



Lineaire en exponentiële functies

1

In dit hoofdstuk

In klas 1 en klas 2 heb je gewerkt met lineaire en exponentiële formules. Je leert nu een andere notatie voor formules: de functienotatie. Je past deze functienotatie toe op onder andere lineaire en exponentiële formules.

Het berekenen van de coördinaten van het snijpunt van twee lijnen leidt tot het oplossen van een zogenaamd stelsel vergelijkingen.

Bij het rekenen met exponentiële formules heb je rekenregels nodig. Met deze rekenregels kun je laten zien of twee exponentiële formules die er ogenschijnlijk verschillend uitzien, toch hetzelfde blijken te zijn.

De nieuwe notatie voor formules, de functienotatie, komt terug in alle hoofdstukken waar formules een rol spelen.



- V1 Gegeven zijn twee tabellen.
- Teken in één assenstelsel bij beide tabellen de grafiek.
 - Een van de grafieken is een rechte lijn.
Leg uit hoe je dat aan de tabel kunt zien.
 - Schrijf het startgetal en het hellingsgetal daarbij op.
 - Geef de formule bij die tabel.
 - Wat voor soort verband hoort bij de andere tabel?

A

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	5	10	15	20	25	30

B

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4	9	16

Theorie

In de bovenste rij van de tabel in het voorbeeld staan opeenvolgende gehele getallen. In de onderste rij is de toename steeds hetzelfde. Er bestaat een **lineair verband** tussen de variabelen x en y .

De grafiek bij een lineair verband is een rechte lijn. De bijbehorende formule is een **lineaire formule**.

Een lineaire formule heeft de vorm $y = ax + b$. Hierin is a het **hellingsgetal** en b het **startgetal**.

Voorbeeld

		+1	+1	+1	
x	-1	0	1	2	
y	-12	-10	-8	-6	
		+2	+2	+2	

Het hellingsgetal is 2 en het startgetal is -10. De formule is $y = 2x - 10$.

- V2 a Vul de tabel bij de lineaire formule $y = -4 + 2x$ in.

x	-4	-2	0	2	4	6	8
y	...	...	...	...	...	...	...

- Geef het hellingsgetal en het startgetal van deze formule.
- Teken de grafiek bij de tabel.
- Zoek uit of het punt (15, 34) op de grafiek ligt.
- Teken in hetzelfde assenstelsel de grafieken bij de formules $y = 2$ en $x = 3$.
- Bij welke van die formules loopt de grafiek horizontaal?

Theorie

De lineaire formule $3q + 5p = 60$ kun je herleiden tot de formule $q = -1\frac{2}{5}p + 20$. Daarin is q **uitgedrukt in p** .

Met die formule kun je direct q berekenen als je p weet.

Voorbeeld

Herleid de formule $3q + 5p = 60$ waarbij je q uitdrukt in p .

Oplossing

$$3q + 5p = 60$$

$$3q = 60 - 5p \quad (\text{links en rechts } - 5p)$$

$$q = 20 - 1\frac{2}{5}p \quad (\text{links en rechts } : 3)$$

- V3 Herleid de formules waarbij je q uitdrukt in p .

- $2q - 8p = 24$
- $4q + 6p = 18$
- $2p - 8q = 20$
- $-12p - 6q = 30$

- V4 a Maak een schets van een assenstelsel met de lijn door de punten $P(5, 18)$ en $Q(9, 40)$.
 b Bereken het hellingsgetal van de lijn PQ .
 c Vul het hellingsgetal in de formule $y = ax + b$ in.
 d Vul in de formule de coördinaten van punt P in en bereken het startgetal.
 e Schrijf de formule bij de lijn op.
 f Stel een formule op bij de lijn door de punten $(-2, 5)$ en $(8, -5)$.

$$\text{hellingsgetal} = \frac{\text{toename 2e coördinaat}}{\text{toename 1e coördinaat}}$$

- V5 Los de vergelijkingen op.

- a $-3x + 12 = 9x$ c $28x - 12 = 12 - 8x$
 b $\frac{1}{2}x - 7 = x + 8$ d $6 - 1,2x = 0,3x - 9$

Theorie

Je noemt een groeiproces **exponentieel** als de factor waarmee je vermenigvuldigt steeds hetzelfde is.

Deze factor heet de **groefactor**.

Ook bij een afname spreek je van exponentiële groei.

Bij een toename is de groefactor groter dan 1.

Bij een afname zit de groefactor tussen 0 en 1.

$$\text{groefactor} = \frac{\text{nieuwe hoeveelheid}}{\text{oude hoeveelheid}}$$

Voorbeeld

tijd in jaren	0	1	2	3
aantal	200	120	72	43,2
		$\times 0,6$	$\times 0,6$	$\times 0,6$

In de tabel geldt $120 : 200 = 0,6$; $72 : 120 = 0,6$ en $43,2 : 72 = 0,6$.

De groefactor per jaar is steeds gelijk, dus bij de tabel hoort een exponentieel groeiproces.

- V6 a Hoe groot is de groefactor in het voorbeeld?
 b Gaat het om een toename of om een afname?
 c Hoe zie je dat er bij de tabel geen lineaire groei hoort?

- V7 De tabellen horen bij exponentiële groei.
 Geef bij elke tabel de groefactor en vul de tabellen verder in.

a

t	0	1	2	3	4
h	1,3	2,6	5,2	...	...

b

t	0	1	2	3	4
h	160	40	10	...	...

c

t	0	1	2	3	4
h	1000	1100	1210	...	...

d

t	0	1	2	3	4
h	...	40	32	...	...

Je leert

- wat een functie, een functievoorschrift en een functiewaarde is
- wat een afhankelijke variabele en een onafhankelijke variabele is

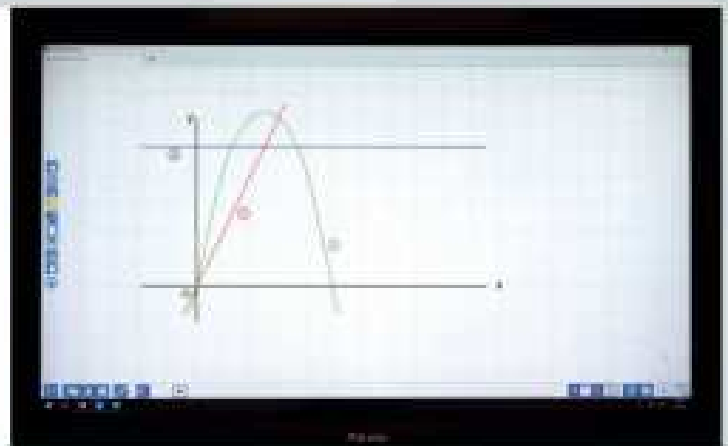
Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–3–04–5–6–7
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7
- uitdagend: 1–3–4–5–6–U1–U2

Op het schoolbord staan drie grafieken.

- Geef bij iedere grafiek aan welke van de volgende formules erbij hoort.

- | | |
|---------------|-------------------|
| A $y = 2x$ | E $x = 5$ |
| B $y = 5 - x$ | F $y = -x^2 + 5$ |
| C $y = -2x$ | G $y = x^2 - 5x$ |
| D $y = 5$ | H $y = -x^2 + 5x$ |



- 1 Met de lineaire formule $T = 20 - 0,006h$ kun je de temperatuur T in °C berekenen op een hoogte van h meter.

- Op het bovenste blaadje zie je hoe Youra de temperatuur op een hoogte van 1200 meter berekent. Maak de berekening van Youra af.
- Sven berekent de temperatuur op een andere hoogte. Op zijn blaadje zie je welke notatie hij gebruikt. Voor welke hoogte berekent Sven de temperatuur?
- Noteer de berekening van Youra op de manier van Sven.
- Bereken de temperatuur op 1100 meter hoogte en op 4,5 km hoogte. Noteer je berekeningen op de manier van Sven.

				Youra
$T = 20 - 0,006 \times 1200 = \dots$				

				Sven
$T(1500) = 20 - 0,006 \times 1500 = 11$				

Theorie

Bij de formule $T = 100 - 5h$ kun je T berekenen als je h weet. Je zegt dan dat T een **functie** is van h . Je noteert dat als $T(h) = 100 - 5h$. Dit heet het **functievoorschrift**.

De uitkomst van een functie noem je de **functiewaarde**.

Bij $h = 10$ hoort de functiewaarde 50, want

$100 - 5 \times 10 = 50$. Je noteert dit als $T(10) = 50$.

Omdat de waarde van T afhangt van h , noem je T de **afhankelijke variabele** en h de **onafhankelijke variabele**.

Voorbeeld

Bij de formule $s = t^2 + 2t$ hoort het functievoorschrift $s(t) = t^2 + 2t$.

Invullen in het functievoorschrift van $t = 3$ geeft $s(3) = 3^2 + 2 \times 3$, oftewel $s(3) = 15$.

Bij $t = 3$ hoort de functiewaarde 15.

De waarde van s hangt af van t , dus s is de afhankelijke variabele en t is de onafhankelijke variabele.

- 2 Gegeven is de formule $v = -3t + 7$.
- Geef het functievoorschrift $v(t)$ bij deze formule.
 - Welke variabele is bij deze formule de afhankelijke variabele? En welke is de onafhankelijke variabele?
 - Vul in: $v(3) = -3 \times 3 + 7 = \dots$
 - Bereken de functiewaarden $v(-1)$ en $v(0)$.
 - Welke functiewaarde hoort bij $t = 6$?
- 3 Met de functie $L(m) = 3m + 16$ kun je van een veer de lengte L in cm berekenen als er een massa van m kg aan hangt.
- Bereken de functiewaarden $L(3)$ en $L(10)$.
 - Welke betekenis hebben je antwoorden bij opdracht a?
 - Ab berekent bij welke massa de veer 31 cm lang is. Maak de berekening op het blaadje af.
 - Bereken op dezelfde manier voor welke waarde van m geldt dat $L(m) = 17,5$.

				Ab
☐	$L(m) = 3m + 16$			
☐	$31 = 3m + 16$			
☐	$3m = \dots$			
☐	$m = \dots$			

Theorie

Een formule als $y = 2x - 3$ wordt in de functienotatie meestal geschreven als $f(x) = 2x - 3$. Je spreekt dan over de functie f .

Bij de opdracht 'Bereken $f(4)$,' vul je $x = 4$ in de functie in.

Bij de opdracht 'Los $f(x) = 4$ op,' stel je het functievoorschrift gelijk aan 4 en bereken je x .

Voorbeeld

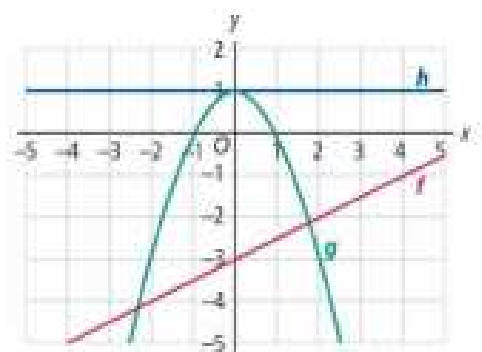
Gegeven is de functie $f(x) = 2x - 3$. Bereken $f(4)$ en los $f(x) = 4$ op.

Oplossing

$$\begin{array}{ll}
 f(4) = 2 \times 4 - 3 & 4 = 2x - 3 \\
 f(4) = 5 & 2x = 7 \\
 & x = 3\frac{1}{2}
 \end{array}$$

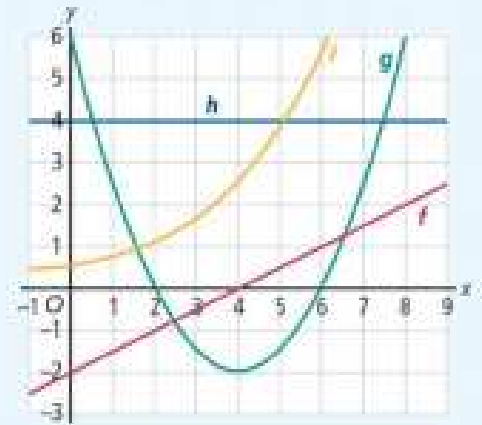
Ondersteunende route → maak opdracht 04

- 4 In het assenstelsel zijn de grafieken bij de functies $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ en $g(x) = -x^2 + 1$ en de horizontale lijn h door het punt $(0, 1)$ getekend.
- Bereken de functiewaarden $f(10)$ en $g(8)$.
 - Bij welke waarde van x is $f(x) = -1$?
 - Los $f(x) = 44$ op.
 - Lees in de grafiek af bij welke waarden van x geldt dat $g(x) = -3$.
 - Leg uit dat bij de horizontale lijn het functievoorschrift $h(x) = 1$ hoort.

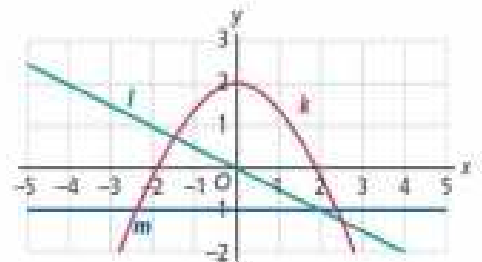


Theorie

De functie $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ is een **lineaire functie**,
 $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ is een **kwadratische functie**,
 $h(x) = 4$ is een **constante functie** en
 $i(x) = 0,5 \cdot 1,5^x$ is een **exponentiële functie**.
 De grafiek van h is een horizontale lijn door het punt $(0, 4)$.
 In het assenstelsel wordt bij de verticale as niet $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ of $i(x)$, maar y geschreven. Bij de grafiek schrijf je bij welke functie de grafiek hoort.



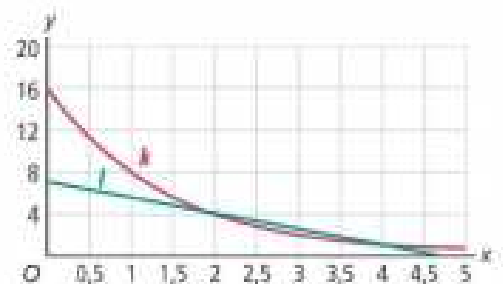
- 5 Gegeven zijn de grafieken bij de functies k , l en m .
- Vul in: $k(0) = \dots$, $l(2) = \dots$ en $m(-2) = \dots$
 - Wat voor soort functie is k ?
 - Bij welke waarden van x is $k(x) = 0$?
 - Stel het functievoorschrift op voor l .
 - Geef het functievoorschrift voor m .



- 6 Gegeven is de exponentiële functie $f(x) = 64 \cdot 0,75^x$.
- Laat met een berekening zien dat $f(2) = 36$.
 - Vul de tabel verder in.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	...	...	36	...	...	...	...	...	...

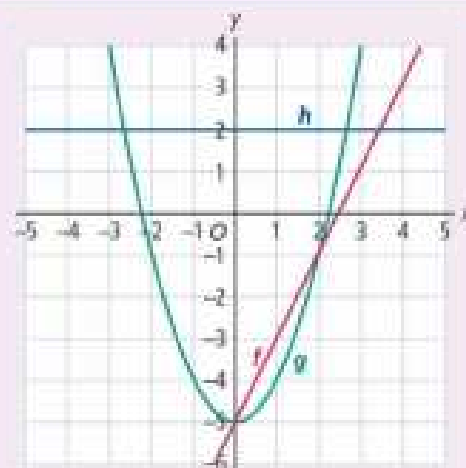
- Teken de grafiek bij de tabel.
 - Teken in hetzelfde assenstelsel de grafiek bij de functie $g(x) = 5x + 12$.
 - Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.
- 7 Gegeven zijn de grafieken bij de functies $k(x) = 16 \cdot 0,5^x$ en $l(x) = -1,5x + 7$.
- Bereken $k(2)$ en $l(2)$.
 - Controleer je antwoorden met de grafiek.
 - De grafieken van k en l lijken elkaar te snijden bij $x = 4$. Ga met een berekening na of dat inderdaad het geval is.



Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

- 04** Gegeven zijn de grafieken bij de functies $f(x) = 2x - 5$ en $g(x) = x^2 - 5$ en de horizontale lijn h door het punt $(0, 2)$.
- Vul in: $f(3) = 2 \times 3 - 5 = \dots$, dus de functiewaarde van f bij $x = 3$ is $\dots$
 - Bereken de functiewaarden $f(1)$ en $g(1)$.
 - Om uit te rekenen bij welke waarde van x de functiewaarde van f gelijk is aan 13, moet je de vergelijking $2x - 5 = 13$ oplossen.
Bij welke waarde van x is $f(x) = 13$?
 - Schrijf de vergelijking op die hoort bij de opdracht:
‘Bij welke waarde van x is $g(x) = 31$?’
 - Bij welke waarden van x is $g(x) = 31$?
 - Bereken $f(10)$ en los $f(x) = 10$ op.
 - De horizontale lijn is de grafiek van een functie h .
Op de lijn liggen alleen maar punten waarvoor geldt dat de y -coördinaat 2 is. De functiewaarden van h moeten dus allemaal 2 zijn.
Vul in: het functievoorschrift van h is $h(x) = \dots$



Uitdagingende opdrachten

- U1**
- Van de lineaire functie f is $f(3) = 6$ en $f(10) = -8$.
Stel het functievoorschrift van f op.
 - Van de kwadratische functie g is $g(0) = 8$ en $g(5) = 8$.
De grafiek van g is een parabool. De top van de parabool ligt op de grafiek bij de functie $k(x) = x + 4$.
Bereken de coördinaten van de top van de parabool.
- U2** Gegeven is de functie $g(x) = -6x + b$.
- Bereken b in het geval $g(3) = 0$.
 - Bereken b in het geval $g(b) = 20$.
 - Bereken b in het geval $g(5) = 5b$.

Je leert

- wat de richtingscoëfficiënt is
- hoe je de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij twee lineaire functies berekent

Leerroutes

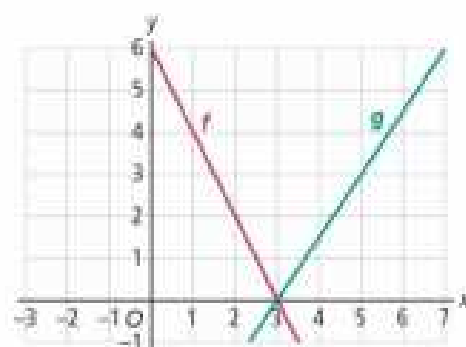
- ondersteunend: 8—9—010—11—12—013—13
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14
- uitdagend: 8—9—10—12—13—U3—U4

In het schrift van Emir staat een schets van de grafieken bij de lineaire functies $f(x) = 5x + 45$ en $g(x) = 7x - 12$. Het snijpunt van de grafieken valt buiten de schets.

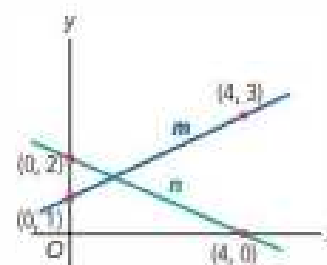
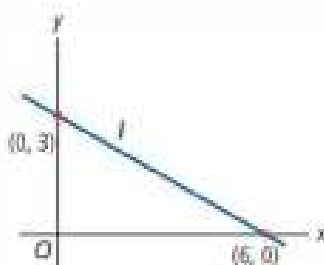
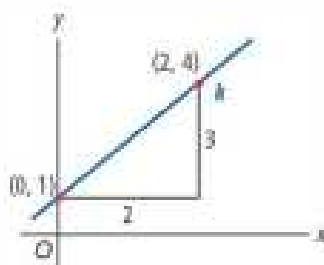
- Zoek uit of het snijpunt links of rechts van de lijn $x = 23$ ligt.



- 8 Gegeven is de grafiek bij de functie $f(x) = 6 - 2x$.
- Lees uit het functievoorschrift van f af hoe groot het hellingsgetal van de grafiek is.
 - Leg uit hoe je het hellingsgetal uit de grafiek afleest.
 - Ga na of het punt $(-2, 11)$ op de grafiek van f ligt.
 - Stel het functievoorschrift op van de lineaire functie g .
 - De grafiek bij de functie h is evenwijdig aan de grafiek van f . De grafiek van h gaat door het punt $(3, 9)$. Stel het functievoorschrift op van h .



- 9 Van de lineaire functies k , l , m en n zijn de grafieken geschetst.
- Leg uit dat bij de grafiek van k het functievoorschrift $k(x) = 1\frac{1}{2}x + 1$ hoort.
 - Stel de functievoorschriften bij de grafieken van l , m en n op.
 - Controleer dat het punt $(1, 1\frac{1}{2})$ zowel op de grafiek van m als op de grafiek van n ligt.



Theorie

Van de lineaire functie $f(x) = ax + b$ is a het hellingsgetal en b het startgetal. Een ander woord voor hellingsgetal is **richtingscoëfficiënt**.

Als de richtingscoëfficiënt positief is, dan is de grafiek een stijgende lijn. Als de richtingscoëfficiënt negatief is, dan is de grafiek een dalende lijn.

Voorbeeld

Geef van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$ de richtingscoëfficiënt en schets de grafiek.

Oplossing

De richtingscoëfficiënt is $\frac{1}{2}$.

De grafiek is een stijgende lijn die de y -as in het punt $(0, -5)$ snijdt.



Ondersteunende route → maak opdracht 010

- 10 Geef van elke functie de richtingscoëfficiënt en schets de grafiek.

a $g(x) = \frac{1}{2}x - 3$

c $h(x) = 0,4x + 7$

b $h(x) = -3x - 1$

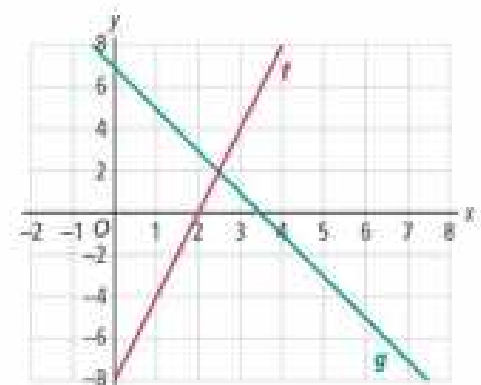
d $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$

- 11 Gegeven zijn de functies $k(x) = 6x + 5$ en $l(x) = 2x - 7$. José zoekt uit bij welke waarde van x de functiewaarden $k(x)$ en $l(x)$ gelijk zijn.

- Ga na dat $k(2)$ en $l(2)$ niet gelijk zijn.
- Zijn $k(-4)$ en $l(-4)$ gelijk?
- José weet dat $k(x) = l(x)$ als $6x + 5 = 2x - 7$. Los de vergelijking op.

- 12 De gegeven grafieken horen bij de lineaire functies f en g .

- Stel het functievoorschrift bij de grafiek van f op.
- Leg uit dat bij de functie g het functievoorschrift $g(x) = 7 - 2x$ hoort.
- Met de vergelijking $f(x) = g(x)$ kun je de x -coördinaat van het snijpunt berekenen. Los deze vergelijking op.
- Bereken de y -coördinaat van het snijpunt door de gevonden x -coördinaat in te vullen bij $f(x)$.
- Vul de gevonden x -coördinaat ook in bij $g(x)$.
- Hoe weet je nu zeker dat je de coördinaten van het snijpunt gevonden hebt?



Aanpak

Hoe bereken je de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij twee lineaire functies f en g ?

- 1 Schrijf de vergelijking op die bij $f(x) = g(x)$ hoort.
- 2 Bereken de x -coördinaat van het snijpunt door de vergelijking op te lossen.
- 3 Bereken de y -coördinaat door de berekende x -coördinaat in één van de functievoorschriften in te vullen.
- 4 Controleer het gevonden punt door die x -coördinaat ook in het andere functievoorschrift in te vullen.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij de functies $f(x) = -2x + 8$ en $g(x) = 1\frac{1}{2}x + 1$.

Oplossing

- 1 $f(x) = g(x)$ geeft
 $-2x + 8 = 1\frac{1}{2}x + 1$

$$\begin{aligned} 2 \quad 8 &= 3\frac{1}{2}x + 1 \\ 3\frac{1}{2}x &= 7 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

- 3 Invullen bij $f(x)$ geeft $f(2) = -2 \times 2 + 8 = 4$.
- 4 Invullen bij $g(x)$ geeft $g(2) = 1\frac{1}{2} \times 2 + 1 = 4$. Klopt. De coördinaten van het snijpunt zijn $(2, 4)$.

Ondersteunende route → maak opdracht 013

- 13 Bereken bij elk paar lineaire functies de coördinaten van het snijpunt van de bijbehorende grafieken.

- a $f(x) = -x$ en $g(x) = 7x + 16$
- b $h(x) = 3x - 1$ en $k(x) = -x + 7$
- c $f(x) = 3x + 3$ en $k(x) = x - 3$
- d $l(x) = -\frac{1}{2}x + 7$ en $m(x) = -4x - 7$

- 14 Gegeven is de functie $f(x) = 2x - 3$. Van de lineaire functie g gaat de grafiek door de punten $(-1, -4)$ en $(5, 2)$.

