebben één punt gemeenschappelijk.

$$\begin{aligned}
 \text{c } f(3) &= -3^2 + 3 \times 3 + 10 = 10 \\
 h(3) &= -3 \times 3 + 19 = 10, \text{ klopt} \\
 \text{Het gemeenschappelijke punt is } (3, 10).
 \end{aligned}$$

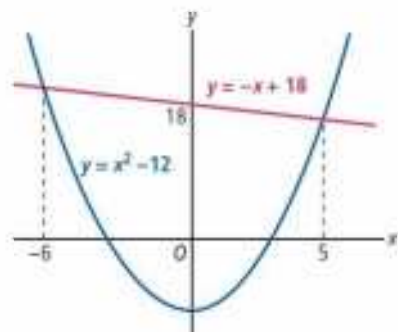
	ongelijkheidsnotatie	intervalnotatie
A	$x \leq -4$ of $x > 0$	$\langle \leftarrow, -4 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$
B	$-4 < x \leq 7,5$	$\langle -4; 7,5 \rangle$

$$\begin{aligned}
 \text{b } \text{A } [3, \rightarrow) & \qquad \qquad \text{C } \langle \leftarrow, 7 \rangle \cup [13, \rightarrow) \\
 \text{B } \langle \leftarrow, -9 \rangle & \qquad \qquad \text{D } \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle
 \end{aligned}$$

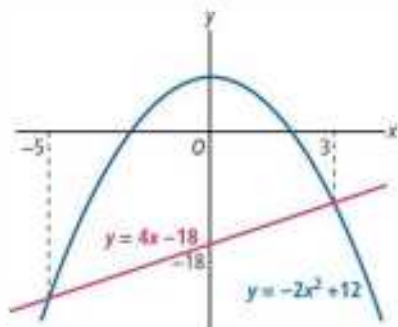
$$\begin{aligned}
 \text{T7 a } 5x^2 + 9 &= 89 \\
 5x^2 &= 80 \\
 x^2 &= 16 \\
 x &= -4 \text{ of } x = 4 \\
 \text{De snijpunten zijn } (-4, 89) \text{ en } (4, 89). \\
 \text{Zie de schets hiernaast.} \\
 \text{De oplossing is } \langle \leftarrow, -4 \rangle \cup [4, \rightarrow).
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{b } x^2 - 12 &= -x + 18 \\
 x^2 + x - 30 &= 0 \\
 (x+6)(x-5) &= 0 \\
 x+6 &= 0 \text{ of } x-5 = 0 \\
 x &= -6 \text{ of } x = 5 \\
 y &= 6 + 18 = 24 \text{ of } y = -5 + 18 = 13 \\
 \text{De snijpunten zijn } (-6, 24) \text{ en } (5, 13). \\
 \text{Zie de schets hiernaast.} \\
 \text{De oplossing is } \langle -6, 5 \rangle.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{c } -2x^2 + 12 &= 4x - 18 \\
 -2x^2 - 4x + 30 &= 0 \\
 x^2 + 2x - 15 &= 0 \\
 (x+5)(x-3) &= 0 \\
 x+5 &= 0 \text{ of } x-3 = 0 \\
 x &= -5 \text{ of } x = 3 \\
 y &= 4 \times -5 - 18 = -38 \text{ of } y = 4 \times 3 - 18 = -6 \\
 \text{De snijpunten zijn } (-5, -38) \text{ en } (3, -6). \\
 \text{Zie de schets hiernaast.} \\
 \text{De oplossing is } [-5, 3].
 \end{aligned}$$



d $0,5x^2 + 4 = -7$

$$0,5x^2 = -11$$

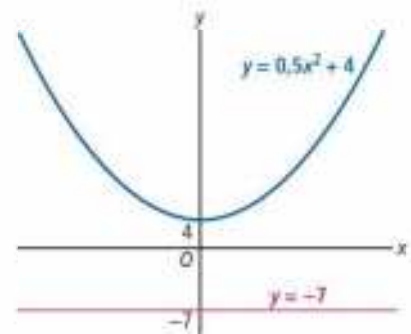
$$x^2 = -22$$

De vergelijking heeft geen oplossingen.

Er zijn geen snijpunten.

Zie de schets hiernaast.

De ongelijkheid heeft geen oplossing.



T8 a $10x^3 = -640$

$$x^3 = -64$$

$$x = \sqrt[3]{-64} = -4$$

b $3x^8 = 768$

$$x^8 = 256$$

$$x = \sqrt[8]{256} = -2 \text{ of } x = \sqrt[8]{256} = 2$$

c $9 - x^5 = -234$

$$x^5 = 243$$

$$x = \sqrt[5]{243} = 3$$

d $50 - x^4 = 66$

$$x^4 = -16$$

geen oplossing

T9 a $P = 3,7 \cdot 12^3 = 6393,6$, dus de windmolen levert 6393,6 watt vermogen.

b $3,7 \cdot w^3 = 29\,600$

$$w^3 = 8000 \text{ geeft } w = 20$$

Bij een windsnelheid van 20 m/s levert de windmolen 29 600 watt.

Extra oefening

E1 a $\frac{20}{2x+1} = 5$

$$2x+1=4$$

$$2x=3$$

$$x=1\frac{1}{2}$$

b $\frac{-24}{2x} = x-7$

$$2x \cdot \frac{-24}{2x} = 2x(x-7)$$

$$-24 = 2x^2 - 14x$$

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x-3)(x-4) = 0$$

$$x-3=0 \text{ of } x-4=0$$

$$x=3 \text{ of } x=4$$

c $5 - \frac{4}{3x} = 4$

$$\frac{4}{3x} = 1$$

$$3x=4$$

$$x=1\frac{1}{3}$$

d $7x+4 = \frac{20}{x}$

$$x(7x+4) = \frac{20}{x} \cdot x$$

$$7x^2 + 4x = 20$$

$$7x^2 + 4x - 20 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \times 7 \times -20 = 576$$

$$x = \frac{-4 \pm 24}{14} \text{ of } x = \frac{-4 - 24}{14}$$

$$x = 1\frac{3}{7} \text{ of } x = -2$$

E2 a $4^x = 256$

$$4^x = 4^4$$

$$x=4$$

b $3^{2x} = 81$

$$3^{2x} = 3^4$$

$$2x=4$$

$$x=2$$

11A Vergelijkingen en ongelijkheden

$$\begin{aligned} \text{c } 2 \cdot 3^{x+1} &= 486 \\ 3^{x+1} &= 243 \\ 3^{x+1} &= 3^5 \\ x+1 &= 5 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 3^{-x} &= 729 \\ 3^{-x} &= 3^6 \\ -x &= 6 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } 0,2 \cdot 4^x &= 3,2 \\ 4^x &= 16 \\ 4^x &= 4^2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } 4^{x-3} - 2 &= 62 \\ 4^{x-3} &= 64 \\ 4^{x-3} &= 4^3 \\ x-3 &= 3 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E3 a } \sqrt{3a} &= 9 \\ 3a &= 81 \\ a &= 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } \sqrt{24-7b} &= 5 \\ 24-7b &= 25 \\ 7b &= -1 \\ b &= -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } 4\sqrt{c+9} &= 8 \\ \sqrt{c+9} &= 2 \\ c+9 &= 4 \\ c &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 20 - \sqrt{3d-5} &= 16 \\ \sqrt{3d-5} &= 4 \\ 3d-5 &= 16 \\ 3d &= 21 \\ d &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } 8 + 2\sqrt{e} &= 22 \\ 2\sqrt{e} &= 14 \\ \sqrt{e} &= 7 \\ e &= 49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } 2\sqrt{2f-5} &= 32 \\ \sqrt{2f-5} &= 16 \\ 2f-5 &= 256 \\ 2f &= 261 \\ f &= 130\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E4 a } \frac{1}{2}x^2 &= 5x \\ \frac{1}{2}x^2 - 5x &= 0 \\ x^2 - 10x &= 0 \\ x(x-10) &= 0 \\ x &= 0 \text{ of } x-10=0 \\ x &= 0 \text{ of } x=10 \\ f(0) &= \frac{1}{2} \times 0^2 = 0 \text{ en } f(10) = \frac{1}{2} \times 10^2 = 50 \\ \text{Controle: } g(0) &= 5 \times 0 = 0, \text{ klopt en } g(10) = 5 \times 10 = 50, \text{ klopt.} \\ \text{De snijpunten zijn } (0, 0) &\text{ en } (10, 50). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } x^2 - 5x &= 4x - 14 \\ x^2 - 9x + 14 &= 0 \\ (x-7)(x-2) &= 0 \\ x-7 &= 0 \text{ of } x-2=0 \\ x &= 7 \text{ of } x=2 \\ f(2) &= 2^2 - 5 \times 2 = -6 \text{ en } f(7) = 7^2 - 5 \times 7 = 14 \\ \text{Controle: } g(2) &= 4 \times 2 - 14 = -6, \text{ klopt en } g(7) = 4 \times 7 - 14 = 14, \text{ klopt.} \\ \text{De snijpunten zijn } (2, -6) &\text{ en } (7, 14). \end{aligned}$$

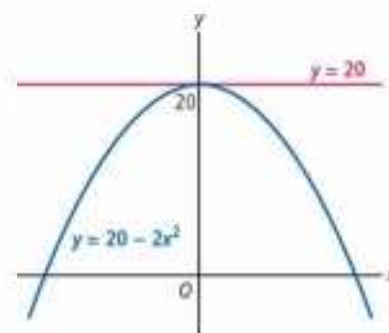
$$\begin{aligned} \text{c } x^2 - 3x + 4 &= -2x + 16 \\ x^2 - x - 12 &= 0 \\ (x-4)(x+3) &= 0 \\ x-4 &= 0 \text{ of } x+3=0 \\ x &= 4 \text{ of } x=-3 \\ f(4) &= 4^2 - 3 \times 4 + 4 = 8 \text{ en } f(-3) = (-3)^2 - 3 \times -3 + 4 = 22 \\ \text{Controle: } g(4) &= -2 \times 4 + 16 = 8, \text{ klopt en } g(-3) = -2 \times -3 + 16 = 22, \text{ klopt.} \\ \text{De snijpunten zijn } (4, 8) &\text{ en } (-3, 22). \end{aligned}$$

	ongelijkheidsnotatie	intervalnotatie
A	$1,5 \leq x < 8$	$[1,5; 8)$
B	$x < -1$ of $x > 6$	$\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 6, \rightarrow \rangle$
C	$-2 < x \leq 7$	$\langle -2, 7]$
D	$x < -5,5$ of $x > -5,5$	$\langle \leftarrow; -5,5 \rangle \cup \langle -5,5; \rightarrow \rangle$

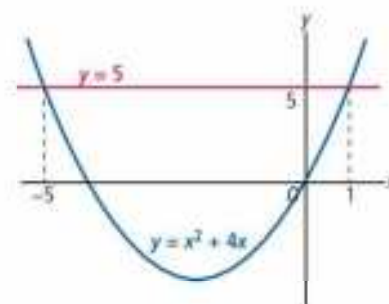
- E6** De snijpunten liggen bij $a = 20$ en $a = 80$.
Tussen $a = 20$ en $a = 80$ is $TO > TK$, dus Wilma maakt winst als ze tussen 20 en 80 ijsjes verkoopt.

- E7** $-x^2 + 3x + 3 = 2x - 3$
 $-x^2 + x + 6 = 0$
 $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x - 3)(x + 2) = 0$
 $x - 3 = 0$ of $x + 2 = 0$
 $x = 3$ of $x = -2$
De oplossing is $\langle \leftarrow, -2] \cup [3, \rightarrow \rangle$.

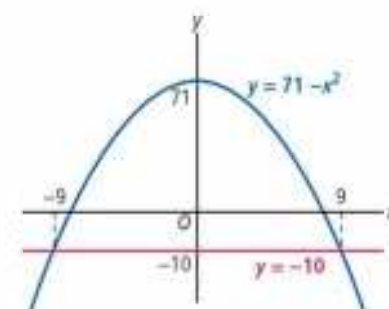
- E8 a** $20 - 2x^2 = 20$
 $2x^2 = 0$
 $x^2 = 0$
 $x = 0$
Het snijpunt is $(0, 20)$.
Zie de schets hiernaast.
De oplossing is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.



- b** $x^2 + 4x = 5$
 $x^2 + 4x - 5 = 0$
 $(x + 5)(x - 1) = 0$
 $x + 5 = 0$ of $x - 1 = 0$
 $x = -5$ of $x = 1$
De snijpunten zijn $(-5, 5)$ en $(1, 5)$.
Zie de schets hiernaast.
De oplossing is $\langle \leftarrow, -5] \cup [1, \rightarrow \rangle$.



- c** $71 - x^2 = -10$
 $x^2 = 81$
 $x = -9$ of $x = 9$
De snijpunten zijn $(-9, -10)$ and $(9, -10)$.
Zie de schets hiernaast.
De oplossing is $\langle -9, 9 \rangle$.



11A Vergelijkingen en ongelijkheden

d $-2x^2 + 2 = 4x - 14$

$$-2x^2 - 4x + 16 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$x + 4 = 0 \text{ of } x - 2 = 0$$

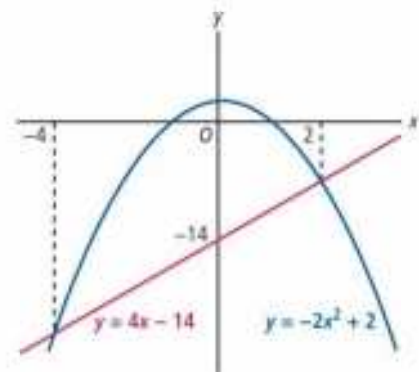
$$x = -4 \text{ of } x = 2$$

$$y = 4 \times -4 - 14 = -30 \text{ of } y = 4 \times 2 - 14 = -6$$

De snijpunten zijn $(-4, -30)$ en $(2, -6)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\langle -4, 2 \rangle$.



E9 a $t^3 = 343$

$$t = \sqrt[3]{343}$$

$$t = 7$$

c $3g^5 + 12 = -84$

$$3g^5 = -96$$

$$g^5 = -32$$

$$g = \sqrt[5]{-32}$$

$$g = -2$$

b $3p^4 = 1875$

$$p^4 = 625$$

$$p = -\sqrt[4]{625} \text{ of } p = \sqrt[4]{625}$$

$$p = -5 \text{ of } p = 5$$

d $100 - 4c^4 = 200$

$$4c^4 = -100$$

$$c^4 = -25$$

geen oplossing

E10 a $0,0001l^3 = 0,8$

$$l^3 = 8000$$

$$l = 20$$

De rups is 20 mm lang.

b $0,0001l^3 = 3$

$$l^3 = 30\,000$$

$$l = \sqrt[3]{30\,000} = 31,072\dots$$

De rups is 31 mm lang.

c $0,0001l^3 = 4$

$$l^3 = 40\,000$$

$$l = \sqrt[3]{40\,000} = 34,1995\dots$$

De lengte bij het verpoppen ligt tussen 31 mm en 34 mm.

11B Vergelijkingen en ongelijkheden

Voorkennis

V1 a $\sqrt[3]{8} = 2$

b $\sqrt[3]{-1} = -1$

c $\sqrt[3]{-27} = -3$

d $\sqrt[3]{1000} = 10$

V2 a $\sqrt[3]{18} \approx 2,62$

b $\sqrt[3]{-100} \approx -4,64$

c $\sqrt[3]{-8,5} \approx -2,04$

d $\sqrt[3]{0,8} \approx 0,93$

V3 A $[-4, 1]$ hoort bij 3.

B $\langle -4, 3]$ hoort bij 1.

C $\langle -3, 1)$ hoort bij 4.

D $[-3, 4)$ hoort bij 2.

V4 a $5x - 6 = 3x + 9$

$2x - 6 = 9$

$2x = 15$

$x = 7\frac{1}{2}$

$y = 5 \times 7\frac{1}{2} - 6$ dus $y = 31\frac{1}{2}$

Het snijpunt is $(7\frac{1}{2}, 31\frac{1}{2})$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $x > 7\frac{1}{2}$.

b $-7x + 8 = -7 - 2x$

$8 = -7 + 5x$

$15 = 5x$

$x = 3$

$y = -7 \times 3 + 8$ dus $y = -13$

Het snijpunt is $(3, -13)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $x > 3$.

c $4x = x - 30$

$3x = -30$

$x = -10$

$y = 4 \times -10$ dus $y = -40$

Het snijpunt is $(-10, -40)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $x > -10$.

d $4 - x = 18 + 2x$

$4 = 18 + 3x$

$-14 = 3x$

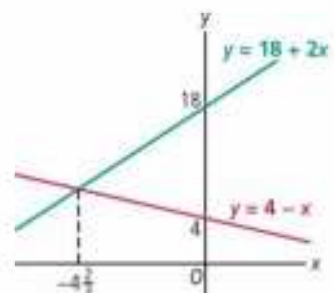
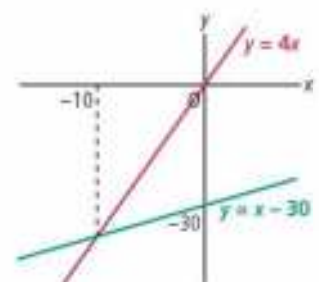
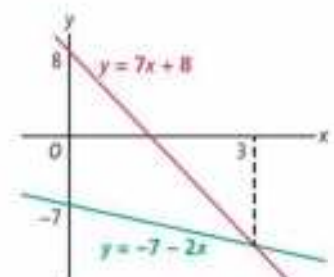
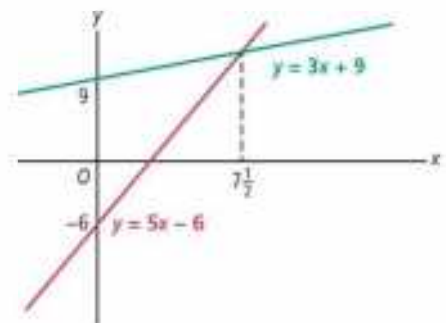
$x = -4\frac{2}{3}$

$y = 4 - (-4\frac{2}{3})$ dus $y = 8\frac{2}{3}$

Het snijpunt is $(-4\frac{2}{3}, 8\frac{2}{3})$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $x > -4\frac{2}{3}$.



11B Vergelijkingen en ongelijkheden

V5 a $f(0) = 2 \cdot 0^2 + 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, dus bij $x = 0$ is $y = -\frac{1}{2}$.

b $2x^2 + x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$$2x^2 + x = 0$$

$$x(2x + 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 2x + 1 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 2x = -1$$

$$x = 0 \text{ of } x = -\frac{1}{2}$$

c $2x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$

$$a = 2, b = 1 \text{ en } c = -\frac{1}{2} \text{ geeft } D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -\frac{1}{2} = 5$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \text{ of } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\text{Snijpunten met de } x\text{-as zijn } \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}, 0\right) \text{ en } \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, 0\right).$$

V6 Nienke: ontbinden in factoren

Rien: kwadraat afsplitsen

Daan: bordje leggen

V7 a $x^2 - 11x + 24 = 0$

$$(x - 3)(x - 8) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ of } x - 8 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = 8$$

d $-x^2 + 6x + 3 = 11$

$$-x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x - 2)(x - 4) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ of } x - 4 = 0$$

$$x = 2 \text{ of } x = 4$$

b $(x - 3)^2 - 2 = 14$

$$(x - 3)^2 = 16$$

$$x - 3 = 4 \text{ of } x - 3 = -4$$

$$x = 7 \text{ of } x = -1$$

e $x^2 + x = 12 + 2x$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$x - 4 = 0 \text{ of } x + 3 = 0$$

$$x = 4 \text{ of } x = -3$$

c $x^2 + 7x = 8$

$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$(x + 8)(x - 1) = 0$$

$$x + 8 = 0 \text{ of } x - 1 = 0$$

$$x = -8 \text{ of } x = 1$$

f $3x^2 - 8x - 3 = 0$

$$a = 3, b = -8 \text{ en } c = -3$$

$$D = (-8)^2 - 4 \times 3 \times -3 = 100$$

$$x = \frac{8 + \sqrt{100}}{2 \times 3} \text{ of } x = \frac{8 - \sqrt{100}}{2 \times 3}$$

$$x = 3 \text{ of } x = -\frac{1}{3}$$

V8 a Bij f hoort 3, bij g hoort 1 en bij h hoort 2.

b Grafiek 1 heeft 1 snijpunt met de lijn $y = -10$, grafiek 2 heeft er geen en grafiek 3 heeft er 2.

c Grafiek 3 heeft geen snijpunt met de lijn $y = 10$.

11B.1 Gebroken vergelijkingen

intro Het vermogen van de magnetron is 800 watt, want $4000 : 800 = 5$.

1 a Als je x steeds verder van 0 kiest, nadert de waarde van $f(x)$ naar 0.

b $f(1000) = \frac{12}{1000} = 0,012$ en $f(-1000) = \frac{12}{-1000} = -0,012$

c Je kunt niet delen door 0.

- d Als je x steeds dichterbij 0 kiest, komt de waarde van $f(x)$ steeds verder van 0 te liggen.
- e $\frac{12}{x} = 12000$ geeft $x = \frac{12}{12000}$ dus
 $x = 0,001$

- 2 a Omdat $72 : 12 = 6$.

$$x - 5 = 12$$

$$x = 17$$

$$\text{b } \frac{72}{x-5} = 8 \qquad \frac{72}{x-5} = 144$$

$$x - 5 = 9$$

$$x = 14$$

$$x - 5 = 0,5$$

$$x = 5,5$$

- 3 a Er wordt links en rechts 2 afgetrokken.

- b Op het bordje moet het getal 9 staan omdat $\frac{45}{9} = 5$.

$$\text{c } \frac{45}{2p-7} = 3$$

$$2p - 7 = 15 \quad (\text{want } \frac{45}{15} = 3)$$

$$2p = 22$$

$$p = 11$$

$$4 \text{ a } \frac{18}{2x+1} = 2$$

$$2x + 1 = 9$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$$\text{d } \frac{45}{11-4x} + 7 = 12$$

$$\frac{45}{11-4x} = 5$$

$$11 - 4x = 9$$

$$4x = 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\text{b } \frac{-16}{6a-10} = -8$$

$$6a - 10 = 2$$

$$6a = 12$$

$$a = 2$$

$$\text{e } 18 + \frac{70}{3m+1} = 4$$

$$\frac{70}{3m+1} = -14$$

$$3m + 1 = -5$$

$$3m = -6$$

$$m = -2$$

$$\text{c } \frac{100}{-7+2p} = -4$$

$$-7 + 2p = -25$$

$$2p = -18$$

$$p = -9$$

$$\text{f } 1 - \frac{20}{4a} = 5$$

$$\frac{20}{4a} = -4$$

$$4a = -5$$

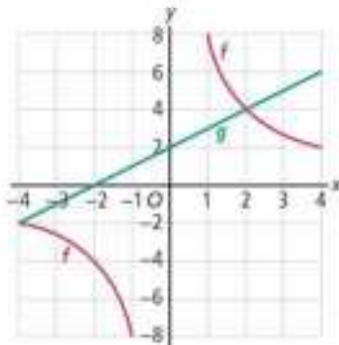
$$a = -1\frac{1}{4}$$

11B Vergelijkingen en ongelijkheden

5 a

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	-2,7	-4	-8	-	8	4	2,7	2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6



b De snijpunten zijn $(-4, -2)$ en $(2, 4)$.

$$f(-4) = \frac{8}{-4} = -2; g(-4) = -4 + 2 = -2, \text{ klopt}$$

$$f(2) = \frac{8}{2} = 4; g(2) = 2 + 2 = 4, \text{ klopt}$$

c $x \cdot \frac{8}{x} = \frac{x}{1} \cdot \frac{8}{x} = \frac{8x}{x} = \frac{8}{1} = 8$

d $8 = x^2 + 2x$
 $x^2 + 2x - 8 = 0$
 $(x + 4)(x - 2) = 0$
 $x + 4 = 0$ of $x - 2 = 0$
 $x = -4$ of $x = 2$

e ja

6 a $x - 2 = \frac{3}{x}$
 $x(x - 2) = x \cdot \frac{3}{x}$
 $x^2 - 2x = 3$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x - 3)(x + 1) = 0$
 $x - 3 = 0$ of $x + 1 = 0$
 $x = 3$ of $x = -1$

b $\frac{-40}{x - 12} = x + 2$
 $(x - 12) \cdot \frac{-40}{x - 12} = (x - 12)(x + 2)$
 $-40 = x^2 + 2x - 12x - 24$
 $0 = x^2 - 10x + 16$
 $(x - 2)(x - 8) = 0$
 $x - 2 = 0$ of $x - 8 = 0$
 $x = 2$ of $x = 8$

c $x + 7 = \frac{-9}{x - 3}$
 $(x - 3)(x + 7) = (x - 3) \cdot \frac{-9}{x - 3}$
 $x^2 - 3x + 7x - 21 = -9$
 $x^2 + 4x - 12 = 0$
 $(x + 6)(x - 2) = 0$
 $x + 6 = 0$ of $x - 2 = 0$
 $x = -6$ of $x = 2$

d $\frac{10}{x + 3} - 3 = -1$
 $\frac{10}{x + 3} = 2$
 $(x + 3) \cdot \frac{10}{x + 3} = 2(x + 3)$
 $10 = 2x + 6$
 $4 = 2x$
 $x = 2$

7 a Links en rechts 4 afgetrokken.

$$\begin{aligned}\text{b } x(x-6) &= -\frac{5}{x} \cdot x \\ x^2 - 6x &= -5 \\ x^2 - 6x + 5 &= 0 \\ (x-5)(x-1) &= 0 \\ x-5 &= 0 \text{ of } x-1 = 0 \\ x &= 5 \text{ of } x = 1\end{aligned}$$

$$\text{c A } x-1 = \frac{30}{x}$$

$$\begin{aligned}x(x-1) &= \frac{30}{x} \cdot x \\ x^2 - x &= 30 \\ x^2 - x - 30 &= 0 \\ (x-6)(x+5) &= 0 \\ x-6 &= 0 \text{ of } x+5 = 0 \\ x &= 6 \text{ of } x = -5\end{aligned}$$

$$\text{B } \frac{50}{x-1} = x-6$$

$$\begin{aligned}(x-1) \cdot \frac{50}{x-1} &= (x-6)(x-1) \\ 50 &= x^2 - x - 6x + 6 \\ x^2 - 7x - 44 &= 0 \\ (x-11)(x+4) &= 0 \\ x-11 &= 0 \text{ of } x+4 = 0 \\ x &= 11 \text{ of } x = -4\end{aligned}$$

$$\text{C } \frac{8}{x+3} = x-4$$

$$\begin{aligned}(x+3) \cdot \frac{8}{x+3} &= (x-4)(x+3) \\ 8 &= x^2 + 3x - 4x - 12 \\ x^2 - x - 20 &= 0 \\ (x-5)(x+4) &= 0 \\ x-5 &= 0 \text{ of } x+4 = 0 \\ x &= 5 \text{ of } x = -4\end{aligned}$$

$$\text{D } x-10 = -\frac{36}{x+2}$$

$$\begin{aligned}(x+2)(x-10) &= -\frac{36}{x+2} \cdot (x+2) \\ x^2 - 10x + 2x - 20 &= -36 \\ x^2 - 8x + 16 &= 0 \\ (x-4)(x-4) &= 0 \\ x-4 &= 0 \\ x &= 4\end{aligned}$$

8 a Op het moment dat de maaltijd in de diepvries wordt gelegd (op $u = 0$), is de maaltijd nog op kamertemperatuur.

$$T(0) = \frac{35}{0,5 \cdot 0 + 1} - 20 = 35 - 20 = 15$$

De kamertemperatuur is 15°C .

$$\text{b } \frac{35}{0,5u+1} - 20 = -10$$

$$\frac{35}{0,5u+1} = 10$$

$$(0,5u+1) \cdot \frac{35}{0,5u+1} = 10(0,5u+1)$$

$$35 = 5u + 10$$

$$25 = 5u$$

$$u = 5$$

Na 5 uur is de temperatuur van de maaltijd -10°C .

04 a Ze legt het bordje op $2k - 4$.

$$\text{b } 120 : 6 = 20$$

$$\text{c } 2k - 4 = 6$$

$$2k = 10$$

$$k = 5$$

11B Vergelijkingen en ongelijkheden

06 a Links en rechts wordt met $x - 1$ vermenigvuldigd.

$$b \quad \frac{16}{x-1} \cdot (x-1) = \frac{16}{x-1} \cdot \frac{x-1}{1} = \frac{16(x-1)}{x-1} = \frac{16}{1} = 16$$

$$c \quad \begin{aligned} x^2 + 5x - x - 5 &= 16 \\ x^2 + 4x - 21 &= 0 \\ (x+7)(x-3) &= 0 \\ x+7 &= 0 \text{ of } x-3 = 0 \\ x &= -7 \text{ of } x = 3 \end{aligned}$$

$$d \quad \begin{aligned} x(x+3) &= \frac{10}{x+3} \cdot (x+3) \\ x^2 + 3x &= 10 \\ x^2 + 3x - 10 &= 0 \\ (x+5)(x-2) &= 0 \\ x+5 &= 0 \text{ of } x-2 = 0 \\ x &= -5 \text{ of } x = 2 \end{aligned}$$

$$e \quad \begin{aligned} 9 &= \frac{27}{x+7} \\ 9(x+7) &= \frac{27}{x+7} \cdot (x+7) \\ 9x + 63 &= 27 \\ 9x &= -36 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

$$f \quad \begin{aligned} (x-1) \cdot \frac{-10}{x-1} &= (x-12)(x-1) \\ -10 &= x^2 - x - 12x + 12 \\ x^2 - 13x + 22 &= 0 \\ (x-2)(x-11) &= 0 \\ x-2 &= 0 \text{ of } x-11 = 0 \\ x &= 2 \text{ of } x = 11 \end{aligned}$$

$$g \quad \begin{aligned} (x-9)(x+7) &= \frac{-60}{x-9} \cdot (x-9) \\ x^2 + 7x - 9x - 63 &= -60 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x-3)(x+1) &= 0 \\ x-3 &= 0 \text{ of } x+1 = 0 \\ x &= 3 \text{ of } x = -1 \end{aligned}$$

U1 a Dré: $t = \frac{80}{v}$ met t in uren.

b Ed rijdt 4 km/uur sneller dus is zijn snelheid $v + 4$.

Ed komt één uur eerder aan. Daarom moet je om de tijden aan elkaar gelijk te stellen één uur optellen bij de tijd van Ed.

$$c \quad \begin{aligned} \frac{80}{v} - 1 &= \frac{80}{v+4} \\ v \cdot \left(\frac{80}{v} - 1 \right) &= v \cdot \frac{80}{v+4} \\ 80 - v &= \frac{80v}{v+4} \\ (v+4) \cdot (80-v) &= (v+4) \cdot \frac{80v}{v+4} \\ (v+4)(80-v) &= 80v \\ 80v - v^2 + 320 - 4v &= 80v \\ -v^2 - 4v + 320 &= 0 \\ v^2 + 4v - 320 &= 0 \\ (v+20)(v-16) &= 0 \\ v+20 &= 0 \text{ of } v-16 = 0 \\ v &= -20 \text{ of } v = 16 \end{aligned}$$

De oplossing is $v = 16$ ($v = -20$ valt hier natuurlijk af).

De gemiddelde snelheid van Dré is 16 km/uur en die van Ed is

$16 + 4 = 20$ km/uur.

U2 $2 + \frac{10}{x-1} = 2 - 2x$

$$\frac{10}{x-1} = -2x$$

$$(x-1) \cdot \frac{10}{x-1} = -2x(x-1)$$

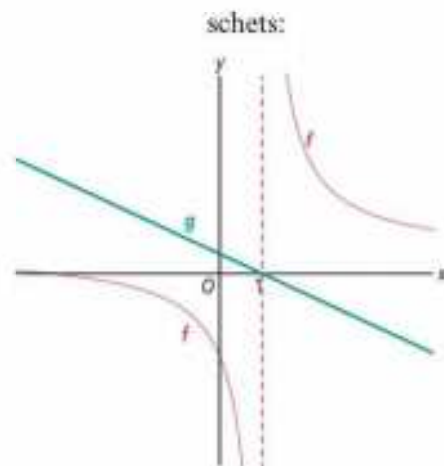
$$10 = -2x^2 + 2x$$

$$2x^2 - 2x + 10 = 0$$

$$x^2 - x + 5 = 0$$

$a = 1$, $b = -1$ en $c = 5$ geeft $D = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -19 < 0$.

De vergelijking heeft geen oplossingen, dus er zijn geen snijpunten.