- a Schets de grafieken van f en g in één assenstelsel.
- b Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g .
- c Van de lineaire functie h is $h(-1) = -3$ en $h(2) = 3$. Schets de grafiek van h in het assenstelsel bij opdracht a.
- d Ga met de functievoorschriften van f en h na of de grafieken bij deze functies een snijpunt hebben.

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

- 010** Gegeven is de functie $f(x) = -5x + 10$.
- Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van f ?
 - Hoe kun je uit deze richtingscoëfficiënt opmaken dat de grafiek van f dalend is?
 - Hoe groot is het startgetal? In welk punt snijdt de grafiek van f dus de y -as?
 - Schets de grafiek van f .

Geef van elke functie de richtingscoëfficiënt en schets de grafiek.

- e $g(x) = 3x + 2$ g $h(x) = 1,2x - 5$
 f $h(x) = -2x + 10$ h $j(x) = \frac{1}{2}x - 7$

- 013** Gegeven zijn de lineaire functies $f(x) = 3x + 12$ en $g(x) = -x - 4$. Je gaat de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g berekenen.
- Door de functievoorschriften aan elkaar gelijk te stellen, krijg je de vergelijking $3x + 12 = -x - 4$. Hiermee kun je de x -coördinaat van het snijpunt berekenen. Los de vergelijking op.
 - Om de y -coördinaat van het snijpunt te berekenen, vul je de gevonden x -coördinaat in bij $f(x) = 3x + 12$. Bereken de y -coördinaat van het snijpunt.
 - Vul ter controle de gevonden x -coördinaat ook in bij $g(x) = -x - 4$. Krijg je hetzelfde antwoord?
 - Schrijf de coördinaten van het snijpunt op.

Uitdagende opdrachten

- U3** De grafieken van de functies $f(x) = 4x + 23$ en $g(x) = px + q$ zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = 43$. Welke waarde heeft p ? En welke waarde heeft q ?
- U4** Het snijpunt van de lijnen l en m ligt buiten de schets. Bereken de coördinaten van het snijpunt.

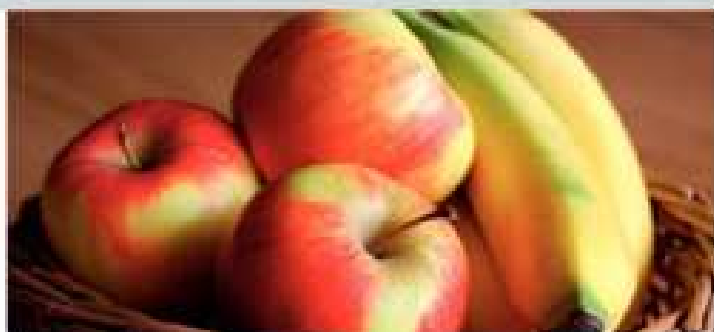


- Je leert**
- wat de vergelijking van een lijn is
 - hoe je een stelsel vergelijkingen oplost

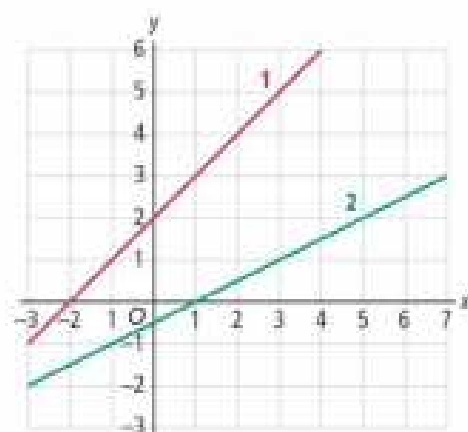
- Leerroutes**
- ondersteunend: 15—016—17—018—19
 - doorlopend: 15—16—17—18—19
 - uitdagend: 15—16—18—19—U5

Op de markt kosten 4 appels en 5 bananen samen € 5,30 en 8 appels en 3 bananen kosten samen € 5,70.

- Zoek uit hoeveel euro één appel kost en hoeveel euro één banaan kost.



- 15** Lijn 1 is de grafiek bij de formule $y = x + 2$.
- Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van lijn 1?
 - Lijn 1 is ook de grafiek bij de lineaire functie f . Stel het functievoorschrift op van f .
 - Bij lijn 2 hoort de formule $x - 2y = 1$. Laat zien dat deze formule bij lijn 2 hoort door de coördinaten van twee punten in te vullen.
 - Om de richtingscoëfficiënt van lijn 2 te vinden, moet je de formule $x - 2y = 1$ eerst herleiden tot de vorm $y = ax + b$. Voer de herleiding uit.
 - Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van lijn 2?
 - Lijn 2 is de grafiek bij de lineaire functie g . Stel het functievoorschrift op van g .
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen.



Theorie

De grafiek bij de lineaire functie $f(x) = ax + b$ is een rechte lijn. De lineaire formule $y = ax + b$ die bij een lijn hoort, noem je ook wel de **vergelijking van een lijn**.

De vergelijking bij een lineair verband kan ook de vorm $px + qy = r$ hebben.

Uit de vergelijking $y = ax + b$ kun je de richtingscoëfficiënt aflezen. Uit de vergelijking $px + qy = r$ kun je dat niet.

Voorbeeld

De lijn met vergelijking $-8x + 4y = 10$ is de grafiek bij de functie f .

Stel het functievoorschrift van f op en geef de richtingscoëfficiënt en het startgetal.

Oplossing

$$-8x + 4y = 10$$

$$4y = 8x + 10 \quad (\text{links en rechts } + 8x)$$

$$y = 2x + 2\frac{1}{2} \quad (\text{links en rechts } : 4)$$

Het functievoorschrift is $f(x) = 2x + 2\frac{1}{2}$.

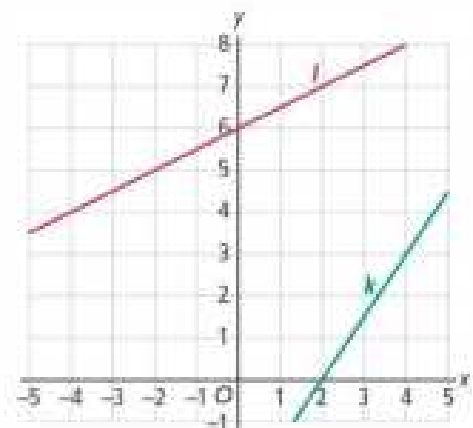
De richtingscoëfficiënt is 2 en het startgetal is $2\frac{1}{2}$.

Ondersteunende route → maak opdracht 016

- 16** Stel het functievoorschrift $f(x) = ax + b$ op bij de lijnen die bij de vergelijkingen horen. Geef ook de richtingscoëfficiënt en het startgetal.

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| a $6x + 3y = 12$ | d $3x = 38 + 2y$ |
| b $2y = 14 - 6x$ | e $2y - 5x = 10$ |
| c $4y - 12x = 40$ | f $0,2y + 8 = x$ |

- 17**
- a** Bij één van de lijnen hoort de vergelijking $3x - 2y = 6$. Zoek uit welke lijn dat is.
 - b** Laat zien dat de vergelijking $3x - 2y = 6$ te herleiden is tot $y = 1\frac{1}{2}x - 3$.
 - c** De vergelijking van de andere lijn is $x - 2y = -12$. Herleid ook deze vergelijking waarbij je y uitdrukt in x .
 - d** Welke richtingscoëfficiënt heeft de lijn uit opdracht c?
 - e** Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen.



Theorie

$-2x - y = -9$ en $2y + x = 12$ zijn vergelijkingen van lijnen.

Een **stelsel vergelijkingen** noteer je als
$$\begin{cases} -2x - y = -9 \\ 2y + x = 12 \end{cases}$$

De oplossing van een stelsel vergelijkingen is de combinatie van waarden van x en y die aan beide vergelijkingen voldoen.

De oplossing van een stelsel vergelijkingen geeft de coördinaten van het snijpunt van de lijnen die bij de vergelijkingen horen.

Bij het oplossen van een stelsel vergelijkingen herleid je eerst beide vergelijkingen tot een vergelijking met de vorm $y = ax + b$. Dan stel je deze vergelijkingen aan elkaar gelijk en lost de vergelijking die je krijgt op. Daarna vul je de gevonden waarde van x in één van de vergelijkingen in om de waarde van y te vinden.

Voorbeeld

Los het stelsel
$$\begin{cases} -2x - y = -9 \\ 2y + x = 12 \end{cases}$$
 op.

Oplossing

Eerst de vergelijkingen herleiden.

$$\begin{array}{ll} -2x - y = -9 & 2y + x = 12 \\ -y = 2x - 9 & 2y = -x + 12 \\ y = -2x + 9 & y = -\frac{1}{2}x + 6 \end{array}$$

Dan de vergelijkingen gelijkstellen.

$$-2x + 9 = -\frac{1}{2}x + 6$$

$$9 = 1\frac{1}{2}x + 6$$

$$1\frac{1}{2}x = 3$$

$$x = 2$$

Daarna invullen bij $y = -2x + 9$ geeft $y = -2 \times 2 + 9 = 5$. De oplossing van het stelsel is $x = 2$ en $y = 5$.

Ondersteunende route → maak opdracht 018

18 Los de stelsels vergelijkingen op.

a
$$\begin{cases} y = 3x + 7 \\ y + 4x = 0 \end{cases}$$

c
$$\begin{cases} 2y + x = 40 \\ 2y - 6x = 12 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} 1,5y + 3x = 3 \\ 3y + 18 = 2x \end{cases}$$

d
$$\begin{cases} 2y + x = 0 \\ 3y + 15 = x \end{cases}$$

19 Nick moet het stelsel vergelijkingen
$$\begin{cases} y = x - 1 \\ 4y + x = 16 \end{cases}$$
 oplossen.

Hij substitueert de vergelijking $y = x - 1$ in de vergelijking $4y + x = 16$. Op het blaadje zie je hoe hij begint.

a Los de vergelijking $4(x - 1) + x = 16$ op.

b Bereken y .

c Los de stelsels vergelijkingen met substitueren op.

A
$$\begin{cases} y = 2 - 2x \\ 5y + 2x = 14 \end{cases}$$

C
$$\begin{cases} y = 4x + 5 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases}$$

B
$$\begin{cases} 3y - 2x + 5 = 0 \\ y = 2x - 7 \end{cases}$$

D
$$\begin{cases} 5x + 7y = 32 \\ y + x = 4 \end{cases}$$

					Nick

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

016 Gegeven is de lijn met vergelijking $4x + 2y = 7$.

- a** Herleid de vergelijking $4x + 2y = 7$ tot de vorm $y = ax + b$.
- b** De gegeven lijn is de grafiek bij de lineaire functie f . Als je y in de vergelijking $y = ax + b$ door $f(x)$ vervangt, krijg je het functievoorschrift van f . Schrijf het functievoorschrift van f op.

Stel het functievoorschrift $f(x) = ax + b$ op bij de lijnen die bij de volgende vergelijkingen horen. Geef ook de richtingscoëfficiënt en het startgetal.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| c $2x + y = 17$ | f $5x = 20 - 10y$ |
| d $3x = 18 - 2y$ | g $4y - x = 16$ |
| e $42 - 3y = 12x$ | h $0.5y + 25 = x$ |

$$4x + 2y = 7$$

$$2y = -4x + 7$$

018 Hakim gaat het stelsel vergelijkingen op het blaadje oplossen. Eerst herleidt hij de vergelijking $8x + 2y = 3$ tot een vergelijking met de vorm $y = ax + b$.

- Herleid de vergelijking $3x - 4y = 32$ tot een vergelijking met de vorm $y = ax + b$.
- Stel de herleide vergelijkingen aan elkaar gelijk.
- Los de verkregen vergelijking op.
- Bereken y door de gevonden waarde van x in te vullen in één van de vergelijkingen.

Los de stelsels vergelijkingen op.

- $$\begin{array}{ll} \text{e} \quad \begin{cases} y = 2x - 6 \\ x + 4y = 12 \end{cases} & \text{g} \quad \begin{cases} -4x + 3y = 12 \\ x + y = 18 \end{cases} \\ \text{f} \quad \begin{cases} 2.5x + 5y = 5 \\ x = y + 11 \end{cases} & \text{h} \quad \begin{cases} 5x - 2y = 13 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \end{array}$$

$$8x + 2y = 3$$

$$3x - 4y = 32$$

$$8x + 2y = 3$$

$$2y = -8x + 3$$

$$y = -4x + 1\frac{1}{2}$$

Harkins

Uitdagende opdrachten

U5 Abel heeft een broertje Camiel en een zusje Berdien. Abel is twee keer zo oud als Berdien. Camiel is twee jaar jonger dan Abel. Samen zijn ze 23 jaar oud. Maak een stelsel met drie vergelijkingen, los dit stelsel vergelijkingen op en bereken hoe oud ieder kind is.



Je leert • hoe je de groeifactor bij verschillende tijdseenheden berekent

Leerroutes • ondersteunend: 20—21—022—23—24—25—026—26—27
 • doorlopend: 20—21—22—23—24—25—26—27—28
 • uitdagend: 20—21—23—24—26—27—28—U6—U7

Van een snel groeiende waterplant verdubbelt de oppervlakte elke drie dagen. Na 25 dagen is een vijver helemaal bedekt met deze waterplant.

- Na hoeveel dagen was een kwart van deze vijver bedekt?



- 20** Janco zet 250 euro voor 10 jaar vast op een spaarrekening met een vast jaarlijks rentepercentage. In de tabel zie je hoeveel er steeds op 1 januari op de spaarrekening staat.
- Hoeveel procent rente krijgt Janco per jaar?
 - Vul de tabel verder in.
 - Waarom is hier sprake van exponentiële groei? En hoe groot is de groeifactor per jaar?
 - Stel het functievoorschrift op dat bij de tabel hoort. Neem t voor de tijd in jaren na 1 januari 2014 en B voor het bedrag in euro's.
 - Hoeveel euro staat er na 10 jaar op de spaarrekening?

jaar	bedrag in euro's
2014	250
2015	260
2016	270,40
2017	281,22
2018	...
2019	...

- 21** De groei van een bacteriesoort voldoet aan het functievoorschrift $B(t) = 600 \cdot 1,05^t$, met B het aantal bacteriën en t de tijd per tien minuten.
- Bereken $B(12)$. Welke betekenis heeft dit?
 - Geef de groeifactor g per tien minuten.
 - Bereken de waarde van g^6 . Rond af op twee decimalen. Welke betekenis heeft dit?
 - Stel het functievoorschrift op voor het aantal bacteriën met t de tijd in uren.

Theorie

Functies van de vorm $N(t) = b \cdot g^t$ heten **exponentiële functies**. Hierin is b de **beginhoeveelheid** op tijdstip $t = 0$ en g de **groeifactor** per tijdseenheid.

Als de groeifactor per tijdseenheid gelijk is aan g , dan is de groeifactor per vijf tijdseenheden gelijk aan g^5 .

De groeifactor per halve tijdseenheid is gelijk aan $\sqrt{g}$.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $N(t) = 200 \cdot 1,3^t$ met t de tijd in dagen.

Bereken de groeifactor per week en per 12 uur.

Oplossing

De groeifactor per dag is 1,3.

De groeifactor per week is $1,3^7 \approx 6,27$.

De groeifactor per 12 uur is $\sqrt{1,3} \approx 1,14$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $h(t) = 10 \cdot 0,95^t$ met t de tijd in minuten.

Bereken de groeifactor per uur en per 30 seconden.

Oplossing

De groeifactor per minuut is 0,95.

De groeifactor per uur is $0,95^{60} \approx 0,05$.

De groeifactor per 30 seconden is $\sqrt{0,95} \approx 0,97$.

Ondersteunende route → maak opdracht 022

- 22** Gegeven is de functie $P(t) = 120 \cdot 3^t$ met t de tijd in jaren.
- Bereken $P(2)$.
 - Hoe groot is de groeifactor per jaar bij dit groeiproces?
 - Bereken de groeifactor per twee jaar, per vier jaar en per zes jaar.
 - Bereken de groeifactor per half jaar en per kwartaal.
Rond telkens af op twee decimalen.

- 23** In een natuurgebied bevonden zich in 2016 ongeveer 4000 herten. Het aantal herten neemt al jaren exponentieel af. De groeifactor per jaar is 0,96.
- Bereken de groeifactor voor een tijdseenheid van drie jaar, van zes jaar en van vijftien jaar. Rond af op drie decimalen.
 - Stel voor elke tijdseenheid het functievoorschrift voor het aantal herten H op.
 - Bereken met elke functie het aantal herten na 30 jaar.
 - Verklaar het verschil bij de antwoorden van opdracht c.



- 24** De tabellen horen bij lineaire of exponentiële groei.

A

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	64	16	4	1	...

B

x	0	1	2	3	4
$g(x)$	...	150	180	216	259,2

C

x	0	1	2	3	4
$h(x)$	125	137	149	161	...

D

x	0	1	2	3	4
$i(x)$	...	50	74	98	122

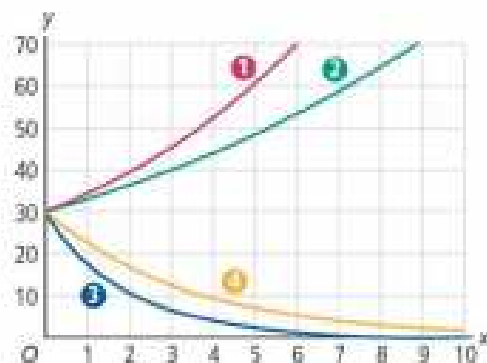
- Stel bij elke tabel het functievoorschrift op.
- Vul de tabellen verder in.

- 25** Gegeven is de functie $f(x) = 2 \cdot 1,5^x$.
- Is de grafiek van f stijgend of dalend? Waarom?
 - Teken de grafiek van f . Neem voor x de waarden 0 tot en met 8.

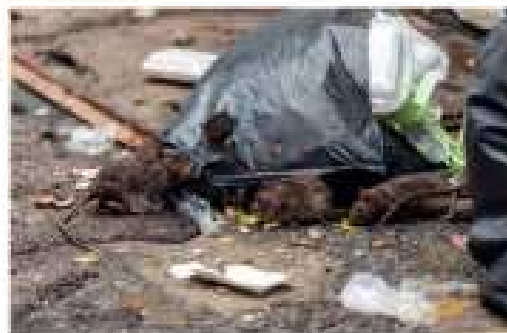
Ondersteunende route → maak opdracht 026

- 26** Zoek bij iedere grafiek de juiste functie.

- $f(x) = 30 \cdot 0,75^x$
- $g(x) = 30 \cdot 0,6^x$
- $h(x) = 30 \cdot 1,1^x$
- $k(x) = 30 \cdot 1,15^x$



- 27** In een stad is een rattenplaag. Op 1 januari 2016 zijn er 25 000 ratten. Het aantal ratten groeit elke maand met 13%.
- Leg uit waarom er sprake is van exponentiële groei en geef de groeifactor per maand.
 - Stel het functievoorschrift op voor het aantal ratten R na t maanden.
 - Bereken $R(12)$. Welke betekenis heeft dit?
 - Met hoeveel procent neemt het aantal ratten per jaar toe? Rond af op hele procenten.



- 28** Als er in de stad uit opdracht 27 meer dan 50 000 ratten zijn, wordt een bestrijdingsprogramma gestart.
- In welke maand begint men hiermee?
 - Met de functie $R(t) = 50\,000 \cdot 0,74^t$ bereken je hoeveel ratten R er na t maanden bestrijden over zijn. Hoe zie je aan de groeifactor dat het aantal ratten afneemt?
 - Na hoeveel maanden zijn er voor het eerst weer minder dan 25 000 ratten?
 - Geef een voorbeeld van een exponentiële functie waarbij het aantal ratten sneller afneemt dan bij de functie van opdracht b.

Uitdagende route → maak opdracht U6 en U7

Ondersteunende opdrachten

- 022** Gegeven is de functie $N(t) = 150 \cdot 4^t$ met t de tijd in jaren.
- Vul in: $N(3) = 150 \times 4^3 = \dots$
 - Hoe groot is de groeifactor per jaar bij dit groeiproces?
 - De groeifactor per twee jaar is $4^2 = 16$.
Bereken de groeifactor per drie jaar, per vier jaar en per vijf jaar.
 - De groeifactor per half jaar is $\sqrt{4} = 2$.
Een kwartaal is de helft van een half jaar.
Bereken de groeifactor per kwartaal. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Gegeven is de functie $K(t) = 2300 \cdot 2^t$ met t de tijd in jaren.

- Bereken $K(5)$.
- Bereken de groeifactor per twee jaar, per drie jaar, per half jaar en per kwartaal. Rond je antwoorden zo nodig af op twee decimalen.

- 026** Gegeven zijn de functies $f(x) = 15 \cdot 0,8^x$, $g(x) = 15 \cdot 1,2^x$ en $h(x) = 15 \cdot 1,8^x$.
- Schrijf van elke functie de groeifactor op.
 - Vul in: van de functie ... is de groeifactor kleiner dan 1, dus bij deze functie is de grafiek ... (stijgend/dalend).
 - Bij welke twee functies is de grafiek stijgend?
 - Vul in: van de functie ... is de groeifactor het grootst, dus bij deze functie stijgt de grafiek het snelst.

Uitdagende opdrachten

- U6** De grafiek bij de exponentiële functie f gaat door de punten $(1, 16)$ en $(5, 81)$.
Stel het functievoorschrift op van f .
- U7** Het aantal inwoners van twee dorpen neemt al een aantal jaren exponentieel toe. De bevolkingsgroei van het eerste dorp voldoet aan de functie $A(t) = 4200 \cdot 1,03^t$. Hierin stelt A het aantal inwoners voor en t de tijd in jaren na 2016. De bevolking van het tweede dorp neemt per jaar met 3,5% toe. In 2013 hadden beide dorpen evenveel inwoners. Bereken het verschil in aantal inwoners van de twee dorpen in het jaar 2021.



Je leert

- hoe je met exponenten rekt
- hoe je laat zien of twee functies hetzelfde zijn

Leerroutes

- ondersteunend: 29—30—31—32—33—034—35—36—037—37
- doorlopend: 29—30—31—32—33—34—35—36—37—38
- uitdagend: 29—30—31—32—33—34—35—36—38—U8

Tijdens een onderzoek wordt de groei van het aantal bacteriën in een petrischaaltje bijgehouden.

Volgens onderzoeker Freek voldoet het aantal bacteriën B aan de functie $B(t) = 2^{3t+2}$ met t de tijd in weken. Zijn collega Eva komt met de functie $B(t) = 4 \cdot 8^t$.

- Kan het zijn dat ze allebei gelijk hebben?



29 Welke van de beweringen is juist? Licht je antwoord toe.

- A $2^3 \cdot 2^4 = 2^{12}$
- B $2^3 + 2^4 = 2^7$
- C $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$
- D $2^3 \cdot 2^4 = 4^7$

30 Schrijf de producten als één macht.

- a $2^3 \cdot 2^6 =$
- b $3^7 \cdot 3^8 =$
- c $5 \cdot 5^3 =$
- d $7^3 \cdot 7^3 =$

31 a Op het blaadje zie je hoe Niels $(3^5)^4$ als één macht schrijft.
Schrijf op deze manier $(2^7)^3$ en $(1,5^4)^2$ als één macht.
b Schrijf als één macht.

- A $(4^2)^3 =$
- B $(8^3)^6 =$
- C $(2^{10})^2 =$
- D $(10^3)^4 =$

					Niels
	$(3^5)^4$	$= 3^5 \cdot 3^5 \cdot 3^5 \cdot 3^5$			
		$= 3^{5+5+5+5}$			
		$= 3^4 \cdot 5$			
		$= 3^{20}$			

- 32 a** Niels schrijft ook $\frac{3^6}{3^2}$ als één macht. Op het blaadje zie je hoe hij dat doet.

Schrijf op deze manier $\frac{5^7}{5^3}$ en $\frac{2^{13}}{2^4}$ als één macht.

- b** Hoe kun je $\frac{2^{13}}{2^4}$ als één macht schrijven zonder 2^{13} eerst helemaal uit te schrijven?

Niels				
$\frac{3^6}{3^2}$	=	$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3}$		
	=	$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{1}$		
	=	3^4		

Theorie

Bij het rekenen met exponenten kun je gebruik maken van de volgende **rekenregels**.

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b}$$

$$(g^a)^b = g^{a \cdot b}$$

$$\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$$

Voorbeeld

Schrijf $2^6 \cdot (2^4)^3$ en $\frac{5^{10} \cdot 5^3}{5^6}$ als één macht.

Oplossing

$$2^6 \cdot (2^4)^3 = 2^6 \cdot 2^{12} = 2^{18}$$

$$\frac{5^{10} \cdot 5^3}{5^6} = \frac{5^{13}}{5^6} = 5^7$$

- 33** Schrijf als één macht.

a $2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^2 =$

d $3^2 \cdot 3 \cdot (3^3)^3 =$

b $4^2 \cdot (4^3)^5 =$

e $(3^2)^3 \cdot (3^3)^3 =$

c $\frac{(7^2)^3 \cdot 7}{7^4} =$

f $5^3 \cdot \frac{5^2 \cdot 5^3}{(5^3)^2} =$

Ondersteunende route → maak opdracht 034

- 34** Tim schrijft de formules $y = (3^4)^2 \cdot 3^x$ en $y = \frac{7^3 \cdot 7^x}{7^2}$ als één macht. Op het blaadje zie je hoe hij begint.