11B.2 Exponentiële en wortelvergelijkingen

intro $\sqrt[16]{x} = 2$ geeft $\sqrt[8]{x} = 4$ en $\sqrt[4]{x} = 16$

$\sqrt[2]{x} = 256$ en $\sqrt{x} = 65\,536$ en $\sqrt{x} = 4\,294\,967\,296$

$\sqrt{x} = 1,84 \times 10^{19}$ dus $x = 3,40 \times 10^{38}$

Of: $x = \left(\left(\left(\left(\left((2^2)^2 \right)^2 \right)^2 \right)^2 \right)^2 \right)^2 = 2^{2^7} = 2^{128} \approx 3,40 \times 10^{38}$

- 9** a Na tien dagen zijn er $8000 \cdot 2^{10} \approx 8\,000\,000$ algen per m^3 water.
 b Links en rechts delen door 8000 geeft links 2^t en rechts $64\,000 : 8000 = 8$.
 c $8 = 2^3$
 d Na drie dagen is het aantal algen gegroeid tot 64 000.
 e $8000 \cdot 2^t = 256\,000$
 $2^t = 32$
 $2^t = 2^5$
 $t = 5$

- 10** a Links en rechts delen door 20 geeft links 3^x en rechts $1620 : 20 = 81$.

b

macht	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
uitkomst	3	9	27	81	243	729

- c** Hugo krijgt de oplossing $x = 4$.

- d** A $3^x = 729$
 $3^x = 3^6$
 $x = 6$
- C $5 + 3^x = 248$
 $3^x = 243$
 $3^x = 3^5$
 $x = 5$
- B $12 \cdot 3^x = 108$
 $3^x = 9$
 $3^x = 3^2$
 $x = 2$
- D $8 \cdot 3^{x-1} = 648$
 $3^{x-1} = 81$
 $3^{x-1} = 3^4$
 $x - 1 = 4$
 $x = 5$

11B Vergelijkingen en ongelijkheden

11 a $2^{4t} + 1 = 8$

macht	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
uitkomst	2	4	8	16	32	64

 $2^{4t} + 1 = 8$ kun je schrijven als $2^{4t} + 1 = 2^3$.

c $4t + 1 = 3$

$4t = 2$

$t = \frac{1}{2}$

d A $3 \cdot 2^{5-t} = 3072$

$2^{5-t} = 1024$

$2^{5-t} = 2^{10}$

$5 - t = 10$

$t = -5$

B $2^{2x} = 256$

$2^{2x} = 2^8$

$2x = 8$

$x = 4$

C $4 \cdot 2^b - 1000 = 1048$

$4 \cdot 2^b = 2048$

$2^b = 512$

$2^b = 2^9$

$b = 9$

D $256 : 2^{0,5t} = 4$

$2^{0,5t} = 64$

$2^{0,5t} = 2^6$

$0,5t = 6$

$t = 12$

12 a $4^{x-5} - 4 = 60$

$4^{x-5} = 64$

$4^{x-5} = 4^3$

$x - 5 = 3$

$x = 8$

b $4^{10a-25} = 1024$

$4^{10a-25} = 4^5$

$10a - 25 = 5$

$10a = 30$

$a = 3$

c $25 \cdot 4^{m+1} = 400$

$4^{m+1} = 16$

$4^{m+1} = 4^2$

$m + 1 = 2$

$m = 1$

d $2000 - 4^{2r} = -2096$

$4^{2r} = 4096$

$4^{2r} = 4^6$

$2r = 6$

$r = 3$

13 a $\sqrt{x-4}$ heeft alleen uitkomsten als $x - 4 \geq 0$.

Je kunt een functiewaarde berekenen bij $x \geq 4$.

b $f(85) = \sqrt{85-4} = \sqrt{81} = 9$

c $\sqrt{x-4} = 6$

$x - 4 = 36$

$x = 40$

14 a $\sqrt{5x+9} = 13$

$5x + 9 = 169$

$5x = 160$

$x = 32$

c $\frac{12}{\sqrt{x+9}} = 6$

$\sqrt{x+9} = 2$

$x + 9 = 4$

$x = -5$

b $\sqrt{4a-12} + 2 = 4$

$\sqrt{4a-12} = 2$

$4a - 12 = 4$

$4a = 16$

$a = 4$

d $8\sqrt{3p+2} = 40$

$\sqrt{3p+2} = 5$

$3p + 2 = 25$

$3p = 23$

$p = 7\frac{2}{3}$

$$\text{e } 100 - \sqrt{\frac{1}{2}d + 8} = 78$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}d + 8} = 22$$

$$\frac{1}{2}d + 8 = 484$$

$$\frac{1}{2}d = 476$$

$$d = 952$$

$$\text{f } \frac{\sqrt{4-4m}}{2} + 3 = 8$$

$$\frac{\sqrt{4-4m}}{2} = 5$$

$$\sqrt{4-4m} = 10$$

$$4 - 4m = 100$$

$$4m = -96$$

$$m = -24$$

$$\text{15 a } \sqrt{13h} = 63$$

$$13h = 3969$$

$$h = 305,307...$$

Je staat dan ongeveer 305 m hoog.

$$\text{b } \text{Neem } h = 2 \times 305 = 610 \text{ meter.}$$

$$\text{Dan is } a = \sqrt{13 \times 610} \approx 89 \text{ km.}$$

89 is niet twee keer zo veel als 63.

Nee, je kunt dan niet twee keer zo ver kijken.

$$\text{012 a } 57 + 7 = 64, \text{ klopt}$$

macht	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6
uitkomst	4	16	64	256	1024	4096

$$4^{t-1} = 64 \text{ kun je schrijven als } 4^{t-1} = 4^3.$$

$$\text{c } t - 1 = 3 \text{ dus de oplossing is } t = 4.$$

$$\text{d } 4^{8-2t} = 1024$$

$$4^{8-2t} = 4^5$$

$$8 - 2t = 5$$

$$2t = 3$$

$$t = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{e } 4^{x+2} + 100 = 356$$

$$4^{x+2} = 256$$

$$4^{x+2} = 4^4$$

$$x + 2 = 4$$

$$x = 2$$

$$\text{f } 10 \cdot 4^{4b} = 160$$

$$4^{4b} = 16$$

$$4^{4b} = 4^2$$

$$4b = 2$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$\text{g } 4000 - 4^{3q} = -96$$

$$4^{3q} = 4096$$

$$4^{3q} = 4^6$$

$$3q = 6$$

$$q = 2$$

$$\text{014 a } \text{Bart legt het bordje op } 3q + 100.$$

$$\text{b } 121 = 11^2$$

$$\text{c } 3q + 100 = 121$$

$$3q = 21$$

$$q = 7$$

11B Vergelijkingen en ongelijkheden

U3 $f(0) = \frac{9}{\sqrt{9-0}} - 9 = 3 - 9 = -6$ dus het snijpunt met de verticale as is $A(0, -6)$.

$$f(x) = 0 \text{ geeft } \frac{9}{\sqrt{9-x}} - 9 = 0$$

$$\frac{9}{\sqrt{9-x}} = 9$$

$$\sqrt{9-x} = 1$$

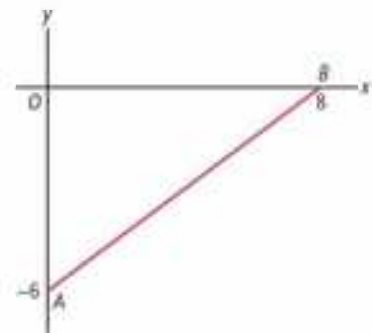
$$9-x = 1$$

$$x = 8$$

Het snijpunt met de horizontale as is $B(8, 0)$.

zijde	kwadraat
$OA = 6$	36
$OB = 8$	64 +
$AB = \dots$	100

$$AB = \sqrt{100} = 10$$



U4 a De groeifactor van het aantal blauwe driehoekjes is 3.

De beginwaarde bij $n = 0$ is dan $1 : 3 = \frac{1}{3}$.

Een formule voor het aantal blauwe driehoekjes is dan $A = \frac{1}{3} \cdot 3^n$.

b $\frac{1}{3} \cdot 3^n = 729$

$$3^n = 2187$$

$$3^n = 3^7$$

$$n = 7$$

11B.3 Parabool en lijn

intro $h = 0$ geeft $-0,0075a^2 + 1,35a = 0$

$$a(-0,0075a + 1,35) = 0$$

$$a = 0 \text{ of } -0,0075a + 1,35 = 0$$

$$a = 0 \text{ of } a = 180$$

De top ligt bij $a = (0 + 180) : 2 = 90$.

$$h(90) = -0,0075 \times 90^2 + 1,35 \times 90 = -60,75 + 121,5 = 60,75$$

Het hoogste punt van de brug is 60,75 meter.

Bij de rode lijn past het beste de vergelijking $h(a) = 40$, dus C.

16 a $4 - x^2 = 1 - 0,5x$

$$-x^2 + 0,5x + 3 = 0$$

$$x^2 - 0,5x - 3 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1,5) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ of } x + 1,5 = 0$$

$$x = 2 \text{ of } x = -1,5$$

b $f(2) = 4 - 2^2 = 0$ dus $y = 0$

$$f(-1,5) = 4 - (-1,5)^2 = 1,75 \text{ dus } y = 1,75$$

c $g(2) = 1 - 0,5 \times 2 = 0$, klopt

$$g(-1,5) = 1 - 0,5 \times -1,5 = 1,75$$
, klopt

d De snijpunten zijn $(2, 0)$ en $(-1,5; 1,75)$.

17 a $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = 2x - 5$

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x - 2)(x - 6) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ of } x - 6 = 0$$

$$x = 2 \text{ of } x = 6$$

Invullen geeft $g(2) = 2 \times 2 - 5 = 4 - 5 = -1$ en $g(6) = 2 \times 6 - 5 = 12 - 5 = 7$.

Controle: $f(2) = \frac{1}{2} \times 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 2 - 4 + 1 = -1$ en

$f(6) = \frac{1}{2} \times 6^2 - 2 \times 6 + 1 = 18 - 12 + 1 = 7$ en dat klopt.

De snijpunten zijn $(2, -1)$ en $(6, 7)$.

b $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = 5\frac{1}{2} - 2x$

$$\frac{1}{2}x^2 = 4\frac{1}{2}$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \text{ of } x = -3$$

Invullen geeft $g(3) = 5\frac{1}{2} - 2 \times 3 = -\frac{1}{2}$ en $g(-3) = 5\frac{1}{2} - 2 \times -3 = 11\frac{1}{2}$.

Controle: $f(3) = \frac{1}{2} \times 3^2 - 2 \times 3 + 1 = -\frac{1}{2}$ en $f(-3) = \frac{1}{2} \times (-3)^2 - 2 \times -3 + 1 = 11\frac{1}{2}$ en dat klopt.

De snijpunten zijn $(3, -\frac{1}{2})$ en $(-3, 11\frac{1}{2})$.

18 a $x^2 - 2x = 24 - 4x$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(x + 6)(x - 4) = 0$$

$$x + 6 = 0 \text{ of } x - 4 = 0$$

$$x = -6 \text{ of } x = 4$$

Invullen geeft $g(-6) = 24 - 4 \times -6 = 48$ en $g(4) = 24 - 4 \times 4 = 8$.

Controle: $f(-6) = (-6)^2 - 2 \times -6 = 48$ en $f(4) = 4^2 - 2 \times 4 = 8$ en dat klopt.

De snijpunten zijn $(-6, 48)$ en $(4, 8)$.

b $x(x + 2) = 2x + 9$

$$x^2 + 2x = 2x + 9$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \text{ of } x = -3$$

Invullen geeft $g(3) = 2 \times 3 + 9 = 15$ en $g(-3) = 2 \times -3 + 9 = 3$.

Controle: $f(3) = 3 \times (3 + 2) = 15$ en $f(-3) = -3 \times (-3 + 2) = 3$ en dat klopt. De snijpunten zijn $(3, 15)$ en $(-3, 3)$.

c $2x^2 + 4x - 5 = x - 3$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$a = 2$, $b = 3$ en $c = -2$ geeft $D = 3^2 - 4 \times 2 \times -2 = 9 + 16 = 25$.

$$x = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times 2} \text{ of } x = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

Invullen geeft $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 3 = -2\frac{1}{2}$ en $g(-2) = -2 - 3 = -5$.

Controle: $f(\frac{1}{2}) = 2 \times (\frac{1}{2})^2 + 4 \times \frac{1}{2} - 5 = -2\frac{1}{2}$ en $f(-2) = 2 \times (-2)^2 + 4 \times -2 - 5 = -5$ en dat klopt.

De snijpunten zijn $(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2})$ en $(-2, -5)$.

11B Vergelijkingen en ongelijkheden

19 a $4x^2 - 10x + 7 = 2x - 2$

b $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$a = 4$, $b = -12$ en $c = 9$ geeft $D = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 0$.

$D = 0$, dus één oplossing: $x = \frac{12 + \sqrt{0}}{2 \times 4} = 1\frac{1}{2}$

c $D = 0$ dus de vergelijking heeft maar één oplossing.

d $g(1\frac{1}{2}) = 2 \times 1\frac{1}{2} - 2 = 1$

Het gemeenschappelijk punt is $(1\frac{1}{2}, 1)$.

20 a $-x^2 + x = 2x - 2$

$-x^2 - x + 2 = 0$

b $a = -1$, $b = -1$ en $c = 2$ geeft $D = (-1)^2 - 4 \times -1 \times 2 = 1 + 8 = 9$

c $D > 0$ dus de grafieken van f en g snijden elkaar.

21 a $x^2 - 6x + 6 = -\frac{1}{2}x - 2$

$x^2 - 5\frac{1}{2}x + 8 = 0$

$a = 1$, $b = -5\frac{1}{2}$ en $c = 8$ geeft $D = (-5\frac{1}{2})^2 - 4 \times 1 \times 8 = 30\frac{1}{4} - 32 = -1\frac{3}{4}$.

$D < 0$ dus de grafieken hebben geen punt gemeenschappelijk.

b $2x^2 + 4x + 5 = 2 - x$

$2x^2 + 5x + 3 = 0$

$a = 2$, $b = 5$ en $c = 3$ geeft $D = 5^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1$.

$D > 0$ dus de grafieken snijden elkaar.

c $-x^2 - 2,5x = 1,5x + 4$

$-x^2 - 4x - 4 = 0$

$a = -1$, $b = -4$ en $c = -4$ geeft $D = (-4)^2 - 4 \times -1 \times -4 = 16 - 16 = 0$.

$D = 0$ dus de grafieken raken elkaar.

22 $3x^2 - 6x = -x - 2$

$3x^2 - 5x + 2 = 0$

$a = 3$, $b = -5$ en $c = 2$ geeft $D = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1$.

$D > 0$ dus de grafieken hebben twee snijpunten en raken elkaar dus niet.

017 a $x^2 = 5x + 6$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$(x - 6)(x + 1) = 0$

$x - 6 = 0$ of $x + 1 = 0$

$x = 6$ of $x = -1$

b $f(-1) = (-1)^2 = 1$ en $f(6) = 6^2 = 36$

c $g(-1) = 5 \times -1 + 6 = -5 + 6 = 1$, klopt

$g(6) = 5 \times 6 + 6 = 30 + 6 = 36$, klopt

d $x^2 = -8x$

$x^2 + 8x = 0$

$x(x + 8) = 0$

$x = 0$ of $x + 8 = 0$

$x = 0$ of $x = -8$

$f(0) = 0^2 = 0$ en $f(-8) = (-8)^2 = 64$

Controle: $y = -8 \times 0 = 0$, klopt en $y = -8 \times -8 = 64$, klopt

De snijpunten zijn $(0, 0)$ en $(-8, 64)$.

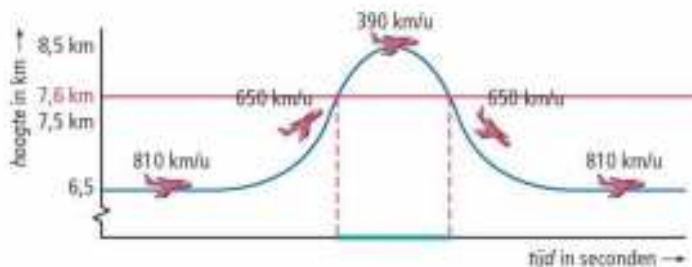
- 021** a $x^2 + 7 = 6x - 2$
 b $x^2 - 6x + 9 = 0$
 $a = 1, b = -6$ en $c = 9$ geeft $D = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0$.
 c Omdat $D = 0$ heeft de vergelijking één oplossing.
 d De grafieken raken elkaar.

U5 Ja, een verticale lijn snijdt een parabool in slechts één punt maar raakt de parabool niet.

- U6** a $2 - \frac{1}{2}x^2 = p - x$
 $-\frac{1}{2}x^2 + x + 2 - p = 0$
 $a = -\frac{1}{2}, b = 1$ en $c = 2 - p$ geeft $D = 1^2 - 4 \times -\frac{1}{2} \times (2 - p)$,
 ofwel $D = 1 + 2(2 - p)$ dus $D = 5 - 2p$.
 b Als $D = 0$ raken de parabool en de lijn elkaar.
 $5 - 2p = 0$ geeft $p = 2\frac{1}{2}$.
 c $p = 2\frac{1}{2}$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x - 1)(x - 1) = 0$
 $x - 1 = 0$
 $x = 1$ en $y = 2\frac{1}{2} - 1 = 1\frac{1}{2}$
 Het raakpunt is $(1, 1\frac{1}{2})$.

11B.4 Intervallen

intro



- 23** a $2x + 1 = 17 - 3x$
 $5x + 1 = 17$
 $5x = 16$
 $x = 3\frac{1}{5}$
 oplossing: $x \geq 3\frac{1}{5}$
 b Op de puntjes moet $3\frac{1}{5}$ staan.
 c Een dicht rondje betekent dat het getal onder het rondje meegerekend moet worden.
 d De oplossing schrijf je in de intervalnotatie als $[3\frac{1}{5}, \rightarrow)$.

	ongelijkheidsnotatie	intervalnotatie
A	$x \leq 5$	$\langle \leftarrow, 5]$
B	$x > 1,2$	$\langle 1, 2; \rightarrow$
C	$x \geq -3,6$	$[-3, 6; \rightarrow)$
D	$x < 8$	$\langle \leftarrow, 8)$

11B Vergelijkingen en ongelijkheden

- 25** a $\langle 13, \rightarrow \rangle$ c $\langle \leftarrow, -2,5 \rangle$
 b $[-5, \rightarrow \rangle$ d $\langle \leftarrow, 20 \rangle$
- 26** a $\langle 2, 6 \rangle$
 b In dit interval liggen bijvoorbeeld $x = 3$ en $x = 4$.
 c $2 < 3$ en $2 < 4$, klopt.
 d Omdat op het interval geldt dat $2 < x$ en $x \leq 6$, kun je het interval in de ongelijkheidsnotatie schrijven als $2 < x \leq 6$.
- 27** a $f(x) = g(x)$ geldt bij $x = -1$ en $x = 4$.
 b De oplossing van $f(x) \leq g(x)$ is $[-1, 4]$.
 c Er zijn twee losse stukken grafiek van f die hoger liggen dan de grafiek van g .
 d Je kunt de oplossing $x < -1$ of $x > 4$ ook in de intervalnotatie schrijven als $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ en $\langle 4, \rightarrow \rangle$.

28 a

	ongelijkheidsnotatie	intervalnotatie
A	$x \leq -3$ of $x > 9$	$\langle \leftarrow, -3 \rangle \cup \langle 9, \rightarrow \rangle$
B	$1,5 \leq x < 6$	$[1,5; 6 \rangle$

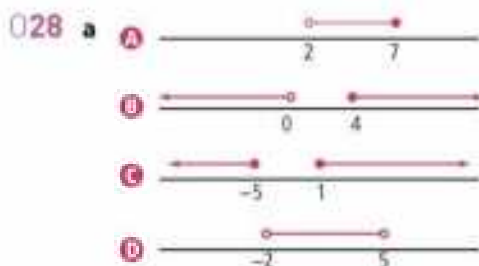
- b A $\langle 2, 14 \rangle$ C $\langle \leftarrow, -5 \rangle \cup [10, \rightarrow \rangle$
 B $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup [3, \rightarrow \rangle$ D $[-3; 2,5 \rangle$

29

	ongelijkheidsnotatie	intervalnotatie
A	$-4 < x \leq 4$	$\langle -4, 4 \rangle$
B	$x \leq 22$	$\langle \leftarrow, 22 \rangle$
C	$x > -31$	$\langle -31, \rightarrow \rangle$
D	$x < 0$ of $x > 0$	$\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$
E	$x \leq -12$ of $x > 15$	$\langle \leftarrow, -12 \rangle \cup \langle 15, \rightarrow \rangle$

- 30** a $x < 2$ of $x > 5$ ofwel $\langle \leftarrow, 2 \rangle \cup \langle 5, \rightarrow \rangle$
 b $2 \leq x \leq 5$ ofwel $[2, 5]$
 c $x < 1$ of $x > 7$ ofwel $\langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 7, \rightarrow \rangle$
 d $1 < x < 7$ ofwel $\langle 1, 7 \rangle$
 e $x \geq 5$ ofwel $[5, \rightarrow \rangle$
 f $x < 2$ ofwel $\langle \leftarrow, 2 \rangle$

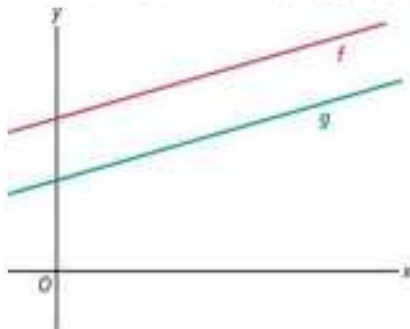
- 31** a $x < 1$ of $x > 1$ c geen enkele waarde van x
 b $\mathbb{R}$ d $x = 1$



- b A $\langle -2, 7] \quad C \langle \leftarrow, -5] \cup [1, \rightarrow \rangle$
 B $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup [4, \rightarrow \rangle \quad D \langle -2, 5 \rangle$
 c Bij interval A horen de getallen tussen 3 en 10 waarbij 3 niet mee telt en 10 wel mee telt.
 d $3 < x \leq 10$
 e Voor interval B geldt $x \leq -1$ of $x > 6$.
 f A $\langle 3, 10] \quad B \langle \leftarrow, -1] \cup \langle 6, \rightarrow \rangle$

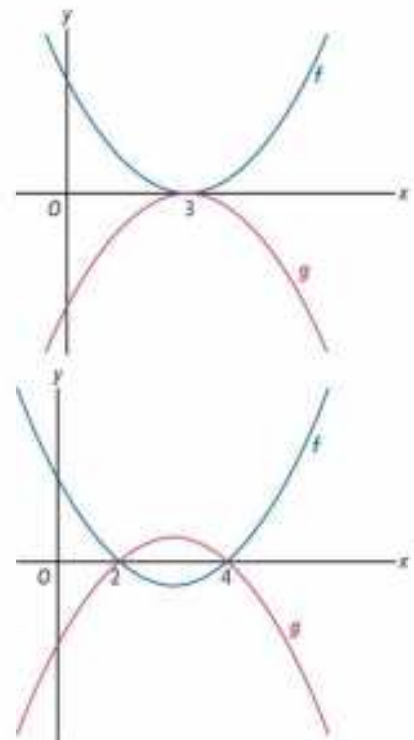
- 030** a De snijpunten zitten bij $x = -4$ en $x = 1$.
 b De x -coördinaten tellen wel mee bij de oplossing.
 c Je kijkt waar de grafiek van f hoger ligt dan de grafiek van g .
 d De oplossing van $f(x) \geq g(x)$ is $-4 \leq x \leq 1$ en geschreven in intervalnotatie $[-4, 1]$.

- U7** a $f(x) < g(x)$ heeft geen oplossing als de twee grafieken evenwijdig lopen waarbij de grafiek van f hoger ligt dan die van g . Bijvoorbeeld:



- b In dat geval is de oplossing van $f(x) > g(x)$ gelijk aan $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$ ofwel $\mathbb{R}$.

- U8** a Met $q = 0$ is $f(x) = (x - 3)^2$ en $g(x) = -(x - 3)^2$.
 $f(x) = g(x)$ geeft $(x - 3)^2 = -(x - 3)^2$.
 $x - 3 = 0$ dus $x = 3$
 Zie de schets hiernaast.
 De oplossing van $f(x) > g(x)$ is $\langle \leftarrow, 3 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$.



- b Met $q = -1$ is $f(x) = (x - 3)^2 - 1$ en $g(x) = -(x - 3)^2 + 1$.
 $f(x) = g(x)$ geeft $(x - 3)^2 - 1 = -(x - 3)^2 + 1$.
 $2(x - 3)^2 = 2$
 $(x - 3)^2 = 1$
 $x - 3 = -1$ of $x - 3 = 1$
 $x = 2$ of $x = 4$
 $f(2) = (2 - 3)^2 - 1 = 0$ en $f(4) = (4 - 3)^2 - 1 = 0$
 De snijpunten zijn $(2, 0)$ en $(4, 0)$.
 Zie de schets hiernaast.
 De oplossing van $f(x) \geq g(x)$ is $\langle \leftarrow, 2] \cup [4, \rightarrow \rangle$.

- c In dat geval ligt de grafiek van f voor elke waarde van x hoger dan de grafiek van g , en snijden ze elkaar dus ook niet.
 Dat is het geval voor $q > 0$.

11B Vergelijkingen en ongelijkheden

11B.5 Kwadratische ongelijkheden

intro Bij welke prijs de parabool hoger ligt dan rechte lijn maakt Brenda winst.

32 a $x^2 - 10 = -x - 4$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x + 3 = 0 \text{ of } x - 2 = 0$$

$$x = -3 \text{ of } x = 2$$

b De grafieken in de schets horen bij de functies $f(x) = x^2 - 10$ en $g(x) = -x - 4$.

c De grafiek van f ligt lager dan die van g bij waarden van x die liggen tussen -3 en 2 .

d De oplossing is $\langle -3, 2 \rangle$.

33 a $x^2 - 3x = x - 3$

b $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

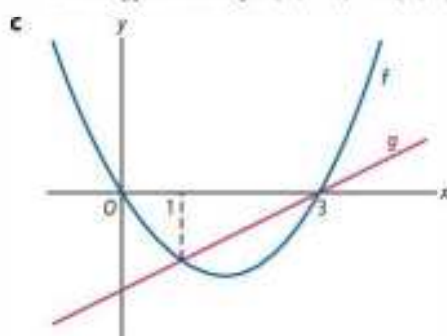
$$x - 3 = 0 \text{ of } x - 1 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = 1$$

$$f(1) = 1^2 - 3 \times 1 = -2 \text{ en } f(3) = 3^2 - 3 \times 3 = 0$$

$$\text{Controle: } g(1) = 1 - 3 = -2, \text{ klopt en } g(3) = 3 - 3 = 0, \text{ klopt}$$

De snijpunten zijn $(1, -2)$ en $(3, 0)$.



d De oplossing is $\langle 1, 3 \rangle$.

34 De oplossing is $\langle -2, 1 \rangle$.

35 a $2x^2 = 4x + 6$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ of } x + 1 = 0$$

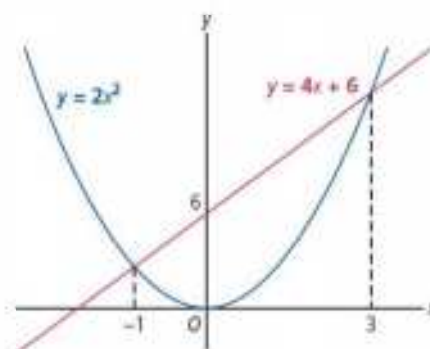
$$x = 3 \text{ of } x = -1$$

$$y = 2 \times 3^2 = 18 \text{ of } y = 2 \times (-1)^2 = 2$$

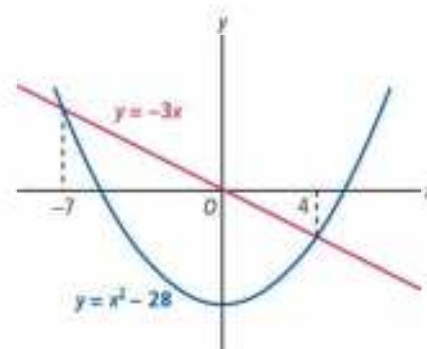
De snijpunten zijn $(3, 18)$ en $(-1, 2)$.

Zie de schets hiernaast.

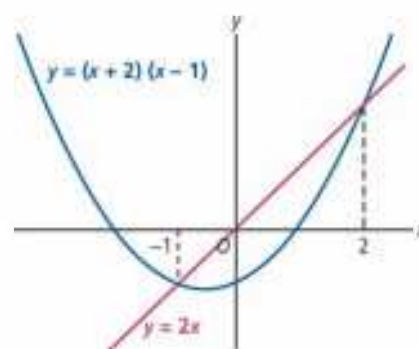
De oplossing is $\langle -1, 3 \rangle$.



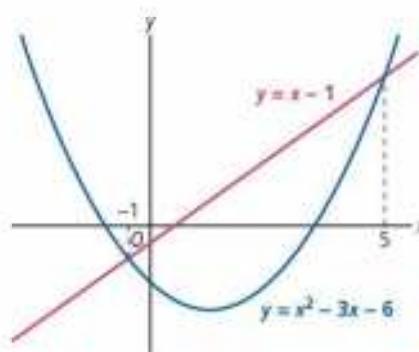
- b** $x^2 - 28 = -3x$
 $x^2 + 3x - 28 = 0$
 $(x + 7)(x - 4) = 0$
 $x + 7 = 0$ of $x - 4 = 0$
 $x = -7$ of $x = 4$
 $y = -3 \times -7 = 21$ of $y = -3 \times 4 = -12$
 De snijpunten zijn $(-7, 21)$ en $(4, -12)$.
 Zie de schets hiernaast.
 De oplossing is $\langle \leftarrow, -7 \rangle \cup [4, \rightarrow)$.



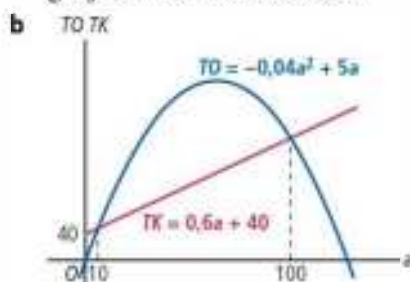
- c** $(x + 2)(x - 1) = 2x$
 $x^2 - x + 2x - 2 = 2x$
 $x^2 - x - 2 = 0$
 $(x - 2)(x + 1) = 0$
 $x - 2 = 0$ of $x + 1 = 0$
 $x = 2$ of $x = -1$
 $y = 2 \times 2 = 4$ of $y = 2 \times -1 = -2$
 De snijpunten zijn $(2, 4)$ en $(-1, -2)$.
 Zie de schets hiernaast.
 De oplossing is $[-1, 2]$.



- d** $x^2 - 3x - 6 = x - 1$
 $x^2 - 4x - 5 = 0$
 $(x + 1)(x - 5) = 0$
 $x + 1 = 0$ of $x - 5 = 0$
 $x = -1$ of $x = 5$
 $y = -1 - 1 = -2$ of $y = 5 - 1 = 4$
 De snijpunten zijn $(-1, -2)$ en $(5, 4)$.
 Zie de schets hiernaast.
 De oplossing is $\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 5, \rightarrow)$.



- 36 a** $-0,04a^2 + 5a = 0,6a + 40$
 $-0,04a^2 + 4,4a - 40 = 0$
 $a^2 - 110a + 1000 = 0$
 $(a - 10)(a - 100) = 0$
 $a - 10 = 0$ of $a - 100 = 0$
 $a = 10$ of $a = 100$
 Bij 100 tomatenplanten en bij 1000 tomatenplanten is de totale opbrengst gelijk aan de totale kosten.



Er is winst als $TO > TK$, dus als het aantal tomatenplanten tussen 100 en 1000 ligt.

11B Vergelijkingen en ongelijkheden

37 a De uitkomst van x^2 is altijd minstens 0, dus kan $x^2 < -4$ geen oplossingen hebben.

b A bij F, B bij H, C bij E en D bij G

38 a $x^2 = 49$

$$x = -7 \text{ of } x = 7$$

De oplossing is $\langle \leftarrow, -7 \rangle \cup \langle 7, \rightarrow \rangle$.

b $0,5x^2 = 18$

$$x^2 = 36$$

$$x = -6 \text{ of } x = 6$$

De oplossing is $\langle -6, 6 \rangle$.

c De uitkomst van x^2 is altijd minstens 0,

dus de uitkomst van $x^2 + 4$ is altijd minstens 4. Er is geen oplossing.

d $3x^2 = 75$

$$x^2 = 25$$

$$x = -5 \text{ of } x = 5$$

De oplossing is $\langle \leftarrow, -5 \rangle \cup [5, \rightarrow \rangle$.

e Voor elke waarde van $x \neq 0$ is

$$3x^2 > 0, \text{ dus } 2 - 3x^2 < 2.$$

De oplossing is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$

f Voor elke waarde van x is

$$(x + 2)^2 \geq 0, \text{ dus } (x + 2)^2 \geq -4.$$

De oplossing is $\mathbb{R}$.

39 a $3x + 10 = -2$

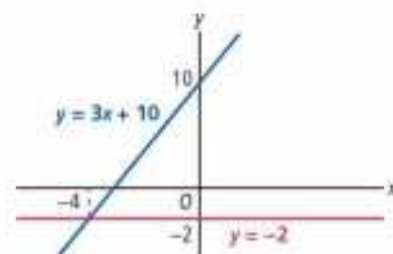
$$3x = -12$$

$$x = -4$$

Het snijpunt is $(-4, -2)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\langle -4, \rightarrow \rangle$.



b $x^2 - 4x - 12 = 0$

$$(x - 6)(x + 2) = 0$$

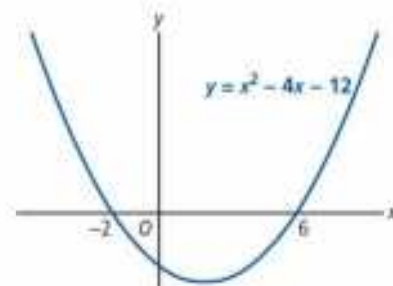
$$x - 6 = 0 \text{ of } x + 2 = 0$$

$$x = 6 \text{ of } x = -2$$

De snijpunten zijn $(6, 0)$ en $(-2, 0)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\langle \leftarrow, -2 \rangle \cup [6, \rightarrow \rangle$.



c $x(x + 2) + 3 = 1$

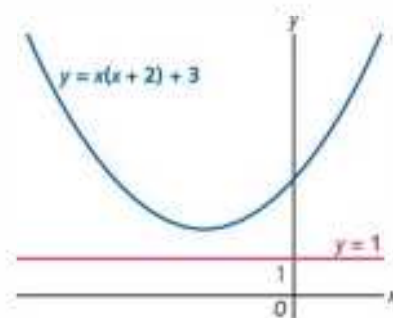
$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$a = 1, b = 2 \text{ en } c = 2 \text{ geeft } D = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4$$

$D < 0$ dus de vergelijking heeft geen oplossing.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\mathbb{R}$.



d $-x^2 + 2x + 3 = 4$

$$-x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)(x - 1) = 0$$

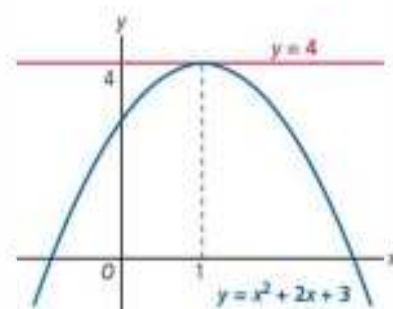
$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

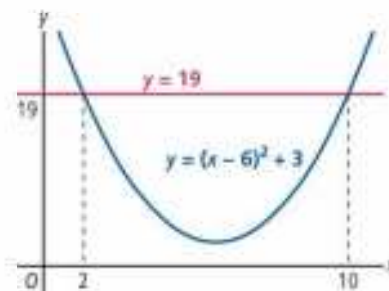
Het gemeenschappelijke punt is $(1, 4)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\mathbb{R}$.

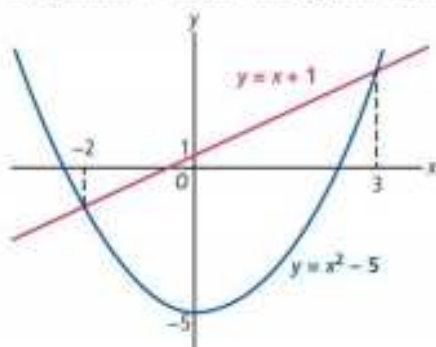


- e Voor elke waarde van x is $x^2 \geq 0$, dus $2x^2 + 1 \geq 1$.
Dus voor geen enkele waarde van x is $2x^2 + 1 < -1$.
Er is geen oplossing.
- f $(x - 6)^2 + 3 = 19$
 $(x - 6)^2 = 16$
 $x - 6 = -4$ of $x - 6 = 4$
 $x = 2$ of $x = 10$
De snijpunten zijn $(2, 19)$ en $(10, 19)$.
Zie de schets hiernaast.
De oplossing is $[2, 10]$.



- 033 a $x^2 - 4x = -x$
 $x^2 - 3x = 0$
 $x(x - 3) = 0$
 $x = 0$ of $x - 3 = 0$
 $x = 0$ of $x = 3$
- b De oplossing van de ongelijkheid is $x < 0$ of $x > 3$ of in intervalnotatie geschreven $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$.

- 035 a $x^2 - 5 = x + 1$
 $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x - 3)(x + 2) = 0$
 $x - 3 = 0$ of $x + 2 = 0$
 $x = 3$ of $x = -2$
 $y = 3 + 1 = 4$ of $y = -2 + 1 = -1$
De snijpunten zijn $(3, 4)$ en $(-2, -1)$.
- b De grafiek van f is een dalparabool die de y -as snijdt in $(0, -5)$.
- c De grafiek van g is een stijgende lijn die de y -as snijdt in $(0, 1)$.
- d



- e Bij de waarden vanaf -2 tot en met 3 ligt de grafiek van f lager dan of even hoog als de grafiek van g .
- f De oplossing van de ongelijkheid geschreven in de intervalnotatie is $[-2, 3]$.

- U9 De grafiek van h is een bergparabool.
 $h(x) > 0$ heeft dan geen oplossingen als de parabool de horizontale as niet snijdt, dus als de vergelijking $-2x^2 + px - 8 = 0$ geen oplossingen heeft.
 $a = -2$, $b = p$ en $c = -8$ geeft $D = p^2 - 4 \times -2 \times -8 = p^2 - 64$
De vergelijking heeft geen oplossingen als $D < 0$.
 $p^2 - 64 < 0$
 $p^2 - 64 = 0$ geeft $p = -8$ of $p = 8$
 $D < 0$ als $-8 < p < 8$

11B Vergelijkingen en ongelijkheden

- U10** Omdat de oplossing van de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ gelijk is aan $0 < x < 1$, moet gelden $f(0) = g(0)$ en $f(1) = g(1)$.
- $$f(0) = 2 \times 0^2 - 4 \times 0 + q = q$$
- $$g(0) = -2 \times 0 + 2 = 2$$
- dus $q = 2$.
- $$f(1) = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 + q = -2 + q$$
- $$g(1) = -2 \times 1 + 2 = 0$$
- $$-2 + q = 0 \text{ geeft ook } q = 2.$$
- Voor $q = 2$ is de oplossing $0 < x < 1$.

11B.6 Machtsvergelijkingen en -ongelijkheden

intro B De raket gaat steeds sneller.

- 40 a** Functie f hoort bij grafiek 1.
 Functie g hoort bij grafiek 3.
 Functie h hoort bij grafiek 4.
 Functie i hoort bij grafiek 2.
- b** De grafieken 1 en 4 hebben één snijpunt met de lijn $y = 4$,
 de grafieken 2 en 3 hebben twee snijpunten met de lijn $y = 4$.
- 41 a** De grafiek van f heeft één snijpunt met de lijn $y = -64$.
- b** $x^3 = -64$
 $x = \sqrt[3]{-64} = -4$
- c** De vergelijking $x^4 = 16$ heeft twee oplossingen.
- d** $2^4 = 16$ en $(-2)^4 = 16$, dus $x = 2$ of $x = -2$
- e** De uitkomst van x^4 is altijd minstens 0.
- f** n is even en $c < 0$.
- 42 a** $3x^6 = 192$
 $x^6 = 64$
 $x = 2$ of $x = -2$
- b** $2p^5 = -64$
 $p^5 = -32$
 $p = -2$
- c** $120 - a^3 = 56$
 $a^3 = 64$
 $a = 4$
- d** $100 - x^4 = 181$
 $x^4 = -81$
 geen oplossing
- e** $x^5 + 4 = 36$
 $x^5 = 32$
 $x = 2$
- f** $300 - t^4 = 219$
 $t^4 = 81$
 $t = -3$ of $t = 3$
- 43 a** Omdat de exponent 3 oneven is.
- b** $\sqrt[3]{20} \approx 2,71$
- c** $x = -2,11$ of $x = 2,11$
- 44 a** $2x^3 = 200$
 $x^3 = 100$
 $x = \sqrt[3]{100} \approx 4,64$
- b** $1000x^4 = 0,1$
 $x^4 = 0,0001$
 $x = \sqrt[4]{0,0001} = -0,1$ of
 $x = \sqrt[4]{0,0001} = 0,1$

$$\begin{aligned} \text{c } 100 - 5x^6 &= 100 \\ 5x^6 &= 0 \\ x^6 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 0,5x^7 + 100 &= 50 \\ 0,5x^7 &= -50 \\ x^7 &= -100 \\ x &= \sqrt[7]{-100} \approx 1,93 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } 10x^8 + 650 &= 350 \\ 10x^8 &= -300 \\ x^8 &= -30 \\ \text{geen oplossing} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } 1000 - 2,5x^5 &= 1250 \\ 2,5x^5 &= -250 \\ x^5 &= -100 \\ x &= \sqrt[5]{-100} \approx -2,51 \end{aligned}$$

- 45 a** Schets A hoort bij de ongelijkheid $0,5x^4 > 648$.
Schets B hoort bij de ongelijkheid $2x^3 \leq 250$.

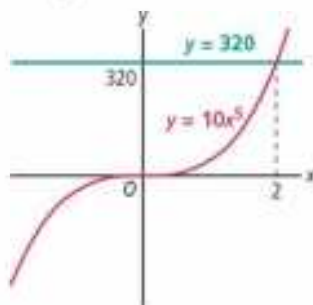
$$\begin{aligned} \text{b } 2x^3 &= 250 \\ x^3 &= 125 \\ x &= \sqrt[3]{125} = 5 \end{aligned}$$

c De oplossing is $\langle \leftarrow, 5 \rangle$.

$$\begin{aligned} \text{d } 0,5x^4 &= 648 \\ x^4 &= 1296 \\ x &= -\sqrt[4]{1296} = -6 \text{ of } x = \sqrt[4]{1296} = 6 \end{aligned}$$

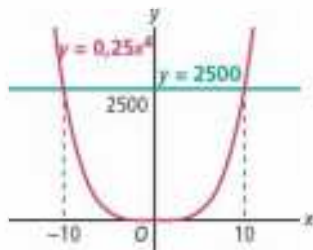
e De oplossing is $\langle \leftarrow, -6 \rangle \cup \langle 6, \rightarrow \rangle$.

$$\begin{aligned} \text{46 a } 10x^5 &= 320 \\ x^5 &= 32 \\ x &= \sqrt[5]{32} = 2 \end{aligned}$$



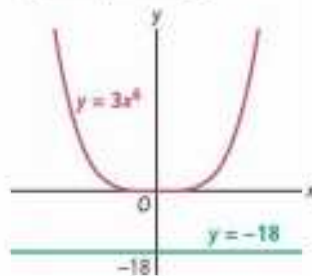
De oplossing is $\langle 2, \rightarrow \rangle$.

$$\begin{aligned} \text{b } 0,25x^4 &= 2500 \\ x^4 &= 10\,000 \\ x &= -10 \text{ of } x = 10 \end{aligned}$$



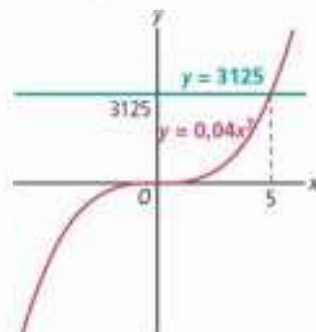
De oplossing is $[-10, 10]$.

$$\begin{aligned} \text{c } 3x^6 &= -18 \\ x^6 &= -3 \\ \text{geen oplossing} \end{aligned}$$



De oplossing is $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{d } 0,04x^7 &= 3125 \\ x^7 &= 78\,125 \\ x &= \sqrt[7]{78\,125} = 5 \end{aligned}$$



De oplossing is $\langle \leftarrow, 5 \rangle$.

11B Vergelijkingen en ongelijkheden

- 042** a Op het bordje moet 64 staan, want $2 \times 64 = 128$.
 b $x^3 = 64$
 $x = 4$ want $4^3 = 64$.
 c Op het bordje moet 625 staan, want $750 - 625 = 125$.
 d $x^4 = 625$
 $x = -5$ of $x = 5$ want $(-5)^4 = 625$ en $5^4 = 625$.
 e $1100 - x^3 = 100$ g $2x^5 = -64$
 $x^3 = 1000$ $x^5 = -32$
 $x = 10$ $x = -2$
 f $2x^4 = 162$ h $8x^6 + 10 = 18$
 $x^4 = 81$ $8x^6 = 8$
 $x = -3$ of $x = 3$ $x^6 = 1$
 $x = -1$ of $x = 1$
- 045** a $2x^6 = 128$
 $x^6 = 64$
 $x = -\sqrt[6]{64} = -2$ of $x = \sqrt[6]{64} = 2$
 b Ze tellen wel mee omdat in de ongelijkheid het teken $\leq$ staat.
 c De grafiek van f ligt lager dan of even hoog als die van g voor $-2 \leq x \leq 2$.
 d De oplossing van de ongelijkheid geschreven in de intervalnotatie is $[-2, 2]$.
- U11** $8 \text{ liter} = 8 \text{ dm}^3 = 8000 \text{ cm}^3$
 $\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3 = 8000$
 $\pi \cdot d^3 = 48000$
 $d^3 = \frac{48000}{\pi}$
 $d = \sqrt[3]{\frac{48000}{\pi}} = 24,81$
 De diameter van deze volleybal is ongeveer 25 cm.
- U12** $x^3 - 8x^2 + 15x = 0$
 $x(x^2 - 8x + 15) = 0$
 $x(x - 3)(x - 5) = 0$
 $x = 0$ of $x - 3 = 0$ of $x - 5 = 0$
 $x = 0$ of $x = 3$ of $x = 5$
 De oplossing is $\{0, 3\} \cup \{5, \rightarrow\}$.

11B.7 Gemengde opdrachten

- 47** a Aan het begin zijn er
 $120 + 90 \times 2^{0,5 \times 0} = 120 + 90 \times 2^0 = 120 + 90 \times 1 = 120 + 90 = 210$ ratten.
 b $120 + 90 \cdot 2^{0,5t} = 3000$
 $90 \cdot 2^{0,5t} = 2880$
 $2^{0,5t} = 32$
 $2^{0,5t} = 2^5$
 $0,5t = 5$
 $t = 10$
 Na 10 weken is het aantal ratten gelijk aan 3000.

$$\begin{aligned} \text{c } 120 + 90 \cdot 2^{0,5t} &= 5880 \\ 90 \cdot 2^{0,5t} &= 5760 \\ 2^{0,5t} &= 64 \\ 2^{0,5t} &= 2^6 \\ 0,5t &= 6 \\ t &= 12 \end{aligned}$$

In $16 - 12 = 4$ weken tijd neemt het aantal ratten toe van 5880 tot 23 160.

$$\begin{aligned} 120 + 90 \cdot 2^{0,5t} &= 23\,160 \\ 90 \cdot 2^{0,5t} &= 23\,040 \\ 2^{0,5t} &= 256 \\ 2^{0,5t} &= 2^8 \\ 0,5t &= 8 \\ t &= 16 \end{aligned}$$

$$48 \text{ a } 3\sqrt{4z-1} = 15$$

$$\sqrt{4z-1} = 5$$

$$4z-1 = 25$$

$$4z = 26$$

$$z = 6\frac{1}{2}$$

$$\text{b } 0,5 \cdot 2^{m-5} = 4$$

$$2^{m-5} = 8$$

$$2^{m-5} = 2^3$$

$$m-5 = 3$$

$$m = 8$$

$$\text{c } 36 = \frac{18}{2x-5}$$

$$2x-5 = \frac{1}{2}$$

$$2x = 5\frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{3}{4}$$

$$\text{d } -\sqrt{2p+3} = 6$$

$$\sqrt{2p+3} = -6$$

geen oplossing

$$\begin{aligned} \text{e } d &= \frac{15}{d-2} \\ d(d-2) &= \frac{15}{d-2} \cdot (d-2) \end{aligned}$$

$$d^2 - 2d = 15$$

$$d^2 - 2d - 15 = 0$$

$$(d-5)(d+3) = 0$$

$$d-5 = 0 \text{ of } d+3 = 0$$

$$d = 5 \text{ of } d = -3$$

$$\text{f } 2x^4 + 8 = 520$$

$$2x^4 = 512$$

$$x^4 = 256$$

$$x = -\sqrt[4]{256} \text{ of } x = \sqrt[4]{256}$$

$$x = -4 \text{ of } x = 4$$

$$\text{g } \frac{8}{4+w} = 2w+10$$

$$(4+w) \cdot \frac{8}{4+w} = (2w+10)(4+w)$$

$$8 = 8w + 2w^2 + 40 + 10w$$

$$0 = 2w^2 + 18w + 32$$

$$w^2 + 9w + 16 = 0$$

$$D = 9^2 - 4 \times 1 \times 16 = 17$$

$$w = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \text{ of } w = \frac{-9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{h } 0,5x^5 - 18 = 3$$

$$0,5x^5 = 21$$

$$x^5 = 42$$

$$x = \sqrt[5]{42}$$

$$49 \quad 3 \times 2^n + 56 = 6200 \text{ geeft } 3 \times 2^n = 6144$$

$$2^n = 2048$$

$$2^n = 2^{11} \text{ dus } n = 11$$

$$50 \text{ a } x^2 + 4x = 3x + 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x+3 = 0 \text{ of } x-2 = 0$$

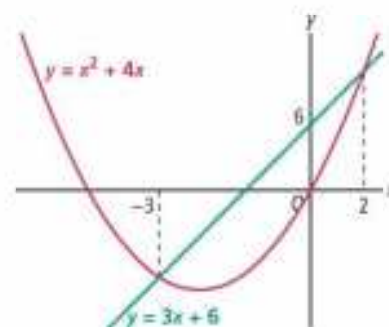
$$x = -3 \text{ of } x = 2$$

$$y = 3 \times -3 + 6 = -3 \text{ of } y = 3 \times 2 + 6 = 12$$

De snijpunten zijn $(-3, -3)$ en $(2, 12)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $-3 < x < 2$ ofwel $\langle -3, 2 \rangle$.



11B Vergelijkingen en ongelijkheden

b $(4 - x)(x - 2) = 3$

$$4x - 8 - x^2 + 2x = 3$$

$$-x^2 + 6x - 11 = 0$$

$$x^2 - 6x + 11 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 11 = -8$$

Er zijn geen snijpunten.

Zie de schets hiernaast.

Er is geen oplossing.

c $3x^4 = 243$

$$x^4 = 81$$

$$x = -\sqrt[4]{81} = -3 \text{ of } x = \sqrt[4]{81} = 3$$

De snijpunten zijn $(-3, 243)$ en $(3, 243)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $x \leq -3$ of $x \geq 3$ ofwel $\langle \leftarrow, -3 \rangle \cup [3, \rightarrow \rangle$.

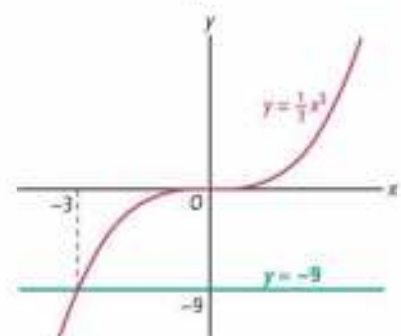
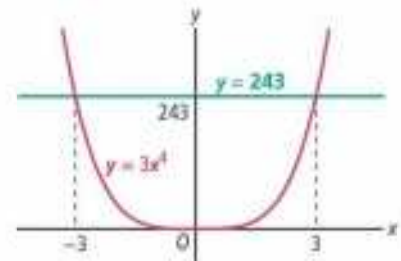
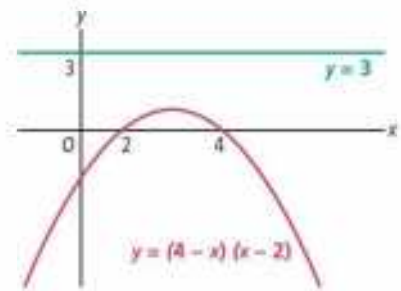
d $\frac{1}{3}x^3 = -9$

$$x^3 = -27$$

$$x = \sqrt[3]{-27} = -3$$

Het snijpunt is $(-3, -9)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $x < -3$ ofwel $\langle \leftarrow, -3 \rangle$.51 De lijn $y = c$ is de horizontale lijn door de snijpunten van de grafieken.

$$x^2 - 8x + 17 = -x^2 + 8x - 13$$

$$2x^2 - 16x + 30 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x - 3)(x - 5) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ of } x - 5 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = 5$$

$$y = 3^2 - 8 \times 3 + 17 = 2 \text{ of } y = 5^2 - 8 \times 5 + 17 = 2$$

De snijpunten zijn $(3, 2)$ en $(5, 2)$.De ongelijkheden hebben dezelfde oplossing als $c = 2$.52 a Je hebt d deelnemers die elk tegen $d - 1$ tegenstanders spelen.Dat zijn $d \times (d - 1)$ wedstrijden. Maar dan heb je elke wedstrijd dubbel geteld ('uit en thuis'). Dus moet je de uitkomst van $d(d - 1)$ nog delen door 2.

b
$$W(6) = \frac{6 \times (6 - 1)}{2} = 15, \text{ dus bij zes deelnemers zijn er 15 wedstrijden.}$$

c
$$\frac{d(d - 1)}{2} = 66$$

$$d(d - 1) = 132$$

$$d^2 - d - 132 = 0$$

$$(d - 12)(d + 11) = 0$$

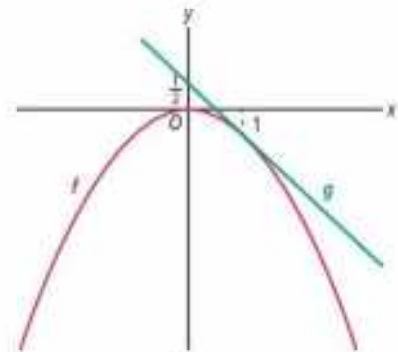
$$d - 12 = 0 \text{ of } d + 11 = 0$$

$$d = 12 \text{ of } d = -11$$

 $d = -11$ heeft hier geen betekenis. Er zijn bij 66 wedstrijden 12 deelnemers.

- d $d = 13$ geeft $W(13) = 13 \times 12 : 2 = 78$
 $d = 14$ geeft $W(14) = 14 \times 13 : 2 = 91$
 $d = 15$ geeft $W(15) = 15 \times 14 : 2 = 105$.
 Voor minimaal 100 wedstrijden heb je minstens 15 deelnemers nodig.

- 53 a $-0,5x^2 = p - x$
 $-0,5x^2 + x - p = 0$
 $x^2 - 2x + 2p = 0$
 De grafieken raken elkaar als $D = 0$.
 $a = 1$, $b = -2$ en $c = 2p$ geeft $D = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2p = 4 - 8p$.
 $D = 0$ geeft $4 - 8p = 0$
 $8p = 4$
 $p = \frac{1}{2}$
 b Als $p = \frac{1}{2}$ dan wordt de vergelijking $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x - 1)(x - 1) = 0$
 $x - 1 = 0$
 $x = 1$
 $y = -0,5 \times 1^2 = -0,5$
 Het raakpunt is $(1; -0,5)$.
 Zie de schets hiernaast.
 De oplossing van $g(x) \geq f(x)$ is $\mathbb{R}$.



- 54 a $x = 0$ geeft $f(0) = \frac{36}{\sqrt{16 - 2 \times 0}} = \frac{36}{\sqrt{16}} = \frac{36}{4} = 9$.
 Het snijpunt is $(0, 9)$.
 b $\frac{36}{\sqrt{16 - 2x}} = 18$
 $\sqrt{16 - 2x} = 2$
 $16 - 2x = 4$
 $2x = 12$
 $x = 6$
 c $\frac{36}{\sqrt{16 - 2x}} = 6$
 $\sqrt{16 - 2x} = 6$
 $16 - 2x = 36$
 $2x = -20$
 $x = -10$
 Het snijpunt is $(-10, 6)$.
 De oplossing van de ongelijkheid is $\langle \leftarrow, -10]$.

Samenvatting

- S1 a exponentiële vergelijking
 b wortelvergelijking
 c machtsvergelijking
 d gebroken vergelijking

11B Vergelijkingen en ongelijkheden

$$\begin{aligned} \text{S2 a } \frac{-24}{2x} + 3 &= 9 \\ \frac{-24}{2x} &= 6 \\ 2x &= -4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } x + 11 &= \frac{11}{x+1} \\ (x+1)(x+11) &= \frac{11}{x+1} \cdot (x+1) \\ x^2 + 11x + x + 11 &= 11 \\ x^2 + 12x &= 0 \\ x(x+12) &= 0 \\ x &= 0 \text{ of } x+12=0 \\ x &= 0 \text{ of } x=-12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{S3 a } 4^{2x+1} &= 4096 \\ 4^{2x+1} &= 4^6 \\ 2x+1 &= 6 \\ 2x &= 5 \\ x &= 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } -3 \cdot 4^x &= -192 \\ 4^x &= 64 \\ 4^x &= 4^3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{S4 a } \sqrt{6b+19} + 3 &= 10 \\ \sqrt{6b+19} &= 7 \\ 6b+19 &= 49 \\ 6b &= 30 \\ b &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } 5\sqrt{8-x} &= 15 \\ \sqrt{8-x} &= 3 \\ 8-x &= 9 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{S5 } x^2 - 3x &= 35 - x \\ x^2 - 2x - 35 &= 0 \\ (x-7)(x+5) &= 0 \\ x-7=0 \text{ of } x+5=0 \\ x &= 7 \text{ of } x=-5 \\ f(7) &= 7^2 - 3 \times 7 = 28 \text{ en } f(-5) = (-5)^2 - 3 \times -5 = 40 \\ \text{Controle: } g(7) &= 35 - 7 = 28, \text{ klopt en } g(-5) = 35 - -5 = 40, \text{ klopt.} \\ \text{De snijpunten zijn } (7, 28) &\text{ en } (-5, 40). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{S6 } x^2 - x + 6 &= 5x - 3 \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ a &= 1, b = -6 \text{ en } c = 9 \text{ geeft } D = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0. \\ D &= 0 \text{ dus de grafieken raken elkaar.} \end{aligned}$$

S7	ongelijkheidsnotatie	intervalnotatie
A	$x > -1$	$\langle -1, \rightarrow \rangle$
B	$x \leq 6$	$\langle \leftarrow, 6 \rangle$
C	$x < 0$ of $x > 7$	$\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 7, \rightarrow \rangle$
D	$-8 < x \leq 5$	$\langle -8, 5 \rangle$
E	$x \leq -3$ of $x \geq 11$	$\langle \leftarrow, -3 \rangle \cup [11, \rightarrow \rangle$
F	$x < 7$ of $x \geq 7$	$\mathbb{R}$

S8 a $0,04x^6 = 625$

$$x^6 = 15\,625$$

$$x = -\sqrt[6]{15\,625} \text{ of } x = \sqrt[6]{15\,625}$$

$$x = -5 \text{ of } x = 5$$

b $1000x^3 = -3375$

$$x^3 = -3,375$$

$$x = \sqrt[3]{-3,375}$$

$$x = -1,5$$

c $1000 - x^5 = 757$

$$x^5 = 243$$

$$x = \sqrt[5]{243}$$

$$x = 3$$

d $-80 - \frac{1}{2}x^4 = 62$

$$-\frac{1}{2}x^4 = 142$$

$$x^4 = -284$$

geen oplossing

S9 a $x^2 - 8x + 11 = x - 7$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$(x - 3)(x - 6) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ of } x - 6 = 0$$

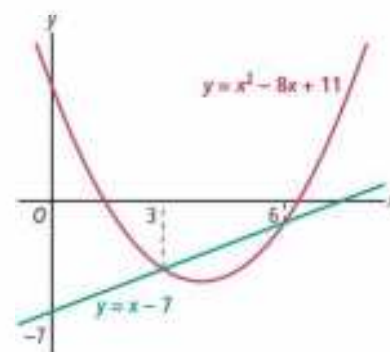
$$x = 3 \text{ of } x = 6$$

$$y = 3 - 7 = -4 \text{ of } y = 6 - 7 = -1$$

De snijpunten zijn $(3, -4)$ en $(6, -1)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\{3, 6\}$.



b $130 - 4x^2 = 30$

$$4x^2 = 100$$

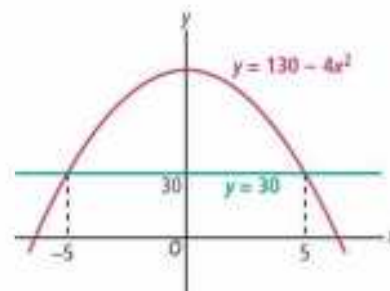
$$x^2 = 25$$

$$x = -5 \text{ of } x = 5$$

De snijpunten zijn $(-5, 30)$ en $(5, 30)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $[-5, 5]$.



c $2x^4 = 162$

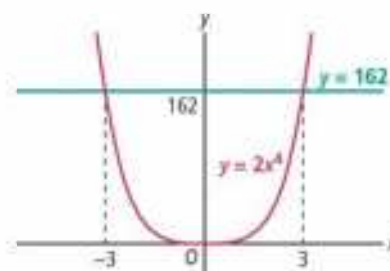
$$x^4 = 81$$

$$x = -\sqrt[4]{81} = -3 \text{ of } x = \sqrt[4]{81} = 3$$

De snijpunten zijn $(-3, 81)$ en $(3, 81)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\{\leftarrow, -3\} \cup \{3, \rightarrow\}$.



d $0,25x^3 = -16$

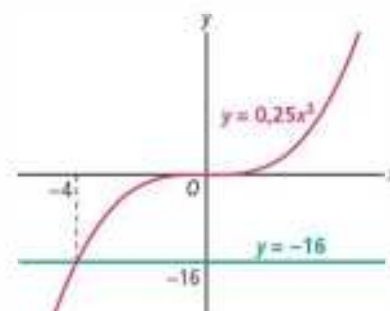
$$x^3 = -64$$

$$x = \sqrt[3]{-64} = -4$$

Het snijpunt is $(-4, -16)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\{\leftarrow, -4\}$.



11B Vergelijkingen en ongelijkheden

Test jezelf

T1 a $\frac{24}{5b-3} = 4$

$$5b - 3 = 6$$

$$5b = 9$$

$$b = 1,8$$

b $1 + \frac{30}{7h} = 6$

$$\frac{30}{7h} = 5$$

$$7h = 6$$

$$h = \frac{6}{7}$$

c $\frac{12}{x-2} = x-6$

$$(x-2) \cdot \frac{12}{x-2} = (x-6)(x-2)$$

$$12 = x^2 - 2x - 6x + 12$$

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x(x-8) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x - 8 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 8$$

d $\frac{2}{x} - 3 = -2x + 1$

$$\frac{2}{x} = -2x + 4$$

$$x \cdot \frac{2}{x} = x(-2x + 4)$$

$$2 = -2x^2 + 4x$$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

T2 a $T(0) = 20 + \frac{24}{2} = 32$

De temperatuur aan het begin is 32 °C.

b $T(8) = 20 + \frac{24}{6} = 24$

De temperatuur na 8 minuten is 24 °C.

c Neem bijvoorbeeld $t = 1000$.

$$T(1000) = 20 + \frac{24}{502} = 20,05$$

Voor grote waarden van t nadert de temperatuur naar 20.

Het wordt op den duur dus 20 °C.

d $20 + \frac{24}{\frac{1}{2}t + 2} = 23$

$$\frac{24}{\frac{1}{2}t + 2} = 3$$

$$\frac{1}{2}t + 2 = 8$$

$$\frac{1}{2}t = 6$$

$$t = 6 \times 2 = 12$$

Na 12 minuten moet je het verwarmingselement inschakelen.