- a** Vul het blaadje verder in.

- b** Schrijf de formules als één macht.

A $b = 5^x \cdot 5^{3x} \cdot 5^{4x}$

D $y = 4^x \cdot 4^2 \cdot (4^3)^x$

B $k = 3^x \cdot 3^2$

E $p = 2^{5x} \cdot 2^x \cdot (2^{x-3})^2$

C $m = \frac{6^3}{6^{2x}}$

F $k = \frac{9^{2n} \cdot 9^3 \cdot (9^n)^3}{9 \cdot 9^{4n}}$

Tim		
$y = (3^4)^2 \cdot 3^x$		$y = \frac{7^3 \cdot 7^x}{7^2}$
$y = 3^{\dots} \cdot 3^x$		$y = \frac{7^{\dots} \cdot \dots}{7^2}$
$y = 3^{\dots}$		$y = 7^{\dots}$

35 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{x+3}$ en $g(x) = 8 \cdot 2^x$.

a Vul voor de functie f de tabel in.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	8	16	...	...	...	...	...

- b Maak bij de functie g net zo'n tabel. Wat valt je op?
- c Waarom kun je op basis van de tabellen niet met zekerheid zeggen dat de functiewaarden van f en g voor elke waarde van x hetzelfde zijn?
- d Vul het blaadje van Tim verder in.
- e Waarom weet je nu wel zeker dat voor elke waarde van x geldt dat de functiewaarden van f en g hetzelfde zijn?

					Tim
☐	$y = 2^{x+3}$				
☐	$y = 2^x \cdot 2^{...}$				
☐	$y = 2^x \cdot ...$				
☐	$y = ... \cdot 2^x$				

36 Gegeven zijn de functies $k(x) = 3^{2x}$ en $m(x) = 9^x$.

- a Maak bij beide functies een tabel. Neem voor x de waarden 0 tot en met 6. Wat valt je op?
- b Vul het blaadje van Tim verder in.
- c Zijn de functies k en m hetzelfde?

					Tim
☐	$y = 3^{2x}$				
☐	$y = (3^{...})^x$				
☐	$y = ...^x$				

Theorie

Soms zijn twee functies hetzelfde, maar blijkt dat pas nadat je de functievoorschriften herleid hebt. Voor het herleiden van functievoorschriften gebruik je de rekenregels.

Voorbeeld

Laat zien dat de functies $f(x) = 4 \cdot 8^x$ en $h(x) = 2^{3x+2}$ hetzelfde zijn.

Oplossing

$$h(x) = 2^{3x+2}$$

$$h(x) = 2^{3x} \cdot 2^2 \quad (\text{regel } g^a \cdot g^b = g^{a+b})$$

$$h(x) = (2^3)^x \cdot 2^2 \quad (\text{regel } (g^a)^b = g^{a \cdot b})$$

$$h(x) = 8^x \cdot 4$$

$$h(x) = 4 \cdot 8^x$$

De functies f en h zijn dus hetzelfde.

Ondersteunende route → maak opdracht 037

37 Laat zien dat de functies hetzelfde zijn.

- a $f(x) = 25 \cdot 5^x$ en $h(x) = 5^{x+2}$
- b $k(x) = 3^{2x+1}$ en $l(x) = 3 \cdot 9^x$
- c $m(x) = 5 \cdot 4^{x+2}$ en $n(x) = 80 \cdot 4^x$

38 Laat met de rekenregels zien dat telkens twee van de zes functies hetzelfde zijn.

- A $f(x) = 3^{1+x}$ D $l(x) = 4^{2x}$
- B $g(x) = 2^{3x+5}$ E $j(x) = 3 \cdot 3^x$
- C $h(x) = 32 \cdot 8^x$ F $k(x) = 16^x$

Uitdagende route → maak opdracht U8

Ondersteunende opdrachten

034 Daniëlle schrijft op het blaadje de formule $y = \frac{6^{3x} \cdot 6^4}{(6^2)^x}$

als één macht. Bij stap 1 gebruikt ze de rekenregel $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$ om $(6^2)^x$ als 6^{2x} te schrijven.

- Welke rekenregel gebruikt ze bij stap 2 om $6^{3x} \cdot 6^4$ als 6^{3x+4} te schrijven?
- Welke rekenregel gebruikt ze bij stap 3?
- Leg uit wat Danielle bij stap 4 doet.

Schrijf de formules als één macht.

- $w = 4^x \cdot 4^5$
- $r = 3^m \cdot 3^{4m} \cdot 3^{2m}$
- $l = \frac{7^9}{7^{4x}}$
- $y = 5^x \cdot 5^3 \cdot (5^2)^x$
- $q = 8^x \cdot 8^{3x} \cdot (8^{x-1})^2$
- $m = \frac{2^{2x} \cdot 2^3 \cdot (2^x)^4}{2 \cdot 2^{3x}}$

		Daniëlle
$y = \frac{6^{3x} \cdot 6^4}{(6^2)^x}$	)	stap 1
$y = \frac{6^{3x} \cdot 6^4}{6^{2x}}$		
$y = \frac{6^{3x+4}}{6^{2x}}$	)	stap 2
$y = 6^{3x+4-2x}$		
$y = 6^{3x+4-2x}$	)	stap 3
$y = 6^x + 4$		
	)	stap 4

037 In deze opdracht ga je met de rekenregels laten zien dat de functies $f(x) = 3^{4x+2}$ en $h(x) = 9 \cdot 81^x$ hetzelfde zijn.

- Gebruik de rekenregel $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ in de vorm

$$g^{a+b} = g^a \cdot g^b \text{ en vul in.}$$

$$f(x) = 3^{4x+2} \text{ is te schrijven als } f(x) = 3^{4x} \cdot 3^{\dots}$$

- Laat met de rekenregel $g^{a \cdot b} = (g^a)^b$ zien dat je 3^{4x} kunt schrijven als 81^x .
- Laat zien dat de functies f en h hetzelfde zijn.

Uitdagende opdrachten

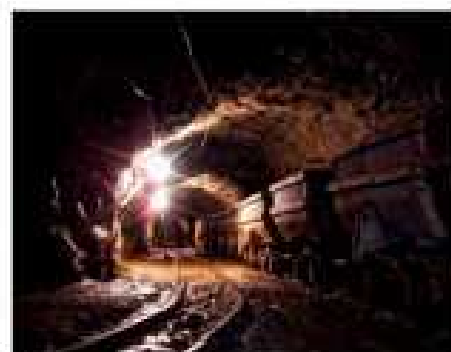
- U8
- Pas de rekenregel $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ toe op $\frac{3^5}{3^7}$ en toon daarmee aan dat $3^{-2} = \frac{1}{9}$.
 - Bereken zonder rekenmachine 5^{-1} , 4^{-3} , 7^{-2} en $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.
 - Herleid het functievoorschrift $f(x) = 2^x \cdot 4^x \cdot 8^x \cdot 16^x$ tot de vorm $f(x) = 2^{ax}$.
 - Ga na voor welke waarden van a en b de functie

$$g(x) = \frac{3 \cdot 3^{3x} \cdot 9^{bx}}{3^{ax+b}}$$

een constante functie is.

Deze paragraaf bevat opdrachten die een indruk geven van wiskunde A/C en wiskunde B.

- 39** In mijnen geldt de vuistregel dat de temperatuur 0,03 graden Celsius stijgt voor elke meter die je in de mijn afdaalt.
- Bij een mijn is de buitentemperatuur 20 °C.
Bereken de temperatuur op een diepte van 200 meter.
 - Stel het functievoorschrift $T(d)$ op dat voor deze mijn het verband beschrijft tussen de temperatuur T in graden Celsius en de diepte d in meters.
 - In een andere mijn is op 400 meter diepte de temperatuur 30 °C.
Hoe hoog is bij die mijn de buitentemperatuur?



- 40** Lijn l heeft de vergelijking $4x + y = 18$ en lijn m heeft de vergelijking $8x - 3y = 6$.
- Stel het functievoorschrift $f(x) = ax + b$ op bij lijn l .
 - Los het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} 4x + y = 18 \\ 8x - 3y = 6 \end{cases}$ op.
 - Welke betekenis heeft de oplossing van het stelsel voor de lijnen l en m ?
 - Bereken de coördinaten van de snijpunten van lijn m met de x -as en de y -as.

- 41** Schrijf de formules als één macht.

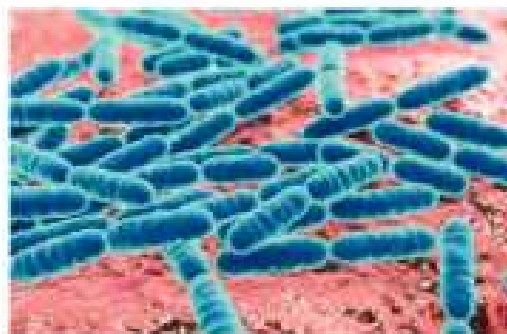
- $y = 7^{2x} \cdot 7^4 \cdot 7^{4x-1}$
- $h = \frac{5^{3a} \cdot 5^a \cdot 5}{5^{2a}}$
- $p = 3^{8r} \cdot 3^{r+1} \cdot (3^{3r})^2$
- $m = \frac{10^{r+1} \cdot 10^r \cdot (10^r)^3}{10^{r-3}}$

- AC42** Stel bij elke situatie het functievoorschrift op.

- Dit jaar zijn er 24 000 vluchten vanaf een luchthaven.
De komende jaren zal het aantal vluchten steeds met 4,5% per jaar toenemen.
- In het afvoerputje zitten 1 000 000 bacteriën. Een schoonmaakmiddel doodt bacteriën. Elk kwartier neemt het aantal bacteriën met 98% af.
- Op 15 augustus werd een liedje 2500 keer gedownload.
De daarop volgende dagen nam het aantal downloads met 150% per dag toe.

- AC43** In een onderzoekscentrum bestudeert men de groei van twee soorten bacteriën. De resultaten staan in de tabellen.

<i>tijd</i> in tien minuten	0	1	2	3	4
<i>aantal</i> van soort A	75	142	270	515	979
<i>tijd</i> in kwartieren	0	1	2	3	4
<i>aantal</i> van soort B	58	121	255	536	1126



- Controleer dat er bij beide soorten sprake is van exponentiële groei.
 - Welke soort groeit volgens jou het snelst?
 - Laat zien dat de groeifactor per half uur voor het aantal van soort A ongeveer 6,9 is.
 - Bereken de groeifactor per half uur voor het aantal van soort B. Klopt je antwoord bij opdracht b?
- B44** In de functie $g(x) = -2x + a$ is a een positief getal. Punt P is het snijpunt van de grafiek van g met de x -as en punt Q is het snijpunt van de grafiek van g met de y -as.
- Neem $a = 4$ en teken de bijbehorende grafiek. Neem daarbij voor x de waarden 0 tot en met 4.
 - Bereken de oppervlakte van $\triangle OPQ$.
 - Laat zien dat voor elke waarde van a de oppervlakte A van $\triangle OPQ$ te berekenen is met de formule $A = \frac{1}{4}a^2$.
 - Bereken de waarde van a waarvoor de oppervlakte van $\triangle OPQ$ precies 36 is.
 - Geef de coördinaten van de punten P en Q bij de gevonden waarde van a .
- B45** Bij de lineaire functie f gaat de grafiek door de punten $(2, 17)$ en $(6, 37)$. Bij de exponentiële functie h gaat de grafiek door de punten $(0, 2)$ en $(2, 3)$. Onderzoek of de grafieken elkaar links of rechts van de lijn $x = 20$ snijden.
- B46**
- Los het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 20 \\ 2x - x = 50 \end{cases}$ met substitueren op.
 - Verklaar waarom het niet lukt het stelsel vergelijkingen op te lossen.

Theorie

Functie, functievoorschrift, functiewaarde, afhankelijke variabele en onafhankelijke variabele

Bij de formule $P = 5t + 20$ kun je P berekenen als je t weet.

Je zegt dan dat P een functie is van t . Je noteert dat als $P(t) = 5t + 20$. Dit heet het functievoorschrift.

De uitkomst van een functie noem je de functiewaarde.

Bij $t = 2$ hoort de functiewaarde 30, want $5 \times 2 + 20 = 30$.

Je noteert dit als $P(2) = 30$.

Omdat de waarde van P afhangt van t , noem je P de afhankelijke variabele en t de onafhankelijke variabele.

De functie $f(x) = -3x + 9$ is een lineaire functie,

$g(x) = 7x^2 - 5x + 1$ is een kwadratische functie,

$h(x) = 4$ is een constante functie en

$l(x) = 3 \cdot 0,75^x$ is een exponentiële functie.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $K(p) = 8 - 5p$.
Bereken $K(3)$ en los $K(p) = 28$ op.

Oplossing

$$K(3) = 8 - 5 \times 3 \quad 8 - 5p = 28$$

$$K(3) = -7 \quad 5p = -20$$

$$p = -4$$

- S1** Gegeven zijn de functies $p(x) = 9$, $q(x) = 12 \cdot 0,5^x$,
 $r(x) = 6x + 5$ en $s(x) = 25 - 2x^2$.
- Geef bij elke functie aan wat voor soort functie het is.
 - Bereken $p(1)$, $q(2)$, $r(3)$ en $s(4)$.
 - Los $r(x) = 17$ op.
 - Welke variabele is bij de functie $q(x) = 12 \cdot 0,5^x$ de afhankelijke variabele?

Theorie

Richtingscoëfficiënt en vergelijking van een lijn

Van de lineaire functie $f(x) = ax + b$ is a het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt en is b het startgetal.

De lineaire formule $y = ax + b$ die bij een lijn hoort, noem je ook wel de vergelijking van een lijn.

De vergelijking bij een lineair verband kan ook de vorm $px + qy = r$ hebben.

Uit de vergelijking $y = ax + b$ kun je de richtingscoëfficiënt aflezen. Uit de vergelijking $px + qy = r$ kun je dat niet.

Voorbeeld

De lijn met vergelijking $3x + 2y = 18$ is de grafiek bij de functie f .

Stel het functievoorschrift van f op en geef de richtingscoëfficiënt en het startgetal.

Oplossing

$$3x + 2y = 18$$

$$2y = -3x + 18 \quad (\text{links en rechts } -3x)$$

$$y = -1\frac{1}{2}x + 9 \quad (\text{links en rechts : 2})$$

Het functievoorschrift is

$$f(x) = -1\frac{1}{2}x + 9.$$

De richtingscoëfficiënt is $-1\frac{1}{2}$ en het startgetal is 9.

- S2** Gegeven is de lijn met vergelijking $5x - 8y = -24$.
- Herleid de vergelijking tot de vorm $y = ax + b$.
 - Geef de richtingscoëfficiënt en het startgetal van de lijn.

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij twee lineaire functies f en g berekenen.

- Schrijf de vergelijking op die bij $f(x) = g(x)$ hoort.
- Bereken de x -coördinaat van het snijpunt door de vergelijking op te lossen.
- Bereken de y -coördinaat door de berekende x -coördinaat in één van de functievoorschriften in te vullen.
- Controleer het gevonden punt door die x -coördinaat ook in het andere functievoorschrift in te vullen.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij de functies $f(x) = -13x + 50$ en $g(x) = 2x + 95$.

Oplossing

- $f(x) = g(x)$ geeft
 $-13x + 50 = 2x + 95$
- $50 = 15x + 95$
 $15x = -45$
 $x = -3$
- Invullen bij $f(x)$ geeft $f(-3) = -13 \times -3 + 50 = 89$.
- Invullen bij $g(x)$ geeft $g(-3) = 2 \times -3 + 95 = 89$. Klopt.
 De coördinaten van het snijpunt zijn $(-3, 89)$.

- S3** Gegeven zijn de functies $f(x) = 7x + 42$ en $g(x) = 3x - 38$. Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g .

Vaardigheid

Je kunt een stelsel vergelijkingen oplossen.

$\frac{1}{2}y + 4x = 9$ en $6x - 3y = 21$ zijn vergelijkingen van lijnen.

Een stelsel vergelijkingen noteer je als $\begin{cases} \frac{1}{2}y + 4x = 9 \\ 6x - 3y = 21 \end{cases}$

De oplossing van een stelsel vergelijkingen is de combinatie van waarden van x en y die aan beide vergelijkingen voldoen.

De oplossing van het stelsel vergelijkingen geeft de coördinaten van het snijpunt van de lijnen die bij de vergelijkingen horen.

Bij het oplossen van een stelsel vergelijkingen herleid je eerst beide vergelijkingen tot een vergelijking met de vorm $y = ax + b$. Dan stel je deze vergelijkingen aan elkaar gelijk en los je de vergelijking die je krijgt op. Daarna vul je de gevonden waarde van x in één van de vergelijkingen in om de waarde van y te vinden.

Voorbeeld

Los het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y + 4x = 9 \\ 6x - 3y = 12 \end{cases} \text{ op.}$$

Oplossing

Eerst de vergelijkingen herleiden.

$$\frac{1}{2}y + 4x = 9 \qquad 6x - 3y = 21$$

$$\frac{1}{2}y = -4x + 9 \qquad -3y = -6x + 21$$

$$y = -8x + 18 \qquad y = 2x - 7$$

Dan de vergelijkingen gelijkstellen.

$$-8x + 18 = 2x - 7$$

$$18 = 10x - 7$$

$$10x = 25$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

Daarna invullen bij $y = -8x + 18$ geeft

$$y = -8 \times 2\frac{1}{2} + 18 = -2. \text{ De oplossing}$$

van het stelsel is $x = 2\frac{1}{2}$ en $y = -2$.

S4 Los het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 6x - y = 24 \end{cases}$ op.

Vaardigheid

Je kunt de groeifactor bij verschillende tijdseenheden berekenen.

Een exponentiële functie is een functie van de vorm $f(t) = b \cdot g^t$. Hierin is b de beginhoeveelheid op tijdstip $t = 0$ en g de groeifactor per tijdseenheid.

Als de groeifactor per tijdseenheid gelijk is aan g , dan is de groeifactor per zeven tijdseenheden gelijk aan g^7 .

De groeifactor per halve tijdseenheid is gelijk aan $\sqrt{g}$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $A(t) = 25 \cdot 1,44^t$ met t de tijd in uren.

Bereken de groeifactor per drie uur en per 30 minuten.

Oplossing

De groeifactor per uur is 1,44.

De groeifactor per drie uur is $1,44^3 \approx 2,99$.

De groeifactor per 30 minuten is $\sqrt{1,44} = 1,2$.

S5 Gegeven is de functie $N(t) = 65 \cdot 0,81^t$ met t de tijd in uren.

- Hoe groot is de beginhoeveelheid?
- Hoe groot is de groeifactor per uur?
- Bereken de groeifactor per tien uur.
- Bereken de groeifactor per 30 minuten.

Vaardigheid

Je kunt met exponenten rekenen.

Bij het rekenen met exponenten kun je gebruik maken van de volgende rekenregels.

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b}$$

$$(g^a)^b = g^{a \cdot b}$$

$$\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$$

Voorbeeld

Schrijf $(3^4)^5 \cdot 3^8$ en $\frac{7^8 \cdot 7^3}{7^5}$ als één macht.

Oplossing

$$(3^4)^5 \cdot 3^8 = 3^{20} \cdot 3^8 = 3^{28}$$

$$\frac{7^8 \cdot 7^3}{7^5} = \frac{7^{11}}{7^5} = 7^6$$

S6 Schrijf als één macht.

a $7^2 \cdot 7^6 \cdot 7 =$

c $4^5 \cdot (4^2)^3 \cdot 4 \cdot 4^4 =$

b $\frac{(3^4)^3 \cdot 3}{3^6} =$

d $\frac{2^3 \cdot (2^3)^2 \cdot 2}{2^4 \cdot 2^3} =$

Vaardigheid

Je kunt laten zien of twee functies hetzelfde zijn.

Soms zijn twee functies hetzelfde, maar blijkt dat pas nadat je de functievoorschriften herleid hebt. Voor het herleiden van functievoorschriften gebruik je de rekenregels.

Voorbeeld

Laat zien dat de functies $f(x) = 3^{2x+4}$ en $h(x) = 81 \cdot 9^x$ hetzelfde zijn.

Oplossing

$$f(x) = 3^{2x+4}$$

$$f(x) = 3^{2x} \cdot 3^4 \quad (\text{regel } g^a \cdot g^b = g^{a+b})$$

$$f(x) = (3^2)^x \cdot 3^4 \quad (\text{regel } g^a \cdot g^b = g^{a+b})$$

$$f(x) = 9^x \cdot 81$$

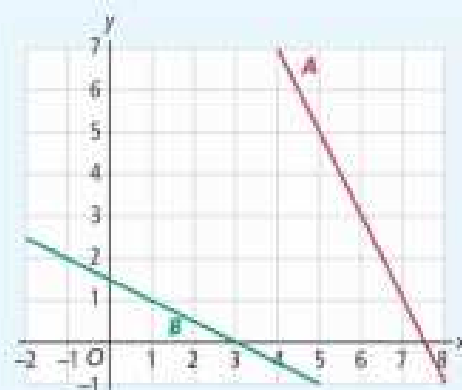
$$f(x) = 81 \cdot 9^x$$

De functies f en h zijn dus hetzelfde.

S7 Gegeven zijn de functies $m(x) = 10 \cdot 5^{2x+1}$ en $n(x) = 50 \cdot 25^x$. Laat zien dat de functies m en n hetzelfde zijn.

- T1** Gegeven zijn de formules A $y = -2x + 1$ en B $y = x^2 - 2$.
- Welke variabele is bij de formule A de afhankelijke variabele? En welke de onafhankelijke variabele?
 - Geef bij formule A het functievoorschrift $f(x)$.
 - Geef bij formule B het functievoorschrift $g(x)$.
 - Bereken de functiewaarden $f(-2)$, $f(1)$ en $g(\frac{1}{2})$.
 - Teken in één assenstelsel de grafieken van f en g . Neem voor x de waarden -4 tot en met 4 .
 - Lees de coördinaten van de snijpunten van de grafieken af en controleer je antwoord door invullen in de functievoorschriften.

- T2** De getekende grafieken horen bij de formules $y = 15 - 2x$ en $2y + x = 3$.
- Laat met een berekening zien welke grafiek bij de formule $2y + x = 3$ hoort.
 - Schrijf de formule $2y + x = 3$ in de vorm $y = ax + b$.
 - Geef van beide grafieken de richtingscoëfficiënt.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.
 - Los het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} y = 15 - 2x \\ 2y + x = 3 \end{cases}$ met substitueren op.



- T3**
- Schrijf $6^3 \cdot 6^2 \cdot 6$ en $\frac{3^5 \cdot (3^2)^3}{3^4}$ als één macht.
 - Schrijf de formules $y = 5^x \cdot 5 \cdot (5^x)^6$ en $h = (7^m)^2 \cdot 7^{5m} \cdot 7^4$ als één macht.
- T4** Een boom wordt elk jaar ongeveer 12% hoger. De boom is nu 1,40 meter hoog. Rond de lengten in deze opdracht af op hele centimeters.
- Bereken hoe hoog de boom over één jaar is.
 - Geef het functievoorschrift waarmee je de hoogte van de boom $H(t)$ in cm na een tijd van t jaren kunt berekenen.
 - Hoe hoog zal de boom over zes jaar zijn?
 - Bereken de groeifactor van de hoogte van de boom per vijf jaar. Rond af op vier decimalen.
 - Bereken de hoogte van de boom over tien jaar.
 - Over hoeveel jaar is de boom 3,50 meter hoog?

- T5** Op de markt koopt Rob 2 appels en 3 peren en hij betaalt € 1,90. Sanne betaalt bij dezelfde kraam voor 6 appels en 5 peren € 4,10. Sanne vraagt zich af hoeveel een appel kost en hoeveel een peer kost.

- Kies voor de prijs in centen van een appel de variabele a en voor de prijs in centen van een peer de variabele p . Stel twee vergelijkingen op die bij de gegevens horen.
- Los het stelsel vergelijkingen op.
- Hoeveel kost een appel en hoeveel kost een peer?



- T6** Hieronder staan acht functies, waarvan sommige hetzelfde zijn. Laat zien welke dat zijn.

- | | |
|---------------------------|---------------------------------------|
| A $f(x) = 2^{3x+1}$ | E $j(x) = 16 \cdot 16^x$ |
| B $g(x) = 8 \cdot 2^{4x}$ | F $k(x) = (2 \cdot 4^x)^2$ |
| C $h(x) = 4^{2x+1}$ | G $l(x) = 2 \cdot 8^x$ |
| D $i(x) = 2^{4x+4}$ | H $m(x) = \frac{1}{2} \cdot 16^{x+1}$ |

- T7** De tabellen horen bij lineaire of exponentiële groei.

A

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	24	63	102	141	...

B

x	0	1	2	3	4
$g(x)$	320	240	180	135	...