T3 a $7^{2a} = 343$

$$7^{2a} = 7^3$$

$$2a = 3$$

$$a = 1\frac{1}{2}$$

b $2 \cdot 7^p = 4802$

$$7^p = 2401$$

$$7^p = 7^4$$

$$p = 4$$

$$\begin{aligned} \text{c } 7^{3k-1} - 1 &= 2400 \\ 7^{3k-1} &= 2401 \\ 7^{3k-1} &= 7^4 \\ 3k - 1 &= 4 \\ 3k &= 5 \\ k &= 1\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 7^{-2+5a} &= 49 \\ 7^{-2+5a} &= 7^2 \\ -2 + 5a &= 2 \\ 5a &= 4 \\ a &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{T4 a } 2\sqrt{l} &= 1,4 \\ \sqrt{l} &= 0,7 \\ l &= 0,7^2 = 0,49 \end{aligned}$$

De lengte van de slinger is 0,49 m ofwel 49 cm.

b Nee, neem bijvoorbeeld $l = 2 \times 0,49 = 0,98$. Dan is $T = 2 \times \sqrt{0,98} = 1,98$ en dat is niet twee keer zo groot als 1,4.

$$\begin{aligned} \text{T5 a } 4\sqrt{t+1} &= 12 \\ \sqrt{t+1} &= 3 \\ t+1 &= 9 \\ t &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } \frac{32}{4\sqrt{2u}} + 2 &= 4 \\ \frac{32}{4\sqrt{2u}} &= 2 \\ 4\sqrt{2u} &= 16 \\ \sqrt{2u} &= 4 \\ 2u &= 16 \\ u &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } 27 - 3\sqrt{3a} &= 0 \\ 3\sqrt{3a} &= 27 \\ \sqrt{3a} &= 9 \\ 3a &= 81 \\ a &= 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } \frac{\sqrt{6-c}}{8} + 5 &= 6 \\ \frac{\sqrt{6-c}}{8} &= 1 \\ \sqrt{6-c} &= 8 \\ 6 - c &= 64 \\ c &= -58 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{T6 a } -x^2 + 3x + 10 &= -3x - 6 \\ -x^2 + 6x + 16 &= 0 \\ x^2 - 6x - 16 &= 0 \\ (x-8)(x+2) &= 0 \\ x-8 &= 0 \text{ of } x+2 = 0 \\ x &= 8 \text{ of } x = -2 \\ f(8) &= -8^2 + 3 \times 8 + 10 = -30 \text{ en } f(-2) = -(-2)^2 + 3 \times -2 + 10 = 0 \\ \text{Controle: } g(8) &= -3 \times 8 - 6 = -30, \text{ klopt en } g(-2) = -3 \times -2 - 6 = 0, \text{ klopt.} \\ \text{De snijpunten zijn } (8, -30) &\text{ en } (-2, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } -x^2 + 3x + 10 &= -3x + 19 \\ -x^2 + 6x - 9 &= 0 \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x-3)(x-3) &= 0 \\ x-3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

De vergelijking heeft maar één oplossing, dus de grafieken raken elkaar.

$$\begin{aligned} \text{c } f(3) &= -3^2 + 3 \times 3 + 10 = 10 \\ h(3) &= -3 \times 3 + 19 = 10, \text{ klopt} \\ \text{Het raakpunt is } (3, 10). \end{aligned}$$

11B Vergelijkingen en ongelijkheden

	ongelijkheidsnotatie	intervalnotatie
A	$x \leq -4$ of $x > 0$	$\langle \leftarrow, -4 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$
B	$-4 < x \leq 7,5$	$\langle -4; 7,5 \rangle$

- b A $[3, \rightarrow)$ C $\langle \leftarrow, 7 \rangle \cup [13, \rightarrow)$
 B $\langle \leftarrow, -9 \rangle$ D $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$

T8 a $I = 0,8 \cdot 6^3 = 172,8$

De inhoud van de kaars is $172,8 \text{ cm}^3$.

b $0,8z^3 = 100$

$z^3 = 125$

$z = 5$

De ribbe van de kubus is 5 cm.

c De inhoud van een kubus met ribbe z cm is $z^3 \text{ cm}^3$.

De inhoud van de kaars is $0,8z^3 \text{ cm}^3$.

Er is dus $z^3 - 0,8z^3 = 0,2z^3 \text{ cm}^3$ lege ruimte in de kubus.

$0,2z^3 = 50$

$z^3 = 250$

$z = \sqrt[3]{250} \approx 6,30$

De ribbe van de kubus is ongeveer 6,3 cm.

T9 a $5x^2 + 9 = 89$

$5x^2 = 80$

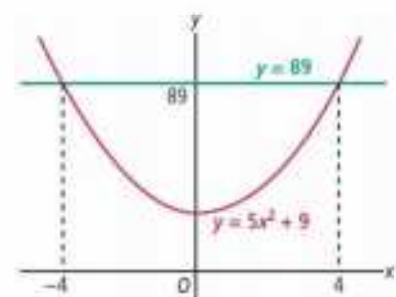
$x^2 = 16$

$x = -4$ of $x = 4$

De snijpunten zijn $(-4, 89)$ en $(4, 89)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\langle \leftarrow, -4 \rangle \cup [4, \rightarrow)$.



b $x^2 + 3x = 2x + 30$

$x^2 + x - 30 = 0$

$(x + 6)(x - 5) = 0$

$x + 6 = 0$ of $x - 5 = 0$

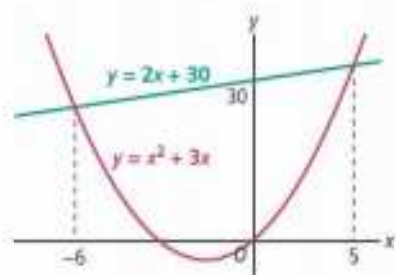
$x = -6$ of $x = 5$

$y = 2 \times -6 + 30 = 18$ of $y = 2 \times 5 + 30 = 40$

De snijpunten zijn $(-6, 18)$ en $(5, 40)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\langle -6, 5 \rangle$.



c $3x^6 = 192$

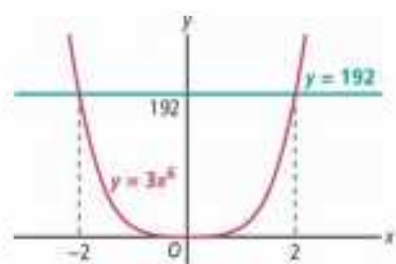
$x^6 = 64$

$x = -\sqrt[6]{64} = -2$ of $x = \sqrt[6]{64} = 2$

De snijpunten zijn $(-2, 192)$ en $(2, 192)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\langle \leftarrow, -2 \rangle \cup [2, \rightarrow)$.



d $0,5x^5 = -512$

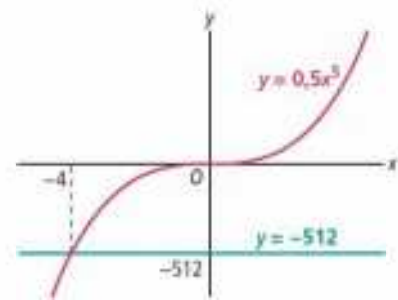
$$x^5 = -1024$$

$$x = \sqrt[5]{-1024} = -4$$

Het snijpunt is $(-4, -512)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\langle -, -4 \rangle$.



- T10** a Functie f hoort bij grafiek 4, functie g bij grafiek 3, functie h bij grafiek 2 en functie i bij grafiek 1.
b De ongelijkheden B en D hebben dezelfde oplossing, namelijk $x < 0$.

Extra oefening

E1 a $\frac{20}{2x+1} = 5$

$$2x+1 = 4$$

$$2x = 3$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

b $\frac{-24}{2x} = x-7$

$$2x \cdot \frac{-24}{2x} = 2x(x-7)$$

$$-24 = 2x^2 - 14x$$

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x-3)(x-4) = 0$$

$$x-3 = 0 \text{ of } x-4 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = 4$$

c $5 - \frac{4}{3x} = 4$

$$\frac{4}{3x} = 1$$

$$3x = 4$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$

d $7x+5 = \frac{20}{x} + 1$

$$7x+4 = \frac{20}{x}$$

$$x(7x+4) = \frac{20}{x} \cdot x$$

$$7x^2 + 4x = 20$$

$$7x^2 + 4x - 20 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \times 7 \times -20 = 576$$

$$x = \frac{-4+24}{14} \text{ of } x = \frac{-4-24}{14}$$

$$x = 1\frac{3}{7} \text{ of } x = -2$$

E2 a $4^x = 256$

$$4^x = 4^4$$

$$x = 4$$

b $3^{2x} = 81$

$$3^{2x} = 3^4$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

c $2 \cdot 3^{x+1} = 486$

$$3^{x+1} = 243$$

$$3^{x+1} = 3^5$$

$$x+1 = 5$$

$$x = 4$$

d $3^{-x} = 729$

$$3^{-x} = 3^6$$

$$-x = 6$$

$$x = -6$$

e $0,2 \cdot 4^x = 3,2$

$$4^x = 16$$

$$4^x = 4^2$$

$$x = 2$$

f $4^{x-3} - 2 = 62$

$$4^{x-3} = 64$$

$$4^{x-3} = 4^3$$

$$x-3 = 3$$

$$x = 6$$

E3 a $\sqrt{3a} = 9$

$$3a = 81$$

$$a = 27$$

b $\sqrt{24-7b} = 5$

$$24-7b = 25$$

$$7b = -1$$

$$b = -\frac{1}{7}$$

11B Vergelijkingen en ongelijkheden

$$\begin{aligned} \text{c } \frac{12}{\sqrt{e+9}} &= 6 \\ \sqrt{e+9} &= 2 \\ e+9 &= 4 \\ e &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } 8 + 2\sqrt{e} &= 22 \\ 2\sqrt{e} &= 14 \\ \sqrt{e} &= 7 \\ e &= 49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 20 - \sqrt{3d-5} &= 16 \\ \sqrt{3d-5} &= 4 \\ 3d-5 &= 16 \\ 3d &= 21 \\ d &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } \frac{24}{0,5\sqrt{2f}} &= 3 \\ 0,5\sqrt{2f} &= 8 \\ \sqrt{2f} &= 16 \\ 2f &= 256 \\ f &= 128 \end{aligned}$$

$$\text{E4 a } \frac{1}{2}x^2 = 5x$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 5x = 0$$

$$x^2 - 10x = 0$$

$$x(x-10) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x - 10 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 10$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \times 0^2 = 0 \text{ en } f(10) = \frac{1}{2} \times 10^2 = 50$$

$$\text{Controle: } g(0) = 5 \times 0 = 0, \text{ klopt en } g(10) = 5 \times 10 = 50, \text{ klopt.}$$

De snijpunten zijn (0, 0) en (10, 50).

$$\text{b } x^2 - 5x = 4x - 14$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$(x-7)(x-2) = 0$$

$$x-7 = 0 \text{ of } x-2 = 0$$

$$x = 7 \text{ of } x = 2$$

$$f(2) = 2^2 - 5 \times 2 = -6 \text{ en } f(7) = 7^2 - 5 \times 7 = 14$$

$$\text{Controle: } g(2) = 4 \times 2 - 14 = -6, \text{ klopt en } g(7) = 4 \times 7 - 14 = 14, \text{ klopt.}$$

De snijpunten zijn (2, -6) en (7, 14).

$$\text{c } x^2 - 3x + 4 = -2x + 16$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x-4)(x+3) = 0$$

$$x-4 = 0 \text{ of } x+3 = 0$$

$$x = 4 \text{ of } x = -3$$

$$f(4) = 4^2 - 3 \times 4 + 4 = 8 \text{ en } f(-3) = (-3)^2 - 3 \times -3 + 4 = 22$$

$$\text{Controle: } g(4) = -2 \times 4 + 16 = 8, \text{ klopt en } g(-3) = -2 \times -3 + 16 = 22, \text{ klopt.}$$

De snijpunten zijn (4, 8) en (-3, 22).

$$\text{E5 a } x^2 - 6x + 8 = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$$

$$x^2 - 6\frac{1}{2}x + 10\frac{1}{2} = 0$$

$$a = 1, b = -6\frac{1}{2} \text{ en } c = 10\frac{1}{2} \text{ geeft } D = \left(-6\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times 10\frac{1}{2} = 42\frac{1}{4} - 42 = \frac{1}{4}$$

$D > 0$ dus de vergelijking heeft 2 oplossingen.

De grafieken van f en g snijden elkaar.

$$\text{b } 2x^2 + 4x + 5 = 2 - x$$

$$2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$a = 2, b = 5 \text{ en } c = 3 \text{ geeft } D = 5^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1$$

$D > 0$ dus de vergelijking heeft 2 oplossingen.

De grafieken van f en g snijden elkaar.

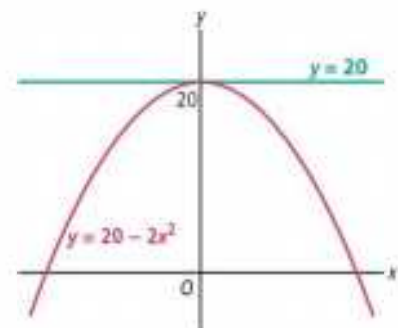
- c $3x^2 + 7x - 5 = x - 8$
 $3x^2 + 6x + 3 = 0$
 $D = 6^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0$
 De vergelijking heeft 1 oplossing.
 De grafieken van f en g raken elkaar.

E6	ongelijkheidsnotatie	intervalnotatie
A	$1,5 \leq x < 8$	$[1,5; 8)$
B	$x < -1$ of $x > 6$	$\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 6, \rightarrow \rangle$
C	$-2 < x \leq 7$	$\langle -2, 7]$
D	$x < -5,5$ of $x > -5,5$	$\langle \leftarrow, -5,5 \rangle \cup \langle -5,5, \rightarrow \rangle$

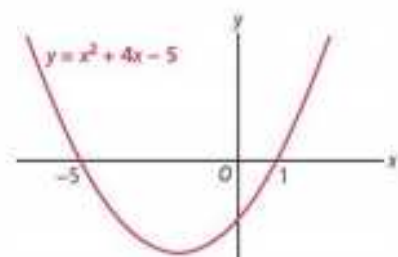
- E7 a $t^3 = 343$
 $t = \sqrt[3]{343}$
 $t = 7$
- b $3p^4 = 1875$
 $p^4 = 625$
 $p = -\sqrt[4]{625}$ of $p = \sqrt[4]{625}$
 $p = -5$ of $p = 5$
- c $3g^5 + 12 = -84$
 $3g^5 = -96$
 $g^5 = -32$
 $g = \sqrt[5]{-32}$
 $g = -2$
- d $100 - 4c^4 = 200$
 $4c^4 = -100$
 $c^4 = -25$
 geen oplossing

- E8 a $I = 2,2 \times 8^3 = 1126,4$
 De inhoud is dan $1126,4 \text{ cm}^3$.
- b $2,2r^3 = 275$
 $r^3 = 125$
 $r = 5$
 De ribbe is dan 5 cm lang.
- c $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$
 $2,2r^3 = 1000$
 $r^3 = 1000 : 2,2 = 454,545 \dots$
 $r = \sqrt[3]{454,545 \dots} = 7,688 \dots$
 De ribbe is dan 7,7 cm of 77 mm lang.

- E9 a $20 - 2x^2 = 20$
 $2x^2 = 0$
 $x^2 = 0$
 $x = 0$
 Het snijpunt is $(0, 20)$.
 Zie de schets hiernaast.
 De oplossing is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.



- b $x^2 + 4x - 5 = 0$
 $(x + 5)(x - 1) = 0$
 $x + 5 = 0$ of $x - 1 = 0$
 $x = -5$ of $x = 1$
 De snijpunten zijn $(-5, 0)$ en $(1, 0)$.
 Zie de schets hiernaast.
 De oplossing is $\langle \leftarrow, -5] \cup [1, \rightarrow \rangle$.



11B Vergelijkingen en ongelijkheden

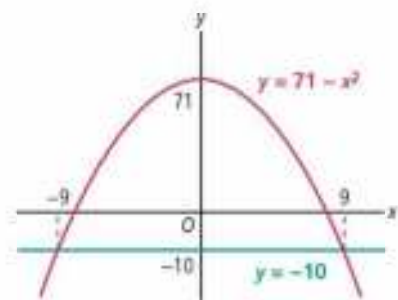
c $71 - x^2 = -10$

$x^2 = 81$

$x = -9$ of $x = 9$

De snijpunten zijn $(-9, -10)$ en $(9, -10)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\langle -9, 9 \rangle$.

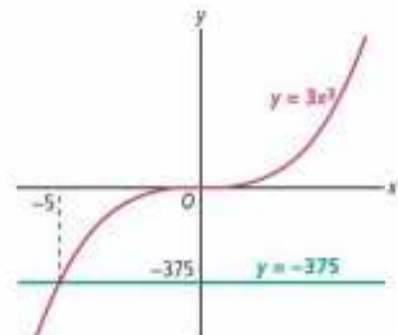
d $3x^3 = -375$

$x^3 = -125$

$x = -5$

Het snijpunt is $(-5, -375)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $[-5, \rightarrow)$.

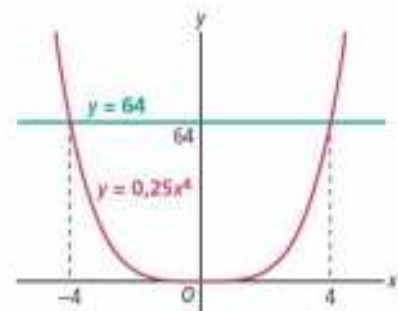
e $0,25x^4 = 64$

$x^4 = 256$

$x = -4$ of $x = 4$

De snijpunten zijn $(-4, 64)$ en $(4, 64)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\langle \leftarrow, -4 \rangle \cup [4, \rightarrow)$.

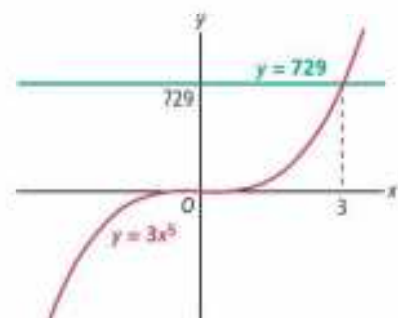
f $3x^5 = 729$

$x^5 = 243$

$x = 3$

Het snijpunt is $(3, 729)$.

Zie de schets hiernaast.

De oplossing is $\langle \leftarrow, 3 \rangle$.

E10 a $0,0001l^3 = 0,8$

$l^3 = 8000$

$l = 20$

De rups is 20 mm lang.

b $0,0001l^3 = 3$

$l^3 = 30\,000$

$l = \sqrt[3]{30\,000} = 31,072 \dots$

De rups van 3 gram is 31 mm lang.

$0,0001l^3 = 4$

$l^3 = 40\,000$

$l = \sqrt[3]{40\,000} = 34,1995 \dots$

Een rups van 4 gram is 34 mm lang.

De lengte bij het verpoppen ligt tussen 31 mm en 34 mm.

12A Zicht op toeval

Voorkennis

- V1 a Bij de mannen is $\frac{1}{12} \times 100\% = 8,3\%$ kleurenblind.
 b Bij de vrouwen is dit $\frac{4}{1000} \times 100\% = 0,4\%$.
 c Nee, je kunt hier niets over zeggen want toeval speelt hier ook een rol.

- V2 a Er zijn in totaal $5 + 3 + 7 = 15$ knikkers en daarvan zijn er 5 blauw.
 De kans dat je een blauwe knikker pakt is 5 op 15, dus Aisa heeft gelijk.
 De kans dat je een blauwe knikker pakt is $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, dus Berend heeft gelijk.

gedeelte	$\frac{5}{15}$	$\frac{1}{3}$
percentage	100	33,33...

De kans dat je een blauwe knikker pakt is ongeveer 33,3%, dus Carlos heeft gelijk.

- b Er zijn 3 rode knikkers, dus de kans dat je een rode knikker pakt is 3 op 15 of $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

gedeelte	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{5}$
percentage	100	20

De kans dat je een rode knikker pakt is 20%.

- V3 a In de klas zitten $5 + 6 = 11$ kinderen, waarvan 6 jongens.

gedeelte	$\frac{11}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{6}{11}$
percentage	100	9,090...	54,545...

De kans dat dit een jongen is, is ongeveer 54,55%.

- b In de klas zitten 6 jongens. De kans dat Yvo dat is, is $\frac{1}{6}$.

gedeelte	$\frac{6}{6}$	$\frac{1}{6}$
percentage	100	16,666...

De kans dat Yvo dat is, is ongeveer 16,67%.

- V4 a Van de acht sectoren zijn er 5 blauw. Die kans is dus 5 op 8 ofwel $5 \times 12\frac{1}{2}\% = 62\frac{1}{2}\%$.

- b Die kans is 3 op 8 ofwel $3 \times 12\frac{1}{2}\% = 37\frac{1}{2}\%$.

- c Er zijn geen andere mogelijke uitkomsten dan blauw of geel.

- d $37\frac{1}{2}\%$ van het aantal keer draaien is de uitkomst geel, en dat moet 10 zijn.

aantal keer draaien	10	0,266...	26,666...
percentage	$37\frac{1}{2}$	1	100

Hij moet naar verwachting 27 keer draaien.

- V5 a Bij twee combinaties hebben de broek en het T-shirt dezelfde kleur.

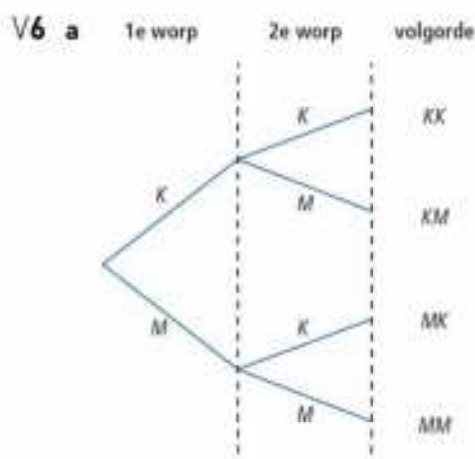
gedeelte	$\frac{12}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$
percentage	100	8,333...	16,666...

De kans dat Marieke zo'n combinatie pakt is ongeveer 16,67%.

- c In het boomdiagram in het voorbeeld komen dan vijf takken in plaats van de drie takken die er nu staan.

- d Er zijn dan $5 \times 4 = 20$ verschillende combinaties mogelijk.

12A Zicht op toeval



- b** Van de vier mogelijke volgorden zijn er twee met één keer kop en één keer munt, dus die kans is 1 op 2 ofwel 50%.
- c** Na drie keer gooien zijn er $2 \times 2 \times 2 = 8$ verschillende rijtjes mogelijk.
- d** Van de acht verschillende rijtjes is er één met drie keer kop, dus die kans is 1 op 8 ofwel $12\frac{1}{2}\%$.
- V7 a** Voor het eerste cijfer zijn er 5 mogelijkheden, voor het tweede cijfer 4 mogelijkheden en voor het derde cijfer 3 mogelijkheden.
Dat geeft $5 \times 4 \times 3 = 60$ verschillende rijtjes, dus 60 verschillende getallen.
- b** Dan moet het eerste balletje dat Tom pakt een 3 zijn, en die kans is 1 op 5 ofwel 20%.
- c** Dan kan hij $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ verschillende getallen maken.

12A.1 Steekproeven

intro Nee, het kan zijn dat om wat voor reden dan ook, het aantal leerlingen in zijn klas met een iPhone veel groter of juist veel kleiner is dan in andere klassen.

- 1 a** Bijvoorbeeld de kosten van het onderzoek, de tijd die nodig is om het onderzoek te doen en het verwerken van resultaten wordt moeilijker.
- b** Methode A is niet geschikt, want mensen die werken op dinsdagmorgen kunnen niet mee doen en je bereikt maar een deel van de bevolking.
Methode B is niet geschikt, want mensen die niet werken of thuis werken hebben een grotere kans om mee te doen.
Methode C is niet geschikt, want mensen die geïnteresseerd zijn in politiek zullen de vragenlijst eerder terugsturen.
Methode D is goed, want iedereen heeft evenveel kans om ondervraagd te worden.
- c** Het onderzoek geeft dan een verkeerd beeld omdat dan ook kinderen, die niet mogen stemmen, aan het onderzoek mee kunnen doen.
- d**
- | | | | |
|---------------|-----|-----|------|
| aantal mensen | 250 | 1 | 82 |
| percentage | 100 | 0,4 | 32,8 |
- Dat is 32,8% van de ondervraagden.
- e** $0,328 \times 24\,000 = 7872$, dus ongeveer 8000 inwoners kennen de naam van de lijsttrekker.

2 a

<i>aantal mensen</i>	75	1	33
<i>percentage</i>	100	1,333...	44

Van de ondervraagden kent 44% de naam van de lijsttrekker.

- b** Nee, daarvoor is de steekproef te klein.
- 3 a** Nee, kinderen vormen juist de belangrijkste groep mensen die naar het nieuwe zwembad zullen gaan.
- b** jongeren, ouderen, mensen die wel eens naar het zwembad gaan, mensen die nooit naar een zwembad gaan, mensen die werken, mensen zonder werk etc
- c** Een steekproef van 2% van de inwoners zal voldoende groot zijn, tenminste als alle mensen dezelfde kans hebben in de steekproef te komen.
Een steekproef van 50% is te groot om uit te voeren.
- 4 a** Als je geen lid bent, kun je de enquête niet invullen.
- b** Niets, want mensen die niet lid zijn van BNN is niets gevraagd. Die hebben misschien wel een heel andere mening over het programma. Verder zullen er ook veel Nederlanders zijn die het programma nog nooit gezien hebben, dus die zullen er geen mening over hebben.
- 5** Methode A geeft geen betrouwbare steekproef, want het betreft alleen lezers van het tijdschrift van Greenpeace.
Methode B geeft geen betrouwbare steekproef, want het betreft alleen middelbare scholieren.
Methode C geeft geen betrouwbare steekproef, want 20 mensen is een te klein aantal.
Methode D geeft wel een betrouwbare steekproef.
Methode E geeft geen betrouwbare steekproef, want het betreft alleen treinreizigers.
- 6 a** Bij methode A kunnen alleen leerlingen uit klas 3 in de steekproef terechtkomen en heeft niet iedere leerling kans om in de steekproef terecht te komen.
Bij methode B komen de eerste 20 leerlingen misschien wel uit dezelfde klas.
Bij methode C zullen leerlingen die ontevreden zijn waarschijnlijk eerder een vragenformulier invullen dan leerlingen die tevreden zijn.
- b** Bijvoorbeeld uit het leerlingenbestand van de school willekeurig 100 leerlingen selecteren.
- c**
- | | | | |
|--------------------------|-----|---|----|
| <i>aantal leerlingen</i> | 50 | 1 | 27 |
| <i>percentage</i> | 100 | 2 | 54 |
- Dat is 54%.
- d** Nee, want in de steekproef speelt toeval een rol en hierdoor kan het resultaat iets afwijken.
- 7 a** Ongeveer $0,7 \times 900\,000 = 630\,000$ scholieren krijgen zakgeld.
- b** Van alle middelbare scholieren heeft 1 op de 3 een bijbaantje. Brugklassers hebben gemiddeld veel minder vaak een bijbaantje, leerlingen uit hogere klassen gemiddeld juist vaker.

12A Zicht op toeval

- 03 a De jeugdcommissie wil de mening van de inwoners weten.
 b Alleen mensen die op maandag tussen 9.00 uur en 16.00 uur telefonisch bereikbaar zijn, hebben kans om in de steekproef terecht te komen.
 c De steekproef is niet betrouwbaar.
 d In ieder geval moeten jongeren ondervraagd worden en ook inwoners met opgroeiende kinderen.
- 05 a De mensen die in mei niet op het gemeentehuis hoefden te zijn, kunnen niet in de steekproef terecht komen.
 b De mensen die de site van de gemeente bezocht hebben.
 c Ja, want zo heeft iedere inwoner die wel eens wat moet regelen op het gemeentehuis evenveel kans om in de steekproef terecht te komen.
- U1 De studenten staan allemaal onder een nummer ingeschreven bij de hogeschool. Door loting onder deze nummers is een aantal studenten (bijvoorbeeld 1000) te selecteren. Die vormen een betrouwbare steekproef.

12A.2 Simuleren

intro De voorlichter wil laten zien hoe zeldzaam het volgens hem is dat er een ongeluk gebeurt met de kerncentrale.

- 8 a -
 b -
 c Waarschijnlijk zal ieder cijfer ongeveer even vaak voorkomen, maar het zal zeker niet zo zijn dat ieder cijfer precies vier keer voorkomt.
 d De kans op een even cijfer is even groot als de kans op een oneven cijfer, want er zijn vijf even cijfers namelijk 0, 2, 4, 6 en 8 en vijf oneven cijfers namelijk 1, 3, 5, 7 en 9.
 e Ieder cijfer zal ongeveer $\frac{1}{10} \times 30\,000 = 3000$ keer voorkomen.
- 9 a Je krijgt telkens een getal met drie cijfers achter de komma. Het getal 0,85 is dan eigenlijk 0,850.
 b -
 c -
 d -

10 a

<i>gezinsamenstelling</i>	<i>frequentie</i>
3 jongens	2
2 jongens, 1 meisje	6
1 jongen, 2 meisjes	7
3 meisjes	5

- b In 5 van de 20 gezinnen zijn er drie meisjes, dat is een kwart.
 In 25% van de gezinnen zijn er drie meisjes.

- c De kans op een gezin met bijvoorbeeld één jongen en twee meisjes is groter dan de kans op drie meisjes. Bij de eerste kans heb je als mogelijke volgordes waarin de kinderen geboren worden jmm, mjm en mmj, maar bij de tweede kans heb je alleen de volgorde mmm.
- d In de simulatie komt de gezinssamenstelling met één jongen en twee meisjes het vaakst voor.
- e In 7 van de 20 gezinnen is er één jongen en zijn er twee meisjes.

aantal gezinnen	20	1	7
percentage	100	5	35

Dat is 35% van de gezinnen.

- 11 a Bij een dobbelsteen is de kans op een zes 1 op 6, maar bij toevalsgetallen is de kans op een zes 1 op 10 en bij toevalsgetallen kunnen ook getallen groter dan zes voorkomen.
- b Ja, de simulatie van Elgin is goed. Hij neemt alleen de toevalsgetallen 1 tot en met 6, en dat komt overeen met de aantallen ogen op een dobbelsteen.
- 12 a Een getal bestaat uit vier cijfers, dus elk cijfer uit dat getal stelt een kind voor. Er zijn vijf cijfers (0 tot en met 4) die een meisje voorstellen en ook vijf cijfers (5 tot en met 9) die een jongen voorstellen. De kans dat een cijfer een meisje voorstelt is dus even groot als de kans dat het een jongen voorstelt.
- b -
- c -
- d $384 : 253 = 1,517...$
De kans op twee meisjes en twee jongens is ongeveer 1,5 keer zo groot als de kans op drie meisjes en één jongen.
- e Om in een gezin van vier kinderen twee meisjes en twee jongens te krijgen, zijn er meer verschillende volgorden mogelijk dan drie meisjes en één jongen.
- f Yvonne heeft gelijk.
- 13 a Het toevalsgetal 365 stelt 31 december voor.
- b De toevalsgetallen 366 tot en met 999 en 000 worden niet gebruikt.
- c In de 50 groepen kwam het 13 keer voor dat er geen twee of meer toevalsgetallen hetzelfde waren. In deze groepen waren de toevalsgetallen allemaal verschillend en zijn de leerlingen dus op verschillende dagen jarig. 13 op de 50 is gelijk aan 26%.
- d De kans dat er twee of meer leerlingen op dezelfde dag jarig zijn is $100\% - 26\% = 74\%$.

- 010 a 9 is oneven en 2 is even.

simulatie	94	66	03	92	27	99	62	59	69	08
resultaat	mk	kk	km	mk	km	mm	kk	mm	km	kk

resultaat	2 keer munt	1 keer munt, 1 keer kop	2 keer kop
frequentie	2	5	3

- d Met 1 keer kop en 1 keer munt kun je 2 rijtjes maken, met 2 keer kop kun je maar één rijtje maken.

12A Zicht op toeval

- 011 a** De kans op 3 is 1 op 4, dus naar verwachting zal de pijl $20 : 4 = 5$ keer het cijfer 3 aanwijzen.
- b** Bij elke 10 cijfers komt de 3 gemiddeld één keer voor.
Bij 20 cijfers zal naar verwachting 2 keer het cijfer 3 staan.
- c** Je kunt 10 cijfers niet in groepjes van 4 cijfers verdelen.
- d** Als je alleen de cijfers 1 tot en met 4 gebruikt, heeft elk cijfer 25% kans om te verschijnen en dat komt overeen met de verdeling op de kanstol.
- U2 a** Maak met toevalsgetallen een rij cijfers. Laat de cijfers 0, 7, 8 en 9 weg.
Vorm vervolgens tweetallen. Elk tweetal is dan een simulatie van een worp met twee dobbelstenen.
- b** -
- c** -
- d** De som 7 is op meer manieren te krijgen dan de som 2. Meer tweetallen leveren dus som 7 op dan dat ze som 2 opleveren.

12A.3 Kansexperimenten

intro Nee, bij elke worp is de kans op een 6 even groot als de kans op een ander getal.

- 14 a** Als je 30 keer met een geldstuk gooit, dan verwacht je dat ongeveer $30 : 2 = 15$ keer kop boven komt.
- b** -
- c** -
- d** Elie heeft gelijk. Bij elke worp is opnieuw de kans op munt en de kans op kop even groot, dus bij vier worpen gooi je gemiddeld twee keer kop en twee keer munt.

15 a

<i>aantal keren gedraaid</i>	10	50	100	1000
<i>aantal keren een 1</i>	4	37	71	671
<i>percentage</i>	40%	74%	71%	67,1%

- b** Hoe meer keer je draait, hoe meer het resultaat overeenkomt met wat je mag verwachten. Bij 1000 keer draaien is er ongeveer 2 op 3 keer een 1 gedraaid. Dat resultaat komt overeen met tol A.
Rob heeft waarschijnlijk tol A gebruikt.
- 16 a** Na 20 keer gooien mag je 10 keer kop verwachten.
Het verschil is $11 - 10 = 1$.
- b** Na 200 keer gooien is het verschil $100 - 92 = 8$ en na 2000 keer gooien is het verschil $1000 - 986 = 14$.
- c** Het verwachte percentage keren kop is 50%.
Na 20 keer gooien is er $11 : 20 \times 100 = 55\%$ keer kop gegooid,
na 200 keer gooien is dat $92 : 200 \times 100 = 46\%$ en
na 2000 keer gooien is dat $986 : 2000 \times 100 = 49,3\%$.
Na 2000 keer gooien komt het percentage het dichtst bij de 50%.
Door het grote aantal worpen is de afwijking relatief klein.

17 a -

aantal keer gooien	250	1	38
percentage	100	0,4	15,2

In 15,2% van de gevallen was in de eerste worp al zes gegoooid.

- c De kans dat je na drie keer gooien nog geen zes hebt is volgens de tabel 147 op 250.

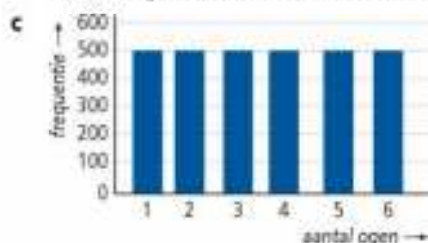
aantal keer gooien	250	1	147
percentage	100	0,4	58,8

De kans dat je na drie keer gooien nog geen zes hebt is volgens de tabel 58,8%.

- d De kans op een 6 is bij elke worp 1 op 6 ofwel $\frac{1}{6}$.

18 a De kans dat je een vier gooit, is volgens het staafdiagram $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

- b Nee, je verwacht dat ieder aantal ogen ongeveer even vaak voor zal komen, maar het aantal ogen 1 komt veel minder voor dan je zou verwachten en het aantal ogen 3 komt veel vaker voor dan je zou verwachten.



19 a Twaalf ogen kun je alleen krijgen bij 6 ogen plus 6 ogen, maar tien ogen kun je krijgen bij 4 ogen plus 6 ogen, bij 5 ogen plus 5 ogen en bij 6 ogen plus 4 ogen.

De kans op tien ogen is dus drie keer zo groot als de kans op twaalf ogen.

- b Van de 4000 worpen was 118 keer het resultaat 12 ogen.

aantal keer gooien	4000	1	118
percentage	100	0,025	2,95

De kans op 12 ogen is ongeveer 3%.

- c Van de 4000 worpen was 643 keer het resultaat 7 ogen.

aantal keer gooien	4000	1	643
percentage	100	0,025	16,075

De kans op 7 ogen is ongeveer 16%.

- d In totaal zijn er 36 manieren waarvan er zes 7 ogen opleveren.

De kans op 7 ogen is dus 6 op 36 ofwel $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ dus $100 : 6 = 16,7\%$.

- e Volgens de simulatie is de kans op 9 ogen (439 keer) groter dan die op 5 ogen (426 keer).

- f De worpen (1, 4), (2, 3), (3, 2) en (4, 1) leveren 5 ogen op.

De worpen (3, 6), (4, 5), (5, 4) en (6, 3) leveren 9 ogen op.

De kans op 5 ogen is 4 op 36, die op 9 ogen ook.

- g Er zijn 2 worpen die 3 ogen opleveren, namelijk (1, 2) en (2, 1).

Er zijn ook 2 worpen die 11 ogen opleveren, namelijk (5, 6) en (6, 5).

De kans op 11 ogen is gelijk aan de kans op 3 ogen.

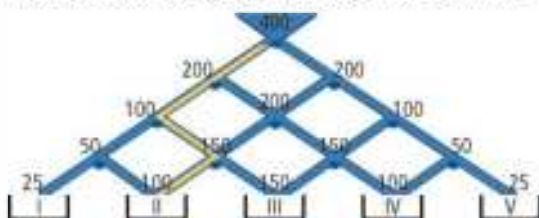
12A Zicht op toeval

- 016 a** De kans op rood is 3 op 4, dus 75%.
 Na 20 keer draaien verwacht je $0,75 \times 20 = 15$ keer rood,
 na 200 keer draaien $0,75 \times 200 = 150$ keer rood en
 na 2000 keer draaien $0,75 \times 2000 = 1500$ keer rood.
- b** $15 - 14 = 1$, $155 - 150 = 5$ en $1500 - 1488 = 12$.
 Bij 20 keer draaien is het verschil het kleinst.
- c** De kans op rood is 75%.
- d** Na 20 keer draaien is er $14 : 20 \times 100 = 70\%$ keer rood gedraaid,
 na 200 keer draaien is dat $155 : 200 \times 100 = 77,5\%$ en
 na 2000 keer draaien is dat $1488 : 2000 \times 100 = 74,4\%$.
- e** Na 2000 keer draaien komt het percentage het dichtst bij de 75%.
 Je deelt het verschil door een groot getal, waardoor het relatieve verschil klein wordt.

- U3** Als Dion alleen de 4 opnieuw gooit, dan komt hij op een hoger getal uit als hij 5 of 6 gooit. De kans daarop is 2 op 6 of $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
 Als Dion zowel de 4 als de 5 opnieuw gooit, dan komt hij op een hoger getal uit als hij 16, 26, 36, 46, 56, 66, 55, 61, 62, 63, 64 of 65 gooit. De kans daarop is 12 op 36 of $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.
 Het maakt voor Dion niet uit welke keuze hij maakt.

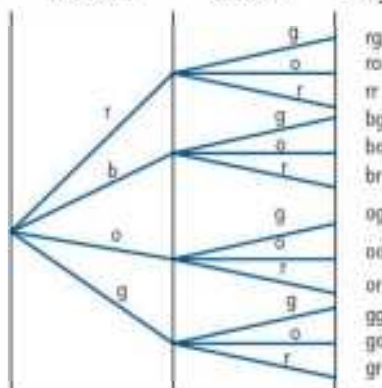
12A.4 Kansen berekenen

intro Bij elk pinnetje gaat de helft van de knikkers naar links en de andere helft naar rechts. Dat geeft het volgende schema:



25 in bakje I, 100 in bakje II, 150 in bakje III, 100 in bakje IV en 25 in bakje V.

- 20 a**



- b** Er zijn $4 \times 3 = 12$ verschillende mogelijkheden.
- c** Van de 12 verschillende mogelijkheden is er één keer gg.
 De kans op twee keer groen is 1 op 12 of $\frac{1}{12}$.

- d Van de 12 verschillende mogelijkheden zijn er 6 zonder groen.
De kans op geen groen is 6 op 12 of $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
- e Rood en groen komt twee keer voor (rg en gr).
De kans op rood en groen is 2 op 12 of $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
- 21** a Er zijn $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ verschillende rijtjes.
b Er is maar één rijtje met vier keer kop, dus de kans op vier keer kop is 1 op 16 of $\frac{1}{16}$.
c Er zijn vier rijtjes met drie keer kop en één keer munt: *kkkm*, *kkmk*, *kmkk* en *mkkk*.
d Die kans is 4 op 16 of $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.
- 22** a Er zijn in totaal $4 \times 4 = 16$ volgordes.
b Er zijn twee sectoren geel en maar een sector blauw.
c De fout die Jean maakt is dat er bij de eerste keer draaien niet drie, maar vier mogelijkheden met gelijke kans zijn. Hetzelfde geldt bij de tweede keer draaien.
d Bij beide keren draaien zijn er twee mogelijkheden om op geel uit te komen.
- e
- | | | 1e keer | | |
|---------|---|---------|----|----|
| | | r | g | b |
| 2e keer | r | rr | gr | br |
| | g | rg | gg | bg |
| | b | rb | gb | bb |
| | | | | |
- f Van de 16 volgordes is er één keer bb.
De kans op bb is 1 op 16 of $\frac{1}{16}$.
- g Van de 16 volgordes zijn er vier keer gg.
De kans op gg is 4 op 16 of $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.
- 23** a Het rad is verdeeld in zes even grote sectoren, waarvan er één groen is.
De kans dat de pijl de groene sector aanwijst, is 1 op 6 of $\frac{1}{6}$.
b Elke keer dat je draait, is de kans dat de pijl op de blauwe sector komt, twee keer zo groot als de kans dat de pijl op de groene sector komt.
- c
- | 1e keer | 2e keer | 3e keer | 4e keer | 5e keer | 6e keer |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| b | bb | bb | grb | geb | geb |
| b | bb | bb | grb | geb | geb |
| gr | bgr | bgr | grgr | gegr | gegr |
| ge | bge | bge | grge | gege | gege |
| ge | bge | bge | grge | gege | gege |
| ge | bge | bge | grge | gege | gege |
- Er zijn in totaal $6 \times 6 = 36$ volgordes, waarvan vier met twee keer blauw.
De kans op twee keer blauw is 4 op 36 of $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.
- d Bij drie keer draaien zijn er in totaal $6 \times 6 \times 6 = 216$ mogelijke volgordes, waarvan er één met drie keer groen (gr gr gr).
De kans op drie keer groen is 1 op 216 of $\frac{1}{216}$.
- 24** a Voor het eerste cijfer moet 2, 3, 5 of 9 worden ingesteld. Het cijfer dat wordt ingesteld zal daarna niet meer als tweede cijfer worden ingesteld, dus er blijven drie cijfers over.

12A Zicht op toeval

- b Er zijn in totaal $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ verschillende combinaties, waarvan er maar één de juiste is.
De kans dat je in één keer de juist combinatie vindt is 1 op 24 of $\frac{1}{24}$.
- c Met de cijfers 1, 7, 7 en 9 van Harm zijn $24 : 2 = 12$ verschillende combinaties te maken.
De kans dat je in één keer de juiste combinatie vindt, is 1 op 12 of $\frac{1}{12}$.
- 25 a Bij de eerste dobbelsteen komt 6 gooien één keer voor, maar geen 6 gooien moet eigenlijk vijf keer voorkomen. Hetzelfde geldt bij de tweede dobbelsteen.
- b Een tabel maken is bij het vinden van deze kans handiger, want een correct boomdiagram zou eigenlijk $6 \times 6 = 36$ combinaties moeten bevatten.

c

						
	11	12	13	14	15	16
	21	22	23	24	25	26
	31	32	33	34	35	36
	41	42	43	44	45	46
	51	52	53	54	55	56
	61	62	63	64	65	66

De kans op één keer 6 en één keer geen 6 is 10 op 36 of $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

- d Er zijn 25 van de 36 volgorde zonder 6.
De kans op twee keer geen 6 is 25 op 36 of $\frac{25}{36}$.

aantal	36	1	25
percentage	100	2,777...	69,444...

De kans op twee keer geen 6 is ongeveer 69,44%.

- e Een boomdiagram hierbij zal uit $6 \times 6 \times 6 = 216$ takken bestaan.
Er zijn met drie dobbelstenen dus 216 verschillende volgorde.
Er is maar één volgorde met drie keer 6 (namelijk 666).
De kans op drie keer 6 is 1 op 216 of $\frac{1}{216}$.

- 021 a $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$
- b Van de acht verschillende rijtjes is er één met drie keer kop. Dus is de kans op drie keer kop 1 op 8 of $\frac{1}{8}$.
- c De drie rijtjes zijn *kkk*, *kkm* en *mkk*.
- d Die kans is 3 op 8 of $\frac{3}{8}$.
- e Bij vijf keer gooien zijn er $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ verschillende rijtjes.
- f Er is precies één rijtje met vijf keer kop, dus die kans is 1 op 32 of $\frac{1}{32}$.
- g Er zijn vijf rijtjes met vier keer kop en één keer munt: *kkkkk*, *kkkkm*, *kkmkk*, *kmkkk* en *mkkkk*. De kans is dus 5 op 32 of $\frac{5}{32}$.

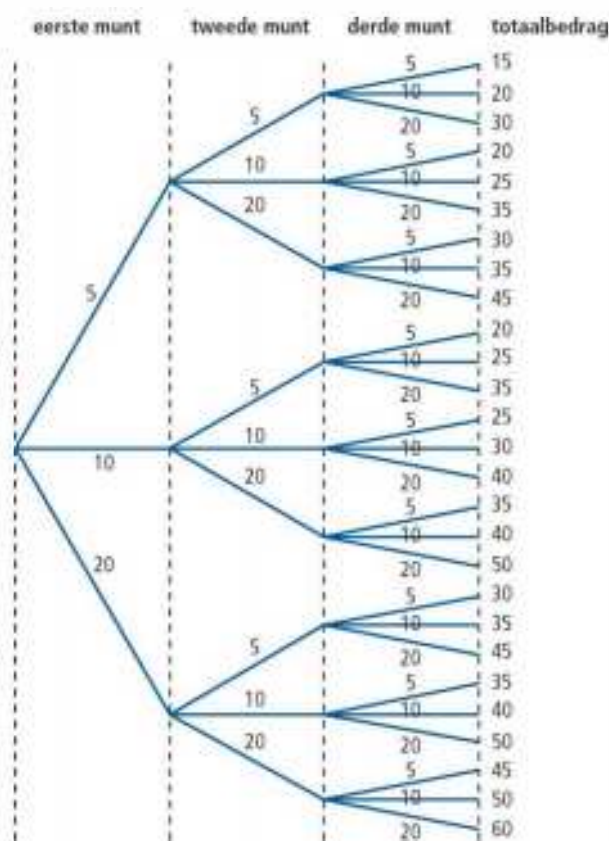
- 023 a Slechts één van de vier sectoren is blauw.
- b Drie sectoren zijn rood, één sector is blauw.

c

		1e keer			
		r	r	r	b
2e keer	r	rr	rr	rr	br
	r	rr	rr	rr	br
	r	rr	rr	rr	br
	b	rb	rb	rb	bb

- d Van de 16 mogelijkheden is er één met bb.
De kans op twee keer blauw is 1 op 16 of $\frac{1}{16}$.
- e Van de 16 mogelijkheden zijn er 9 met rr.
De kans op twee keer rood is 9 op 16 of $\frac{9}{16}$.
- f Van de 16 mogelijkheden zijn er 6 met rb of br.
De kans op één keer blauw en één keer rood is 6 op 16 of $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

U4



Uit het boomdiagram blijkt dat Lois telkens 35 cent noemt, want dat bedrag komt het vaakst voor. De kans dat ze winst is $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

12A.5 Gemengde opdrachten

- 26 a De hoek van 36° hoort bij een prijs van € 1.000,-, de hoeken van 72° horen bij de prijzen van € 250,- en € 100,- en de hoek van 180° hoort bij een prijs van € 10,-.
- b De kans op een prijs van € 250,- is $\frac{72}{360} = \frac{1}{5}$.
- c De kans op een prijs van € 10,- is $\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$, de kans op een prijs van € 100,- is $\frac{72}{360} = \frac{1}{5}$ en de kans op een prijs van € 1.000,- is $\frac{36}{360} = \frac{1}{10}$.
- d Je kunt ongeveer $\frac{1}{2} \times 200 = 100$ keer een prijs van € 10,- verwachten, ongeveer $\frac{1}{5} \times 200 = 40$ keer een prijs van € 100,-, ongeveer $\frac{1}{5} \times 200 = 40$ keer een prijs van € 250,- en ongeveer $\frac{1}{10} \times 200 = 20$ keer een prijs van € 1.000,-. Deze aantallen kloppen redelijk met de resultaten in de tabel.
- e Simuleer met toevalsgetallen en neem bijvoorbeeld de cijfers 1, 2, 3, 4 en 5 voor een prijs van € 10,-, de cijfers 6 en 7 voor een prijs van € 100,-, de cijfers 8 en 9 voor een prijs van € 250,- en het cijfer 0 voor een prijs van € 1.000,-. Maak rijtjes van drie toevalsgetallen en tel de bijbehorende prijzen bij elkaar op.

12A Zicht op toeval

- 27 a De kans op een uitbetaling van € 2,50 is 1 op 5 of $\frac{1}{5}$.
 b De kans dat je minder dan € 1,50 krijgt is 3 op 5 of $\frac{3}{5}$.
 c Ja, ook de worpen van € 0,00 + € 1,50 en € 0,50 + € 1,00 geven € 1,50 als bedrag.

d

		tweede pijl				
		0,00	0,50	1,00	1,50	2,50
eerste pijl	0,00	0,00	0,50	1,00	1,50	2,50
	0,50	0,50	1,00	1,50	2,00	3,00
	1,00	1,00	1,50	2,00	2,50	3,50
	1,50	1,50	2,00	2,50	3,00	4,00
	2,50	2,50	3,00	3,50	4,00	5,00

- e Er zijn 25 mogelijke combinaties, waarvan er vier het bedrag € 2,50 opleveren. De kans dat je precies de € 2,50 die je betaald hebt terug krijgt is 4 op 25 of $\frac{4}{25}$.
 f Van de 25 combinaties zijn er 15 die meer dan € 1,50 opleveren. De kans dat je meer dan € 1,50 terug krijgt is 15 op 25 of $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.
 g Van de 25 combinaties zijn er vijf waarbij de twee bedragen hetzelfde zijn. De kans dat je twee keer hetzelfde bedrag raakt is 5 op 25 of $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

28

		linker tol			
		r	r	b	g
rechter tol	r	rr	rr	br	gr
	r	rr	rr	br	gr
	b	rb	rb	bb	gb
	g	rg	rg	bg	gg

De kans op twee keer rood is 4 op 16 ofwel $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. Je mag dus ongeveer $300 : 4 = 75$ keer rr verwachten. Dat klopt aardig met de 72 in de tabel.
 De kans op twee keer geel is 1 op 16 of $\frac{1}{16}$. Je mag dus ongeveer $300 : 16 = 19$ keer gg verwachten. In de tabel heeft in het laatste vakje dus 19 gestaan.
 Verder moet het totaal van de frequenties in de drie vakjes 114 zijn, dus bij blauw heeft $114 - 72 - 19 = 23$ gestaan.

- 29 a Zo'n tenniswedstrijd kan maximaal drie sets duren.
 b De mogelijke wedstrijdverlopen zijn NN, NVN, VNN, VV, VNV en NVV.
 c Een wedstrijd is na twee sets voorbij als of Noa de eerste twee sets gewonnen heeft, of Vera de eerste twee sets gewonnen heeft. Bij de toevalsgetallen is dat het geval als een drietal begint met twee even getallen of met twee oneven getallen.
 Van de 30 drietallen is dat 13 keer het geval.
 Van de 30 wedstrijden zijn er 13 na twee sets voorbij.
 d Van de 30 wedstrijden worden er 10 door Vera gewonnen. Dat is minder dan je mag verwachten. Omdat beide spelers even sterk zijn, mag je verwachten dat ze beiden ongeveer 15 wedstrijden zouden winnen.

- 30 a** De combinatie bel en bel zal het minst voorkomen, want er staat maar één bel op ieder van de trommels.
- b** Er zijn tien mogelijkheden waarvan vier appels.
De kans dat dan in het rechter venster ook een appel te zien zal zijn is $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.
- c** Er zijn in totaal $10 \times 10 = 100$ combinaties mogelijk. Daarvan zijn er $5 \times 5 = 25$ met twee citroenen. De kans dat je twee citroenen te zien krijgt is $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.
- d** Met een citroen heb je de grootste kans zo'n prijs te winnen, want op ieder van de trommels staat het figuurtje citroen het vaakst.
- e** Er zijn in totaal $10 \times 10 = 100$ combinaties mogelijk. Daarvan zijn er $5 \times 5 = 25$ met twee citroenen, $4 \times 4 = 16$ met twee appels en $1 \times 1 = 1$ met twee bellen. Er zijn in totaal $25 + 16 + 1 = 42$ combinaties waarmee je een prijs wint.
De kans dat je een prijs wint is $\frac{42}{100} = \frac{21}{50}$.

Samenvatting

- S1 a** Bij zeven toevalsgetallen zijn twee cijfers even en één oneven, dus bij zeven simulaties is er sprake van twee keer kop en één keer oneven.
- b** De kans op twee keer kop en één keer munt is bij deze simulatie 7 op 20 of $\frac{7}{20}$ en dat is 35%.
- S2 a** Methode A geeft een goede steekproef, tenminste als de 245 bovenbouwleerlingen willekeurig worden gekozen zodat iedere bovenbouwleerling dezelfde kans heeft een vragenlijst te krijgen.
Methode B geeft geen goede steekproef, want alleen bovenbouwleerlingen uit Rotterdam krijgen een vragenlijst. Ook is vijf veel te weinig.
Methode C geeft geen goede steekproef, want alleen geslaagde leerlingen die op de diploma-uitreiking in Den Haag aanwezig zijn krijgen een vragenlijst.
Methode D geeft wel een goede steekproef.
- b** Bij de methode moet in ieder geval iedereen dezelfde kans hebben om in de steekproef terecht te komen en de steekproef moet voldoende groot zijn.
- S3 a** Het draaien met kanstol 1 kun je bijvoorbeeld simuleren door 0 en 1 te kiezen voor blauw, 2 en 3 te kiezen voor rood, 4 en 5 te kiezen voor groen, 6 en 7 te kiezen voor oranje en de toevalsgetallen 8 of 9 niet mee te tellen.
- b** Het draaien met kanstol 2 kun je met een dobbelsteen bijvoorbeeld simuleren door 1 en 2 ogen te kiezen voor groen, 3 en 4 ogen te kiezen voor rood en 5 en 6 ogen te kiezen voor oranje.
- S4 a** De kans op een 6 is 1 op 6 of $\frac{1}{6}$.
- b** Bij 30 keer gooien verwacht je $30 : 6 = 5$ keer een 6. Het verschil is $5 - 4 = 1$.
- c** Bij 300 keer gooien verwacht je $300 : 6 = 50$ keer een 6.
Het verschil is $57 - 50 = 7$.
Bij 3000 keer gooien verwacht je $3000 : 6 = 500$ keer een 6.
Het verschil is $500 - 483 = 17$.

12A Zicht op toeval

d

<i>aantal keer</i>	30	1	4
<i>percentage</i>	100	3,3333...	13,3333...

Bij 30 keer gooien is ongeveer in 13,3% van de worpen 6 gegoooid.

<i>aantal keer</i>	300	1	57
<i>percentage</i>	100	0,3333...	19

Bij 300 keer gooien is in 19% van de worpen 6 gegoooid.

<i>aantal keer</i>	3000	1	483
<i>percentage</i>	100	0,0333...	16,1

Bij 3000 keer gooien is in 16,1% van de worpen 6 gegoooid.

- e Je mag verwachten dat in $100 : 6 \approx 16,7\%$ van de worpen 6 wordt gegoooid.
Het resultaat bij 3000 keer gooien komt daar het best mee overeen.

S5 a

						
	0	1	2	3	4	5
	1	0	1	2	3	4
	2	1	0	1	2	3
	3	2	1	0	1	2
	4	3	2	1	0	1
	5	4	3	2	1	0

- b Het verschil 0 komt zes keer voor.

- c De kans op verschil 0 is 6 op 36 of $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
Dat is $100 : 6 = 16,7\%$.

d

<i>verschil van de ogen</i>	0	1	2	3	4	5
<i>kans in procenten</i>	16,7	27,8	22,2	16,7	11,1	5,6

- e De kans op een verschil van 3 ogen is 1 op 6. Als er 2400 keer wordt geworpen, dan verwacht je $2400 : 6 = 400$ keer een verschil van 3 ogen.

Test jezelf

- T1 a Bij methode A worden alleen mensen die in Apeldoorn wonen gebeld en niemand die in een andere plaats woont.
Bij methode B kunnen alleen mensen die hun website bezoeken reageren.
Bij methode C kunnen mensen die naar school gaan of werken niet meedoen.
- b Dat moet een methode zijn waarbij iedereen een even grote kans heeft om in de steekproef te komen en de steekproef moet groot genoeg zijn.
- c
- | | | | |
|-----------------------------|------|------|-----|
| <i>aantal ondervraagden</i> | 2000 | 1 | 56 |
| <i>percentage</i> | 100 | 0,05 | 2,8 |
- Van de ondervraagden kent 2,8% het spel.
- d Ongeveer $0,028 \times 17\,300\,000 = 484\,400$ Nederlanders kennen het spel.

T2 a Met drie dobbelstenen zijn er $6 \times 6 \times 6 = 216$ verschillende mogelijkheden.

Bij één mogelijkheid is de som van de ogen 18, namelijk bij $6 + 6 + 6$.

De kans dat de som 18 is, is 1 op 216 of $\frac{1}{216}$.

b $17 = 6 + 6 + 5$ of $17 = 6 + 5 + 6$ of $17 = 5 + 6 + 6$

c De kans op 17 punten is 3 op 216 of $\frac{3}{216} = \frac{1}{72}$.

d $16 = 6 + 6 + 4$ $5 = 2 + 2 + 1$

$16 = 6 + 4 + 6$ $5 = 2 + 1 + 2$

$16 = 4 + 6 + 6$ $5 = 1 + 2 + 2$

$16 = 5 + 5 + 6$ $5 = 3 + 1 + 1$

$16 = 5 + 6 + 5$ $5 = 1 + 3 + 1$

$16 = 6 + 5 + 5$ $5 = 1 + 1 + 3$

Er zijn evenveel mogelijkheden om 5 punten te krijgen als om 16 punten te krijgen, dus de kans op 5 punten is even groot als de kans op 16 punten.

T3 a Gebruik de cijfers 0 tot en met 9.

De cijfers 0, 1 en 2 stellen voor dat Boris wint, de cijfers 3 en 4 stellen voor dat Ton wint en de cijfers 5, 6, 7, 8 en 9 stellen remise voor.

b Bij elke wedstrijd zijn er 10 mogelijkheden waarvan er 5 remise zijn.

Bij drie wedstrijden zijn er $10 \times 10 \times 10 = 1000$ mogelijkheden, waarvan er $5 \times 5 \times 5 = 125$ mogelijkheden drie keer remise voorstellen.

De kans op drie keer remise is 125 op 1000 of $\frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$.

c Bij twee wedstrijden zijn er $10 \times 10 = 100$ mogelijkheden, waarvan er $2 \times 2 = 4$ mogelijkheden voorstellen dat Ton twee keer wint.

De kans dat Ton twee keer wint is 4 op 100 of $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$.

T4 a De puntenaantallen 2, 3, 4, 5 en 6 zijn mogelijk.

	1e tol		
	1	2	3
2e tol	1	2	3
	2	3	4
	3	4	5
	4	5	6

In totaal zijn er $3 \times 4 = 12$ volgordes mogelijk, waarvan er drie de som 3 opleveren. De kans dat je drie punten krijgt is $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

c Meer dan vier punten kun je op vier manieren krijgen, namelijk als $2 + 3$, als $3 + 2$, als $3 + 2$ en als $3 + 3$.

De kans dat je meer dan vier punten krijgt is $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

d Je kunt twee punten op één manier krijgen, drie punten op drie manieren, vier punten op vier manieren, vijf punten op drie manieren en zes punten op één manier.

De grootste kans hoort bij vier punten.

e De kans op 2 punten is 1 op 12.

Bij 500 keer spelen mag je $500 : 12 = 42$ keer 2 punten verwachten.

12A Zicht op toeval

- T5 a** Naar verwachting zullen $24 : 6 = 4$ leerlingen minder dan tien keer per dag een appje verzenden.
- b** Ja, het gooien van een 6 komt overeen met een leerling die minder dan 10 keer per dag een appje verzendt. De 24 worpen komen overeen met de 24 leerlingen.
- c** Nee. De klas van Annelot is blijkbaar niet representatief voor alle Nederlanders van 13 jaar en 14 jaar. In haar klas zijn veel meer leerlingen die minder dan 10 appjes versturen dan je mag verwachten.
- T6** Bij elke worp zijn er vier mogelijke uitkomsten.
 Bij drie worpen heb je dan $4 \times 4 \times 4 = 64$ verschillende volgordes.
 Er zijn zes volgordes met de drie kleuren geel, blauw en groen, namelijk:
 ge, bl, gr
 ge, gr, bl
 gr, ge, bl
 gr, bl, ge
 bl, gr, ge
 bl, ge, gr
 De kans op één keer geel, één keer blauw en één keer groen is 6 op 64 of $\frac{6}{64} = \frac{3}{32}$.

Extra oefening

- E1 a** Methode A is niet geschikt, want mensen die niet luisteren reageren niet.
 Methode B is niet geschikt, want mensen die niet naar een discotheek gaan, kunnen niet ondervraagd worden.
 Methode C is niet geschikt, want alleen lezers van het muziektijdschrift reageren.
 Methode D is niet geschikt, want niet iedereen gaat winkelen op zaterdagochtend.
 Bij al deze methoden geldt dat niet iedereen dezelfde kans heeft om ondervraagd te worden.
- b** Bijvoorbeeld via een bevolkingsregister 1000 mensen verspreid over Nederland selecteren.
- c** Nee, want die 37 van de 3000 ondervraagden die regelmatig luisteren vormen een gemiddelde. De inwoners van Oldebroek vormen niet dat gemiddelde, want er zitten bijvoorbeeld geen mensen uit grote steden bij.
- E2 a** De kans op twee meisjes schat hij op 9 op 25 of $\frac{9}{25}$.
- b** De geschatte kans is nu 37 op 100 of $\frac{37}{100}$.
- c** mmm, mmj, mjm, jmm, mj, jmj, jjm, jjj
- d** Van de acht volgordes zijn er drie met twee meisjes en één jongen.
 De kans op twee meisjes is 3 op 8 of $\frac{3}{8}$.

E3 a Gebruik de cijfers 0 tot en met 9.

De cijfers 0 en 1 stellen de uitkomst 1 voor, de cijfers 2 en 3 de uitkomst 2, de cijfers 4 en 5 de uitkomst 3, de cijfers 6 en 7 de uitkomst 4 en de cijfers 8 en 9 de uitkomst 5.

b Gebruik de cijfers 0 tot en met 7. Laat de cijfers 8 en 9 weg.

De cijfers 0 en 1 stellen zwart voor, de cijfers 2 en 3 stellen rood voor, de cijfers 4 en 5 stellen wit voor en de cijfers 6 en 7 stellen geel voor.

E4 a

<i>aantal</i>	30	1	5
<i>percentage</i>	100	3,333...	16,666...

Bij 30 keer draaien is het percentage dat de letter L voorkomt ongeveer 16,7%.

b

<i>aantal</i>	300	1	54
<i>percentage</i>	100	0,333...	18

Bij 300 keer draaien is het percentage dat de letter L voorkomt 18%.

<i>aantal</i>	3000	1	534
<i>percentage</i>	100	0,033...	17,8

Bij 3000 keer draaien is het percentage dat de letter L voorkomt 17,8%.

c De kans op de letters S, P, L of N is telkens 1 op 6 en dat is $16\frac{2}{3}\%$.

De kans op de letter E is 2 op 6 en dat is $33\frac{1}{3}\%$.

d Na 8000 keer draaien verwacht je dat de letter S $\frac{1}{6} \times 8000 = 1333$ keer gedraaid zal worden. En de letter E zal $\frac{2}{6} \times 8000 = 2667$ keer gedraaid worden.**E5 a** Deze weddenschap lijkt het gunstigst voor Tjarco, want behalve een 1 en een 6 zijn er nog vier cijfers.

b

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

c De kans op een 1, een 6, of allebei is $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.**d** Nee, want de kans dat Liesbeth wint is $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$ en de kans dat Tjarco wint, is $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.**E6** Bij een worp met twee dobbelstenen zijn er $6 \times 6 = 36$ mogelijkheden.

Van die 36 mogelijkheden zijn er 2 die de som 3 opleveren: $1 + 2$ en $2 + 1$.

De kans om met twee dobbelstenen 3 ogen te gooien is 2 op 36 of $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

De kans om met de tol 3 te draaien is 1 op 11 of $\frac{1}{11}$.

Omdat $\frac{1}{11} > \frac{1}{18}$ kun je beter voor de tol kiezen.