C

x	0	1	2	3	4
$h(x)$	...	0,3	1,8	10,8	64,8

D

x	0	1	2	3	4
$i(x)$	...	-53	-39	-25	-11

- Stel bij elke tabel het functievoorschrift op.
- Vul de tabellen verder in.

- T8** Gegeven zijn de functies $f(x) = -5x + 23$ en $g(x) = 3x + 11$.

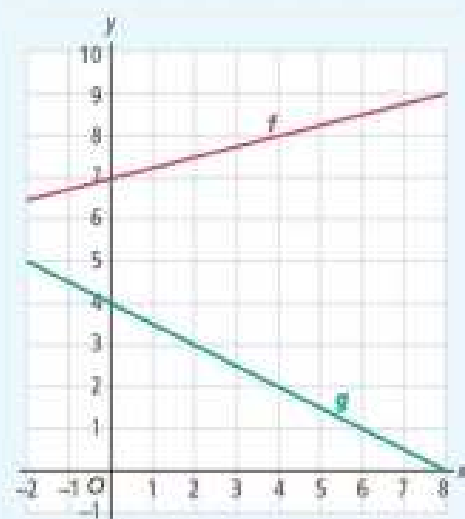
- Bereken $f(-2)$.
- Los $f(x) = 38$ op.
- Los $f(x) = g(x)$ op.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de x -as.
- De verticale lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B , waarbij punt B boven punt A ligt. Bereken de waarde van p in het geval $AB = 20$.

Je kunt de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij twee lineaire functies f en g berekenen.

- E1 De grafieken horen bij de functies $f(x) = \frac{1}{4}x + 7$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g .

- E2 Bereken bij elk paar lineaire functies de coördinaten van het snijpunt van de bijbehorende grafieken.

- a $f(x) = 3x + 4$ en $g(x) = -x + 12$
- b $k(x) = -1\frac{1}{2}x + 8$ en $l(x) = 14 - 3x$
- c $m(x) = 7 - 5x$ en $n(x) = 28 - 8x$
- d $h(x) = 0,1x$ en $j(x) = x + 18$



Je kunt een stelsel vergelijkingen oplossen.

- E3 Los de stelsels vergelijkingen op.

- | | |
|---|---|
| a $\begin{cases} x + y = 18 \\ 5x - y = -6 \end{cases}$ | d $\begin{cases} 7x + 2y = 0 \\ 4x + y = -1 \end{cases}$ |
| b $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 5y = 6 \end{cases}$ | e $\begin{cases} 5y - 10x = 15 \\ 6x + 2y = 11 \end{cases}$ |
| c $\begin{cases} 3y - x = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$ | f $\begin{cases} 10x + 2y = -9 \\ 3x + 8y = 1 \end{cases}$ |

- E4 Van de lijn l is de vergelijking $5x - 2y = 14$ en van lijn m is de vergelijking $x + y = 0$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en m .

Je kunt de groeifactor bij verschillende tijdseenheden berekenen.

- E5 Gegeven is de functie $W(t) = 14 \cdot 0,77^t$ met t de tijd in uren.
- a Hoe groot is de beginhoeveelheid?
 - b Hoe groot is de groeifactor per dag?
 - c Bereken de groeifactor per half uur.
 - d Bereken de groeifactor per kwartier.

- E6** In een natuurgebied bevinden zich in het jaar 2017 ongeveer 200 wolven. Het aantal wolven neemt al jaren exponentieel toe. De groeifactor per jaar is 1,04.
- Bereken de groeifactor voor een tijdseenheid van twee jaar en van tien jaar. Rond af op drie decimalen.
 - Stel voor elke tijdseenheid het functievoorschrift voor het aantal wolven W op.
 - Bereken met beide functies het aantal wolven na 60 jaar.
 - Verklaar het verschil bij de antwoorden van opdracht c.



Je kunt met exponenten rekenen.

- E7** Schrijf als één macht.

a $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 =$

e $2 \cdot 2 \cdot (2^3)^3 =$

b $(7^4)^2 =$

f $(6^4)^2 \cdot (6^3)^3 =$

c $\frac{(5^3)^4 \cdot 5^2 \cdot 5}{5^6} =$

g $9^2 \cdot \frac{9^3 \cdot 9^5}{(9^2)^2} =$

d $\frac{8^5 \cdot 8^2 \cdot 8}{(8^3)^3} =$

h $\frac{(4^6)^4 \cdot 4}{4^6 \cdot 4^7} \cdot 4^3 =$

- E8** Schrijf de formules als één macht.

a $y = 3^x \cdot 3^{x+7}$

d $k = (5^3)^t \cdot 5^t \cdot 5^{t+3}$

b $p = 2^6 \cdot 2^{5t}$

e $d = (7^h)^4 \cdot 7^2 \cdot (7^{h+2})^3$

c $m = \frac{4^{2u+3}}{4^{6u}}$

f $y = \frac{6^{3x} \cdot 6 \cdot (6^3)^{2x}}{6^x \cdot 6^x}$

Je kunt laten zien of twee functies hetzelfde zijn.

- E9** Schrijf de functievoorschriften in de vorm $k(x) = b \cdot g^x$.

a $k(x) = 3^{x+4}$

c $k(x) = 0,5 \cdot 2^{x+6}$

b $k(x) = 7 \cdot 5^{2x}$

d $k(x) = 3^{2x}$

- E10** Laat zien dat de functies hetzelfde zijn.

a $f(x) = 16 \cdot 2^x$ en $g(x) = 2^{x+4}$

b $h(x) = 5^{x+3}$ en $i(x) = 125 \cdot 5^x$

c $j(x) = 2 \cdot 3^{2x+1}$ en $k(x) = 6 \cdot 9^x$

d $l(x) = 4 \cdot 8^{x+1}$ en $m(x) = 32 \cdot 2^{3x}$





In dit hoofdstuk

In klas 2 heb je geleerd wat parabolen zijn. In dit hoofdstuk leer je hoe je eerst de coördinaten van de top van de parabool berekent voordat je de parabool gaat tekenen. Bij het berekenen van de coördinaten van de top van een parabool los je een kwadratische vergelijking op.

Je hebt al geleerd hoe je uit de formule kunt afleiden of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is. Nu leer je dat je hiervoor soms eerst de formule zonder haakjes moet schrijven.

Ten slotte leer je hoe je uit het functievoorschrift kunt afleiden welke vorm een parabool heeft en waar de parabool de y -as snijdt. Deze kennis heb je weer nodig in hoofdstuk 7.

V1 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 - 4x - 5$.

- a Laat zien dat $f(-2) = -1$.
b Vul de tabel verder in.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	...	...	...	-1	...	...	...

- c Teken de parabool bij de tabel.
d Teken in hetzelfde assenstelsel de lijn $x = -2$.
e Vul in: de lijn $x = -2$ is de ... van de parabool.
f Teken in hetzelfde assenstelsel de lijn $y = -8$.
g Hoeveel snijpunten heeft deze lijn met de parabool?

V2 Schrijf de formules zonder haakjes.

- a $y = 3(2x - 5)$ d $y = 8 + 3(6 - 4x)$
b $y = 9(-4x - 2)$ e $y = 7(2 + 4x) - 6x$
c $y = x(5x - 7)$ f $y = 6(2x + 1) - 12x$

V3 Schrijf de formules zonder haakjes.

- a $y = (x + 4)(x + 3)$ d $y = (x - 8)(x - 9) + 3x$
b $y = (x - 6)(x + 6)$ e $y = (8x + 3)(-x + 4) - 2x^2$
c $y = (x + 6)^2$ f $y = (4 - 2x)^2 + 7x$

Aanpak

Hoe ontbind je een drieterm in factoren?

- 1 Stel vast naar welk product en welke som je zoekt.
- 2 Maak een overzicht van alle mogelijkheden waarmee je het gezochte product kunt krijgen.
- 3 Kijk bij welke getallen de gezochte som hoort.
- 4 Schrijf de drieterm als een product van twee factoren.

Voorbeeld

Ontbind de drieterm in de formule $y = x^2 - 2x - 15$ in factoren.

Oplossing

- 1 Het product is -15 en de som is -2 .

product	getallen	som
-15	1 en -15	-14
-15	-1 en 15	+14
-15	3 en -5	-2
-15	-3 en 5	+2

- 3 Met de getallen 3 en -5 vind je het product -15 en de som -2 .

- 4 De formule wordt $y = (x + 3)(x - 5)$.

V4 Ontbind de drietermen in de formules in factoren.

a $f = h^2 - 9h - 22$

d $y = x^2 - x - 20$

b $q = p^2 - 3p + 2$

e $k = a^2 + 16a + 64$

c $v = d^2 + 12d + 20$

f $m = t^2 - 11t - 26$

- V5**
- a** Welke vergelijking op het blaadje kun je door een bordje te te leggen oplossen?
 - b** Los die vergelijking op.
 - c** Welke vergelijking is al op nul herleid en ook ontbonden in factoren? Los die vergelijking op.
 - d** Los de overgebleven vergelijkingen op.

A $5g^2 - 8 = 27$

B $7b^2 = 21b$

C $a^2 + 8a = -16$

D $(2x - 6)(x + 3) = 0$

E $k^2 - 30 = k$

Aanpak

Hoe los je een kwadratische vergelijking op?

- 1** Kijk of je de vergelijking kunt oplossen met bordjes.
- 2** Indien dat niet mogelijk is, herleid dan de vergelijking op nul.
- 3** Ontbind de tweeterm of drieterm van de vergelijking in factoren.
- 4** Los de vergelijking verder op met de regel:
als $A \times B = 0$, dan geldt $A = 0$ of $B = 0$.

Voorbeeld 1

Los op $(x - 2)^2 = 36$.

Oplossing

Je kunt een bordje leggen.

1 $(x - 2)^2 = 36$

$6^2 = 36$ en $(-6)^2 = 36$

$x - 2 = 6$ of $x - 2 = -6$

$x = 8$ of $x = -4$

Voorbeeld 2

Los op $2x^2 = -14x$.

Oplossing

Op nul herleiden en ontbinden.

2 $2x^2 + 14x = 0$ (tweeterm)

3 $2x(x + 7) = 0$

4 $2x = 0$ of $x + 7 = 0$

$x = 0$ of $x = -7$

Voorbeeld 3

Los op $x^2 - 3x - 2 = x + 3$.

Oplossing

Op nul herleiden en ontbinden.

2 $x^2 - 4x - 5 = 0$ (drieterm)

3 $(x + 1)(x - 5) = 0$

4 $x + 1 = 0$ of $x - 5 = 0$

$x = -1$ of $x = 5$

V6 Los de vergelijkingen op.

a $4a^2 + 8a = 0$

e $3n^2 = 27$

b $3w^2 = 5w$

f $4x(5 - 2x) = 0$

c $5h^2 + 5 = -5$

g $(g - 12)^2 = 16$

d $(2s - 4)(6 - s) = 0$

h $b^2 - 7b + 10 = 2b - 4$

Je leert

- hoe je van een functievoorschrift nagaat of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is

Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–3–4–5–6–07–08–9
- basis: 1–2–3–4–5–6–7–8–9
- uitdagend: 2–3–4–6–7–8–9–U1–U2

Een keeper schiet een bal vanaf de grond weg. Neem a voor de horizontale afstand van de bal tot de keeper in meters en h voor de hoogte van de bal in meters.

- Welke functie kan bij de hoogte van de bal horen?

A $h(a) = 0,01a^2 + 0,5a$

B $h(a) = -0,01a^2$

C $h(a) = -0,01a^2 + 0,5a$



- Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x - 8$.
 - Maak een tabel bij de functie en teken de grafiek bij de tabel. Neem voor x de waarden -1 tot en met 5 .
 - Teken de symmetrieas van de grafiek.
 - Geef de formule van de symmetrieas.
 - Geef de coördinaten van het laagste punt van de grafiek.

- Gegeven is de functie $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.
 - Laat zien dat $g(-2) = -3$.
 - Vul de tabel verder in en teken de grafiek bij de tabel.
 - Teken de symmetrieas van de grafiek.
 - Geef de formule van de symmetrieas.
 - Geef de coördinaten van het hoogste punt van de grafiek.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	-3	...	...	...	...	...	...

Theorie

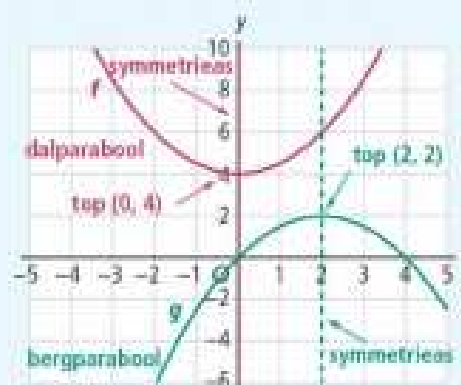
De grafiek bij een kwadratische functie heet een parabool.

Als het getal voor x^2 positief is, zoals bij $f(x) = 0,5x^2 + 4$, dan is de grafiek een **dalparabool**.

Als het getal voor x^2 negatief is, zoals bij $g(x) = -0,5x^2 + 2x$, dan is de grafiek een **bergparabool**.

De **top** van de parabool is het laagste punt of het hoogste punt van de grafiek.

De top ligt op de **symmetrieas** van de parabool.

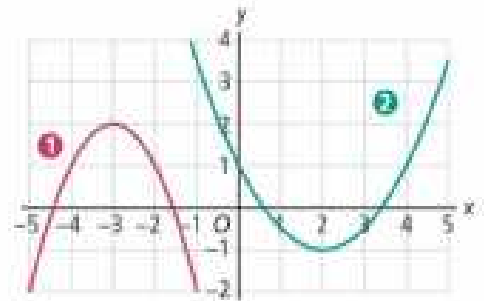


- 3 Geef bij de functies aan of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is.

a $f(x) = x^2 + 9x + 4$ c $h(x) = -3x^2 - x + 3$
 b $g(x) = -2x^2 - 12$ d $i(x) = -4x + 5x^2$

- 4 In het assenstelsel zijn de parabolen bij de functies $f(x) = -x^2 - 6x - 7$ en $g(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$ getekend.

- a Is grafiek 1 een bergparabool of een dalparabool?
 b Welke functie hoort bij grafiek 1? Hoe kun je dat aan het functievoorschrift zien?
 c Welke lijn is de symmetrieas van grafiek 1?
 d Schrijf de coördinaten van de top van grafiek 1 op.
 e Maak de opdrachten a tot en met d ook voor grafiek 2.



- 5 a Schrijf het functievoorschrift $f(x) = x(5 - 2x)$ zonder haakjes.
 b Is de grafiek van f een bergparabool of een dalparabool?
 c Schrijf het functievoorschrift $g(x) = (x - 5)(-x + 4)$ zonder haakjes.
 d Is de grafiek van g een bergparabool of een dalparabool?

- 6 Jos gaat het functievoorschrift $f(x) = -3(x + 4)(x - 1)$ zonder haakjes schrijven. Hij gebruikt daarvoor twee keer een vermenigvuldigtabel.

- a Met de eerste vermenigvuldigtabel werkt hij de haakjes bij $(x + 4)(x - 1)$ weg.
 Ga na dat Jos dan $f(x) = -3(x^2 + 3x - 4)$ krijgt.
 b Daarna vult Jos dit in de tweede vermenigvuldigtabel in. Waarom staat er -3 in deze vermenigvuldigtabel?
 c Vul de tweede vermenigvuldigtabel verder in.
 d Vul in: het functievoorschrift van f zonder haakjes geschreven is $f(x) = \dots x^2 - \dots x + \dots$
 e Is de grafiek van f een bergparabool of een dalparabool?

	$f(x) = -3(x + 4)(x - 1)$			Jos
	x	x	-1	
	x	...	...	
	$+4$	...	...	
	$f(x) = -3(x^2 + 3x - 4)$			
	x	x^2	$+3x$	-4
	-3	...	...	...
	$f(x) = \dots$			

Theorie

Soms staan in het functievoorschrift van een kwadratische functie haakjes. Door het functievoorschrift zonder haakjes te schrijven, kun je nagaan of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is.

Voorbeeld

Is de grafiek bij de functie $f(x) = -(x-4)(5+x) + 3x^2$ een bergparabool of een dalparabool?

Oplossing

Werk eerst de haakjes bij $(x-4)(5+x)$ weg.

x	5	$+x$
x	$5x$	$+x^2$
-4	-20	$-4x$

Dit geeft $f(x) = -(x^2 + x - 20) + 3x^2$.

Werk nogmaals de haakjes weg.

x	x^2	$+x$	-20
-1	$-x^2$	$-x$	$+20$

Dit geeft $f(x) = -x^2 - x + 20 + 3x^2$ en dat is vereenvoudigd $f(x) = 2x^2 - x + 20$.

De grafiek van f is een dalparabool.

Ondersteunende route → maak opdracht 07

- 7 Ga van de functies na of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is.

- a $f(x) = 2(x+2)(1-x)$ c $h(x) = -3x(x-8) + 4x^2$
 b $g(x) = -5(x+4)(x-4)$ d $l(x) = -(7-x)(2+x) - 3x$

Ondersteunende route → maak opdracht 08

- 8 a Schrijf het functievoorschrift $f(x) = -3(x+1)^2$ zonder haakjes.
 b Is de grafiek van f een bergparabool of een dalparabool?
 c Ga van de functies $g(x) = 2(x-7)^2$ en $h(x) = -(5-x)^2$ na of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is.

- 9 Een basketbalspeler gooit de bal in de basket. Neem a voor de horizontale afstand van de bal tot de basketbalspeler in meters en h voor de hoogte van de bal in meters. Welke functie kan bij de hoogte van de bal horen?

- A $h(a) = 0,3a(a-8) + 2,1$
 B $h(a) = -0,3a(a-8) + 2,1$
 C $h(a) = -0,3a(8-a) + 2,1$



Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

- 07** Lia gaat het functievoorschrift $f(x) = 2(x + 6)(2 + x) - 3x^2$ zonder haakjes schrijven. Op het blaadje zie je dat ze twee keer een vermenigvuldigtabel gebruikt.

- a** Vul het blaadje verder in.
b Waarom is de grafiek van f een bergparabool?

Ga van de functies na of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is.

- c** $g(x) = -2(x - 3)(1 + x)$
d $h(x) = -(x - 6)(3 + x)$
e $i(x) = 3x(x - 5) - 2x^2$

					<i>Lia</i>
$f(x) = 2(x + 6)(2 + x) - 3x^2$					
$\begin{array}{c c c} x & 2 & +x \\ \hline x & \dots & \dots \\ +6 & \dots & \dots \end{array}$					
$f(x) = 2(\dots + \dots + \dots) - 3x^2$					
$\begin{array}{c c c c} x & \dots & \dots & \dots \\ \hline 2 & \dots & \dots & \dots \end{array}$					
$f(x) = \dots x^2 + \dots x + \dots - 3x^2$					
$f(x) = \dots x^2 + \dots x + \dots$					

- 08** Gegeven is de functie $f(x) = -(x + 4)^2$.
a Vul het blaadje van Eef verder in en schrijf het functievoorschrift zonder haakjes.
b Waarom is de grafiek van f een bergparabool?

Ga van de functies na of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is.

- c** $g(x) = -2(x + 5)^2$
d $h(x) = 4(3 - x)^2$
e $i(x) = -(8 - x)^2$

					<i>Eef</i>
$f(x) = -(x + 4)^2$					
$\begin{array}{c c c} x & x & +4 \\ \hline x & \dots & \dots \\ +4 & \dots & \dots \end{array}$					
$f(x) = -(\dots + \dots + \dots)$					
$\begin{array}{c c c c} x & \dots & \dots & \dots \\ \hline -1 & \dots & \dots & \dots \end{array}$					
$f(x) = \dots$					

Uitdagende opdrachten

- U1** Gegeven is de functie $f(x) = -(2x + 3)^2 + cx^2$.
a Neem $c = 3$ en ga na of de grafiek van f dan een bergparabool of een dalparabool is.
b Voor welke waarden van c is de grafiek van f een dalparabool?
c Wat voor een grafiek krijg je als $c = 4$?
- U2** Gegeven is de functie $g(x) = -3(x - 4)^2$.
 Leg uit hoe je zonder de haakjes weg te werken aan het functievoorschrift kunt zien dat de grafiek van g een bergparabool is.

Je leert • hoe je de coördinaten van de top van een parabool berekent

Leerroutes • ondersteunend: 10—11—012—13—14—015—15
 • basis: 10—11—12—13—14—15—16
 • uitdagend: 11—12—13—15—16—U3—U4

De baan van een tennisbal door de lucht heeft de vorm van een parabool. Na 0,4 seconden is de tennisbal 126 cm hoog.

<i>tijd in s</i>	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
<i>hoogte in cm</i>	90	...	126	...	114	90

- Na hoeveel seconden is de tennisbal op zijn hoogst?



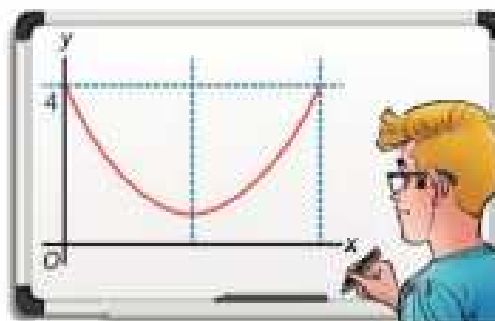
- 10** Isa wil de parabool bij de functie $g(x) = x^2 - 10x + 8$ tekenen.

- Vul de bovenste tabel van haar verder in.
- Waarom is dit geen geschikte tabel om de parabool te tekenen?
- Een vriend zegt dat de coördinaten van de top van de parabool $(5, -17)$ zijn. Isa maakt dan de onderste tabel. Waarom is dit wel een geschikte tabel?
- Vul de onderste tabel verder in en teken de parabool.

								Isa
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	
$g(x)$	47	...	...	...	...	...	...	
x	2	3	4	5	6	7	8	
$g(x)$	...	...	...	-17	...	...	...	

- 11** Pieter moet bij de functie $f(x) = x^2 - 2x + 4$ een parabool tekenen. Om een geschikte tabel te kunnen maken, moet hij eerst de coördinaten van de top van de parabool vinden.

- Ga na dat de coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y -as $(0, 4)$ zijn.
- In de tekening zie je dat de lijn $y = 4$ de parabool behalve op de y -as ook nog in een ander punt snijdt. Leg uit dat Pieter de vergelijking $x^2 - 2x + 4 = 4$ moet oplossen om de x -coördinaat van het andere snijpunt te vinden.
- Los deze vergelijking op.
- De top van de parabool ligt op de symmetrieas. Leg met behulp van de oplossingen van opdracht c uit dat de x -coördinaat van de top 1 is.
- Bereken de y -coördinaat van de top door de x -coördinaat van de top in het functievoorschrift in te vullen.



Aanpak**Hoe bereken je de coördinaten van de top van een parabool?**

- 1 Bereken de y -coördinaat van het snijpunt van de parabool met de y -as.
- 2 Stel een vergelijking op waarmee je de x -coördinaat van het andere punt op de parabool met dezelfde y -coördinaat kunt berekenen en los deze vergelijking op.
- 3 Bereken met de oplossingen van de vergelijking de x -coördinaat van de top. De top ligt op de symmetrieas van de parabool.
- 4 Bereken de y -coördinaat van de top door de x -coördinaat van de top in het functievoorschrift in te vullen.
- 5 Schrijf de coördinaten van de top van de parabool op.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de top van de parabool bij de functie $f(x) = x^2 + 8x - 3$.

Oplossing

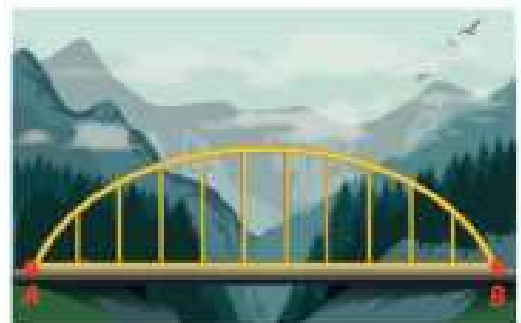
- 1 $f(0) = -3$, dus de y -coördinaat van het snijpunt van de parabool met de y -as is -3 .
- 2 $x^2 + 8x - 3 = -3$
 $x^2 + 8x = 0$
 $x(x + 8) = 0$
 $x = 0$ of $x + 8 = 0$
 $x = 0$ of $x = -8$
- 3 De x -coördinaat van de top ligt midden tussen $x = 0$ en $x = -8$.
De x -coördinaat van de top is -4 .
- 4 De y -coördinaat van de top is
 $f(-4) = (-4)^2 + 8 \times -4 - 3 = -19$.
- 5 De coördinaten van de top van de parabool zijn $(-4, -19)$.

Ondersteunende route → maak opdracht 012

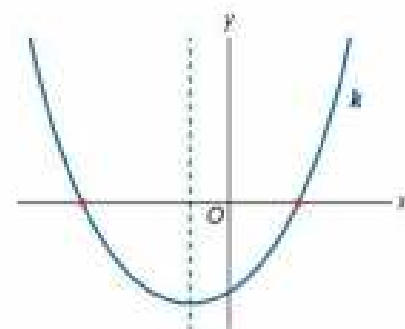
- 12** Bereken de coördinaten van de top van de parabolen.