12B Cirkels

Voorkennis

- V1 a** $x = 0$ geeft $4y = 16$ dus $y = 4$.
Grafiek 1 gaat door $(0, 4)$ dus die hoort bij de formule.
- b** $4y = -2x + 16$
 $y = -\frac{1}{2}x + 4$
Het startgetal is 4 en het hellingsgetal is $-\frac{1}{2}$.
- c** Zie b, $y = -\frac{1}{2}x + 4$.
- d** $2x - y = 3$
 $-y = -2x + 3$
 $y = 2x - 3$
Bij de formule hoort de grafiek die de y -as snijdt in $(0, -3)$ dus grafiek 3.
- e** Zie d, $y = 2x - 3$.
- f** Grafiek 2 gaat door de punten $(2, 5)$ en $(4, 2)$.
Het hellingsgetal is $\frac{2-5}{4-2} = -1\frac{1}{2}$.
 $y = -1\frac{1}{2}x + b$ geeft met $x = 2$ en $y = 5$: $5 = -1\frac{1}{2} \cdot 2 + b$
 $5 = -3 + b$ ofwel $b = 8$.
Een formule bij grafiek 2 is $y = -1\frac{1}{2}x + 8$ of ook
 $2y = -3x + 16$ ofwel
 $3x + 2y = 16$

- V2 a** $2p - 3q = 6$
 $-3q = -2p + 6$
 $q = \frac{2}{3}p - 2$
- b** $2p + 5q = 12$
 $5q = -2p + 12$
 $q = -\frac{2}{5}p + 2\frac{2}{5}$
- c** $18p + 6q = 30$
 $6q = -18p + 30$
 $q = -3p + 5$
- d** $p - 3q + 6 = 0$
 $-3q = -p - 6$
 $q = \frac{1}{3}p + 2$

- V3 a** $y = 2 \cdot 7x - 65$
 $y = 14x - 65$
- b** $4y + 3(3 + 2x) = 8$
 $4y + 9 + 6x = 8$
 $4y = -6x - 1$
 $y = -1\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$
- c** $-2t = -x + 8$
 $t = \frac{1}{2}x - 4$
 $-2y + 11 = \frac{1}{2}x - 4$
 $-2y = \frac{1}{2}x - 15$
 $y = -\frac{1}{4}x + 7\frac{1}{2}$

- V4 a** $4(2x - 1) + x = 14$
 $8x - 4 + x = 14$
 $9x - 4 = 14$
 $9x = 18$
 $x = 2$
- b** $y = 2 \times 2 - 1$ dus $y = 3$

- V5 a** $5(2 - 2x) + 2x = 14$
 $10 - 10x + 2x = 14$
 $10 - 8x = 14$
 $-8x = 4$
 $x = -\frac{1}{2}$
 $y = 2 - 2 \times -\frac{1}{2} = 2 + 1 = 3$
 oplossing: $x = -\frac{1}{2}$ en $y = 3$
- b** $3(9 + 3x) + 2x = 5$
 $27 + 9x + 2x = 5$
 $11x + 27 = 5$
 $11x = -22$
 $x = -2$
 $y = 9 + 3 \times -2 = 9 - 6 = 3$
 oplossing: $x = -2$ en $y = 3$
- V6 a** $y = (x + 4)(x + 4)$
 $y = x^2 + 4x + 4x + 16$
 $y = x^2 + 8x + 16$
- b** $y = (x - 2)(x - 2)$
 $y = x^2 - 2x - 2x + 4$
 $y = x^2 - 4x + 4$
- c** $y = (x - 1)(x - 1) + 8$
 $y = x^2 - x - x + 1 + 8$
 $y = x^2 - 2x + 9$
- d** $y = (x + 5)(x + 5) - 25$
 $y = x^2 + 5x + 5x + 25 - 25$
 $y = x^2 + 10x$
- V7 a** $y = x^2 + 8x + 16$
 $y = (x + 4)^2 - 16 + 16$
 $y = (x + 4)^2$
- b** $y = x^2 - 6x + 17$
 $y = (x - 3)^2 - 9 + 17$
 $y = (x - 3)^2 + 8$
- c** $y = x^2 + 10x - 10$
 $y = (x + 5)^2 - 25 - 10$
 $y = (x + 5)^2 - 35$
- d** $y = x^2 + x + 1$
 $y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1$
 $y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$
- V8 a** $2x^2 + 3x - 2 = 0$
 $a = 2, b = 3$ en $c = -2$ geeft $D = 3^2 - 4 \times 2 \times -2 = 25$.
 $x = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{-3 - 5}{4}$ of $x = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{-3 + 5}{4}$
 $x = -2$ of $x = \frac{1}{2}$
- b** $a = 1, b = -4$ en $c = 5$ geeft $D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4$.
- c** Omdat $D < 0$ heeft de vergelijking geen oplossingen.
- d A** $a = 0,5, b = 3$ en $c = -4$ geeft $D = 3^2 - 4 \times 0,5 \times -4 = 17$.
 De vergelijking heeft 2 oplossingen.
- B** $a = 3, b = -1$ en $c = 1$ geeft $D = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 1 = -11$.
 De vergelijking heeft geen oplossingen.
- C** $a = 2, b = 6$ en $c = 5$ geeft $D = 6^2 - 4 \times 2 \times 5 = -4$.
 De vergelijking heeft geen oplossingen.
- D** $a = -1, b = 2$ en $c = -1$ geeft $D = 2^2 - 4 \times -1 \times -1 = 0$.
 De vergelijking heeft 1 oplossing.

12B.1 Vergelijking van een cirkel

intro Afstand tot de rechter appel:

zijde	kwadraat
13	169
2	4 +
afstand = ...	173

De afstand tot de rechter appel

is $\sqrt{173} \approx 13,2$ m.

Het touw heeft een lengte tussen 12,2 m en 13,2 m.

Afstand tot de linker appel:

zijde	kwadraat
10	100
7	49 +
afstand = ...	149

De afstand tot de linker appel

is $\sqrt{149} \approx 12,2$ m.

12B Cirkels

1 a

zijde	kwadraat
15	225
8	64 +
$d = \dots$	289

$$d = \sqrt{289} = 17$$

b

zijde	kwadraat
20	400
9	81 +
$d = \dots$	481

$$d = \sqrt{481}$$

- c** Bij de afstand OA hoort een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden x en y . De lengte van de lange zijde is d . Uit de stelling van Pythagoras volgt dan $x^2 + y^2 = d^2$.

- 2 a** De straal van de cirkel is 5.

- b** Op de cirkel liggen $(5, 0)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(0, 5)$, $(-3, 4)$, $(-4, -3)$ enzovoort.

- c** $5^2 + 0^2 = 25$, klopt

$$4^2 + 3^2 = 25, \text{ klopt}$$

$$3^2 + 4^2 = 25, \text{ klopt}$$

$$0^2 + 5^2 = 25, \text{ klopt}$$

$$(-3)^2 + 4^2 = 25, \text{ klopt}$$

$$(-4)^2 + (-3)^2 = 25, \text{ klopt}$$

- d** $OQ = 5$ (straal) en lijnstuk OQ is de lange zijde van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden x en y . Uit de stelling van Pythagoras volgt dan $x^2 + y^2 = 5^2$ dus $x^2 + y^2 = 25$.

Voor punt R geldt dit ook, maar is de lengte van de horizontale rechthoekszijde gelijk aan $-x$ (omdat x een negatief getal is). Er geldt dan $(-x)^2 + y^2 = 5^2$ ofwel $x^2 + y^2 = 25$.

- e** $2^2 + y^2 = 25$

$$4 + y^2 = 25$$

$$y^2 = 21$$

$$y = -\sqrt{21} \text{ of } y = \sqrt{21}$$

Omdat Q in het eerste kwadrant ligt, is y positief, dus $y = \sqrt{21}$.

- f** $x^2 + 1^2 = 25$

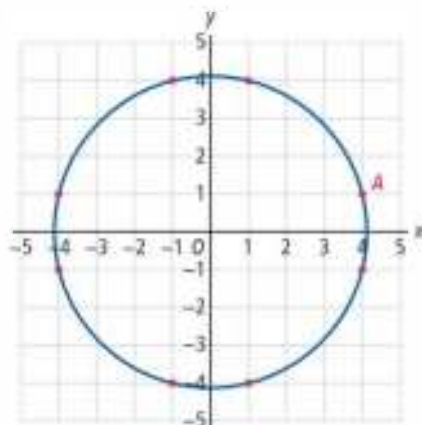
$$x^2 + 1 = 25$$

$$x^2 = 24$$

$$x = -\sqrt{24} = -2\sqrt{6} \text{ of } x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Omdat R in het tweede kwadrant ligt, is x negatief, dus $x = -2\sqrt{6}$.

- 3 a**



zijde	kwadraat
4	16
1	$\frac{1}{1} +$
$OA = \dots$	17

$$OA = \sqrt{17}$$

c Zie de tekening bij opdracht a.

d Zie de tekening bij opdracht a.

e Voor elk punt P dat op de cirkel ligt, is $OP = OA = \sqrt{17}$.

Het lijnstuk OP is telkens de lange zijde van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden x of $-x$ en y of $-y$. Uit de stelling van Pythagoras volgt dan $x^2 + y^2 = (\sqrt{17})^2$ dus $x^2 + y^2 = 17$.

4 a $x^2 + y^2 = 8^2$

$$x^2 + y^2 = 64$$

b De straal is $\sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$.

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{74})^2$$

$$x^2 + y^2 = 74$$

c De straal is $\sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{29})^2$$

$$x^2 + y^2 = 29$$

5 a Noem R het punt $(0, 2)$. Lijnstuk MR is de lange zijde van een driehoek met rechthoekszijden van lengte 3 en 1.

zijde	kwadraat
3	9
1	$\frac{1}{1} +$
$MR = \dots$	10

De straal is $MR = \sqrt{10}$.

b $6 - 3 = 3$

$$2 - 1 = 1$$

zijde	kwadraat
3	9
1	$\frac{1}{1} +$
afstand = ...	10

De afstand van $(6, 2)$ tot $M(3, 1)$ is $\sqrt{10}$, dus $(6, 2)$ ligt op de cirkel.

c De x -coördinaat van Q is gelijk aan die van P , dus x . De afstand MQ bereken je door de x -coördinaten van Q en M van elkaar af te trekken.

d $PQ = y - 1$

e Volgens de stelling van Pythagoras in $\triangle MQP$ is $MQ^2 + PQ^2 = MP^2$, dus $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{10})^2$ ofwel $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$.

6 a Het middelpunt is $(7, 11)$ en de straal is $\sqrt{49} = 7$.

b Het middelpunt is $(-3, 8)$ en de straal is $\sqrt{10}$.

c Het middelpunt is $(0, -5)$ en de straal is $\sqrt{64} = 8$.

7 a $a = 2$, $b = 5$ en $r = 6$, dus $r^2 = 36$

Een vergelijking van de cirkel is $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 36$.

b $a = -2$, $b = 3$ en $r = \sqrt{7}$, dus $r^2 = 7$.

Een vergelijking van de cirkel is $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 7$.

12B Cirkels

c $a = -4$ en $b = -1$.

$$2 - -4 = 6$$

$$3 - -1 = 4$$

De straal $r = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$, dus $r^2 = 52$.

Een vergelijking van de cirkel is $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 52$.

d cirkel d:

Het middelpunt is $(0, 3)$ dus $a = 0$ en $b = 3$.

De cirkel gaat onder andere door punt $(-3, 2)$, dus de straal

$$r = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}, \text{ dus } r^2 = 10.$$

Een vergelijking van cirkel d is $x^2 + (y - 3)^2 = 10$.

cirkel e:

Het middelpunt is $(-2, 0)$ dus $a = -2$ en $b = 0$.

De cirkel gaat onder andere door punt $(-3, 2)$, dus de straal

$$r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \text{ dus } r^2 = 5.$$

Een vergelijking van cirkel e is $(x + 2)^2 + y^2 = 5$.

04 a De straal is de afstand van $O(0, 0)$ tot het punt $(2, 3)$, dus

$$r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

b $r^2 = (\sqrt{13})^2 = 13$ dus een vergelijking van de cirkel is $x^2 + y^2 = 13$.

c $r^2 = 7^2 = 49$

Een vergelijking van de cirkel is $x^2 + y^2 = 49$.

d De straal is de afstand van $O(0, 0)$ tot het punt $(-5, 2)$, dus

$$r = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \text{ en } r^2 = (\sqrt{29})^2 = 29.$$

Een vergelijking van de cirkel is $x^2 + y^2 = 29$.

06 a $a = 3$ en $b = 6$

b Het middelpunt is $(3, 6)$.

c $r^2 = 121$

d De straal $r = \sqrt{121} = 11$.

e $a = 4$ en $b = -5$ dus het middelpunt is $(4, -5)$.

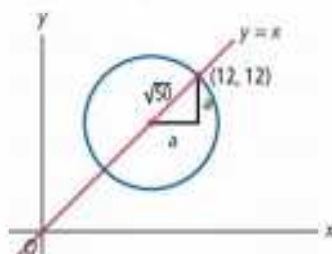
f $r^2 = 64$ dus de straal $r = \sqrt{64} = 8$.

g $a = 0$ en $b = 7$

h Het middelpunt is $(0, 7)$.

$$r^2 = 9 \text{ dus de straal } r = \sqrt{9} = 3.$$

U1 a Het lijnstuk tussen het middelpunt en punt $(12, 12)$ is de lange zijde van een rechthoekige driehoek met twee even lange rechthoekszijden.



$$a^2 + a^2 = (\sqrt{50})^2 = 50$$

$$2a^2 = 50$$

$$a^2 = 25$$

$$a = 5 \text{ (en } a = -5 \text{ kan hier niet).}$$

Het middelpunt is het punt $(12 - 5, 12 - 5) = (7, 7)$.

Een vergelijking van de cirkel is $(x - 7)^2 + (y - 7)^2 = 50$.

- b Het middelpunt ligt dan aan de andere kant van het punt (12, 12) (en ook op de lijn $y = x$).
 Het middelpunt is dan $(12 + 5, 12 + 5) = (17, 17)$.
 Een vergelijking van de cirkel is $(x - 17)^2 + (y - 17)^2 = 50$.

12B.2 $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$

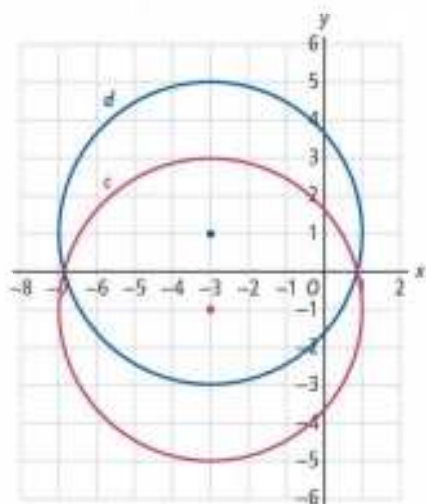
intro Vul de coördinaten van de vier gegeven punten in de vergelijking in. De coördinaten van alle vier punten voldoen aan de vergelijking, dus het kan de vergelijking van de getekende cirkel zijn.

- 8 a** Het middelpunt is $(-3, 6)$ en de straal is $\sqrt{20}$.
b $(x + 3)(x + 3) + (y - 6)(y - 6) = 20$
 $x^2 + 3x + 3x + 9 + y^2 - 6y - 6y + 36 = 20$
 $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 45 = 20$
 $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 25 = 0$
c Je kunt er niet meer de coördinaten van het middelpunt en de straal uit aflezen.
- 9 a** $a = 2$ en $b = 0$ en de straal $r = 3$ dus $r^2 = 9$
 Een vergelijking van cirkel c is $(x - 2)^2 + y^2 = 9$.
b De b in $(y - b)^2$ is gelijk aan 0.
c $(x - 2)(x - 2) + y^2 = 9$
 $x^2 - 2x - 2x + 4 + y^2 = 9$
 $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$
d $a = 0$ en $b = -3$
 De straal $r = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ dus $r^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$.
 Een vergelijking van cirkel d is $x^2 + (y + 3)^2 = 10$.
e $a = 2$ en $b = -2$
 De straal $r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ dus $r^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$.
 Een vergelijking van cirkel e is $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 5$.
f cirkel d :
 $x^2 + (y + 3)(y + 3) = 10$
 $x^2 + y^2 + 3y + 3y + 9 = 10$
 $x^2 + y^2 + 6y - 1 = 0$
 cirkel e :
 $(x - 2)(x - 2) + (y + 2)(y + 2) = 5$
 $x^2 - 2x - 2x + 4 + y^2 + 2y + 2y + 4 = 5$
 $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$
- 10 a** $(x - 4)^2 + y^2 = 9$
b Het middelpunt is $(4, 0)$.
c De straal is $\sqrt{9} = 3$.
- 11 a** $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$
 $y^2 + 6y = (y + 3)^2 - 9$
b $x^2 - 8x + y^2 + 6y - 11 = 0$
 $(x - 4)^2 - 16 + (y + 3)^2 - 9 - 11 = 0$
 $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 36$
c Het middelpunt is $(4, -3)$ en de straal is $\sqrt{36} = 6$.

12B Cirkels

- 12 a** $x^2 - 8x + y^2 + 8y - 4 = 0$
 $(x - 4)^2 - 16 + (y + 4)^2 - 16 - 4 = 0$
 $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 36$
 Het middelpunt is $(4, -4)$ en de straal is $\sqrt{36} = 6$.
- b** $x^2 + y^2 + 18y + 72 = 0$
 $x^2 + (y + 9)^2 - 81 + 72 = 0$
 $x^2 + (y + 9)^2 = 9$
 Het middelpunt is $(0, -9)$ en de straal is $\sqrt{9} = 3$.
- c** $x^2 - 10x + y^2 = 0$
 $(x - 5)^2 - 25 + y^2 = 0$
 $(x - 5)^2 + y^2 = 25$
 Het middelpunt is $(5, 0)$ en de straal is $\sqrt{25} = 5$.

- 13 a b**
 $x^2 + 6x + y^2 + 2y - 6 = 0$
 $(x + 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 - 6 = 0$
 $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$
 Het middelpunt is $(-3, -1)$ en de straal is $\sqrt{16} = 4$.



- c** Het middelpunt van cirkel d is $(-3, 1)$ en de straal is 4.
 Een vergelijking van cirkel d is $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$.
- d** De straal r van cirkel e is $2 \times 4 = 8$, dus $r^2 = 64$.
 Een vergelijking van cirkel e is $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 64$.
- 14 a** Het middelpunt is $O(0, 0)$.
 $OA = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} (= 2\sqrt{13})$.
 De afstand van A tot het middelpunt is $\sqrt{52}$.
- b** De straal van de cirkel is $\sqrt{45}$.
 De afstand van A tot het middelpunt is groter dan de straal van de cirkel,
 dus A ligt buiten de cirkel.
- c** $OB = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}$
 De afstand van B tot het middelpunt is gelijk aan de straal van de cirkel,
 dus B ligt op de cirkel.

- d** Het middelpunt van de cirkel is $M(2, -1)$ en de straal is $\sqrt{25} = 5$.
 $MP = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$
 De afstand van P tot het middelpunt is kleiner dan de straal van de cirkel,
 dus P ligt binnen de cirkel.
 $MQ = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$
 De afstand van Q tot het middelpunt is groter dan de straal van de cirkel,
 dus Q ligt buiten de cirkel.
- e** $x^2 + 2x + y^2 - 6y - 6 = 0$
 $(x+1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 - 6 = 0$
 $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 16$
 Het middelpunt is $M(-1, 3)$ en de straal is $\sqrt{16} = 4$.
 $MK = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$
 De afstand van K tot het middelpunt is groter dan de straal van de cirkel,
 dus K ligt buiten de cirkel.
 $ML = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$
 De afstand van L tot het middelpunt is kleiner dan de straal van de cirkel,
 dus L ligt binnen de cirkel.

- 09 a** Van cirkel c ligt het middelpunt op de x -as.
b De b in $(y-b)^2$ is gelijk aan 0.
c $(x-3)(x-3) + y^2 = 4$
 $x^2 - 3x - 3x + 9 + y^2 = 4$
 $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$
d Cirkel d heeft middelpunt $(0, 1)$.
 De cirkel gaat door het punt $(-1, 4)$ dus de straal is $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.
e $a = 0$, $b = 1$ en $r = \sqrt{10}$ dus $r^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$.
 Een vergelijking van cirkel d is $x^2 + (y-1)^2 = 10$.
 $x^2 + (y-1)(y-1) = 10$
 $x^2 + y^2 - y - y + 1 = 10$
 $x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$
f Het middelpunt van cirkel e is $(-1, 4)$, dus $a = -1$ en $b = 4$. De cirkel gaat
 door het punt $(0, 2)$ dus de straal $r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ dus $r^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$.
 Een vergelijking van cirkel e is $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 5$.
g $(x+1)(x+1) + (y-4)(y-4) = 5$
 $x^2 + x + x + 1 + y^2 - 4y - 4y + 16 = 5$
 $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 17 = 5$
 $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$

- 012 a** $(x-2)^2 - 4 + (y-5)^2 - 25 - 7 = 0$
 $(x-2)^2 + (y-5)^2 - 4 - 25 - 7 = 0$
 $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 36$
b Het middelpunt is $(2, 5)$ en de straal is $\sqrt{36} = 6$.
c $(x+2)^2 - 4 + y^2 - 12 = 0$
 $(x+2)^2 + y^2 = 16$
 Het middelpunt is $(-2, 0)$ en de straal is $\sqrt{16} = 4$.
d $x^2 - 2x + y^2 + 8y - 8 = 0$
 $(x-1)^2 - 1 + (y+4)^2 - 16 - 8 = 0$
 $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 25$
 Het middelpunt is $(1, -4)$ en de straal is $\sqrt{25} = 5$.

12B Cirkels

U2 a $x^2 + x + y^2 + \frac{2}{3}y - \frac{1}{12} = 0$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{1}{12} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{9}{36} - \frac{4}{36} - \frac{3}{36} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{36} \text{ ofwel } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Het middelpunt is $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ en de straal is $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

b $x^2 + 2x + y^2 + 4y + 10 = 0$

$$(x+1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + 10 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 + 5 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = -5$$

Bij deze vergelijking is $r^2 = -5$ en dat kan niet. Dus hoort er geen cirkel bij deze vergelijking.

12B.3 Cirkel en lijn

intro De richtingscoëfficiënt van de getekende stijgende lijn is $\frac{3-0}{9-0} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Het startgetal is 0, dus een vergelijking van de lijn is $y = \frac{1}{3}x$.

Een vergelijking van de getekende dalende lijn is $y = -\frac{1}{3}x$.

Lijnen die de cirkel snijden lopen minder steil dan deze twee getekende lijnen en hebben dus een richtingscoëfficiënt tussen $-\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{3}$. Bijvoorbeeld $y = \frac{1}{6}x$ en $y = -\frac{1}{4}x$.

Lijnen die met de cirkel geen punt gemeenschappelijk hebben, lopen steiler dan de twee getekende lijnen, dus de richtingscoëfficiënt is groter dan $\frac{1}{3}$ of kleiner dan $-\frac{1}{3}$. Bijvoorbeeld de lijnen $y = x$ en $y = -x$.

15 a $y = 2$ substitueren geeft $(x+3)^2 + (2-1)^2 = 16$

$$(x+3)^2 + 1 = 16$$

$$(x+3)^2 = 15$$

$$x+3 = -\sqrt{15} \text{ of } x+3 = \sqrt{15}$$

$$x = -3 - \sqrt{15} \text{ of } x = -3 + \sqrt{15}$$

$$A(-3 - \sqrt{15}, 2) \text{ en } B(-3 + \sqrt{15}, 2)$$

b $x = -3$ en $y = 5$ invullen geeft $(-3+3)^2 + (5-1)^2 = 0 + 16 = 16$,

$$-3 + 5 = 2, \text{ klopt}$$

$$x = 1 \text{ en } y = 1 \text{ invullen geeft } (1+3)^2 + (1-1)^2 = 16 + 0 = 16,$$

$$1 + 1 = 2, \text{ klopt}$$

De punten C en D liggen inderdaad op de cirkel en op de lijn.

16 a Met $y = -x + 2$ zie je dat je y kunt substitueren door $-x + 2$.

b $(x+3)^2 + (-x+2-1)^2 = 16$

$$(x+3)^2 + (-x+1)^2 = 16$$

$$(x+3)(x+3) + (-x+1)(-x+1) = 16$$

$$x^2 + 3x + 3x + 9 + x^2 - x - x + 1 = 16$$

$$2x^2 + 4x - 6 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

- c $(x+3)(x-1) = 0$
 $x+3 = 0$ of $x-1 = 0$
 $x = -3$ of $x = 1$
- d $x = -3$ geeft $y = -(-3) + 2 = 3 + 2$ dus $y = 5$
 $x = 1$ geeft $y = -1 + 2$ dus $y = 1$

- 17 a $x^2 + (3x+2)^2 = 2$
 $x^2 + (3x+2)(3x+2) = 2$
 $x^2 + 9x^2 + 6x + 6x + 4 = 2$
 $10x^2 + 12x + 2 = 0$
 $5x^2 + 6x + 1 = 0$
 $a = 5, b = 6$ en $c = 1$ geeft $D = 6^2 - 4 \times 5 \times 1 = 16$,
 $x = \frac{-6 - \sqrt{16}}{2 \times 5} = \frac{-6 - 4}{10}$ of $x = \frac{-6 + \sqrt{16}}{2 \times 5} = \frac{-6 + 4}{10}$
 $x = -1$ of $x = -\frac{1}{5}$
 $x = -1$ geeft $y = 3 \times -1 + 2$ dus $y = -1$,
 $x = -\frac{1}{5}$ geeft $y = 3 \times -\frac{1}{5} + 2$ dus $y = 1\frac{2}{5}$.
De snijpunten zijn $(-1, -1)$ en $(-\frac{1}{5}, 1\frac{2}{5})$.
- b $2x - y = 3$ geeft $y = 2x - 3$
 $(x-2)^2 + (2x-3)^2 = 34$
 $(x-2)(x-2) + (2x-3)(2x-3) = 34$
 $x^2 - 2x - 2x + 4 + 4x^2 - 6x - 6x + 9 = 34$
 $5x^2 - 16x - 21 = 0$
 $a = 5, b = -16$ en $c = -21$ geeft $D = (-16)^2 - 4 \times 5 \times -21 = 676$,
 $x = \frac{16 - \sqrt{676}}{2 \times 5} = \frac{16 - 26}{10}$ of $x = \frac{16 + \sqrt{676}}{2 \times 5} = \frac{16 + 26}{10}$
 $x = -1$ of $x = 4\frac{1}{5}$
 $x = -1$ geeft $y = 2 \times -1 - 3$ dus $y = -5$,
 $x = 4\frac{1}{5}$ geeft $y = 2 \times 4\frac{1}{5} - 3$ dus $y = 5\frac{2}{5}$.
De snijpunten zijn $(-1, -5)$ en $(4\frac{1}{5}, 5\frac{2}{5})$.
- c $2y - x = 4$ geeft $x = 2y - 4$
 $(2y-4+2)^2 + (y-3)^2 = 5$
 $(2y-2)^2 + (y-3)^2 = 5$
 $(2y-2)(2y-2) + (y-3)(y-3) = 5$
 $4y^2 - 4y - 4y + 4 + y^2 - 3y - 3y + 9 = 5$
 $5y^2 - 14y + 8 = 0$
 $a = 5, b = -14$ en $c = 8$ geeft $D = (-14)^2 - 4 \times 5 \times 8 = 36$,
 $y = \frac{14 - \sqrt{36}}{2 \times 5} = \frac{14 - 6}{10}$ of $y = \frac{14 + \sqrt{36}}{2 \times 5} = \frac{14 + 6}{10}$
 $y = \frac{4}{5}$ of $y = 2$
 $y = \frac{4}{5}$ geeft $x = 2 \times \frac{4}{5} - 4$ dus $x = -2\frac{2}{5}$,
 $y = 2$ geeft $x = 2 \times 2 - 4$ dus $x = 0$.
De snijpunten zijn $(-2\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ en $(0, 2)$.

12B Cirkels

- 18 a** $2y + x = 0$ geeft $x = -2y$.
 $(-2y - 1)^2 + (y + 3)^2 = 10$
 $(-2y - 1)(-2y - 1) + (y + 3)(y + 3) = 10$
 $4y^2 + 2y + 2y + 1 + y^2 + 3y + 3y + 9 = 10$
 $5y^2 + 10y = 0$
 $5y(y + 2) = 0$
 $5y = 0$ of $y + 2 = 0$
 $y = 0$ of $y = -2$
 $y = 0$ geeft $x = -2 \times 0$ dus $x = 0$.
 $y = -2$ geeft $x = -2 \times -2$ dus $x = 4$.
 De oplossingen zijn $(0, 0)$ en $(4, -2)$.
- b** Het zijn de snijpunten van de lijn met de cirkel.
- 19** De cirkel heeft middelpunt $(3, 0)$ en straal 3.
 Een vergelijking van de cirkel is $(x - 3)^2 + y^2 = 9$.
 De lijn AB heeft als vergelijking $x = 4$.
 Snijden: $(4 - 3)^2 + y^2 = 9$
 $1 + y^2 = 9$
 $y^2 = 8$
 $y = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$ of $y = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
 $A(4, -2\sqrt{2})$ en $B(4, 2\sqrt{2})$
 De afstand van punt A tot punt B is $2\sqrt{2} - (-2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$.
- 20 a** Een vergelijking van de cirkel is $(x - 6)^2 + y^2 = 50$.
 De richtingscoëfficiënt van de lijn is $\frac{6 - 0}{1 - -2} = 2$.
 $y = 2x + b$ met $x = -2$ en $y = 0$ geeft $0 = 2 \times -2 + b$.
 $0 = -4 + b$ dus $b = 4$. Een vergelijking van de lijn is $y = 2x + 4$.
- b** $(x - 6)^2 + (2x + 4)^2 = 50$
- c** $(x - 6)(x - 6) + (2x + 4)(2x + 4) = 50$
 $x^2 - 6x - 6x + 36 + 4x^2 + 8x + 8x + 16 = 50$
 $5x^2 + 4x + 2 = 0$
 $a = 5$, $b = 4$ en $c = 2$ geeft $D = 4^2 - 4 \times 5 \times 2 = 16 - 40 = -24$.
 $D < 0$ dus de vergelijking heeft geen oplossingen.
- d** De lijn en de cirkel hebben geen punten gemeenschappelijk.
- 21 a** Het middelpunt ligt precies midden tussen $(1, 1)$ en $(11, 11)$ en is dus $(6, 6)$.
 De straal $r = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$ dus $r^2 = (\sqrt{50})^2 = 50$.
 Een vergelijking van de cirkel is $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 50$.
- b** Voor punten op de y -as geldt $x = 0$.
 $(0 - 6)^2 + (y - 6)^2 = 50$
 $36 + (y - 6)^2 = 50$
 $(y - 6)^2 = 14$
 $y - 6 = -\sqrt{14}$ of $y - 6 = \sqrt{14}$
 $y = 6 - \sqrt{14}$ of $y = 6 + \sqrt{14}$
 De snijpunten zijn $(0, 6 - \sqrt{14})$ en $(0, 6 + \sqrt{14})$.

- c De richtingscoëfficiënt van lijn l is $\frac{11-1}{11-1} = 1$, dus die van m ook.

Het startgetal van m is -6 , dus een vergelijking van m is $y = x - 6$.

$$(x-6)^2 + (x-6-6)^2 = 50$$

$$(x-6)^2 + (x-12)^2 = 50$$

$$(x-6)(x-6) + (x-12)(x-12) = 50$$

$$x^2 - 6x - 6x + 36 + x^2 - 12x - 12x + 144 = 50$$

$$2x^2 - 36x + 130 = 0$$

$$x^2 - 18x + 65 = 0$$

$$(x-13)(x-5) = 0$$

$$x-13 = 0 \text{ of } x-5 = 0$$

$$x = 13 \text{ of } x = 5$$

$$x = 13 \text{ geeft } y = 13 - 6 \text{ dus } y = 7$$

$$x = 5 \text{ geeft } y = 5 - 6 \text{ dus } y = -1$$

De snijpunten zijn $(13, 7)$ en $(5, -1)$.

- 017 a Hij heeft y vervangen door $x - 1$.

b $x^2 + x^2 - 2x + 1 = 13$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x-3 = 0 \text{ of } x+2 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = -2$$

$$x = 3 \text{ geeft } y = 3 - 1 \text{ dus } y = 2$$

$$x = -2 \text{ geeft } y = -2 - 1 \text{ dus } y = -3$$

De snijpunten zijn $(3, 2)$ en $(-2, -3)$.

c $(x+1)^2 + (-x+4)^2 = 17$

$$(x+1)(x+1) + (-x+4)(-x+4) = 17$$

$$x^2 + x + x + 1 + x^2 - 4x - 4x + 16 = 17$$

$$2x^2 - 6x = 0$$

$$2x(x-3) = 0$$

$$2x = 0 \text{ of } x-3 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 3$$

$$x = 0 \text{ geeft } y = -0 + 3 \text{ dus } y = 3$$

$$x = 3 \text{ geeft } y = -3 + 3 \text{ dus } y = 0$$

De snijpunten zijn $(0, 3)$ en $(3, 0)$.

d $(x+1)^2 + (-2x+2-4)^2 = 20$

$$(x+1)^2 + (-2x-2)^2 = 20$$

$$(x+1)(x+1) + (-2x-2)(-2x-2) = 20$$

$$x^2 + x + x + 1 + 4x^2 + 4x + 4x + 4 = 20$$

$$5x^2 + 10x - 15 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x+3 = 0 \text{ of } x-1 = 0$$

$$x = -3 \text{ of } x = 1$$

$$x = -3 \text{ geeft } y = -2 \times -3 + 2 \text{ dus } y = 8$$

$$x = 1 \text{ geeft } y = -2 \times 1 + 2 \text{ dus } y = 0$$

De snijpunten zijn $(-3, 8)$ en $(1, 0)$.

12B Cirkels

- U3 a** Het middelpunt van de cirkel is $(-2, 3)$ en de straal is $\sqrt{25} = 5$.

Zie de schets hiernaast.

zijde	kwadraat
$d = \dots$	9
4	<u>16</u> +
5	25

$$d^2 = 9$$

$$d = 3 \text{ (} d = -3 \text{ voldoet hier niet.)}$$

De lijn $x = a$ ligt dus 3 rechts van het middelpunt $(-2, 3)$, dus $a = 1$.

Of: de lijn $x = a$ ligt 3 links van het middelpunt. In dat geval is $a = -5$.

b $x^2 + 4x + y^2 - 10y - 3 = 0$

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 5)^2 - 25 - 3 = 0$$

$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 32$$

Het middelpunt is $(-2, 5)$.

Lijn l door $(-2, 5)$ en $(1, 8)$:

$$\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{8 - 5}{1 - (-2)} = 1, \text{ dus } y = x + b$$

$$x = 1 \text{ en } y = 8 \text{ invullen geeft } 8 = 1 + b \text{ dus } b = 7,$$

Een vergelijking van lijn l is $y = x + 7$.

l snijden met de cirkel:

$$x^2 + 4x + (x + 7)^2 - 10(x + 7) - 3 = 0$$

$$x^2 + 4x + x^2 + 14x + 49 - 10x - 70 - 3 = 0$$

$$2x^2 + 8x - 24 = 0$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$(x + 6)(x - 2) = 0$$

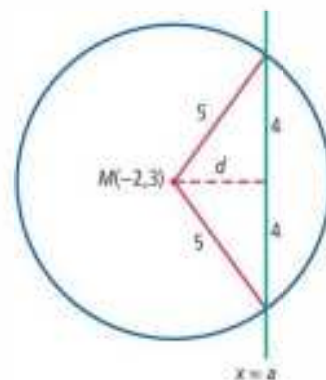
$$x + 6 = 0 \text{ of } x - 2 = 0$$

$$x = -6 \text{ of } x = 2$$

$$x = -6 \text{ geeft } y = -6 + 7 \text{ dus } y = 1$$

$$x = 2 \text{ geeft } y = 2 + 7 \text{ dus } y = 9$$

De snijpunten zijn $(-6, 1)$ en $(2, 9)$.



12B.4 Snijden, raken of geen punt gemeenschappelijk

Intro De hond bevindt zich in een rechthoekige driehoek van 16 m bij 8 m. De

oppervlakte van de driehoek is $16 \times 8 : 2 = 64 \text{ m}^2$.

De lengte van de lange zijde berekenen:

zijde	kwadraat
16	256
8	<u>64</u> +
lengte = ...	320

$$\text{lengte} = \sqrt{320} \text{ m}$$

Noem d de afstand van het hoekpunt linksonder tot de langste zijde.

De oppervlakte van de driehoek is ook $\sqrt{320} \cdot d : 2$.

$$\sqrt{320} \cdot d : 2 = 64 \text{ geeft } d = \frac{2 \times 64}{\sqrt{320}} \approx 7,15 \text{ m}$$

De ketting waaraan de hond zit, is langer dan de afstand van hoekpunt tot het pad. De hond kan op het pad komen. Nee, de postbode kan niet veilig over het pad lopen.

- 22 a** $(x-2)^2 + (3x+4)^2 = 10$
b $(x-2)(x-2) + (3x+4)(3x+4) = 10$
 $x^2 - 2x - 2x + 4 + 9x^2 + 12x + 12x + 16 = 10$
 $10x^2 + 20x + 10 = 0$
 $x^2 + 2x + 1 = 0$
 $a = 1, b = 2$ en $c = 1$ geeft $D = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$.
c De vergelijking heeft 1 oplossing, dus lijn l heeft 1 punt gemeenschappelijk met cirkel c .
d $(x-2)^2 + (x+2,5)^2 = 10$
 $(x-2)(x-2) + (x+2,5)(x+2,5) = 10$
 $x^2 - 2x - 2x + 4 + x^2 + 2,5x + 2,5x + 6,25 = 10$
 $2x^2 + x + 0,25 = 0$
 $a = 2, b = 1$ en $c = 0,25$ geeft $D = 1^2 - 4 \times 2 \times 0,25 = -1$.
 $D < 0$, dus de vergelijking heeft geen oplossingen. Lijn m heeft geen punten gemeenschappelijk met cirkel c .
e Lijn l raakt de cirkel.

- 23 a** $y = -x + 8$
 $(x-2)^2 + (-x+8)^2 = 18$
 $x^2 - 4x + 4 + x^2 - 16x + 64 = 18$
 $2x^2 - 20x + 50 = 0$
 $x^2 - 10x + 25 = 0$
 $a = 1, b = -10$ en $c = 25$ geeft $D = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 25 = 0$.
 De lijn raakt de cirkel.
b $(x+2)^2 + (-2x+5-3)^2 = 6$
 $(x+2)^2 + (-2x+2)^2 = 6$
 $x^2 + 4x + 4 + 4x^2 - 8x + 4 = 6$
 $5x^2 - 4x + 2 = 0$
 $a = 5, b = -4$ en $c = 2$ geeft $D = (-4)^2 - 4 \times 5 \times 2 = -24$.
 De lijn heeft geen punt gemeenschappelijk met de cirkel.
c $x = 2y - 8$
 $(2y-8-6)^2 + (y-2)^2 = 100$
 $(2y-14)^2 + (y-2)^2 = 100$
 $4y^2 - 56y + 196 + y^2 - 4y + 4 = 100$
 $5y^2 - 60y + 100 = 0$
 $y^2 - 12y + 20 = 0$
 $a = 1, b = -12$ en $c = 20$ geeft $D = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 20 = 64$.
 De lijn snijdt de cirkel.

- 24 a** Lijn l gaat door de punten $(6, 0)$ en $(0, 3)$.
 De richtingscoëfficiënt van lijn l is $\frac{3-0}{0-6} = -0,5$.
 De getekende lijnen zijn allemaal evenwijdig aan l en hebben dus allemaal een vergelijking van de vorm $y = -0,5x + p$.
b p is het startgetal, bij lijn l is $p = 3$.
c Lijn m gaat door $(0, 5)$ dus $p = 5$.
d $y = -0,5x + 5$
 $x^2 + (-0,5x+5)^2 = 20$
 $x^2 + 0,25x^2 - 5x + 25 = 20$
 $1,25x^2 - 5x + 5 = 0$
 $a = 1,25, b = -5$ en $c = 5$ geeft $D = (-5)^2 - 4 \times 1,25 \times 5 = 0$.
 $D = 0$ dus lijn m raakt de cirkel.

12B Cirkels

- 25 a** Het zijn lijnen door de oorsprong, dus het startgetal is 0.
b Lijn k gaat door $(1, 1)$, $(2, 2)$ enzovoort, dus $p = 1$.
c Lijn l gaat door $(2, 1)$, en heeft dus richtingscoëfficiënt 0,5.
 Dus $p = 0,5$.
d Lijn $l: y = 0,5x$ snijden met cirkel:
 $x^2 + (0,5x - 5)^2 = 20$
 $x^2 + 0,25x^2 - 5x + 25 = 20$
 $1,25x^2 - 5x + 5 = 0$
 $a = 1,25$, $b = -5$ en $c = 5$ geeft $D = (-5)^2 - 4 \times 1,25 \times 5 = 0$.
 $D = 0$ dus lijn l raakt de cirkel.
e Als je de cirkel en lijn l spiegelt in de y -as krijg je de cirkel en lijn n .
 Dus lijn n raakt de cirkel ook.
f Lijnen die steiler lopen dan l of n hebben twee snijpunten met de cirkel.
 Voor lijnen die steiler lopen dan l geldt $p > 0,5$.
 Voor lijnen die steiler lopen dan n geldt $p < -0,5$.
 Dus bij $p < -0,5$ of $p > 0,5$ heeft de lijn $y = px$ twee snijpunten met de cirkel.

- 26 a** $(x - 5)^2 + (px)^2 = 20$
 $x^2 - 10x + 25 + p^2x^2 = 20$
 $(1 + p^2)x^2 - 10x + 5 = 0$ of $(p^2 + 1)x^2 - 10x + 5 = 0$
b $a = p^2 + 1$, $b = -10$ en $c = 5$ geeft $D = (-10)^2 - 4 \times (p^2 + 1) \times 5$ of
 $D = 100 - 20p^2 - 20$ ofwel $D = -20p^2 + 80$.
 $D = 0$ geeft $-20p^2 + 80 = 0$
 $-20p^2 = -80$
 $p^2 = 4$
 $p = -2$ of $p = 2$
 $y = -2x$ en $y = 2x$.
c $p = -2$ geeft $5x^2 - 10x + 5 = 0$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x - 1)(x - 1) = 0$
 $x - 1 = 0$
 $x = 1$
 $y = -2 \times 1 = -2$ dus $(1, -2)$
 $p = 2$ geeft ook $5x^2 - 10x + 5 = 0$ dus $x = 1$
 $y = 2 \times 1 = 2$ dus $(1, 2)$

- 27 a** $x^2 + (-3x + 2)^2 = 10$
 $x^2 + 9x^2 - 12x + 4 = 10$
 $10x^2 - 12x - 6 = 0$
 $a = 10$, $b = -12$ en $c = -6$ geeft $D = (-12)^2 - 4 \times 10 \times -6 = 384$.
 $D > 0$ dus twee snijpunten.
b $x^2 + (-3x + p)^2 = 10$
 $x^2 + 9x^2 - 6px + p^2 = 10$
 $10x^2 - 6px + p^2 - 10 = 0$
 $a = 10$, $b = -6p$ en $c = p^2 - 10$ geeft $D = (-6p)^2 - 4 \times 10 \times (p^2 - 10)$ of
 $D = 36p^2 - 40p^2 + 400$ ofwel $D = -4p^2 + 400$
 $D = 0$ geeft $-4p^2 + 400 = 0$
 $-4p^2 = -400$
 $p^2 = 100$
 $p = -10$ of $p = 10$

- c Voor $p > 10$ is $D = -4p^2 + 400 < 0$, dus geen snijpunten.
 Voor $p < 10$ is $D = -4p^2 + 400 > 0$ mits $p > -10$.
 A is waar, B is niet waar.

023 a $(x-4)^2 + (3x-2)^2 = 10$
 $x^2 - 8x + 16 + 9x^2 - 12x + 4 = 10$
 $10x^2 - 20x + 10 = 0$

b $a = 10$, $b = -20$ en $c = 10$ geeft $D = (-20)^2 - 4 \times 10 \times 10 = 0$.

c Er is één gemeenschappelijk punt.

d $y = -2x + 3$

e $(x+1)^2 + (-2x+3+5)^2 = 15$

$(x+1)^2 + (-2x+8)^2 = 15$

f $x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 32x + 64 = 15$

$5x^2 - 30x + 50 = 0$

$a = 5$, $b = -30$ en $c = 50$ geeft $D = (-30)^2 - 4 \times 5 \times 50 = -100$.

g De lijn en de cirkel hebben geen gemeenschappelijke punten.

026 a $(x+10)^2 + (px)^2 = 20$
 $x^2 + 20x + 100 + p^2x^2 = 20$

b $p^2x^2 + x^2 + 20x + 80 = 0$

$(p^2 + 1)x^2 + 20x + 80 = 0$

c $D = 20^2 - 4 \times (p^2 + 1) \times 80$ geeft $D = 400 - 320(p^2 + 1)$.

d $400 - 320(p^2 + 1) = 0$

$400 - 320p^2 - 320 = 0$

$-320p^2 = -80$

$p^2 = 0,25$

$p = -0,5$ of $p = 0,5$

e $y = -0,5x$ en $y = 0,5x$

f $p = -0,5$ geeft $((-0,5)^2 + 1)x^2 + 20x + 80 = 0$

$1,25x^2 + 20x + 80 = 0$

$x^2 + 16x + 64 = 0$

$(x+8)(x+8) = 0$

$x+8 = 0$

$x = -8$ en $y = -0,5 \times -8$ dus $y = 4$

dus $(-8, 4)$

$p = 0,5$ geeft $(0,5^2 + 1)x^2 + 20x + 80 = 0$ en dus ook $x = -8$.

$y = 0,5 \times -8$ dus $y = -4$ en dus $(-8, -4)$.

De punten waar de lijnen de cirkel raken zijn $(-8, 4)$ en $(-8, -4)$.

12B Cirkels

$$\begin{aligned}
 \text{U4} \quad & (x-2)^2 + (2x+p)^2 = 20 \\
 & x^2 - 4x + 4 + 4x^2 + 4px + p^2 = 20 \\
 & 5x^2 + 4px - 4x + p^2 - 16 = 0 \\
 & 5x^2 + (4p-4)x + p^2 - 16 = 0
 \end{aligned}$$

Als een lijn uit de lijnenbundel de cirkel snijdt (en dus niet raakt), moet $D > 0$ zijn.

$a = 5$, $b = 4p - 4$ en $c = p^2 - 16$ geeft $D = (4p - 4)^2 - 4 \times 5 \times (p^2 - 16)$.

$$D = 16p^2 - 32p + 16 - 20p^2 + 320$$

$$D = -4p^2 - 32p + 336$$

$$D = 0 \text{ geeft } -4p^2 - 32p + 336 = 0$$

$$p^2 + 8p - 84 = 0$$

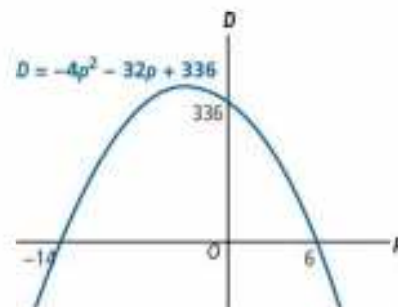
$$(p+14)(p-6) = 0$$

$$p+14=0 \text{ of } p-6=0$$

$$p=-14 \text{ of } p=6$$

Zie de schets hiernaast.

$$D > 0 \text{ voor } -14 < p < 6.$$



12B.5 Gemengde opdrachten

- 28 a** Het middelpunt is $(5, 1)$ en de straal is $10 : 2 = 5$.
Een vergelijking van c is $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 25$.
- b** $W(8, 5)$, dus $x = 8$ en $y = 5$ invullen.
 $(8-5)^2 + (5-1)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, klopt. Dus W ligt ook op de cirkel.
- c** De straal van d is $2 \times 5 = 10$. Het middelpunt is $(8, 5)$.
Een vergelijking van d is $(x-8)^2 + (y-5)^2 = 100$.

- 29 a** $x = -2y + 6$
 $(-2y + 6 - 6)^2 + (y - 2)^2 = 16$
 $(-2y)^2 + (y - 2)^2 = 16$
 $4y^2 + y^2 - 4y + 4 = 16$
 $5y^2 - 4y - 12 = 0$
 $a = 5$, $b = -4$ en $c = -12$ geeft $D = (-4)^2 - 4 \times 5 \times -12 = 256$.
 $y = \frac{4 - \sqrt{256}}{2 \times 5} = \frac{4 - 16}{10}$ of $y = \frac{4 + \sqrt{256}}{2 \times 5} = \frac{4 + 16}{10}$
 $y = -1,2$ of $y = 2$
 $y = -1,2$ geeft $x = -2 \times -1,2 + 6$ dus $x = 8,4$
 $y = 2$ geeft $x = -2 \times 2 + 6$ dus $x = 2$
 De oplossingen zijn $(8,4; -1,2)$ en $(2, 2)$.
- b** $x = -2y + 12$
 $(-2y + 12 - 6)^2 + (y - 2)^2 = 16$
 $(-2y + 6)^2 + (y - 2)^2 = 16$
 $4y^2 - 24y + 36 + y^2 - 4y + 4 = 16$
 $5y^2 - 28y + 24 = 0$
 $a = 5$, $b = -28$ en $c = 24$ geeft $D = (-28)^2 - 4 \times 5 \times 24 = 304$
 $D > 0$ dus de lijn snijdt de cirkel.

- 30** $x^2 + 6x + y^2 + 18y - 10 = 0$
 $(x + 3)^2 - 9 + (y + 9)^2 - 81 - 10 = 0$
 $(x + 3)^2 + (y + 9)^2 = 100$
 Het middelpunt van cirkel c is $(-3, -9)$ en de straal is $\sqrt{100} = 10$.
 Het beeldpunt van $(-3, -9)$ in de verticale lijn $x = 1$ is $(5, -9)$.
 De straal verandert niet door de spiegeling.
 Cirkel d heeft middelpunt $(5, -9)$ en straal 10.
 Een vergelijking van d is $(x - 5)^2 + (y + 9)^2 = 100$.

- 31 a** Lijn l gaat door de punten $(0, -5)$ en $(2, -1)$. De richtingscoëfficiënt is $\frac{-1 - (-5)}{2 - 0} = 2$ en het startgetal is -5 . Een vergelijking van l is $y = 2x - 5$.

Een vergelijking van de cirkel is $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 20$.

Snijden:

$$(x + 1)^2 + (2x - 5 + 1)^2 = 20$$

$$(x + 1)^2 + (2x - 4)^2 = 20$$

$$x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 16x + 16 = 20$$

$$5x^2 - 14x - 3 = 0$$

$$a = 5, b = -14 \text{ en } c = -3 \text{ geeft } D = (-14)^2 - 4 \times 5 \times -3 = 256.$$

$$x = \frac{14 - \sqrt{256}}{2 \times 5} = \frac{14 - 16}{10} \text{ of } x = \frac{14 + \sqrt{256}}{2 \times 5} = \frac{14 + 16}{10}$$

$$x = -\frac{1}{5} \text{ of } x = 3$$

$$x = -\frac{1}{5} \text{ geeft } y = 2 \times -\frac{1}{5} - 5 \text{ dus } y = -5\frac{2}{5}.$$

$$x = 3 \text{ geeft } y = 2 \times 3 - 5 \text{ dus } y = 1$$

De snijpunten zijn $(-\frac{1}{5}, -5\frac{2}{5})$ en $(3, 1)$.

- b** Lijn m : $y = 2x + b$

$$x = 5 \text{ en } y = 1 \text{ invullen geeft } 1 = 2 \times 5 + b \text{ dus } b = -9.$$

Een vergelijking van lijn m is $y = 2x - 9$.

Snijden met de cirkel:

$$(x + 1)^2 + (2x - 9 + 1)^2 = 20$$

$$(x + 1)^2 + (2x - 8)^2 = 20$$

$$x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 32x + 64 = 20$$

$$5x^2 - 30x + 45 = 0$$

$$a = 5, b = -30 \text{ en } c = 45 \text{ geeft } D = (-30)^2 - 4 \times 5 \times 45 = 0.$$

Dus m raakt cirkel c .

- c** $5x^2 - 30x + 45 = 0$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)(x - 3) = 0$$

$$x - 3 = 0$$

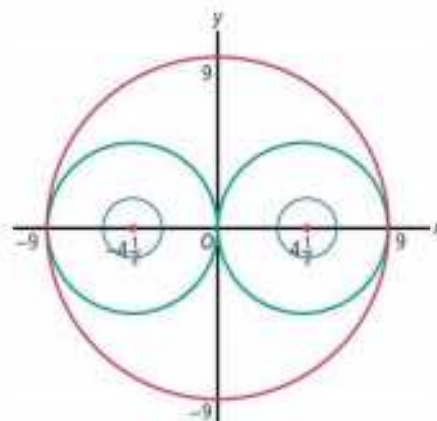
$$x = 3$$

$$y = 2 \times 3 - 9 \text{ dus } y = -3$$

Het raakpunt is $(3, -3)$.

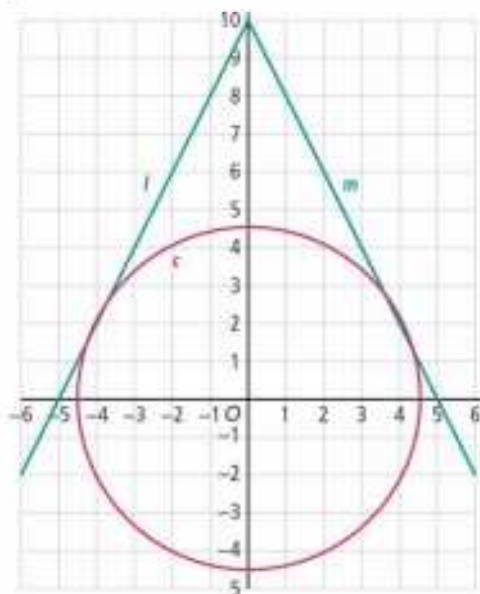
12B Cirkels

- 32** De straal van de grootste cirkel is $\sqrt{81} = 9$.
 Het middelpunt van deze cirkel is $(0, 0)$.
 Het middelpunt van de twee rechter cirkels is $(4\frac{1}{2}, 0)$.
 Het middelpunt van de twee linker cirkels is $(-4\frac{1}{2}, 0)$.
 De straal van de twee middelgrote cirkels is $9 : 2 = 4\frac{1}{2}$.
 De straal van de twee kleinste cirkels is $9 : 6 = 1\frac{1}{2}$.
 De vier andere cirkels hebben vergelijkingen:
 $(x + 4\frac{1}{2})^2 + y^2 = 20\frac{1}{4}$ $(x - 4\frac{1}{2})^2 + y^2 = 20\frac{1}{4}$
 $(x + 4\frac{1}{2})^2 + y^2 = 2\frac{1}{4}$ $(x - 4\frac{1}{2})^2 + y^2 = 2\frac{1}{4}$



- 33** $x^2 + 14x + y^2 - 4y + 24 = 0$
 $(x + 7)^2 - 49 + (y - 2)^2 - 4 + 24 = 0$
 $(x + 7)^2 + (y - 2)^2 = 29$
 Het middelpunt van de cirkel is $M(-7, 2)$ en de straal $r = \sqrt{29}$.
 $A(-5, 3)$ geeft $AM = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} < \sqrt{29}$ dus A ligt binnen de cirkel.
 $B(-5, -3)$ geeft $BM = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = r$ dus B ligt op de cirkel.
 $C(-12, 4)$ geeft $CM = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} = r$ dus C ligt op de cirkel.
 $D(-4, -3)$ geeft $DM = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} > \sqrt{29}$ dus D ligt buiten de cirkel.

34 a b



- c** Een vergelijking van de lijnen is $y = px + 10$.
 De straal van de cirkel $r = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$ dus $r^2 = 20$.
 Een vergelijking van de cirkel is $x^2 + y^2 = 20$.
 $x^2 + (px + 10)^2 = 20$
 $x^2 + p^2x^2 + 20px + 100 = 20$
 $(p^2 + 1)x^2 + 20px + 80 = 0$
 $a = p^2 + 1$, $b = 20p$ en $c = 80$ geeft $D = (20p)^2 - 4 \times (p^2 + 1) \times 80$.
 $D = 0$ geeft $400p^2 - 320p^2 - 320 = 0$
 $80p^2 - 320 = 0$ dus $p^2 - 4 = 0$
 $p^2 = 4$
 $p = -2$ of $p = 2$
 $y = -2x + 10$ en $y = 2x + 10$

Samenvatting

- S1 a** A: $a = 3$, $b = 0$ en $r^2 = 49$. Het middelpunt is $(3, 0)$ en de straal is $\sqrt{49} = 7$.
 B: $a = -\frac{1}{2}$, $b = 5$ en $r^2 = 6$. Het middelpunt is $(-\frac{1}{2}, 5)$ en de straal is $\sqrt{6}$.
b $a = -4$, $b = 7$ en $r = 8$, dus $r^2 = 64$.
 Een vergelijking van de cirkel is $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 64$.

- S2 a** $x^2 + y^2 + 6y - 12 = 0$
 $x^2 + (y + 3)^2 - 9 - 12 = 0$
 $x^2 + (y + 3)^2 = 21$
 Het middelpunt is $(0, -3)$ en de straal $r = \sqrt{21}$.
b $x^2 + 4x + y^2 + 16y + 3 = 0$
 $(x + 2)^2 - 4 + (y + 8)^2 - 64 + 3 = 0$
 $(x + 2)^2 + (y + 8)^2 = 65$
 Het middelpunt is $(-2, -8)$ en de straal $r = \sqrt{65}$.
c $x^2 + 14x + y^2 = 0$
 $(x + 7)^2 - 49 + y^2 = 0$
 $(x + 7)^2 + y^2 = 49$
 Het middelpunt is $(-7, 0)$ en de straal $r = \sqrt{49} = 7$.

- S3 a** $y = 4$ invullen geeft $(x + 2)^2 + (4 - 3)^2 = 20$
 $(x + 2)^2 + 1 = 20$
 $(x + 2)^2 = 19$
 $x + 2 = -\sqrt{19}$ of $x + 2 = \sqrt{19}$
 $x = -2 - \sqrt{19}$ of $x = -2 + \sqrt{19}$
 De snijpunten zijn $(-2 - \sqrt{19}, 4)$ en $(-2 + \sqrt{19}, 4)$.
b $y = -\frac{1}{3}x + 3$ is te herleiden tot $3y = -x + 9$ ofwel $x = -3y + 9$.
 Invullen geeft $(-3y + 9 + 2)^2 + (y - 3)^2 = 20$
 $(-3y + 11)^2 + (y - 3)^2 = 20$
 $9y^2 - 66y + 121 + y^2 - 6y + 9 = 20$
 $10y^2 - 72y + 110 = 0$
 $a = 10$, $b = -72$ en $c = 110$ geeft $D = (-72)^2 - 4 \times 10 \times 110 = 784$
 $y = \frac{72 - \sqrt{784}}{2 \times 10} = \frac{72 - 28}{20}$ of $y = \frac{72 + \sqrt{784}}{2 \times 10} = \frac{72 + 28}{2 \times 10}$
 $y = 2,2$ of $y = 5$
 $y = 2,2$ geeft $x = -3 \times 2,2 + 9$ dus $x = 2,4$.
 $y = 5$ geeft $x = -3 \times 5 + 9$ dus $x = -6$.
 De snijpunten zijn $(2,4; 2,2)$ en $(-6, 5)$.

- S4 a** $y = -2x + 5$ invullen geeft $x^2 + (-2x + 5 + 10)^2 = 45$
 $x^2 + (-2x + 15)^2 = 45$
 $x^2 + 4x^2 - 60x + 225 = 45$
 $5x^2 - 60x + 180 = 0$
 $a = 5$, $b = -60$ en $c = 180$ geeft $D = (-60)^2 - 4 \times 5 \times 180 = 0$.
 $D = 0$ dus de lijn raakt de cirkel.

12B Cirkels

- b** $y = -3x + 10$ invullen geeft $(x + 1)^2 + (-3x + 10 - 3)^2 = 10$
 $(x + 1)^2 + (-3x + 7)^2 = 10$
 $x^2 + 2x + 1 + 9x^2 - 42x + 49 = 10$
 $10x^2 - 40x + 40 = 0$
 $a = 10, b = -40$ en $c = 40$ geeft $D = (-40)^2 - 4 \times 10 \times 40 = 0$.
 $D = 0$ dus de lijn raakt de cirkel.

- S5** $y = px + 1$ invullen geeft $(x + 5)^2 + (px + 1 - 1)^2 = 9$
 $(x + 5)^2 + (px)^2 = 9$
 $x^2 + 10x + 25 + p^2x^2 = 9$
 $(p^2 + 1)x^2 + 10x + 16 = 0$
 $a = p^2 + 1, b = 10$ en $c = 16$ geeft $D = 10^2 - 4 \times (p^2 + 1) \times 16$
 $D = 100 - 64(p^2 + 1)$
 $D = 0$ geeft $100 - 64p^2 - 64 = 0$
 $-64p^2 = -36$
 $p^2 = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$
 $p = -\frac{3}{4}$ of $p = \frac{3}{4}$
Vergelijkingen van de raaklijnen zijn $y = -\frac{3}{4}x + 1$ en $y = \frac{3}{4}x + 1$.

Test jezelf

- T1 a** Het middelpunt van c_1 is $(\frac{1}{2}, 0)$ en de straal $r = \frac{1}{2}$, dus $r^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.
Een vergelijking van c_1 is $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.
Het middelpunt van c_6 is $(3, 0)$ en de straal $r = 3$, dus $r^2 = 3^2 = 9$.
Een vergelijking van c_6 is $(x - 3)^2 + y^2 = 9$.
- b** Het middelpunt van c_9 is $(4\frac{1}{2}, 0)$ en de straal $r = 4\frac{1}{2}$, dus $r^2 = (4\frac{1}{2})^2 = 20\frac{1}{4}$.
Een vergelijking van c_9 is $(x - 4\frac{1}{2})^2 + y^2 = 20\frac{1}{4}$.
- T2 a** $x^2 - 10x + y^2 - 8 = 0$
 $(x - 5)^2 - 25 + y^2 - 8 = 0$
 $(x - 5)^2 + y^2 = 33$
Het middelpunt is $(5, 0)$ en de straal $r = \sqrt{33}$.
- b** $x^2 + 4x + y^2 - 8y + 16 = 0$
 $(x + 2)^2 - 4 + (y - 4)^2 - 16 + 16 = 0$
 $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$
Van cirkel d is het middelpunt $(-2, 4)$ en de straal $r = \sqrt{4} = 2$.
Van cirkel e is het middelpunt ook $(-2, 4)$ en is de straal $3 \times 2 = 6$.
Een vergelijking van cirkel e is $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 36$.
- c** $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 36$
 $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$

T3 $y = 3x + 1$ invullen geeft $(x + 2)^2 + (3x + 1)^2 = 25$
 $x^2 + 4x + 4 + 9x^2 + 6x + 1 = 25$
 $10x^2 + 10x - 20 = 0$
 $x^2 + x - 2 = 0$
 $(x + 2)(x - 1) = 0$
 $x + 2 = 0$ of $x - 1 = 0$
 $x = -2$ of $x = 1$
 $x = -2$ geeft $y = 3 \times -2 + 1$ dus $y = -5$, ofwel $A(-2, -5)$.
 $x = 1$ geeft $y = 3 \times 1 + 1$ dus $y = 4$, ofwel $B(1, 4)$.
 $AB = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (4 - (-5))^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90}$
 De afstand tussen de punten A en B is $\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

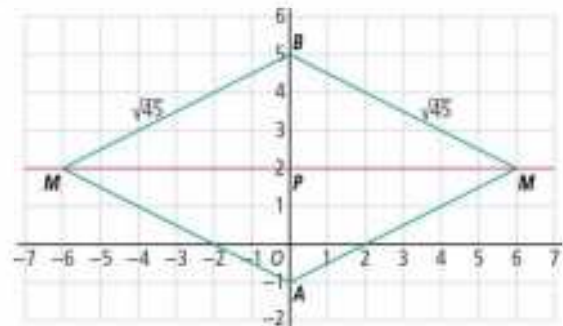
T4 a De straal $r = AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$ dus $r^2 = 20$.
 Een vergelijking van de cirkel is $(x - 2)^2 + y^2 = 20$.
 Van lijn l is de richtingscoëfficiënt $\frac{0 - 6}{12 - 0} = -\frac{1}{2}$ en het startgetal 6.
 Een vergelijking van l is $y = -\frac{1}{2}x + 6$.
 $y = -\frac{1}{2}x + 6$ invullen geeft $(x - 2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 6\right)^2 = 20$.
 $x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{4}x^2 - 6x + 36 = 20$
 $1\frac{1}{4}x^2 - 10x + 20 = 0$
 $a = 1\frac{1}{4}$, $b = -10$ en $c = 20$ geeft $D = (-10)^2 - 4 \times 1\frac{1}{4} \times 20 = 0$.
 $D = 0$ dus de lijn raakt de cirkel.
b Omdat het middelpunt van de cirkel op de x -as ligt, is het spiegelbeeld van lijn l in de x -as ook een raaklijn aan de cirkel.
 Het spiegelbeeld van lijn l in de x -as heeft vergelijking $y = -\left(-\frac{1}{2}x + 6\right)$ ofwel $y = \frac{1}{2}x - 6$.