- a** $f(x) = x^2 + 4x - 5$ **c** $h(x) = -0,5x^2 + 8x - 2$
b $g(x) = x^2 - 7x + 3$ **d** $i(x) = 2x^2 - 10x$

- 13** Bij de boog van een brug hoort de functie $h(a) = a - 0,01a^2$. Hierin is a de horizontale afstand tot punt A in meters en h de hoogte van de boog in meters.
- a Leg uit dat je de afstand van punt A tot punt B kunt berekenen door de vergelijking $a - 0,01a^2 = 0$ op te lossen.
 - b Los deze vergelijking op.
 - c Hoe groot is de afstand van punt A tot punt B ?
 - d Bereken de maximale hoogte van de boog.



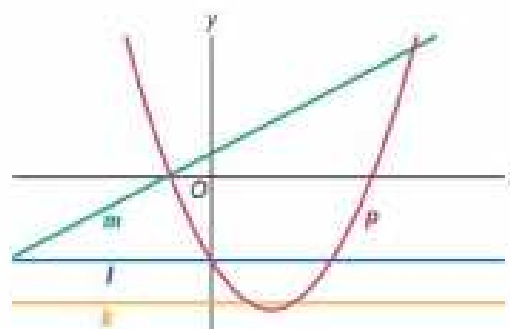
- 14** De parabool bij de functie $k(x) = (x - 3)(x + 7)$ heeft twee snijpunten met de x -as.
- Bereken de coördinaten van deze snijpunten door de vergelijking $(x - 3)(x + 7) = 0$ op te lossen.
 - Met de x -coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as kun je de x -coördinaat van de top vinden. Leg met behulp van de oplossingen van opdracht a uit dat de x -coördinaat van de top -2 is.
 - Bereken de coördinaten van de top van de parabool.



Soms is het handiger om de x -coördinaat van de snijpunten van de parabool met de x -as te gebruiken om de x -coördinaat van de top van een parabool te berekenen.

Ondersteunende route → maak opdracht 015

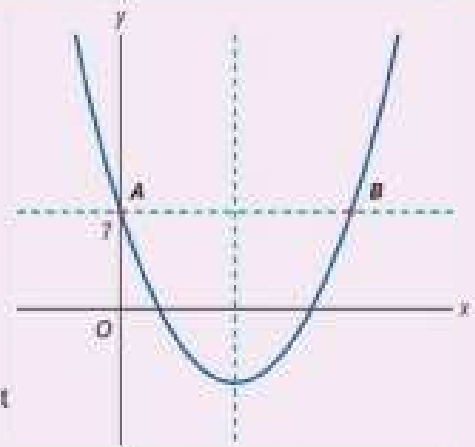
- 15** Gegeven is de functie $f(x) = (x + 2)(x + 10)$.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as.
 - Bereken de coördinaten van de top van de parabool.
 - Maak de opdrachten a en b ook voor de functies $g(x) = (x - 4)(x + 6)$ en $h(x) = (x + 1)(x - 5)$.
- 16** In het assenstelsel zie je de parabool bij de functie $p(x) = x^2 - 3x - 4$ en de lijnen k , l en m .
- Welke lijn hoort bij de formule $y = -4$? Waarom?
 - Bereken de coördinaten van de top van de parabool.
 - Leg uit waarom je de coördinaten van de snijpunten van parabool p met lijn k ook kunt gebruiken om de coördinaten van de top van de parabool te berekenen.
 - Waarom kun je de coördinaten van de snijpunten van parabool p met lijn m niet gebruiken om de coördinaten van de top van de parabool te berekenen?



Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

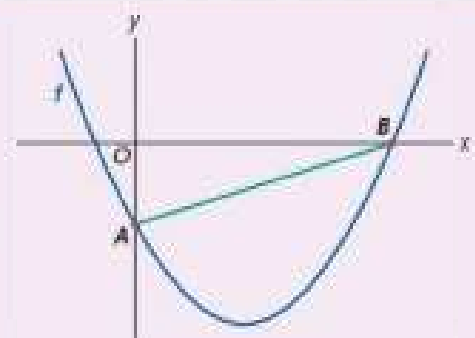
- 012** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 6x + 7$.
- Ga na dat de coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y -as $(0, 7)$ zijn.
 - In de tekening zie je dat de lijn $y = 7$ de parabool behalve op de y -as ook in punt B snijdt. Los de vergelijking $x^2 - 6x + 7 = 7$ op om de x -coördinaat van punt B te vinden.
 - De top van de parabool ligt op de symmetrieas. Leg met behulp van de oplossingen van opdracht b uit dat de x -coördinaat van de top 3 is.
 - Bereken de y -coördinaat van de top door de x -coördinaat van de top in het functievoorschrift in te vullen.
 - Schrijf de coördinaten van de top van de parabool op.
- Bereken de coördinaten van de top van de parabolen.
- $g(x) = x^2 + 3x - 2$
 - $h(x) = 0,5x^2 + 10x - 4$
 - $i(x) = x^2 - 6x$



- 015** Gegeven is de functie $g(x) = (x + 8)(x - 4)$.
- Los de vergelijking $(x + 8)(x - 4) = 0$ op en schrijf de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as op.
 - De top van de parabool ligt op de symmetrieas. Leg met behulp van de oplossingen van opdracht a uit dat de x -coördinaat van de top van de parabool -2 is.
 - Vul in: $g(-2) = (-2 + 8)(-2 - 4) = \dots \times \dots = \dots$, dus de coördinaten van de top van de parabool zijn $(-2, \dots)$.

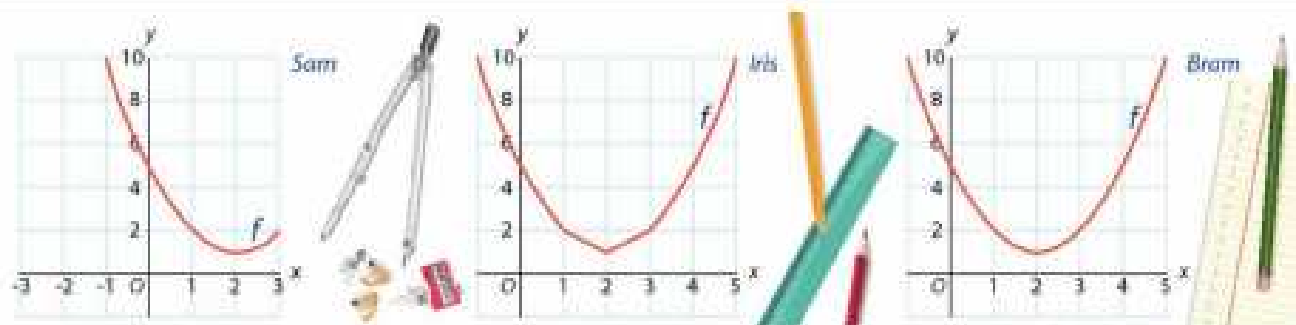
Uitdagende opdrachten

- U3** De grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 5x - 6$ snijdt de y -as in het punt A en de x -as in het punt B . Bereken de lengte van lijnstuk AB .
- U4** Gegeven is de functie $g(x) = x^2 + bx + c$.
- Neem $b = -6$ en $c = -8$ en bereken de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.
 - De parabool bij $c = -3$ gaat door het punt $(5, -28)$. Toon aan dit punt de top van de parabool is.



Je leert • hoe je een parabool bij een kwadratische functie tekent

Leerroutes • ondersteunend: 17–18–019–20–21–22
 • basis: 17–18–19–20–21–22
 • uitdagend: 17–18–19–20–21–U5



Drie leerlingen tekenen de parabool bij de functie $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

• Wie tekent de parabool volgens jou het best? Waarom?

17 Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

Je gaat onderzoeken hoe de parabool in de buurt van de top er precies uit ziet.

a Vul de tabel verder in.

x	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$f(x)$	...	...	0,04	...	...	...	...	...	0,16

b Teken een assenstelsel met op beide assen stapgrootte 0,1.

c Teken zo nauwkeurig mogelijk de parabool.

d Welke zin beschrijft het best hoe de grafiek in de buurt van de top er uit ziet?

A De parabool heeft bij de top een knik.

B De parabool loopt bij de top vloeiend.

Theorie

Bij het tekenen van een parabool zorg je er voor dat de parabool in de buurt van de top vloeiend loopt. De parabool mag daar dus geen knik hebben.



18 Gegeven is de functie $g(x) = x^2 - 7x + 6$.

- Ga met een berekening na dat de x -coördinaat van de top van de bijbehorende parabool 3,5 is.
- Bereken de y -coördinaat van de top van de parabool.
- In de tabel zijn voor x gehele opeenvolgende getallen rondom de x -coördinaat van de top gekozen.

Vul de tabel verder in.

x	0	1	2	3	3,5	4	5	6	7
$g(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

- Teken de parabool.

Aanpak

Hoe teken je een parabool bij een kwadratische functie?

- Bereken de coördinaten van de top van de parabool.
- Maak een tabel. Kies voor x opeenvolgende gehele getallen rondom de x -coördinaat van de top. Verwerk indien mogelijk het snijpunt met de y -as in de tabel.
- Teken de parabool bij de tabel. Zorg ervoor dat de parabool in de buurt van de top vloeiend loopt.

Voorbeeld

Teken de parabool bij de functie $f(x) = 2x^2 - 6x - 8$.

Oplossing

- $f(0) = -8$, dus de y -coördinaat van het snijpunt van de parabool met de y -as is -8 .

$$2x^2 - 6x - 8 = -8$$

$$2x^2 - 6x = 0$$

$$2x(x - 3) = 0$$

$$2x = 0 \text{ of } x - 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 3$$

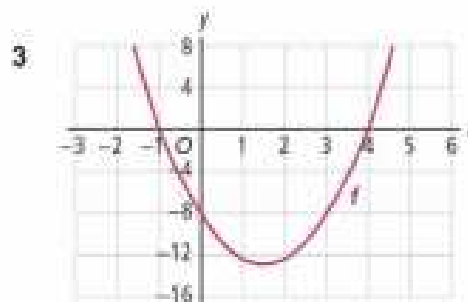
De x -coördinaat van de top is 1,5.

De y -coördinaat van de top is

$$f(1,5) = 2 \times 1,5^2 - 6 \times 1,5 - 8 = -12,5.$$

De coördinaten van de top van de parabool zijn (1,5; -12,5).

- | | | | | | | | |
|--------|----|----|-----|-------|-----|----|---|
| x | -1 | 0 | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | 0 | -8 | -12 | -12,5 | -12 | -8 | 0 |



2.3 Parabolen tekenen

Ondersteunende route → maak opdracht D19

19 Teken de parabolen bij de functies.

- a $f(x) = x^2 - 2x + 5$
- b $g(x) = -x^2 - 9x$
- c $h(x) = 2x^2 + 4x - 5$

20 Gegeven is de functie $f(x) = (x + 6)(x - 8)$.

- a Ga na dat de x -coördinaat van de top 1 is. Gebruik daarvoor de x -coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as.
- b Vul in.
 $f(1) = (1 + 6)(1 - 8) = \dots \times \dots = \dots$, dus de coördinaten van de top van de parabool zijn $(1, \dots)$.
- c Maak een tabel en teken de parabool.

21 Teken de parabolen bij de functies.

- a $f(x) = (x + 8)(x - 2)$
- b $g(x) = (7 - x)(x + 5)$
- c $h(x) = (x - 9)(-x + 3)$

22 Sanne gooit vanaf een rotswand een steen omhoog die vervolgens naar beneden valt. De hoogte van de steen kun je berekenen met de functie $h(t) = -5t^2 + 10t + 120$. Hierin is t de tijd na het omhoog gooien in seconden en h de hoogte van de steen in meters.

- a Na hoeveel seconden is de steen op zijn hoogste punt?
- b Hoe hoog komt de steen maximaal?
- c Maak een tabel bij de functie. Neem voor t getallen die in de praktijk zinvol zijn.
- d Teken de grafiek bij de functie.
- e Na hoeveel seconden valt de steen op de grond?

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

- 19** Je gaat de parabool bij de functie $f(x) = x^2 - 4x - 5$ tekenen.

- a** Ga na dat de coördinaten van de top van de parabool $(2, -9)$ zijn.
b Vul de tabel verder in.

x	...	...	1	2	3	...	...
$f(x)$	...	...	...	-9	...	...	...

- c** Teken de parabool bij de tabel. Zorg er voor dat de parabool in de buurt van de top vloeiend loopt.

Teken de parabolen bij de functies.

- d** $g(x) = x^2 + 6x + 7$
e $h(x) = -x^2 - 8x$
f $i(x) = 2x^2 + 6x - 3$

Uitdagende opdrachten

- U5** Dafne werpt een speer. De baan van de speer is afhankelijk van de snelheid waarmee Dafne de speer werpt. De hoogte h in centimeters van de speer boven de grond kun je berekenen met de functie $h(t) = -5t^2 + vt + 200$. Hierin is t de tijd in seconden en v de snelheid in kilometers per uur waarmee Dafne de speer werpt.
- a** Neem $v = 30$ en bereken daarbij de maximale hoogte van de speer.
b Teken de grafiek die bij $v = 30$ hoort.
c Na hoeveel seconden komt de speer dan op de grond?
d Duurt het langer of korter voor de speer op de grond komt als $v = 15$? Hoeveel seconden scheelt het?



Je leert • hoe je uit het functievoorschrift de vorm en de ligging van de parabool afleidt

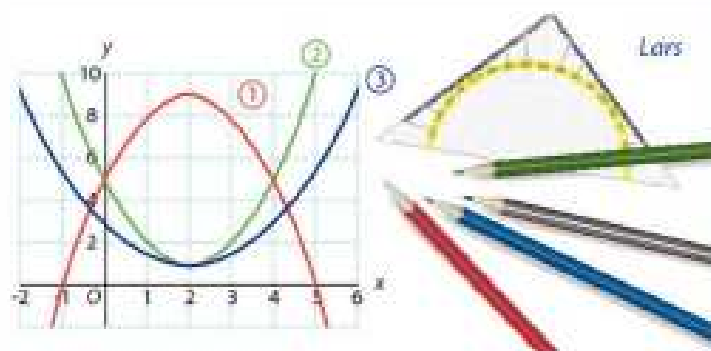
Leerroutes • ondersteunend: 23—24—025—26—27—28—029—30
 • basis: 23—24—25—26—27—28—29—30
 • uitdagend: 23—25—27—28—29—30—U6—U7

Gegeven zijn de functies

$$f(x) = -x^2 + 4x + 5, g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$$

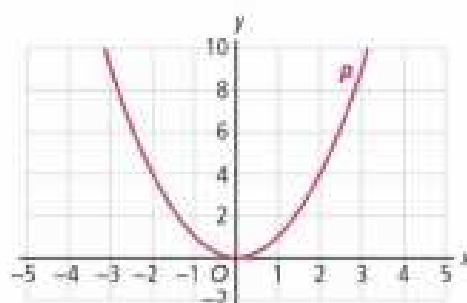
en $h(x) = x^2 - 4x + 5$. Lars heeft de parabolen bij de functies in één assenstelsel getekend.

- Zoek bij iedere functie de juiste parabool.



23 Gegeven zijn de functies $p(x) = x^2$, $q(x) = \frac{1}{2}x^2$ en $r(x) = 3x^2$. De grafiek van p is al getekend.

- Hoe kun je aan de functievoorschriften zien dat de grafieken van de drie functies dalparabolen zijn?
- Teken in hetzelfde assenstelsel de grafieken van q en r .
- De drie functies zijn van de vorm $f(x) = ax^2$. Bij welke waarde van a loopt de parabool het steilst?
- Hoort daar de breedste of juist de smalste parabool bij?



Theorie

Het functievoorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ is de algemene vorm van een kwadratische functie. Uit het functievoorschrift kun je de vorm van de bijbehorende parabool afleiden.

- > Als $a > 0$ dan is de grafiek een dalparabool.
- Als $a < 0$ dan is de grafiek een bergparabool.
- > Hoe verder de waarde van a van 0 af ligt, hoe smaller de parabool is. Hoe dichterbij 0 de waarde van a ligt, hoe breder de parabool is.

Voorbeeld

De parabool bij de functie $f(x) = -2x^2 + 3$ is smaller dan de parabool bij de functie $g(x) = x^2 - 4x$, want -2 ligt verder van 0 af dan 1.

De parabool bij de functie $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ is breder dan de parabool bij de functie $k(x) = -4x^2 + x$, want $\frac{1}{2}$ ligt dichterbij 0 dan -4 .

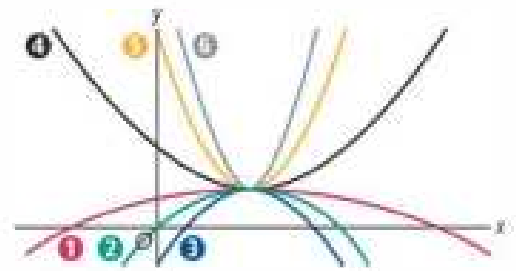
24 Gegeven is de functie $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$.

- Is de grafiek van f een bergparabool of een dalparabool?
- Is de grafiek van f smaller of breder dan de grafiek van $g(x) = -2x^2 + 14x - 7$?

Ondersteunende route → maak opdracht 025

25 Zoek bij iedere functie de juiste parabool.

- A $f(x) = x^2 - 4x + 8$ D $l(x) = -2x^2 + 8x - 4$
 B $g(x) = -x^2 + 4x$ E $j(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$
 C $h(x) = 8x^2 - 32x + 36$ F $k(x) = 4x^2 - 16x + 20$



26 Gegeven zijn de functies $f(x) = -x^2 + 2$ en $g(x) = x^2 - 1$.

- Teken in één assenstelsel de grafieken van f en g .
- Op welke as liggen de toppen van deze parabolen?
- Schrijf van beide parabolen de coördinaten van de top op.
- Hoe kun je de coördinaten van de top uit het functievoorschrift afleiden?

27 Gegeven is de functie $h(x) = 2x^2 - 8x$.

- Gaat de grafiek van h door de oorsprong?
- Bereken de coördinaten van de top van de parabool.
- Ligt de top van de parabool op de y -as?

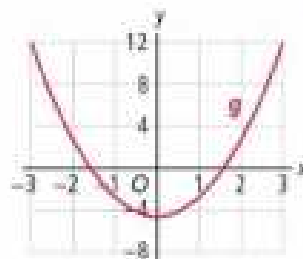
Theorie

Uit het functievoorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ kun je al iets over de ligging van de bijbehorende parabool afleiden.

- > De coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y -as zijn $(0, c)$.
- > Bij $b = 0$ wordt het functievoorschrift $f(x) = ax^2 + c$.
De top van de parabool ligt dan op de y -as. De coördinaten van de top van de parabool zijn dan $(0, c)$.
- > Bij $c = 0$ wordt het functievoorschrift $f(x) = ax^2 + bx$.
De parabool gaat dan door de oorsprong.

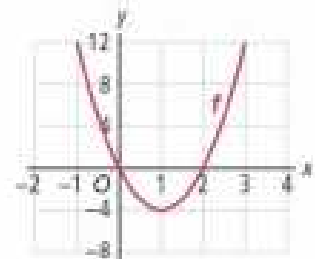
Voorbeeld 1

De top van de parabool bij de functie $g(x) = 2x^2 - 5$ ligt op de y -as, want $b = 0$. De coördinaten van de top van de parabool zijn $(0, -5)$.



Voorbeeld 2

De parabool bij de functie $f(x) = 4x^2 - 8x$ gaat door de oorsprong, want $c = 0$.

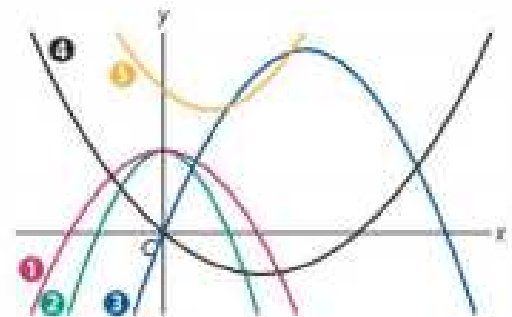


- 28** Van de functies $p(x) = 3x^2 + 9$, $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x$ en $r(x) = -x^2$ zijn de grafieken parabolen.
- Van welke functie is de grafiek een bergparabool?
 - Bij welke functies ligt de top van de parabool op de y -as? Geef van deze parabolen de coördinaten van de top.
 - Bij welke functies gaat de parabool door de oorsprong?

Ondersteunende route → maak opdracht D29

- 29** Zoek bij iedere functie de juiste parabool.

- $f(x) = -x^2 + 6x$
- $g(x) = x^2 - 2x + 7$
- $h(x) = -x^2 + 4$
- $k(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$
- $j(x) = -2x^2 + 4$



- 30** De functie $h(a) = -0,4a^2 + 5$ hoort bij de hoogte van de boog van de tunnel. Hierbij is a de afstand in meters tot het midden van de weg en h de hoogte in meters boven het wegdek.
- Hoe hoog is de tunnel bij het hoogste punt?
 - Bereken de hoogte van de tunnel op 1 meter van het midden van de weg.
 - Kan een vrachtwagen die 2 meter breed en 3,5 meter hoog is onder de tunnel door zonder over het midden van de weg te rijden?
 - Een nieuwe tunnel moet even hoog worden en moet op 2 meter van het midden van de weg 4 meter hoog zijn. Bereken in het bijbehorende functievoorschrift $h(a) = pa^2 + 5$ de waarde van p .
 - Hoeveel meter breed wordt de weg in de nieuwe tunnel? Rond je antwoord af op twee decimalen.



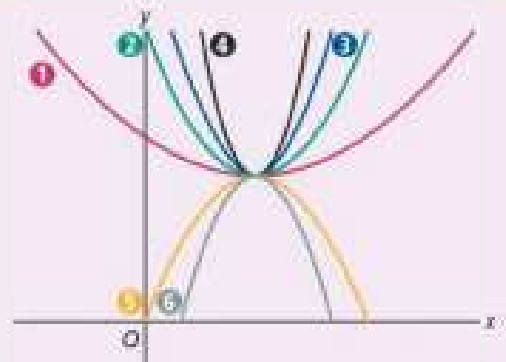
Uitdagende route → maak opdracht U6 en U7

Ondersteunende opdrachten

- 025 Gegeven zijn de functies $f(x) = 4x^2 - 16x + 24$ en $g(x) = 2x^2 - 8x + 16$.

- Hoe kun je uit de functievoorschriften afleiden dat de grafieken van f en g dalparabolen zijn?
- En hoe kun je uit de functievoorschriften afleiden dat de grafiek van f smaller is dan de grafiek van g ?
- Zoek bij iedere functie de juiste parabool.

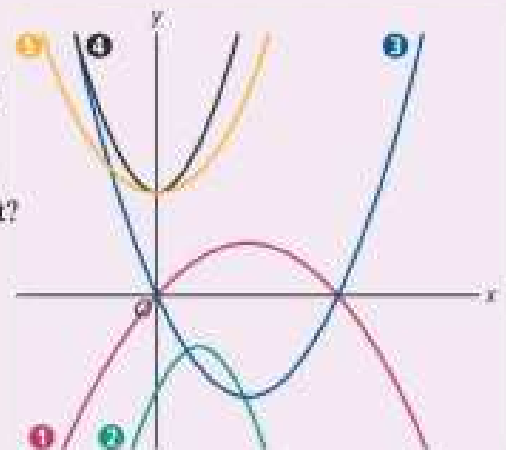
- A $f(x) = 4x^2 - 16x + 24$ D $h(x) = -4x^2 + 16x - 8$
 B $g(x) = 2x^2 - 8x + 16$ E $j(x) = 8x^2 - 32x + 40$
 C $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 10$ F $k(x) = -2x^2 + 8x$



- 029 Gegeven zijn de functies $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ en $g(x) = 2x^2 + 4$.

- Hoe kun je uit het functievoorschrift van f afleiden dat de bijbehorende parabool door de oorsprong gaat?
- En hoe kun je uit het functievoorschrift van g afleiden dat de top van de bijbehorende parabool op de y -as ligt?
- Zoek bij iedere functie de juiste parabool.

- A $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$
 B $g(x) = 2x^2 + 4$
 C $h(x) = -2x^2 + 4x - 4$
 D $h(x) = x^2 + 4$
 E $j(x) = x^2 - 4x$



Uitdagende opdrachten

- U6 Een parabool gaat door de oorsprong en de parabool is smaller dan de parabool bij de functie $g(x) = -3x^2 + 8x - 4$. Schrijf twee voorbeelden op van functievoorschriften die bij deze parabool kunnen horen.
- U7 De grafiek van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ is een dalparabool die even breed is als de parabool bij de functie $g(x) = -x^2 - 2x$. De grafiek gaat door de oorsprong en door het punt $(2, 10)$. Bereken a , b en c .

Deze paragraaf bevat opdrachten die een indruk geven van wiskunde A/C en wiskunde B.