T5 a Een vergelijking van c is $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 34$.
 Voor punten op de y -as geldt $x = 0$.
 $x = 0$ invullen geeft $(0 - 5)^2 + (y - 2)^2 = 34$.
 $25 + (y - 2)^2 = 34$
 $(y - 2)^2 = 9$
 $y - 2 = -3$ of $y - 2 = 3$
 $y = -1$ of $y = 5$
 De snijpunten zijn $(0, -1)$ en $(0, 5)$.
b Het middelpunt heeft gelijke afstanden tot $A(0, -1)$ en $B(0, 5)$ en moet dus op de middelloodlijn van lijnstuk AB liggen en dat is de lijn $y = 2$.
c Zie de tekening hiernaast.

zijde	kwadraat
$BP = 3$	9
$MP = \dots$	$\frac{36}{+}$
$BM = \sqrt{45}$	45

$$MP = \sqrt{36} = 6$$

$$M(-6, 2) \text{ of } M(6, 2)$$



T6 a Omdat het middelpunt M op de lijn PR ligt, is M precies het midden van lijnstuk PR . Dus het middelpunt is $M(4, 3)$.
 De straal $r = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ dus $r^2 = 10$.
 Een vergelijking van c is $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 10$.

12B Cirkels

- b $Q(3, 0)$, dus $x = 3$ en $y = 0$ invullen: $(3 - 4)^2 + (0 - 3)^2 = (-1)^2 + (-3)^2 = 10$, klopt. Dus Q ligt op c .
 $S(3, 6)$, dus $x = 3$ en $y = 6$ invullen: $(3 - 4)^2 + (6 - 3)^2 = (-1)^2 + 3^2 = 10$, klopt. Dus S ligt op c .
- c $MT = \sqrt{2^2 + 2,5^2} = \sqrt{10,25} > r$ dus T ligt buiten de cirkel.
- d Bij spiegelen in de y -as blijft de straal gelijk.
 Het spiegelbeeld van M is $(-4, 3)$.
 Een vergelijking van d is $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 10$.
- e De straal van e is $r = 3 \times \sqrt{10}$, dus $r^2 = (3 \times \sqrt{10})^2 = 3^2 \times (\sqrt{10})^2 = 9 \times 10 = 90$.
 Een vergelijking van e is $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 90$.

T7 $y = px - 2$ invullen geeft $x^2 + (px - 2)^2 - 8x + 4(px - 2) + 8 = 0$,
 $x^2 + p^2x^2 - 4px + 4 - 8x + 4px - 8 + 8 = 0$
 $(p^2 + 1)x^2 - 8x + 4 = 0$
 $a = p^2 + 1$, $b = -8$ en $c = 4$ geeft $D = (-8)^2 - 4 \times (p^2 + 1) \times 4$
 $D = 64 - 16(p^2 + 1)$
 $D = 0$ geeft $64 - 16p^2 - 16 = 0$
 $-16p^2 = -48$
 $p^2 = 3$
 $p = -\sqrt{3}$ of $p = \sqrt{3}$

Extra oefening

- E1 Cirkel c heeft middelpunt $(5, 0)$ en straal $r = 3$.
 Een vergelijking van c is $(x - 5)^2 + y^2 = 9$.
 Cirkel d heeft middelpunt $(3, 1)$ en straal $r = 2$.
 Een vergelijking van cirkel d is $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$.
 Cirkel e heeft middelpunt $(-1, -1)$ en straal $r = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$.
 Een vergelijking van e is $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 20$.
- E2 a Het middelpunt is $(0, 0)$ en de straal $r = \sqrt{64} = 8$.
 b Het middelpunt is $(\frac{1}{2}, -6)$ en de straal $r = \sqrt{15}$.
 c Het middelpunt is $(-13, 0)$ en de straal $r = \sqrt{100} = 10$.
- E3 a $x^2 - 6x + y^2 - 18 = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + y^2 - 18 = 0$
 $(x - 3)^2 + y^2 = 27$
 Het middelpunt is $(3, 0)$ en de straal $r = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.
- b $x^2 + 2x + y^2 + 14y - 14 = 0$
 $(x + 1)^2 - 1 + (y + 7)^2 - 49 - 14 = 0$
 $(x + 1)^2 + (y + 7)^2 = 64$
 Het middelpunt is $(-1, -7)$ en de straal is $r = \sqrt{64} = 8$.
- c $x^2 + y^2 - 6y = 0$
 $x^2 + (y - 3)^2 - 9 = 0$
 $x^2 + (y - 3)^2 = 9$
 Het middelpunt is $(0, 3)$ en de straal is $r = \sqrt{9} = 3$.

E4 a Voor punten op de y -as geldt $x = 0$.

$$x = 0 \text{ invullen geeft } 0^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

$$(y - 3)^2 = 25$$

$$y - 3 = -5 \text{ of } y - 3 = 5$$

$$y = -2 \text{ of } y = 8$$

De snijpunten zijn $(0, -2)$ en $(0, 8)$.

b $y = 5$ invullen geeft $x^2 + (5 - 3)^2 = 25$.

$$x^2 + 4 = 25$$

$$x^2 = 21$$

$$x = -\sqrt{21} \text{ of } x = \sqrt{21}$$

De snijpunten zijn $(-\sqrt{21}, 5)$ en $(\sqrt{21}, 5)$.

c $x = -2y + 8$ invullen geeft $(-2y + 8)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

$$4y^2 - 32y + 64 + y^2 - 6y + 9 = 25$$

$$5y^2 - 38y + 48 = 0$$

$$a = 5, b = -38 \text{ en } c = 48 \text{ geeft } D = (-38)^2 - 4 \times 5 \times 48 = 484.$$

$$y = \frac{38 - \sqrt{484}}{2 \times 5} = \frac{38 - 22}{10} \text{ of } y = \frac{38 + \sqrt{484}}{2 \times 5} = \frac{38 + 22}{10}$$

$$y = 1\frac{3}{5} \text{ of } y = 6$$

$$y = 1\frac{3}{5} \text{ geeft } x = -2 \times 1\frac{3}{5} + 8 \text{ dus } x = 4\frac{4}{5}.$$

$$y = 6 \text{ geeft } x = -2 \times 6 + 8 \text{ dus } x = -4$$

De snijpunten zijn $(4\frac{4}{5}, 1\frac{3}{5})$ en $(-4, 6)$.

E5 Een vergelijking van de cirkel is $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

Van de lijn is de richtingscoëfficiënt -1 en het startgetal 6 , dus een

vergelijking van de lijn is $y = -x + 6$.

$$y = -x + 6 \text{ invullen geeft } (x - 7)^2 + (-x + 6 - 2)^2 = 16.$$

$$(x - 7)^2 + (-x + 4)^2 = 16$$

$$x^2 - 14x + 49 + x^2 - 8x + 16 = 16$$

$$2x^2 - 22x + 49 = 0$$

$$a = 2, b = -22 \text{ en } c = 49 \text{ geeft } D = (-22)^2 - 4 \times 2 \times 49 = 92.$$

$$x = \frac{22 - \sqrt{92}}{2 \times 2} = \frac{22 - \sqrt{92}}{4} \text{ of } x = \frac{22 + \sqrt{92}}{2 \times 2} = \frac{22 + \sqrt{92}}{4}$$

$$x = 5\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{92} = 5\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{23} \text{ of } x = 5\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{92} = 5\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{23}$$

$$y = -x + 6 \text{ dus}$$

$$y = -\left(5\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{23}\right) + 6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{23} \text{ of } y = -\left(5\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{23}\right) + 6 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{23}$$

De snijpunten zijn $\left(5\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{23}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{23}\right)$ en $\left(5\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{23}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{23}\right)$.

E6 a $y = -3x + 8$ invullen geeft $(x + 3)^2 + (-3x + 8)^2 = 18$

$$x^2 + 6x + 9 + 9x^2 - 48x + 64 = 18$$

$$10x^2 - 42x + 55 = 0$$

$$a = 10, b = -42 \text{ en } c = 55 \text{ geeft } D = (-42)^2 - 4 \times 10 \times 55 = -436.$$

$D < 0$ dus de lijn en de cirkel hebben geen punt gemeenschappelijk.

b $y = -2x + 5$ invullen geeft $x^2 + (-2x + 5 + 10)^2 = 6$

$$x^2 + (-2x + 15)^2 = 6$$

$$x^2 + 4x^2 - 60x + 225 = 6$$

$$5x^2 - 60x + 219 = 0$$

$$a = 5, b = -60 \text{ en } c = 219 \text{ geeft } D = (-60)^2 - 4 \times 5 \times 219 = -780.$$

$D < 0$ dus de lijn en de cirkel hebben geen punt gemeenschappelijk.

12B Cirkels

- c** $y = -3x + 10$ invullen geeft $(x + 1)^2 + (-3x + 10 - 3)^2 = 10$
 $(x + 1)^2 + (-3x + 7)^2 = 10$
 $x^2 + 2x + 1 + 9x^2 - 42x + 49 = 10$
 $10x^2 - 40x + 40 = 0$
 $a = 10$, $b = -40$ en $c = 40$ geeft $D = (-40)^2 - 4 \times 10 \times 40 = 0$.
 $D = 0$ dus de lijn raakt aan de cirkel.

- E7 a** Een vergelijking van de cirkel is $x^2 + (y - 1)^2 = 10$.
 $y = px - 9$ invullen geeft $x^2 + (px - 9 - 1)^2 = 10$.
 $x^2 + (px - 10)^2 = 10$
 $x^2 + p^2x^2 - 20px + 100 = 10$
 $(p^2 + 1)x^2 - 20px + 90 = 0$
 $a = p^2 + 1$, $b = -20p$ en $c = 90$ geeft $D = (-20p)^2 - 4 \times (p^2 + 1) \times 90$.
 $D = 400p^2 - 360(p^2 + 1)$
 $D = 400p^2 - 360p^2 - 360$
 $D = 40p^2 - 360$
 $D = 0$ geeft $40p^2 = 360$
 $p^2 = 9$
 $p = -3$ of $p = 3$
- b** $y = -3x - 9$ en $y = 3x - 9$

Vaardigheden 1

- 1 a 10% van 340 is 34 c 25% van 244 is 61
 b 50% van 960 is 480 d 30% van 80 is 24
- 2 a 25% van 400 is 100 d $33\frac{1}{3}\%$ van 75 is 25
 b 20% van 50 is 10 e 16% van 400 is 64
 c $12,5\%$ van 56 is 7 f $0,3\%$ van 200 is 0,6

- 3 a $1,03 \times € 250,- = € 257,50$
 b $0,88 \times € 80,- = € 70,40$
 c $1,05 \times 0,90 \times € 380,- = € 359,10$

4

<i>oorspronkelijke prijs</i> in euro's	22,00	35,00	68,00	40,00	70,00
<i>prijs na de prijsverhoging</i> in euro's	23,10	36,75	71,40	42,00	73,50

- 5 a 5 van 200 is $2,5\%$ d 135 van 1000 is $13,5\%$
 b 13 van 78 is $16\frac{2}{3}\%$ e 37 van 185 is 20%
 c 120 van 2500 is $4,8\%$ f 1 van 400 is $0,25\%$

- 6 a De omtrek van de cirkel is $\pi \times 10 = 10\pi$.
 b De omtrek van het parallellogram is $12 + 15 + 12 + 15 = 54$.
 c De oppervlakte van de cirkel is $\pi \times 5^2 = 25\pi$.
 d De oppervlakte van het parallellogram is $12 \times 10 = 120$.

- 7 a De oppervlakte van het grondvlak van de kegel is $\pi \times 6^2 = 36\pi \text{ cm}^2$.
 De inhoud van de kegel is $\frac{1}{3} \times 36\pi \times 15 = 180\pi \approx 565,5 \text{ cm}^3$.
 b De factor van de kegel naar de vergroting is $18 : 12 = 1,5$.
 De hoogte van de vergroting is $1,5 \times 15 = 22,5 \text{ cm}$.

- 8 a Bij tabel A hoort lineaire groei, want telkens als x met één toeneemt, neemt y met 2 af.
 b Bij tabel A hoort een lineaire formule met startgetal 5 en hellingsgetal -2 .
 Een formule bij tabel A is $y = -2x + 5$.
 Bij tabel B wordt telkens als x met één toeneemt y met 3 vermenigvuldigd.
 Bij tabel B hoort een exponentiële formule met groeifactor 3 en
 beginhoeveelheid $6 : 3 = 2$.
 Een formule bij tabel B is $y = 2 \cdot 3^x$.

Vaardigheden 1

9 a $y = 8x(2x - 3)$

$\times$	$2x$	-3
$8x$	$16x^2$	$-24x$

$$y = 16x^2 - 24x$$

b $p = (3 - k)(7k + 4)$

$\times$	$7k$	$+4$
3	$21k$	$+12$
$-k$	$-7k^2$	$-4k$

$$p = -7k^2 + 17k + 12$$

c $w = 14 - (5t - 8)$

$\times$	$5t$	-8
-1	$-5t$	$+8$

$$w = 14 - 5t + 8$$

$$w = 22 - 5t$$

d $r = 2q - 3(6q + 1)$

$\times$	$6q$	$+1$
-3	$-18q$	-3

$$r = 2q - 18q - 3$$

$$r = -16q - 3$$

e $g = (3 - m)(6m + 2)$

$\times$	$6m$	$+2$
3	$18m$	$+6$
$-m$	$-6m^2$	$-2m$

$$g = -6m^2 + 16m + 6$$

f $h = (1,2 - 5v)(2 - 5v)$

$\times$	2	$-5v$
$1,2$	$2,4$	$-6v$
$-5v$	$-10v$	$+25v^2$

$$h = 25v^2 - 16v + 2,4$$

g $s = 4a + 3a(2 - a)$

$\times$	2	$-a$
$3a$	$6a$	$-3a^2$

$$s = 4a - 3a^2 + 6a$$

$$s = -3a^2 + 10a$$

h $b = (d - 3)(2d + 6)$

$\times$	$2d$	$+6$
d	$2d^2$	$+6d$
-3	$-6d$	-18

$$b = 2d^2 - 18$$

10 a $c = 3b^2 - 6b$

$$c = 3b(b - 2)$$

b $u = v^2 - 3v - 108$

$$u = (v + 9)(v - 12)$$

c $y = x^2 + 15x + 56$

$$y = (x + 7)(x + 8)$$

d $k = -4t^2 - 6t$

$$k = 2t(-2t - 3) \text{ of } k = -2t(2t + 3)$$

e $m = 15n - 5n^2$

$$m = 5n(3 - n)$$

f $q = p^2 + 5p - 6$

$$q = (p - 1)(p + 6)$$

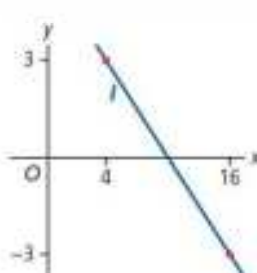
g $h = g^2 - 8g + 16$

$$h = (g - 4)(g - 4)$$

h $s = -40d^2 + 4d$

$$s = 4d(-10d + 1) \text{ of } s = -4d(10d - 1)$$

11 a



De toename van de x -coördinaat is $16 - 4 = 12$.

De toename van de y -coördinaat is $-3 - 3 = -6$.

De richtingscoëfficiënt van lijn l is $\frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$.

Invullen van de richtingscoëfficiënt geeft de formule $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Invullen van $x = 4$ en $y = 3$ geeft $3 = -\frac{1}{2} \times 4 + b$, oftewel $3 = -2 + b$, dus

$$b = 5.$$

Een formule bij lijn l is $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

- b** Invullen van $x = 0$ geeft $y = -\frac{1}{2} \times 0 + 5 = 5$.
Lijn l snijdt de y -as in het punt $(0, 5)$.
- c** De formule van lijn m is van de vorm $y = -3x + b$.
Invullen van $x = -4$ en $y = 0$ geeft $0 = -3 \times -4 + b$, oftewel $0 = 12 + b$, dus
 $b = -12$.
Een formule bij lijn m is $y = -3x - 12$.

12 a Invullen van $x = 9$ en $y = -7$ geeft

$$-7 = 9^2 + p \times 9 + 11$$

$$-7 = 81 + 9p + 11$$

$$-7 = 92 + 9p$$

$$9p = -99$$

$$p = -11$$

b Invullen van $x = -7$ en $y = 4$ geeft

$$4 = (-7)^2 + p \times -7 + 11$$

$$4 = 49 - 7p + 11$$

$$4 = 60 - 7p$$

$$7p = 56$$

$$p = 8$$

c Invullen van $p = -5$ geeft

$$x^2 - 5x + 11 = 11$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x - 5 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 5$$

13 a $6t - 7 = 3t + 14$

$$3t = 21$$

$$t = 7$$

b $-8a + 23 = 15 - 2a$

$$8 = 6a$$

$$a = 1\frac{1}{3}$$

c $1\frac{1}{2}z + 17 = 5\frac{1}{2}z - 20$

$$37 = 4z$$

$$z = 9\frac{1}{4}$$

d $8x + 9 - 5x = 12 - x$

$$3x + 9 = 12 - x$$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

e $7(2c + 1) - (2c - 5) = 0$

$$14c + 7 - 2c + 5 = 0$$

$$12c + 12 = 0$$

$$12c = -12$$

$$c = -1$$

f $0,4p = 1,2p + 5,6$

$$-0,8p = 5,6$$

$$p = -7$$

g $8(2m - 1) - (m + 7) = 0$

$$16m - 8 - m - 7 = 0$$

$$15m - 15 = 0$$

$$15m = 15$$

$$m = 1$$

h $8(v - 4) + 3(8 - 5v) = 2$

$$8v - 32 + 24 - 15v = 2$$

$$-7v - 8 = 2$$

$$-7v = 10$$

$$v = -1\frac{3}{7}$$

Vaardigheden 1

14 a $12 + 5t^2 = 2t^2 + 39$

$$3t^2 = 27$$

$$t^2 = 9$$

$$t = 3 \text{ of } t = -3$$

b $-3x^2 = -75$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \text{ of } x = -5$$

c $7 - 6r^2 = 1$

$$6r^2 = 6$$

$$r^2 = 1$$

$$r = 1 \text{ of } r = -1$$

d $6b^2 = 24$

$$b^2 = 4$$

$$b = 2 \text{ of } b = -2$$

e $-2(p^2 - 16) = 0$

$$p^2 - 16 = 0$$

$$p^2 = 16$$

$$p = 4 \text{ of } p = -4$$

f $w(6w + 2) = 2(w + 75)$

$$6w^2 + 2w = 2w + 150$$

$$6w^2 = 150$$

$$w^2 = 25$$

$$w = 5 \text{ of } w = -5$$

15 a $2x + 5 = -5x + 26$

$$7x = 21$$

$$x = 3$$

Invullen van $x = 3$ in $y = 2x + 5$ geeft $y = 2 \times 3 + 5 = 11$.

De coördinaten van het snijpunt S zijn $(3, 11)$.

b $15x - 23 = -x + 57$

$$16x = 80$$

$$x = 5$$

Invullen van $x = 5$ in $y = 15x - 23$ geeft $y = 15 \times 5 - 23 = 52$.

De coördinaten van het snijpunt S zijn $(5, 52)$.

c $1,3x + 21 = 3 - 0,5x$

$$1,8x = -18$$

$$x = -10$$

Invullen van $x = -10$ in $y = 1,3x + 21$ geeft $y = 1,3 \times -10 + 21 = 8$.

De coördinaten van het snijpunt S zijn $(-10, 8)$.

d $3\frac{1}{2}x - 8 = 1\frac{1}{2}x + 24$

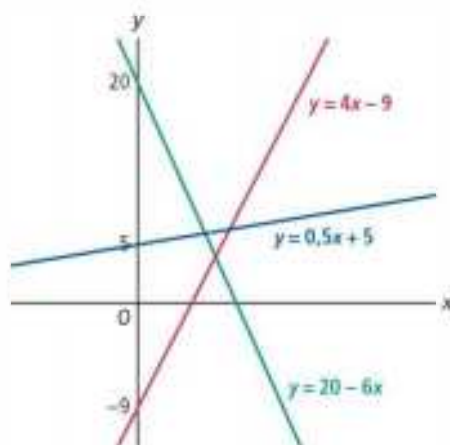
$$2x = 32$$

$$x = 16$$

Invullen van $x = 16$ in $y = 3\frac{1}{2}x - 8$ geeft $y = 3\frac{1}{2} \times 16 - 8 = 48$.

De coördinaten van het snijpunt S zijn $(16, 48)$.

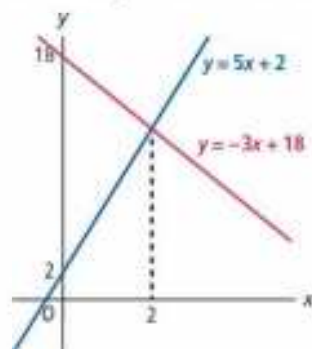
16 a b c



17 a $5x + 2 = -3x + 18$

$$8x = 16$$

$$x = 2 \text{ en } y = 5 \times 2 + 2 = 12$$

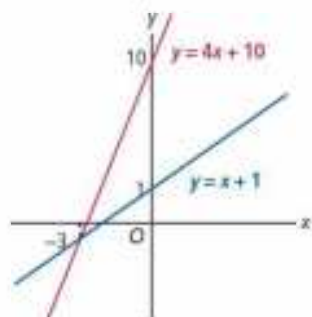


De oplossing is $x < 2$.

b $4x + 10 = x + 1$

$$3x = -9$$

$$x = -3 \text{ en } y = 4 \times -3 + 10 = -2$$

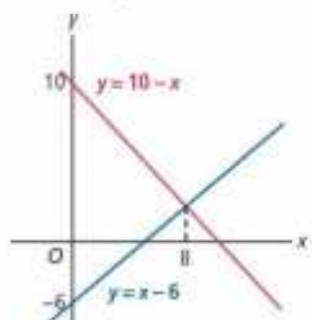


De oplossing is $x > -3$.

c $x - 6 = 10 - x$

$$2x = 16$$

$$x = 8 \text{ en } y = 8 - 6 = 2$$

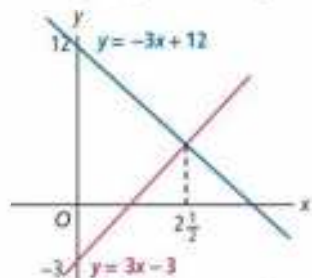


De oplossing is $x < 8$.

d $-3x + 12 = 3x - 3$

$$15 = 6x$$

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ en } y = -3 \times 2\frac{1}{2} + 12 = 4\frac{1}{2}$$

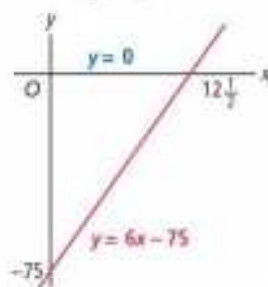


De oplossing is $x < 2\frac{1}{2}$.

e $6x - 75 = 0$

$$6x = 75$$

$$x = 12\frac{1}{2} \text{ en } y = 0$$

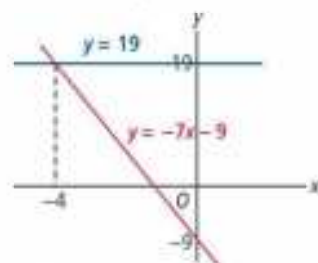


De oplossing is $x < 12\frac{1}{2}$.

f $-7x - 9 = 19$

$$-7x = 28$$

$$x = -4 \text{ en } y = 19$$

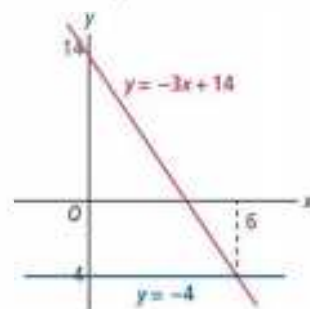


De oplossing is $x < -4$.

g $-3x + 14 = -4$

$$-3x = -18$$

$$x = 6 \text{ en } y = -4$$

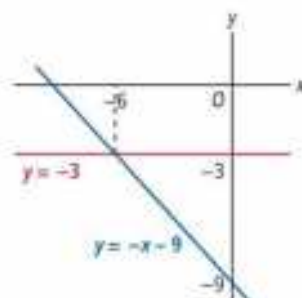


De oplossing is $x > 6$.

h $-x - 9 = -3$

$$-x = 6$$

$$x = -6 \text{ en } y = -3$$



De oplossing is $x < -6$.

Vaardigheden 1

Verdieping | Bruggen

- 1 a** Invullen van $x = 0$ geeft $y = -1,65 \times 0 + 132 = 132$.
Punt C ligt 132 meter boven het wegdek.
- b** $-1,65x + 132 = 0$
 $1,65x = 132$
 $x = 80$
Punt B ligt 80 meter van de oorsprong af.
- c** $0,4x + 132 = 0$
 $0,4x = -132$
 $x = -330$
Punt A ligt 330 meter van de oorsprong af.
Het wegdek van punt A naar punt B is $330 + 80 = 410$ meter lang.
- d** De richtingscoëfficiënt is $79 : 40 = 1,975$ en het startgetal is 79, dus bij het onderste deel van de pyloon hoort de formule $y = 1,975x + 79$.
Of:
Invullen van $x = 0$ geeft $y = 1,975 \times 0 + 79 = 79$ en dat hoort bij punt D .
Invullen van $x = -40$ geeft $y = 1,975 \times -40 + 79 = 0$ en dat hoort bij punt E .
- 2 a** Invullen van $x = 0$ geeft $y = a \times 0 + 60 = 60$ voor iedere waarde van a .
Alle lijnen uit de bundel gaan door het punt $T(0, 60)$.
- b** De coördinaten van de punten zijn $A(-80, 0)$, $B(-60, 0)$, $C(-40, 0)$, $D(-20, 0)$, $E(0, 0)$, $F(20, 0)$, $G(40, 0)$, $H(60, 0)$ en $I(80, 0)$.
- c** Invullen van $x = -80$ en $y = 0$ geeft
 $0 = a \times -80 + 60$
 $0 = -80a + 60$
 $80a = 60$
 $a = \frac{3}{4}$
- d** Bij de kabel door punt A hoort de formule $y = \frac{3}{4}x + 60$.
- e** Bij punt B geldt $0 = -60a + 60$, dus $a = 1$ en $y = x + 60$.
Bij punt C geldt $0 = -40a + 60$, dus $a = 1\frac{1}{2}$ en $y = 1\frac{1}{2}x + 60$.
Bij punt D geldt $0 = -20a + 60$, dus $a = 3$ en $y = 3x + 60$.
Bij punt F geldt $0 = 20a + 60$, dus $a = -3$ en $y = -3x + 60$.
Bij punt G geldt $0 = 40a + 60$, dus $a = -1\frac{1}{2}$ en $y = -1\frac{1}{2}x + 60$.
Bij punt H geldt $0 = 60a + 60$, dus $a = -1$ en $y = -x + 60$.
Bij punt I geldt $0 = 80a + 60$, dus $a = -\frac{3}{4}$ en $y = -\frac{3}{4}x + 60$.
- 3 a** De coördinaten van punt A zijn $(0, 0)$. De coördinaten van punt E zijn $(80, 0)$.
De coördinaten van punt T zijn $(80, 60)$.
- b** Invullen van $x = 80$ en $y = 60$ geeft $60 = a \times (80 - 80) + 60$, oftewel $60 = a \times 0 + 60$. Dat klopt voor elke waarde van a , dus de bijbehorende formules zijn van de vorm $y = a(x - 80) + 60$.
- c** Invullen van $x = 0$ en $y = 0$ geeft
 $0 = a \times (0 - 80) + 60$
 $0 = -80a + 60$
 $80a = 60$
 $a = \frac{3}{4}$
Bij de kabel door de punten A en T hoort de formule $y = \frac{3}{4}(x - 80) + 60$.
- d** Je krijgt dezelfde waarde van a als bij opdracht 2, omdat de kabel door punt A bij beide opdrachten in dezelfde richting loopt.
- e** Bij punt C geldt $0 = -40a + 60$, dus $a = 1\frac{1}{2}$ en $y = 1\frac{1}{2}(x - 80) + 60$.
Bij punt I geldt $0 = 80a + 60$, dus $a = -\frac{3}{4}$ en $y = -\frac{3}{4}(x - 80) + 60$.

- 4 a** Voor deze hangbrug geldt $a > 0$, want de parabool is een dalparabool.
- b** De coördinaten van de punten zijn $A(-80, 60)$, $B(-80, 0)$, $C(80, 0)$ en $D(80, 60)$.
- c** Invullen van $x = 80$ en $y = 60$ geeft
- $$60 = a \times 80^2$$
- $$60 = 6400a$$
- $$a = \frac{60}{6400} = \frac{3}{320}$$
- d** De formule bij de kabel is $y = \frac{3}{320}x^2$.
- e** Invullen van $x = 20$ of $x = -20$ geeft $y = \frac{3}{320} \times 20^2 = 3,75$ of $y = \frac{3}{320} \times (-20)^2 = 3,75$.
Op 20 meter van de oorsprong hangt de kabel 3,75 meter boven het wegdek.
- 5 a** Invullen van $x = 0$ en $y = 20$ geeft $20 = a \times 0^2 + 20$.
Dat klopt voor elke waarde van a .
- b** De vorm van de parabool bij de kabel verandert, dus de waarde van a zal anders zijn dan bij opdracht 4.
- c** Invullen van $x = 80$ en $y = 60$ geeft
- $$60 = a \times 80^2 + 20$$
- $$60 = 6400a + 20$$
- $$6400a = 40$$
- $$a = \frac{40}{6400} = \frac{1}{160}$$
- Bij de kabel hoort de formule $y = \frac{1}{160}x^2 + 20$.
- d** Op 20 meter afstand van de pyloon is $x = 60$ of $x = -60$.
Invullen van $x = 60$ of $x = -60$ geeft $y = \frac{1}{160} \times 60^2 + 20 = 42,5$ of $y = \frac{1}{160} \times (-60)^2 + 20 = 42,5$.
Op 20 meter afstand van de pyloon hangt de kabel 42,5 meter boven het wegdek.
- 6 a** De boog snijdt het wegdek in de punten $O(0, 0)$ en $A(100, 0)$.
- b** Invullen van $x = 0$ en $y = 0$ geeft $0 = a \times 0 \times (0 - 100)$, oftewel $0 = a \times 0 \times -100$ en invullen van $x = 100$ en $y = 0$ geeft $0 = a \times 100 \times (100 - 100)$, oftewel $0 = a \times 100 \times 0$.
Dat klopt voor elke waarde van a , dus de boog gaat door de punten O en A .
- c** De coördinaten van punt B zijn $(50, 40)$.
Invullen van $x = 50$ en $y = 40$ geeft
- $$40 = a \times 50 \times (50 - 100)$$
- $$40 = -2500a$$
- $$a = -\frac{40}{2500} = -\frac{2}{125}$$
- De formule bij de boog is $y = -\frac{2}{125}x(x - 100)$.
- 7 a** Invullen van $x = 0$ en $y = 0$ geeft $0 = a \times 0 \times (0 - 250)$, oftewel $0 = a \times 0 \times -250$ en invullen van $x = 250$ en $y = 0$ geeft $0 = a \times 250 \times (250 - 250)$, oftewel $0 = a \times 250 \times 0$.
Dat klopt voor elke waarde van a , dus gaat de boog door de snijpunten met de x -as.
- b** Invullen van $x = 125$ en $y = 65$ geeft $65 = a \times 125 \times (125 - 250)$, oftewel $65 = -15625a$, dus $a = -\frac{65}{15625} = -\frac{13}{3125}$.
De formule bij de boog is $y = -\frac{13}{3125}x(x - 250)$.

Vaardigheden 1

- 8 a** Hierbij hoort $b = 500$.
- b** Invullen van $x = 250$ en $y = 120$ geeft $120 = a \times 250 \times (250 - 500)$, oftewel
 $120 = -62\,500a$, dus $a = -\frac{120}{62\,500} = -\frac{6}{3125}$.
 De formule bij de onderste boog is $y = -\frac{6}{3125}x(x - 500)$.
- c** Invullen van $x = 0$ en $y = 50$ geeft $50 = a \times 0 \times (0 - b) + 50$, oftewel
 $50 = a \times 0 \times -b + 50$.
 Dat klopt voor elke waarde van a en b .
 Invullen van $x = 500$ en $y = 50$ geeft $50 = a \times 500 \times (500 - b) + 50$, oftewel
 $a \times 500 \times (500 - b) = 0$.
 Dat klopt alleen als $a = 0$, maar dan heeft de boog niet de vorm van een
 parabool, of als $500 - b = 0$, dus als $b = 500$.
 Invullen van $x = 250$ en $y = 125$ geeft $125 = a \times 250 \times (250 - 500)$, oftewel
 $125 = -62\,500a$, dus $a = -\frac{125}{62\,500} = -\frac{1}{500}$.
 De formule bij de bovenste boog is $y = -\frac{1}{500}x(x - 500)$.