31 Zoek bij iedere functie de juiste parabool.

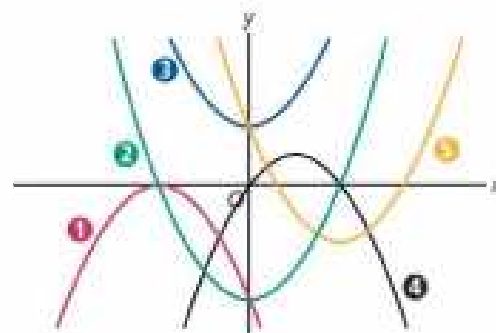
A $f(x) = x^2 - 4x + 2$

B $g(x) = x^2 + 2$

C $h(x) = -x^2 + 2x$

D $i(x) = x^2 - 4$

E $j(x) = -x^2 - 4x - 4$



32 Gegeven zijn de functies $p(x) = 2x^2 - x + 3$,
 $q(x) = -(x - 3)(x + 3) + 8$, $r(x) = -5x(x + 2) + 7$ en
 $s(x) = (x - 7)^2 - 49$.

- Geef van de functies aan of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is.
- Van welke functie gaat de grafiek door de oorsprong?
- Bij welke functie ligt de top van de parabool op de y -as?

33 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5$, $g(x) = x^2 - 4x + 1$
 en $h(x) = (x + 1)(x - 3)$.

- Bereken bij elke functie de coördinaten van de top van de parabool.
- Teken de drie parabolen in één assenstelsel.
- Bij welke functie is de parabool het breedst? Hoe kun je dat uit het functievoorschrift afleiden?
- Schrijf van elke parabool de formule van de symmetrieas op.
- In welk punt snijden de drie parabolen elkaar?

AC34 Martijn gooit vanaf een toren een bal omhoog. De hoogte van de bal kun je berekenen met de functie
 $h(t) = -5t^2 + 10t + 75$.

Hierin is t de tijd na het omhoog gooien in seconden en h de hoogte van de bal in meters.

- Vanaf welke hoogte gooit Martijn de bal omhoog?
- Na hoeveel seconden is de bal weer op dezelfde hoogte?
- Welke hoogte bereikt de bal maximaal?
- Zoek uit na hoeveel seconden de bal op de grond valt.



- AC35** Hamid verkoopt op de markt horloges. De winst die hij maakt, hangt af van de prijs. Als hij de horloges duurder maakt, dan verkoopt hij minder horloges. De winst W in euro's die hij maakt, kan hij berekenen met de functie $W(p) = -10p^2 + 160p - 280$. Hierin is p de prijs in euro's die hij voor de horloges vraagt.
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat er sprake is van een prijs waarbij de winst maximaal is?
 - Hamid verkoopt de horloges voor € 4,-. Hoeveel winst maakt hij bij deze prijs?
 - Toon aan dat bij een prijs van € 6,- de winst even groot is als bij een prijs van € 10,-.
 - Bereken de maximale winst.



- B36** Gegeven is de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Neem $a = 2$, $b = -10$ en $c = 2$ en teken de bijbehorende parabool.
 - De bij $b = 16$ horende parabool gaat door de oorsprong en door het punt $(3, -24)$. Bereken de coördinaten van de top van de parabool.

- B37** Van een grote ronde vijver in een park zie je hieronder een verticale doorsnede. Deze doorsnede gaat door het middelpunt van de vijver.
- De functie $h(a) = 0,01a^2 - 0,2a + 1,2$ hoort bij deze doorsnede. Hierbij is a de horizontale afstand in meters tot punt O en h de hoogte in meters.
- Bereken de hoogte OA .
 - Bereken de diameter AB .
 - Het water staat tot aan de rand. Ongeveer hoeveel m^2 is het wateroppervlak?
 - Hoe diep is het in het midden van de vijver?



Vaardigheid

Je kunt van een functievoorschrift nagaan of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is.

Als het getal voor x^2 positief is, zoals bij

$f(x) = 2x^2 - x + 3$, dan is de grafiek een dalparabool.

Als het getal voor x^2 negatief is, zoals bij

$g(x) = -x^2 + 2x - 3$, dan is de grafiek een bergparabool.

Soms staan in het functievoorschrift bij een kwadratische functie haakjes. Door het functievoorschrift zonder haakjes te schrijven, kun je nagaan of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is.

Voorbeeld

Is de grafiek bij de functie $f(x) = -(x+3)(2+x) + 2x^2$ een bergparabool of een dalparabool?

Oplossing

Werk eerst de haakjes bij $(x+3)(2+x)$ weg.

$\times$	2	$+x$
x	$2x$	$+x^2$
$+3$	$+6$	$+3x$

Dit geeft $f(x) = -(x^2 + 5x + 6) + 2x^2$.

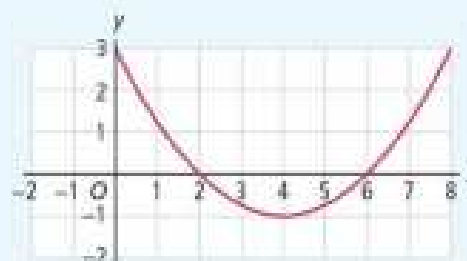
Werk nogmaals de haakjes weg.

$\times$	x^2	$+5x$	$+6$
-1	$-x^2$	$-5x$	-6

Dit geeft $f(x) = -x^2 - 5x - 6 + 2x^2$ en dat is vereenvoudigd $f(x) = x^2 - 5x - 6$.

De grafiek van f is een dalparabool.

- S1** Gegeven zijn de functies $f(x) = -x^2 - 4x + 3$ en $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$.
- Van welke functie is de grafiek getekend? Hoe kun je dat aan het functievoorschrift zien?
 - Welke lijn is de symmetrieas van de grafiek?
 - Schrijf de coördinaten van de top op.



- S2** Ga van de functies na of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is.
- $p(x) = -x^2 + 6x - 2$
 - $q(x) = (x-5)(2-x) + 2x^2$

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten van de top van een parabool berekenen.

- 1 Bereken de y -coördinaat van het snijpunt van de parabool met de y -as.
- 2 Stel een vergelijking op waarmee je de x -coördinaat van het andere punt op de parabool met dezelfde y -coördinaat kunt berekenen en los deze vergelijking op.
- 3 Bereken met de oplossingen van de vergelijking de x -coördinaat van de top. De top ligt op de symmetrieas van de parabool.
- 4 Bereken de y -coördinaat van de top door de x -coördinaat van de top in het functievoorschrift in te vullen.
- 5 Schrijf de coördinaten van de top van de parabool op.

Voorbeeld 1

Bereken de coördinaten van de top van de parabool bij de functie $f(x) = x^2 - 6x + 7$.

Oplossing

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1 $f(0) = 7$, dus de y-coördinaat van het snijpunt van de parabool met de y-as is 7. 2 $x^2 - 6x + 7 = 7$
 $x^2 - 6x = 0$
 $x(x - 6) = 0$
 $x = 0$ of $x - 6 = 0$
 $x = 0$ of $x = 6$ | <ol style="list-style-type: none"> 3 De x-coördinaat van de top ligt midden tussen $x = 0$ en $x = 6$.
De x-coördinaat van de top is 3. 4 De y-coördinaat van de top is
 $f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 7 = -2$. 5 De coördinaten van de top van de parabool zijn $(3, -2)$. |
|--|--|

S3 Bereken de coördinaten van de top van de parabolen.

- a $f(x) = x^2 + 8x - 3$
- b $g(x) = -x^2 - 5x + 2$
- c $h(x) = 4x^2 - 8x$

Vaardigheid

Je kunt een parabool bij een kwadratische functie tekenen.

- 1 Bereken de coördinaten van de top van de parabool.
- 2 Maak een tabel. Kies voor x opeenvolgende gehele getallen rondom de x -coördinaat van de top. Verwerk indien mogelijk het snijpunt met de y -as.
- 3 Teken de parabool bij de tabel. Zorg er voor dat de parabool in de buurt van de top vloeiend loopt.

Voorbeeld

Teken de parabool bij de functie $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Oplossing

- 1 $f(0) = 3$, dus de y -coördinaat van het snijpunt van de parabool met de y -as is 3.

$$x^2 - 4x + 3 = 3$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x - 4 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4$$

De x -coördinaat van de top is 2.

De y -coördinaat van de top is

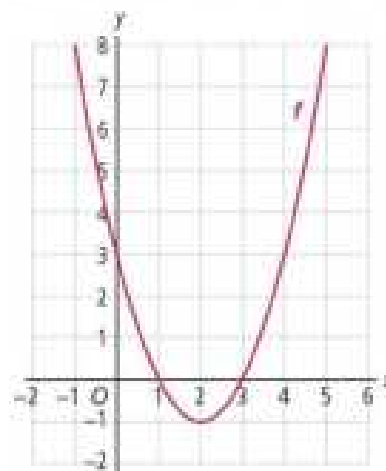
$$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1.$$

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(2, -1)$.

- 2

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	8	3	0	-1	0	3	8

- 3



S4 Teken de parabolen bij de functies.

a $f(x) = x^2 - 10x$

b $g(x) = -x^2 + 6x - 8$

c $h(x) = (x + 2)(x - 6)$

Vaardigheid

Je kunt uit het functievoorschrift de vorm en de ligging van de parabool afleiden.

Het functievoorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ is de algemene vorm van een kwadratische functie.

> Als $a > 0$ dan is de grafiek een dalparabool.

Als $a < 0$ dan is de grafiek een bergparabool.

Hoe verder de waarde van a van 0 af ligt, hoe smaller de parabool is. Hoe dichter de waarde van a bij 0 ligt, hoe breder de parabool is.

> De coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y -as zijn $(0, c)$.

> Bij $b = 0$ wordt het functievoorschrift $f(x) = ax^2 + c$.

De top van de parabool ligt dan op de y -as. De coördinaten van de top van de parabool zijn dan $(0, c)$.

> Bij $c = 0$ wordt het functievoorschrift $f(x) = ax^2 + bx$.

De parabool gaat dan door de oorsprong.

Voorbeeld 1

De parabool bij de functie $p(x) = 2x^2 - 4x$ is een dalparabool, want $a > 0$.

De parabool is smaller dan de parabool bij de functie $q(x) = x^2 + 7$, want 2 ligt verder van 0 af dan 1.

Voorbeeld 2

De top van de parabool bij de functie $s(x) = -x^2 + 2$ ligt op de y -as, want $b = 0$.

De coördinaten van de top van de parabool zijn $(0, 2)$.

Voorbeeld 3

De parabool bij de functie $r(x) = x^2 - 4x$ gaat door de oorsprong, want $c = 0$.

S5 Zoek bij iedere functie de juiste parabool.

A $f(x) = 3x^2 + 8$

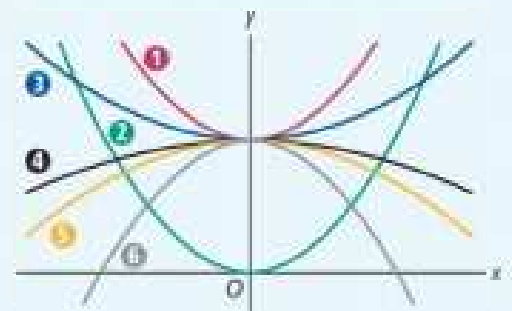
D $g(x) = 3x^2$

B $g(x) = x^2 + 8$

E $j(x) = -3x^2 + 8$

C $h(x) = -x^2 + 8$

F $k(x) = -0,5x^2 + 8$



S6 Van de functies $p(x) = -x^2 + 9$ en $q(x) = 2x^2 - 3x$ zijn de grafieken parabolen.

a Van welke functie is de grafiek een dalparabool?

b Bij welke functie is de parabool het smalst?

c Bij welke functie ligt de top van de parabool op de y -as? Geef de coördinaten van de top van deze parabool.

d Bij welke functie gaat de parabool door de oorsprong?

T1 Ga van functies na of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is.

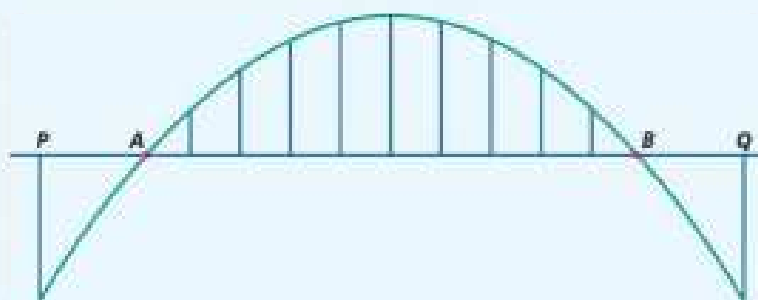
- a $f(x) = x^2 - 3x + 1$
- b $g(x) = 4x - x^2$
- c $h(x) = -(x + 5)(1 - x) - 2x^2$
- d $i(x) = -(x - 2)^2 + 2x^2$

T2 Gegeven zijn de functies $p(x) = x^2 - 3x$, $q(x) = -4 + 2x^2$, $r(x) = -2x^2 - 7x$ en $s(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5$.

- a Bij welke functies gaat de parabool door de oorsprong?
- b Bij welke functies ligt de top van de parabool op de y -as? Schrijf van deze functies de coördinaten van de top van de parabool op.

T3 Gegeven zijn de functies $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 12$, $g(x) = -2x^2 - 4x$, $h(x) = x^2 + 2x - 1$ en $i(x) = -x^2 - 7$.

- a Bereken de coördinaten van de top van de bijbehorende parabolen.
- b Bij welke functie is de parabool het smalst?
- c Teken de grafiek van f .

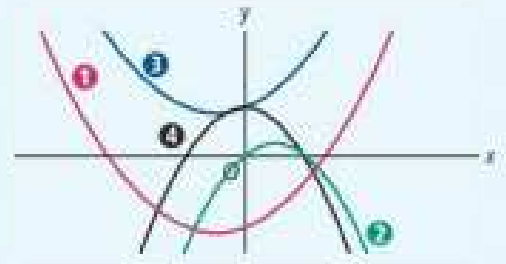


T4 Hierboven zie je een zijaanzicht van een brug. De horizontale lijn door de punten P en Q geeft het wegdek aan. Bij de boog hoort de functie $h(a) = -0,05a^2 + 1,2a - 4$. Hierin is a de afstand tot punt P in meters en h de hoogte van de boog ten opzichte van het wegdek in meters.

- a Welke hoogte vind je bij $a = 0$? Wat betekent dat?
- b Bereken de afstand van punt P tot punt Q .
- c Hoe hoog is het hoogste punt van de boog ten opzichte van het wegdek?

T5 Zoek bij iedere functie de juiste parabool.

- A $f(x) = x^2 + x + 2$
- B $g(x) = x^2 + x - 3$
- C $h(x) = -2x^2 + 2x$
- D $k(x) = -2x^2 + 2$



T6 Gegeven is de functie $f(x) = (x + 2)(x - 4)$.

- a Teken de parabool bij de functie.
- b Geef de formule van de symmetrieas.
- c Op de parabool ligt het punt $(5, 7)$. Er ligt nog een punt op de parabool met y -coördinaat 7. Geef de coördinaten van dat punt.

T7 Gegeven is de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- a Neem $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$ en $c = -4$ en teken de bijbehorende parabool.
- b De bij $a = -2$ horende parabool gaat door de punten $(0, 0)$ en $(6, 0)$. Schrijf het functievoorschrift dat daarbij hoort op.

T8 Een honkballer slaat de bal in een paraboolvormige baan weg. De baan wordt beschreven door de functie

$$h(a) = -0,02a^2 + 1,6a + 1.$$

Hierbij is a de horizontale afstand van de bal tot de honkballer in meters en h de hoogte van de bal in meters.

- a Op welke hoogte wordt de bal weggeslagen?
- b Bereken de maximale hoogte van de bal.
- c Een veldspeler staat in de richting waarin de bal geslagen wordt op 70 meter van de honkballer. Kan hij de bal vangen? Leg je antwoord uit.



Je kunt van een functievoorschrift nagaan of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is.

- E1 Geef bij de functies aan of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is.

a $f(x) = -x^2 + 2x - 7$ c $h(x) = 3(x+1)(x+2) - 4x^2$
 b $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 7$ d $k(x) = (x+3)^2 - 6x$

Je kunt de coördinaten van de top van een parabool berekenen.

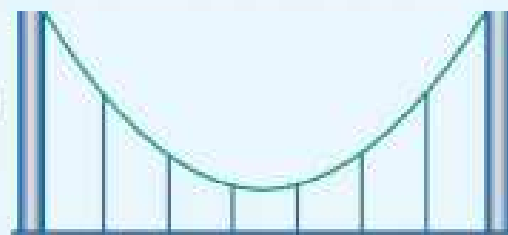
- E2 Bereken de coördinaten van de top van de parabolen.

a $f(x) = x^2 - 12x + 4$ c $h(x) = x^2 + 7x$
 b $g(x) = 2x^2 + 8x - 5$ d $k(x) = 6x^2 - 24$

- E3 Bereken de coördinaten van de top van de parabolen.

a $p(x) = (x-5)(x+7)$ c $r(x) = (x+9)(-x-1)$
 b $q(x) = (x+2)(x-10)$ d $s(x) = (x-3)(5-x)$

- E4 Bij een hangbrug staat er aan weerszijden van de brug een hoge toren en daartussen hangen kabels. De brug is opgehangen aan deze kabels. De kabels hangen in de vorm van een parabool. Met de functie $h(a) = 0,01a^2 - 1,2a + 46$ kun je de hoogte h van de kabels ten opzichte van het wegdek in meters berekenen. Hierbij is a de afstand in meters tot de linker toren.



- a Bereken de hoogte van de linker toren.
 b De rechter toren is net zo hoog.
 Leg uit dat je de afstand tussen de twee torens kunt berekenen door het oplossen van de vergelijking $0,01a^2 - 1,2a + 46 = 46$.
 c Bereken de afstand tussen de twee torens.
 d Voor welke waarde van a is de afstand tussen de kabels en het wegdek het kleinst? Hoeveel meter is die afstand?

Je kunt een parabool bij een kwadratische functie tekenen.

- E5 Teken de parabolen bij de functies.

a $f(x) = x^2 - 4x + 2$ c $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 3$
 b $g(x) = x^2 + 6x$ d $k(x) = -x^2 - x + 7$

E6 Teken de parabolen bij de functies.

- a** $p(x) = (x - 2)(x - 6)$ **c** $r(x) = (x + 5)(x + 2)$
b $q(x) = (x + 6)(x - 2)$ **d** $s(x) = (x - 2)(-x + 8)$

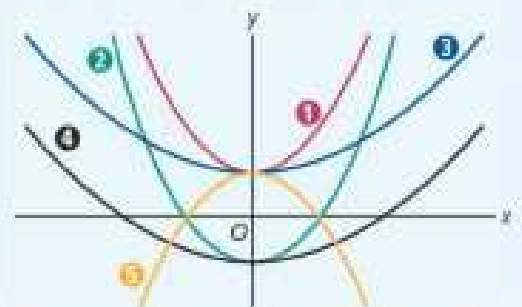
E7 Rafael gooit vanaf de zijlijn van het voetbalveld een bal in. De hoogte van de bal kan worden berekend met de functie $h(a) = -0,1a^2 + 0,4a + 2,1$. Hierin is a de horizontale afstand vanaf Rafael in meters en h de hoogte van de bal in meters.

a Welke hoogte bereikt de bal maximaal?
b Teken de grafiek die bij de functie hoort.

Je kunt uit het functievoorschrift de vorm en de ligging van de parabool afleiden.

E8 Zoek bij iedere functie de juiste parabool.

- A** $f(x) = x^2 + 2$
B $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$
C $h(x) = -x^2 + 2$
D $k(x) = x^2 - 2$
E $j(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$

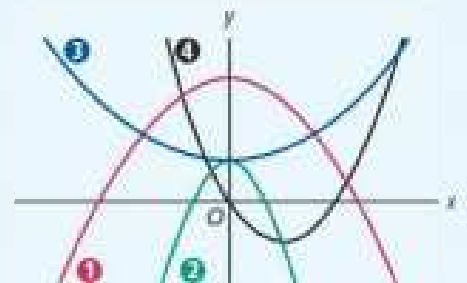


E9 Van de functies $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$, $q(x) = 3x^2 + 6$, $r(x) = -x^2 + 4$ en $s(x) = 2x^2 - 6x$ zijn de grafieken parabolen.

a Van welke functies is de grafiek een dalparabool?
b Bij welke functies ligt de top van de parabool op de y -as? Geef de coördinaten van de top van deze parabolen.
c Bij welke functies gaat de parabool door de oorsprong?
d Bij welke functie is de parabool breder dan de parabool bij de functie $t(x) = x^2 - 4x + 7$?

E10 Zoek bij iedere functie de juiste parabool.

- A** $f(x) = -2x^2 + 1$
B $g(x) = x^2 - 2x$
C $h(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$
D $k(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$



Tussendoortje | Veel geld verdienen

Rente krijgen

Iemand heeft 1 ton (€ 100.000,-) en zet dat geld vast. Na een periode van ongeveer 7 jaar krijgt hij 100% rente en heeft dan 2 ton.

Hij komt op het idee het geld maar een halve periode vast te zetten. Hij krijgt daarna 50% rente zodat hij op dat moment $1\frac{1}{2}$ ton heeft.

Dan haalt hij het geld van de bank en zet die $1\frac{1}{2}$ ton direct weer voor een halve periode vast. Hij krijgt daarna weer 50% rente.

Het eindbedrag is dan $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$ ton.

Eén keer extra naar de bank gaan levert hem zo $\frac{1}{4}$ ton (€ 25.000,-) extra op.

- Laat zien dat je dit eindbedrag ook kunt berekenen met de formule

$$\text{eindbedrag} = (1 + \frac{1}{2})^2 \times \text{beginbedrag}.$$

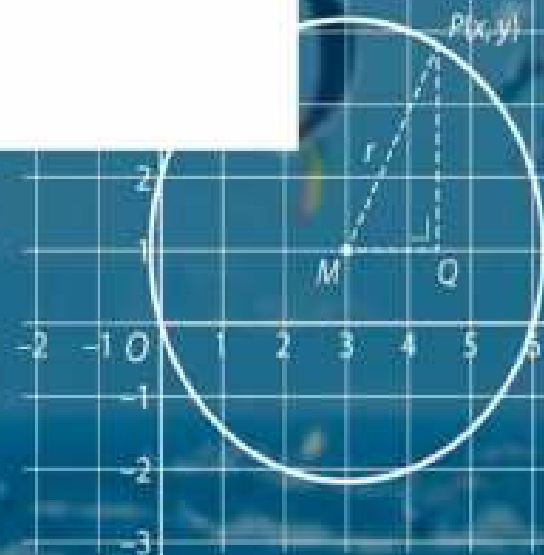
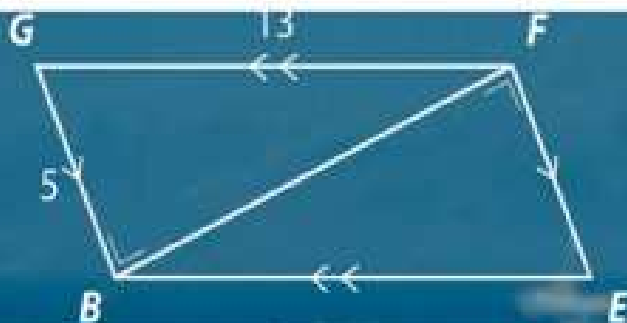
Nog vaker naar de bank

Als je het geld steeds $\frac{1}{4}$ periode vastzet en steeds 25% rente krijgt, dan geldt de formule $\text{eindbedrag} = (1 + \frac{1}{4})^4 \times \text{beginbedrag}.$

- Ga na dat dit klopt en bereken het eindbedrag.
- Op welk eindbedrag kom je uit als je het geld telkens $\frac{1}{10}$ periode vastzet?

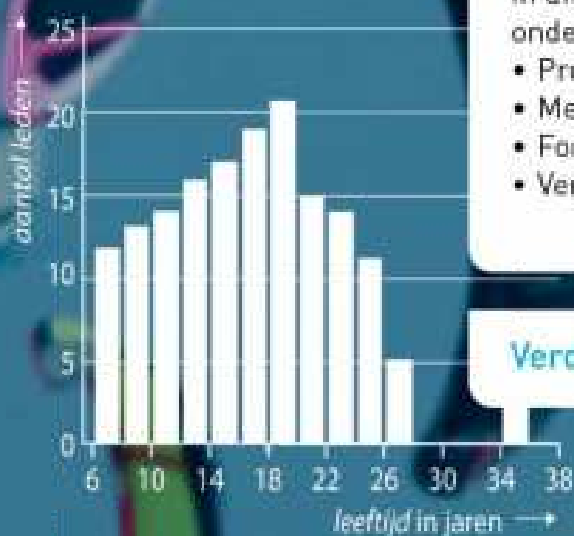
Drie keer zo veel

- Vul in $(1 + \frac{1}{n})^n$ voor n de getallen 50, 100, 150, 200 en 250 in en schrijf de uitkomsten in drie decimalen op.
- Stel dat je in die 7 jaar oneindig vaak naar de bank zou kunnen gaan. Denk je dat het dan lukt het geld te laten verdrievoudigen?



Vaardigheden

1



In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Procenten
- Meetkunde
- Formules en grafieken
- Vergelijkingen en ongelijkheden

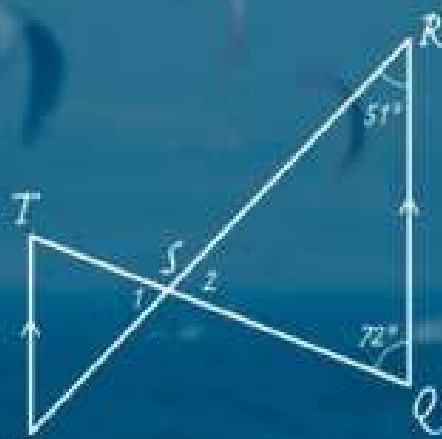
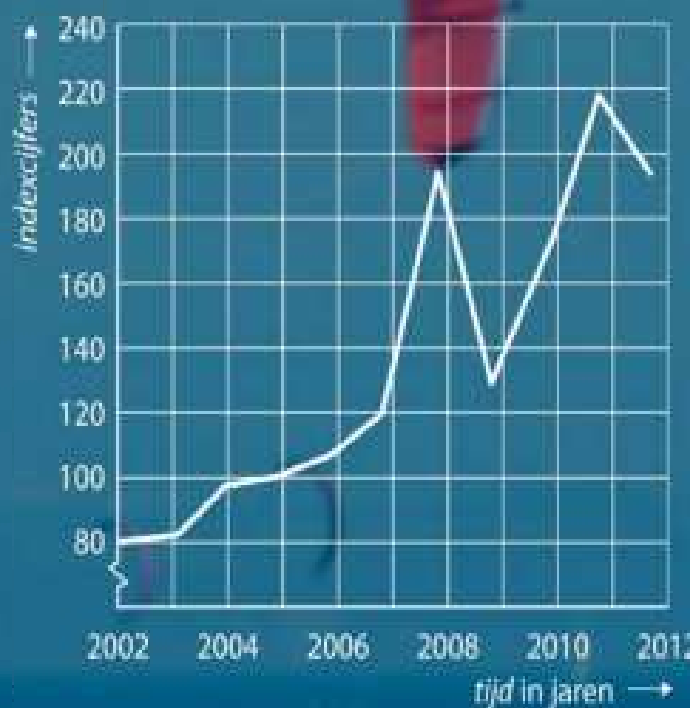
Verdieping | Bruggen

$$g(x) = -2(x - 3)(1 + x)$$

$$h(x) = -(x - 6)(3 + x)$$

$$i(x) = 3x(x - 5) - 2x^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Procenten

1 Bereken zonder rekenmachine.

- a 10% van 340 c 25% van 244
b 50% van 960 d 30% van 80

Theorie

Bij 50% zie je direct dat dit gelijk is aan $\frac{1}{2}$ deel.
Hieronder zie je een aantal handige percentages.

$10\% = \frac{1}{10}$ deel	$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$ deel
$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$ deel	$50\% = \frac{1}{2}$ deel
$20\% = \frac{1}{5}$ deel	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$ deel
$25\% = \frac{1}{4}$ deel	$75\% = \frac{3}{4}$ deel

2 Bereken.

- a 25% van 400 d $33\frac{1}{3}\%$ van 75
b 20% van 50 e 16% van 400
c 12,5% van 56 f 0,3% van 200

3 Bereken telkens de nieuwe prijs.

- a € 250,- wordt met 3% verhoogd.
b € 80,- wordt met 12% verlaagd.
c € 380,- wordt eerst met 5% verhoogd en daarna met 10% verlaagd.

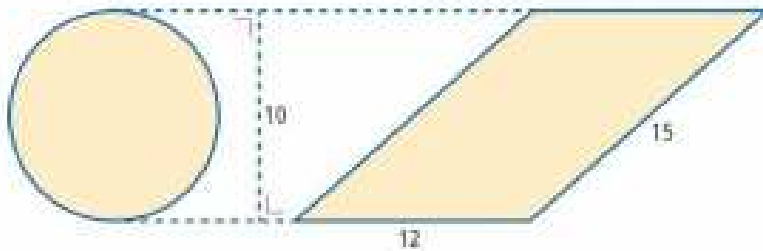
4 In een winkel worden de prijzen met 5% verhoogd.
Vul de tabel verder in.

<i>oorspronkelijke prijs in euro's</i>	22,00	35,00	68,00		...
<i>prijs na de prijsverhoging in euro's</i>	...	...	...	42,00	73,50

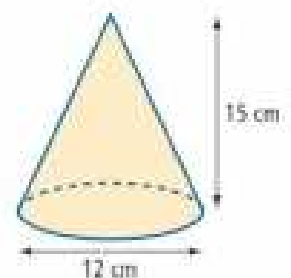
5 Bereken hoeveel procent het is.

- a 5 van 200 d 135 van 1000
b 13 van 78 e 37 van 185
c 120 van 2500 f 1 van 400

Meetskunde



- 6
- Bereken de omtrek van de cirkel.
 - Bereken de omtrek van het parallellogram.
 - Bereken de oppervlakte van de cirkel.
 - Bereken de oppervlakte van het parallellogram.
- 7
- Van een kegel heeft het grondvlak een diameter van 12 cm. De hoogte van de kegel is 15 cm.
- Bereken de inhoud van de kegel in cm^3 . Rond je antwoord af op één decimaal.
 - Van de kegel wordt een vergroting gemaakt. Het grondvlak van de vergroting heeft een diameter van 18 cm. Bereken de hoogte van de vergroting in cm.



Formules en grafieken

- 8
- Bij één tabel hoort lineaire groei en bij de andere tabel hoort exponentiële groei.

A

x	-1	0	1	2
y	7	5	3	1

B

x	1	2	3	4
y	6	18	54	162

- Bij welke tabel hoort lineaire groei? Licht je antwoord toe.
 - Stel bij beide tabellen een formule op.
- 9
- Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.
- $y = 8x(2x - 3)$
 - $p = (3 - k)(7k + 4)$
 - $w = 14 - (5t - 8)$
 - $r = 2q - 3(6q + 1)$
 - $g = (3 - m)(6m + 2)$
 - $h = (1,2 - 5v)(2 - 5v)$
 - $s = 4a + 3a(2 - a)$
 - $b = (d - 3)(2d + 6)$

10 Ontbind de twee- of drietermen in de formules in factoren.

a $c = 3b^2 - 6b$

e $m = 15n - 5n^2$

b $w = v^2 - 3v - 108$

f $q = p^2 + 5p - 6$

c $y = x^2 + 15x + 56$

g $h = g^2 - 8g + 16$

d $k = -4t^2 - 6t$

h $s = -40d^2 + 4d$

11 Lijn l gaat door de punten $(4, 3)$ en $(16, -3)$.

a Stel bij lijn l een formule op.

b In welk punt snijdt lijn l de y -as?

c Bij lijn k hoort de formule $y = -3x + 15$. Lijn m is evenwijdig aan lijn k en gaat door het punt $(-4, 0)$. Stel bij lijn m een formule op.

12 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + px + 11$.

a Voor welke waarde van p gaat de bijbehorende grafiek door het punt met coördinaten $(9, -7)$?

b En voor welke waarde van p gaat de bijbehorende grafiek door het punt met coördinaten $(-7, 4)$?

c Neem $p = -5$ en los de vergelijking $f(x) = 11$ op.

Vergelijkingen en ongelijkheden

13 Los de vergelijkingen op.

a $6t - 7 = 3t + 14$

e $7(2c + 1) - (2c - 5) = 0$

b $-8a + 23 = 15 - 2a$

f $0,4p = 1,2p + 5,6$

c $1\frac{1}{2}z + 17 = 5\frac{1}{2}z - 20$

g $8(2m - 1) - (m + 7) = 0$

d $8x + 9 - 5x = 12 - x$

h $8(v - 4) + 3(8 - 5v) = 2$

14 Los de vergelijkingen op.

a $12 + 5t^2 = 2t^2 + 39$

d $6b^2 = 24$

b $-3x^2 = -75$

e $-2(p^2 - 16) = 0$

c $7 - 6r^2 = 1$

f $n(6w + 2) = 2(w + 75)$

- 15** Bereken bij elk paar lineaire formules de coördinaten van het snijpunt S van de grafieken.

- a** $y = 2x + 5$ en $y = -5x + 26$
b $y = 15x - 23$ en $y = -x + 57$
c $y = 1,3x + 21$ en $y = 3 - 0,5x$
d $y = 3\frac{1}{2}x - 8$ en $y = 1\frac{1}{2}x + 24$

- 16** Schets in één assenstelsel de grafieken bij de formules.

- a** $y = 4x - 9$
b $y = 20 - 6x$
c $y = 0,5x + 5$

Theorie

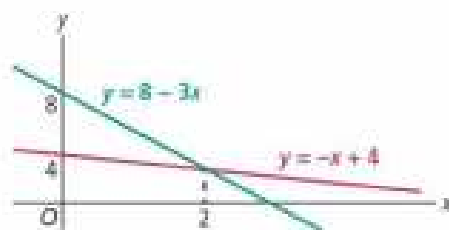
Een ongelijkheid los je op door eerst de bijbehorende vergelijking op te lossen. Schets daarna de bijbehorende grafieken en lees de oplossing van de ongelijkheid af.

Voorbeeld

Los op $8 - 3x > -x + 4$.

Oplossing

$$\begin{aligned} 8 - 3x &= -x + 4 \\ 8 - 2x &= 4 \\ -2x &= -4 \\ x &= 2 \\ y &= 8 - 3 \times 2 = 2 \end{aligned}$$



Links van $x = 2$ ligt de grafiek bij $y = 8 - 3x$ hoger dan de grafiek bij $y = -x + 4$. De oplossing van de ongelijkheid is $x < 2$.

- 17** Los de ongelijkheden op.

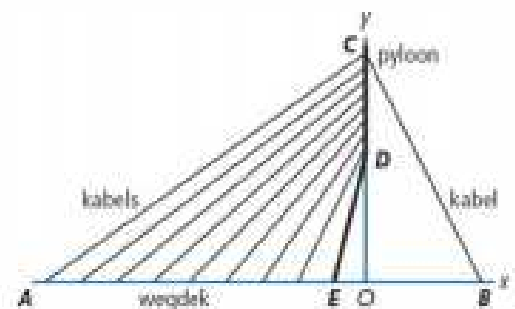
- a** $5x + 2 < -3x + 18$ **e** $6x - 75 < 0$
b $4x + 10 > x + 1$ **f** $-7x - 9 > 19$
c $x - 6 < 10 - x$ **g** $-3x + 14 < -4$
d $-3x + 12 > 3x - 3$ **h** $-x - 9 > -3$

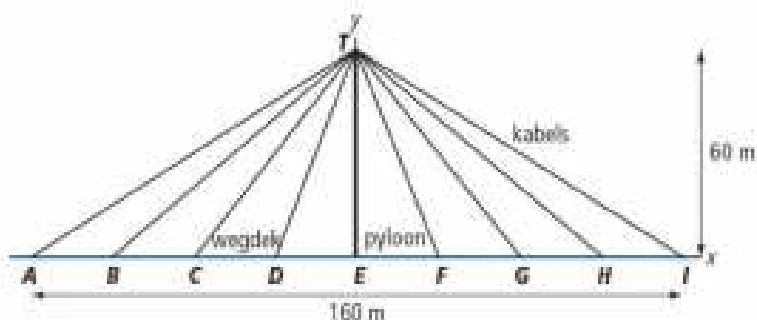


De Erasmusbrug in Rotterdam is een tuibrug waarbij de kabels bevestigd zijn aan een pyloon. Aan zijn bijzondere stalen pyloon heeft de Erasmusbrug zijn bijnaam te danken: 'de Zwaan'.

Bij het ontwerpen van bruggen komt veel wiskunde kijken. In deze verdieping ga je verschillende soorten bruggen bekijken en zelf formules opstellen bij een aantal bruggen.

- 1 De Erasmusbrug is in een assenstelsel getekend. De horizontale as loopt over het wegdek. De oorsprong ligt loodrecht onder de top van de pyloon. In het assenstelsel zijn x en y de afstanden in meters.
 - a Bij de kabel door de punten B en C hoort de formule $y = -1,65x + 132$.
Hoe hoog ligt punt C boven het wegdek?
 - b Bereken hoeveel meter punt B van de oorsprong af ligt.
 - c Bij de kabel door de punten A en C hoort de formule $y = 0,4x + 132$.
Hoe lang is het wegdek van punt A naar punt B ?
 - d De knik van de pyloon ligt op 79 meter hoogte. De voet van de pyloon ligt 40 meter van de oorsprong af.
Laat zien dat bij het onderste deel van de pyloon de formule $y = 1,975x + 79$ hoort.

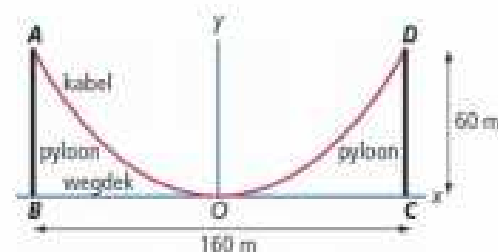




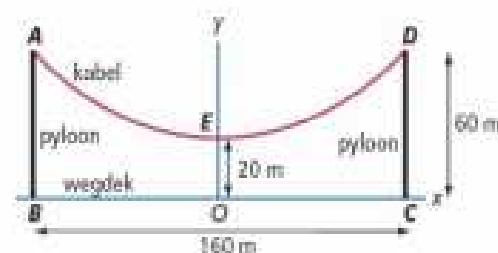
- 2** Je ziet een tekening van een tuibrug die 160 meter breed en 60 meter hoog is. De acht kabels worden op gelijke afstand van elkaar aan het wegdek vastgemaakt. Om formules bij de kabels op te kunnen stellen wordt een assenstelsel met punt E als oorsprong gekozen. De x -as loopt over het wegdek en de y -as loopt over de pyloon.
- Bij de kabels hoort een formule van de vorm $y = ax + 60$.
Leg uit waarom dat zo is.
 - Schrijf van de punten A tot en met I de coördinaten op.
 - Bekijk de kabel door de punten A en T .
Vul de coördinaten van punt A in de formule in en bereken de waarde van a .
 - Stel een formule bij de kabel door punt A op.
 - Gebruik de coördinaten van de punten B tot en met I om formules bij de andere zeven kabels op te stellen.
- 3** Bij het ontwerp voor de tuibrug van opdracht 2 wordt nu een assenstelsel met de oorsprong in punt A gekozen. De horizontale as loopt over het wegdek en de verticale as loopt door punt A , evenwijdig aan de pyloon.
- Welke coördinaten heeft punt A ? En punt E ? En punt T ?
 - Bij de kabels hoort nu een formule van de vorm $y = a(x - 80) + 60$.
Laat zien dat voor elke waarde a de bijbehorende kabel door punt T gaat.
 - Bekijk de kabel door de punten A en T .
Gebruik de coördinaten van punt A om de waarde van a te berekenen en stel een formule bij deze kabel op.
 - Waarom krijg je dezelfde waarde van a als bij opdracht 2?
 - Gebruik de coördinaten van de punten C en I om formules bij de kabels door de punten C en I op te stellen.

Bij hangbruggen is de kabel aan twee pylonen bevestigd. De kabel heeft de vorm van een parabool. Ook hier kun je een formule bij de kabel opstellen als je een aantal afmetingen van de brug kent.

- 4 Een hangbrug is 160 meter breed en 60 meter hoog. De kabel raakt het wegdek midden tussen de pylonen. Dit punt wordt gekozen als de oorsprong in het assenstelsel.
- Parabolen met de top in de oorsprong hebben een formule van de vorm $y = ax^2$.
Geldt voor deze hangbrug $a < 0$ of $a > 0$? Waarom?
 - Schrijf de coördinaten van de punten A , B , C en D op.
 - Vul de coördinaten van punt D in de formule in en bereken de waarde van a . Geef de exacte waarde van a .
 - Stel een formule bij de kabel op.
 - Hoe hoog boven het wegdek hangt de kabel op 20 meter van de oorsprong?

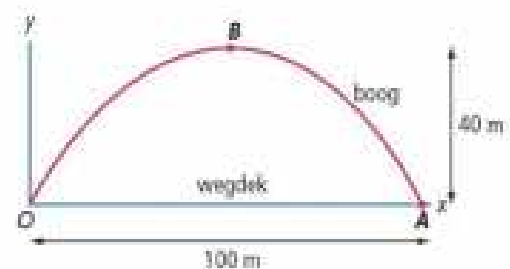


- 5 Het ontwerp van de kabel van de hangbrug bij opdracht 4 wordt iets aangepast. Het laagste punt van de kabel komt 20 meter boven het wegdek. De oorsprong ligt op het wegdek midden tussen de pylonen.
- Leg uit dat een formule bij de kabel dan de vorm $y = ax^2 + 20$ heeft.
 - Leg uit waarom de waarde van a anders zal zijn dan bij opdracht 4.
 - Stel een formule bij de kabel op.
 - Hoe hoog boven het wegdek hangt de kabel op 20 meter afstand van de pyloon?



In Mesopotamië is het idee voor een boogbrug bedacht. Er zijn twee soorten boogbruggen. Bij de ene soort zit de boog van de brug boven het wegdek, bij de andere soort juist eronder. De Waalbrug in Nijmegen en de Sydney Harbour Bridge zijn voorbeelden van boogbruggen.

- 6** Een boogbrug is 100 meter breed en 40 meter hoog. De boog van de brug heeft de vorm van een parabool. Er is een assenstelsel gekozen met de oorsprong aan de linkerkant van de boog. De variabelen x en y zijn in meters.
- Schrijf de coördinaten op van de punten in het assenstelsel waar de boog het wegdek snijdt.
 - Bij de boog van de brug past een formule van de vorm $y = ax(x - 100)$.
Laat met een berekening zien dat voor elke waarde van a de boog door de punten O en A gaat.
 - Gebruik de coördinaten van punt B om de waarde van a te berekenen en stel een formule bij de boog op.



- 7** Het wegdek van de Waalbrug waar de boog boven zit, is 250 meter lang. De boog heeft de vorm van een parabool.
- De boog is in een assenstelsel getekend waarbij de oorsprong aan de linkerkant van de boog is gekozen. De variabelen x en y zijn allebei in meters.
Leg uit waarom een formule bij de boog van de vorm $y = ax(x - 250)$ is.
 - Het hoogste punt van de boog ligt 65 meter boven het wegdek.
Bereken de waarde van a en stel een formule bij de boog op.



- 8** Bij de Sydney Harbour Bridge hebben beide bogen de vorm van een parabool. Je gaat eerst een formule van de vorm $y = ax(x - b)$ opstellen bij de onderste boog. In het assenstelsel begint de onderste boog in de oorsprong op dezelfde hoogte als het wateroppervlak.
- De afstand van punt O naar punt A is 500 meter. Welke waarde van b hoort hierbij?
 - Punt T ligt 120 meter boven het wateroppervlak. Bereken de waarde van a en stel een formule bij de onderste boog op.
 - De bovenste boog begint in punt P op het wegdek. Het wegdek ligt 50 meter boven het wateroppervlak. Punt V ligt 125 meter boven het wateroppervlak. Stel een formule van de vorm $y = ax(x - b) + 50$ op bij de bovenste boog.





Vlakke figuren

3

In dit hoofdstuk

In klas 1 ben je symmetrische figuren tegengekomen. Je hebt geleerd wat spiegelsymmetrie en draaisymmetrie is. Ook heb je geleerd hoe je hoeken moet berekenen.

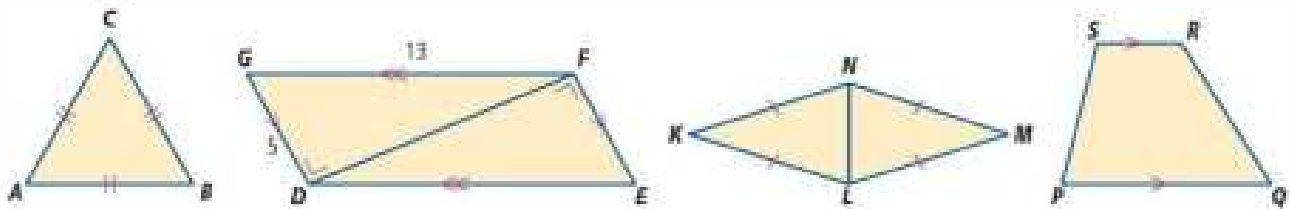
In dit hoofdstuk leer je hoeken berekenen met behulp van zogenaamde *F*-hoeken en *Z*-hoeken.

Bij het zien van een aantal voorbeelden kun je een vermoeden krijgen. Je leert hoe je de juistheid van zo'n vermoeden kunt aantonen.

Ook leer je hoe je figuren spiegelt in een lijn en in een punt en wat dat te maken heeft met gelijkvormigheid.

In klas 2 heb je geleerd wanneer figuren gelijkvormig zijn. In dit hoofdstuk is er aandacht voor de gelijkvormigheid bij driehoeken. Je leert hoe je aantoont dat twee driehoeken gelijkvormig zijn en je leert hoe je een lengte bij gelijkvormige driehoeken berekent.



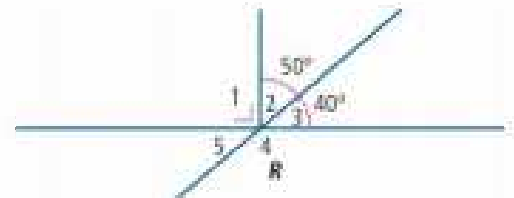


- V1
- Van driehoek ABC zijn de drie zijden even lang.
Hoe noem je zo'n driehoek?
 - Welke van de figuren is een trapezium?
 - Van vierhoek $DEFG$ is $DE \parallel FG$ en $DG \parallel EF$.
Hoe noem je zo'n vierhoek?
 - Van vierhoek $DEFG$ is $DG = 5$, $FG = 13$ en $DG \perp DF$.
Bereken met de stelling van Pythagoras de lengte van de diagonaal DF .
 - Wat voor een bijzondere driehoek is driehoek DFG ?
 - Van vierhoek $KLMN$ zijn alle zijden even lang.
Wat voor een bijzondere vierhoek is vierhoek $KLMN$?
 - En wat voor een bijzondere driehoek is driehoek KLN ?

$l \parallel m$ betekent dat lijn l evenwijdig is aan lijn m .

$m \perp n$ betekent dat lijn m loodrecht staat op lijn n .

- V2
- Hoeveel graden zijn $\angle R_1$, $\angle R_2$, $\angle R_3$, $\angle R_4$ en $\angle R_5$ samen?
 - Waarom is $\angle R_5 = 40^\circ$?
 - En waarom is $\angle R_4 = 140^\circ$?

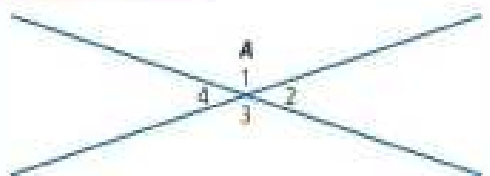


Theorie

Als de benen van een hoek in elkaars verlengde liggen, dan spreek je van een **gestrekte hoek**. Een gestrekte hoek is 180° . Twee gestrekte hoeken samen vormen een **volle hoek**. Een volle hoek is 360° .

Als twee lijnen elkaar snijden, ontstaan er vier hoeken. De twee tegenover elkaar liggende hoeken noem je **overstaande hoeken**. Overstaande hoeken zijn even groot. Met deze eigenschappen kun je hoeken berekenen. Bij het berekenen van hoeken mag je de hoeken niet opmeten.

Voorbeeld

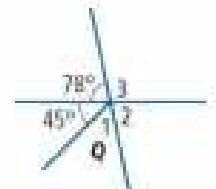
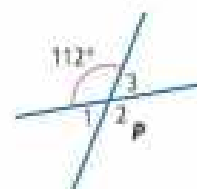


$$\angle A_1 + \angle A_2 = 180^\circ$$

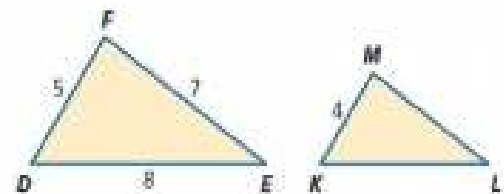
$$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 = 360^\circ$$

$\angle A_1$ en $\angle A_3$ zijn overstaande hoeken.

- V3
- Bereken $\angle P_1$, $\angle P_2$ en $\angle P_3$.
 - Bereken $\angle Q_1$ en $\angle Q_2$.



- V4 De driehoeken DEF en KLM zijn gelijkvormig.
- Schrijf de overeenkomstige hoeken op.
 - Schrijf ook de overeenkomstige zijden op.
 - Driehoek KLM is een vergroting van driehoek DEF . Bereken de factor die bij deze vergroting hoort.
 - Bereken de lengte van de zijden KL en LM .



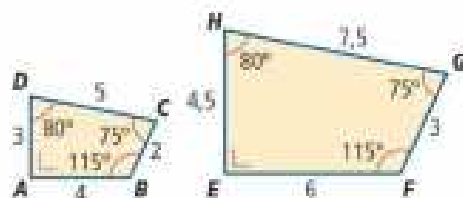
Aanpak

Hoe ga je na of twee figuren gelijkvormig zijn?

- Ga na of de overeenkomstige hoeken gelijk zijn. Als dat niet zo is, dan zijn de figuren niet gelijkvormig.
- Maak een tabel met de lengte van de zijden. Zet de overeenkomstige zijden boven elkaar.
- Ga na of de tabel een verhoudingstabel is. Als dat zo is, dan zijn de figuren gelijkvormig.

Voorbeeld

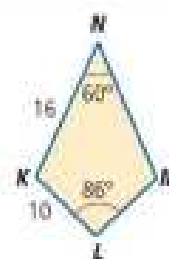
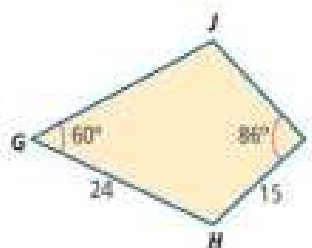
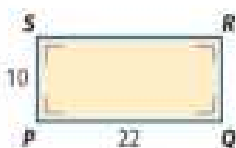
Zijn de vierhoeken $ABCD$ en $EFGH$ gelijkvormig?



Oplossing

- $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle F$, $\angle C = \angle G$ en $\angle D = \angle H$, dus de overeenkomstige hoeken zijn gelijk.
- | | | | | |
|---------------|----------|----------|------------|------------|
| zijden $ABCD$ | $AB = 4$ | $BC = 2$ | $CD = 5$ | $AD = 3$ |
| zijden $EFGH$ | $EF = 6$ | $FG = 3$ | $GH = 7,5$ | $EH = 4,5$ |
- De tabel is een verhoudingstabel, want $6 : 4 = 3 : 2 = 7,5 : 5 = 4,5 : 3 = 1,5$.
De vierhoeken $ABCD$ en $EFGH$ zijn gelijkvormig.

- V5
- Zijn de rechthoeken $PQRS$ en $TUVW$ gelijkvormig?
 - De vierhoeken $GHIJ$ en $KLMN$ zijn vliegers. Zijn deze vliegers gelijkvormig?



Je leert • hoe je met F-hoeken en Z-hoeken werkt

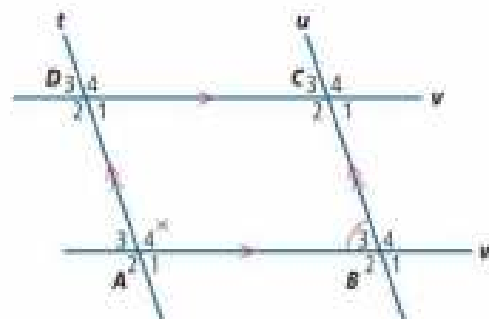
Leerroutes • ondersteunend: 1–2–03–4–05–5–6
• doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7
• uitdagend: 1–2–3–4–5–6–U1

Mevrouw Mooij heeft in haar tuin twee plantenrekjes staan.

- Welke bijzondere vierhoeken worden gevormd door de latjes?
- Wat kun je zeggen over de hoeken die de latjes met elkaar maken?



- 1** In de figuur is $t \parallel u$ en $v \parallel w$.
- W**
- Waarom is vierhoek $ABCD$ een parallellogram?
 - Welke hoek in parallellogram $ABCD$ is gelijk aan $\angle A_4$?
 - En welke hoek in parallellogram $ABCD$ is gelijk aan $\angle B_3$?
 - Zet in de figuur een kruisje in alle hoeken die even groot zijn als $\angle A_4$.
 - En zet een boogje in alle hoeken die even groot zijn als $\angle B_3$.



Theorie

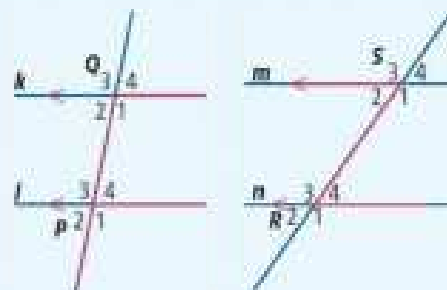
Als je evenwijdige lijnen snijdt met een andere lijn, dan ontstaan er gelijke hoeken.

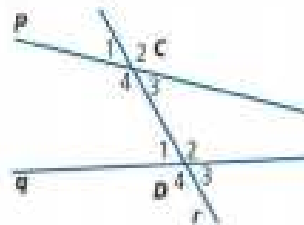
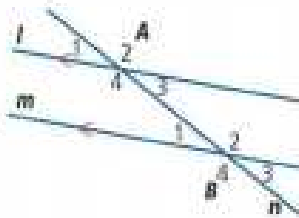
In de linker figuur is $k \parallel l$, dus $\angle P_1 = \angle Q_1$.

Hoek P_1 en hoek Q_1 heten **F-hoeken**. Omgekeerd geldt dat als $\angle P_1 = \angle Q_1$, dan zijn de lijnen k en l evenwijdig.

In de rechter figuur is $m \parallel n$, dus $\angle R_4 = \angle S_2$.

Hoek R_4 en hoek S_2 heten **Z-hoeken**. Omgekeerd geldt dat als $\angle R_4 = \angle S_2$, dan zijn de lijnen m en n evenwijdig.

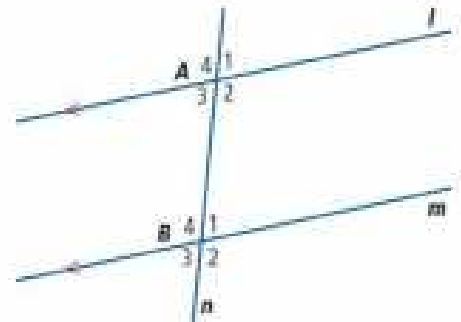




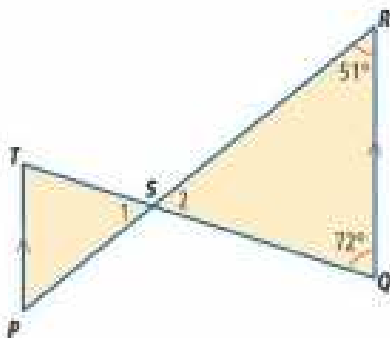
- 2 In de linker figuur zijn de lijnen l en m evenwijdig.
- Vul F -hoeken of Z -hoeken in.
 $\angle A_1 = \angle B_1$, want het zijn ...
 $\angle A_3 = \angle B_1$, want het zijn ...
 - Waarom is $\angle A_1$ gelijk aan $\angle B_3$?
 - Welke hoeken in de linker figuur zijn gelijk aan $\angle A_2$?
 - Waarom zitten er in de rechter figuur geen F -hoeken en geen Z -hoeken?

Ondersteunende route → maak opdracht 03

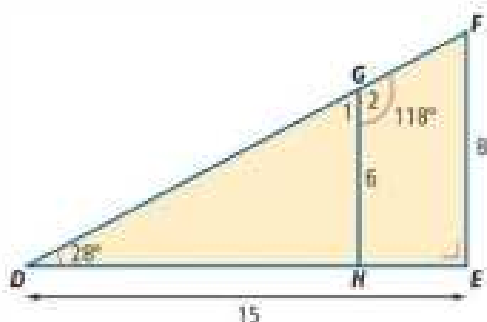
- 3 De evenwijdige lijnen l en m worden gesneden door lijn n .
- Bereken alle hoeken in de figuur als $\angle A_1 = 72^\circ$.
 - Hoeveel graden zijn $\angle A_2$ en $\angle B_1$ dan samen?
 - Je draait lijn n iets, terwijl de lijnen l en m evenwijdig aan elkaar blijven. Je draait lijn n zo dat $\angle A_1$ nu 50° wordt.
Hoeveel graden zijn $\angle A_2$ en $\angle B_1$ nu samen?
 - Neem ten slotte $\angle A_1 = a^\circ$.
Hoeveel graden is $\angle A_2$ dan? En hoeveel graden is $\angle B_1$ dan?



- 4 In de figuur is $PT \parallel QR$, $\angle Q = 72^\circ$ en $\angle R = 51^\circ$.
Bereken $\angle P$, $\angle T$, $\angle S_1$ en $\angle S_2$.

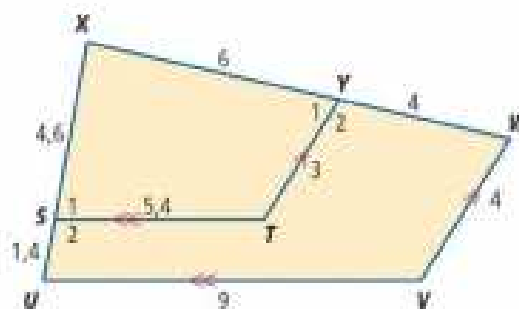


Ondersteunende route → maak opdracht D5

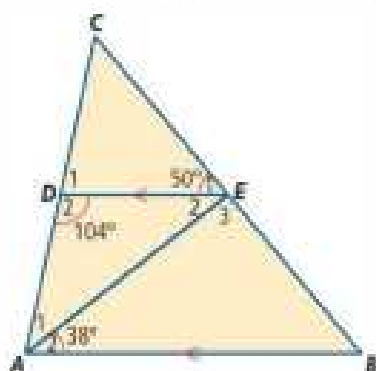


- 5 In de figuur is $\angle D = 28^\circ$, $\angle E = 90^\circ$ en $\angle G_2 = 118^\circ$.
- Laat met een berekening zien dat $\angle G_1 = \angle F$.
 - Waarom is vierhoek $EFGH$ een trapezium?
 - Bereken de lengte van zijde DF .
 - Driehoek DGH is gelijkvormig met driehoek DEF . Bereken de lengte van de lijnstukken FG en EH .

- 6 In de figuur is $ST \parallel UV$ en $TY \parallel VW$.
- Waarom zijn $\angle Y_1$ en $\angle W$ even groot?
 - Zijn de vierhoeken $UVWX$ en $STYX$ gelijkvormig? Verklaar je antwoord.

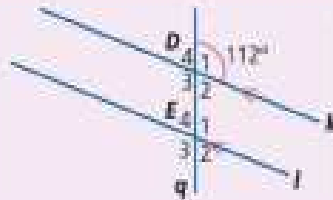
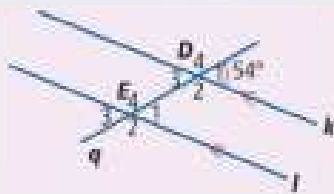


- 7 In de figuur is $AB \parallel DE$, $\angle A_2 = 38^\circ$, $\angle E_1 = 50^\circ$ en $\angle D_2 = 104^\circ$.
Bereken hoe groot de overige hoeken zijn.



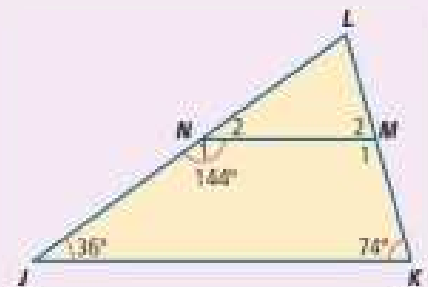
Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten



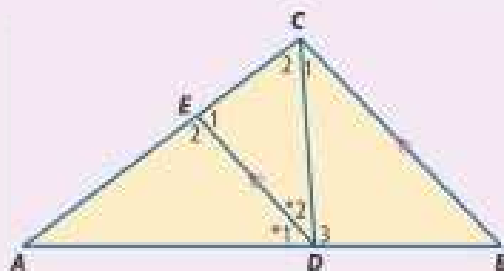
- 03 De evenwijdige lijnen k en l worden gesneden door lijn q .
- Waarom is in de linker figuur $\angle D_1 = \angle D_3$?
En waarom is in de linker figuur $\angle D_1 = \angle E_1$?
 - Bereken alle hoeken in de linker figuur.
 - Hoeveel graden zijn in de linker figuur $\angle D_2$ en $\angle E_1$ samen?
 - In de rechter figuur is lijn q iets gedraaid, zodat $\angle D_1$ nu 112° wordt.
Hoeveel graden zijn $\angle D_2$ en $\angle E_1$ nu samen?
 - Je draait lijn q opnieuw iets, zodat $\angle D_1 = a^\circ$.
Leg uit dat dan geldt $\angle D_2 = 180^\circ - a^\circ$.
 - Hoeveel graden is $\angle E_1$ dan?

- 05 Van driehoek JKL is $\angle J = 36^\circ$, $\angle K = 74^\circ$ en $\angle N_1 = 144^\circ$.
- Laat met een berekening zien dat $\angle J = \angle N_2$.
 - Welke lijnstukken lopen evenwijdig? Waarom?
 - Waarom is vierhoek $JKMN$ een trapezium?
 - Vul in.
 $\angle K = \angle M_2$, want dit zijn ...
 $\angle M_2 = \dots^\circ$
 - Bereken hoe groot $\angle M_1$ is.



Uitdagende opdrachten

- U1 Van driehoek ABC is $\angle D_1 = \angle D_2$ en $BC \parallel DE$.
Toon aan dat driehoek BCD een gelijkbenige driehoek is.

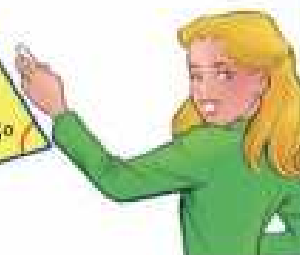


Je leert • hoe je met vermoeden, bewijs en stelling redeneert

Leerroutes • ondersteunend: 8–09–9–10–011
 • doorlopend: 8–9–10–11–12
 • uitdagend: 8–9–11–12–U2

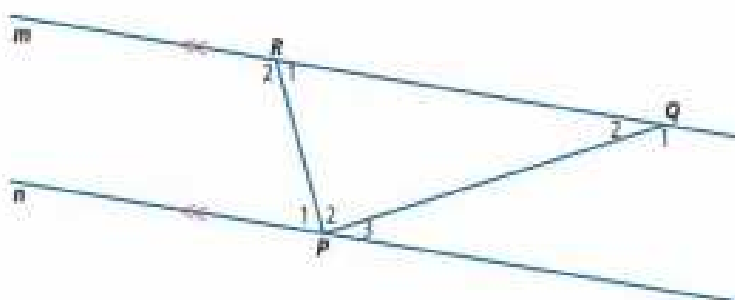
Charlotte heeft een vijfhoek getekend.

- Hoe groot zijn de hoeken van haar vijfhoek samen?
- Hoe groot verwacht je dat de hoeken van een zeshoek samen zijn?



- 8** In klas 1 heb je geleerd dat de som van de drie hoeken van een driehoek 180° is. Door het meten van hoeken heb je dit vastgesteld. Je gaat zonder te meten aantonen dat dit geldt voor elke willekeurige driehoek.

De lijnen m en n lopen evenwijdig.



- Waarom geldt dat $\angle P_1 = \angle R_1$ en $\angle P_3 = \angle Q_2$?
- Hoe groot zijn $\angle P_1$, $\angle P_2$ en $\angle P_3$ samen?
- Leg uit dat je uit de opdrachten a en b de conclusie mag trekken dat $\angle P_2 + \angle Q_2 + \angle R_1 = 180^\circ$.

Theorie

Op basis van een tekening of van een aantal voorbeelden kun je een **vermoeden** krijgen. Met behulp van eigenschappen en een sluitende redenering kun je proberen om de juistheid van dit vermoeden aan te tonen. Het aantonen van de juistheid van een vermoeden noem je een **bewijs**. Daarna kun je dit vermoeden een **stelling** noemen. Een bekende stelling is: De som van de hoeken van een driehoek is 180° .

Voorbeeld

In de figuur is het vermoeden dat

$$\angle A_1 = \angle A_3 \text{ en } \angle A_2 = \angle A_4.$$

Bewijs de stelling dat de overstaande hoeken even groot zijn.

Bewijs

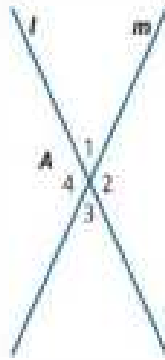
$$\angle A_1 + \angle A_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek),}$$

$$\angle A_3 + \angle A_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek) en}$$

$$\angle A_1 + \angle A_4 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek), dus}$$

$$\angle A_1 = \angle A_3 \text{ en } \angle A_2 = \angle A_4.$$

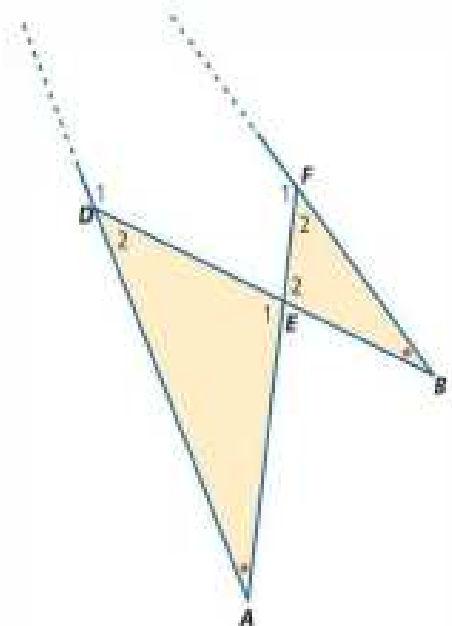
De overstaande hoeken zijn even groot.



Ondersteunende route → maak opdracht 09

9 In de figuur is $\angle A = \angle B$.

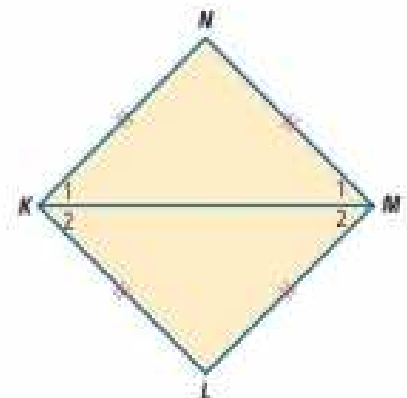
- Meet $\angle D_1$ en $\angle F_1$.
- Welk vermoeden heb je?
- Volgens welke stelling is $\angle E_1 = \angle E_2$?
- Vigo is op een blaadje begonnen het vermoeden dat hij bij opdracht b kreeg te bewijzen.
Leg uit dat uit de eerste vier regels volgt dat $\angle D_2 = \angle F_2$ en vul het blaadje verder in.



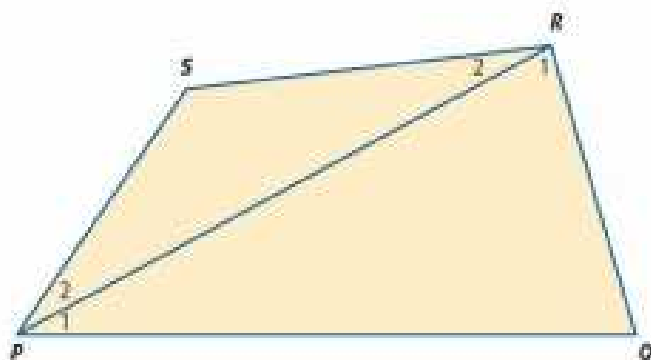
					Vigo
●	$\angle A = \angle B$	(gegeven)			
●	$\angle E_1 = \angle E_2$	(overstaande hoeken)			
●	$\angle A + \angle E_1 + \angle D_2 = \dots^\circ$	(...) en			
●	$\angle B + \angle E_2 + \angle F_2 = \dots^\circ$	(...), dus			
●	$\angle D_2 = \dots$				
●	$\angle D_1 + \angle D_2 = \dots^\circ$	(...) en			
●	$\angle F_1 + \angle F_2 = \dots^\circ$	(...), dus			
●	$\angle D_1 = \dots$				

10 In deze opdracht ga je de stelling bewijzen dat de basishoeken van een gelijkbenige driehoek gelijk zijn.
Vierhoek $KLMN$ is een ruit.

- Uit welke eigenschap van een ruit volgt dat $\angle K_1 = \angle M_2$?
- Bewijs nu dat $\angle K_1 = \angle M_1$.

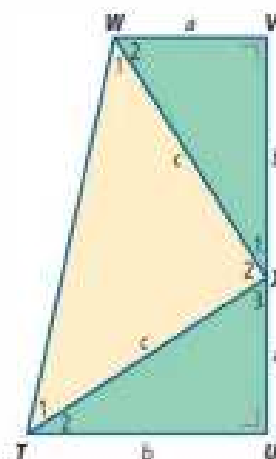


Ondersteunende route → maak opdracht D11



- 11** Vierhoek $PQRS$ is verdeeld in twee driehoeken. Bij opdracht 8 heb je de stelling bewezen dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is.
- Gebruik deze stelling en vierhoek $PQRS$ om te bewijzen dat de som van de hoeken van een vierhoek 360° is.
 - Teken nu een vijfhoek $PQRST$ en verdeel deze in drie driehoeken.
 - Bewijs dat de som van de hoeken van een vijfhoek 540° is.

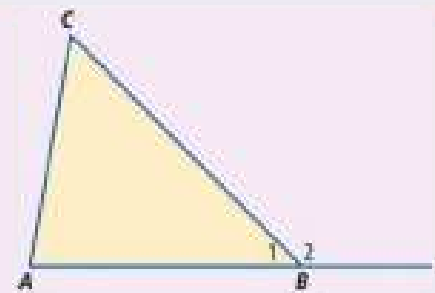
- 12** In deze opdracht ga je met behulp van de formule voor de oppervlakte van een trapezium de stelling van Pythagoras bewijzen.
- Van trapezium $TUVW$ zijn driehoek TUX en driehoek XVW even groot.
- Bewijs dat $\angle X_2 = 90^\circ$.
 - Toon aan dat je de oppervlakte A van trapezium $TUVW$ kunt berekenen met de formule $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c^2$.
 - Voor de oppervlakte A van trapezium $TUVW$ geldt ook $A = \frac{1}{2} \cdot UV \cdot (TU + VW)$, oftewel $A = \frac{1}{2} \cdot (a + b)(a + b)$. Stel deze formule gelijk aan de formule van opdracht b en bewijs daarmee de stelling van Pythagoras.



Uitdagende route → maak opdracht U2

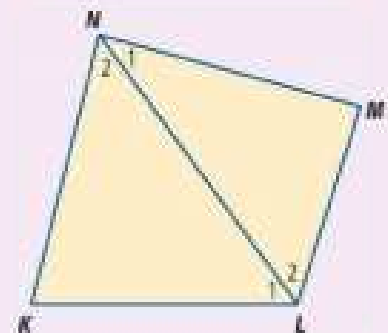
Ondersteunende opdrachten

- 09
- Meet $\angle A$, $\angle B_1$ en $\angle C$.
 - Hoeveel is $\angle A + \angle C$?
 - Welk vermoeden heb je?
 - Volgens welke stelling is $\angle A + \angle B_1 + \angle C = 180^\circ$?
 - Waarom is $\angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ$?
 - Vul het blaadje van Vigo verder in om het vermoeden dat je bij opdracht c kreeg te bewijzen.



☐	$\angle A + \angle B_1 + \angle C = 180^\circ$ (som van de hoeken) en	
☐	$\angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ$ (gestrekte hoek), dus	
☐	$\angle A + \angle C = \dots$	
☐		Vigo

- 011
- Vierhoek $KLMN$ is verdeeld in twee driehoeken. Je gaat bewijzen dat de som van de hoeken van een vierhoek 360° is.
- Hoe groot zijn $\angle K$, $\angle L_1$ en $\angle N_2$ samen? Waarom?
 - En hoe groot zijn $\angle L_2$, $\angle M$ en $\angle N_1$ samen? Waarom?
 - Vigo is op een blaadje met het bewijs begonnen.
Leg uit dat uit de eerste drie regels volgt dat $\angle K$, $\angle L_1$, $\angle M$ en $\angle N_1$ samen 360° zijn en vul het blaadje verder in.

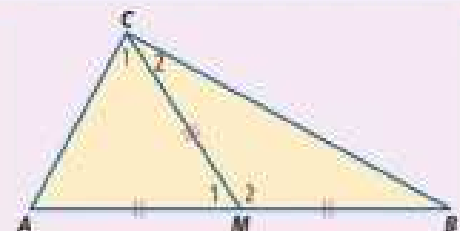


☐	$\angle K = \angle L_1 + \angle N_2 = 180^\circ$ (som van de hoeken) en	
☐	$\angle L_2 + \angle M + \angle N_1 = \dots^\circ$ (...), dus	
☐	$\angle K + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots = \dots^\circ$	
☐	$\dots + \dots + \dots + \dots = \dots^\circ$	Vigo

- Teken nu een vijfhoek $KLMNO$ en verdeel deze in drie driehoeken.
- Bewijs dat de som van de hoeken van een vijfhoek 540° is.

Uitdagende opdrachten

- U2
- Van $\triangle ABC$ ligt het punt M op zijde AB , zodat $AM = BM = CM$.
Bewijs dat $\angle C_{12} = 90^\circ$.



Je leert

- hoe je figuren in een lijn en in een punt spiegelt
- wat een gelijkbenig trapezium is

Leerroutes

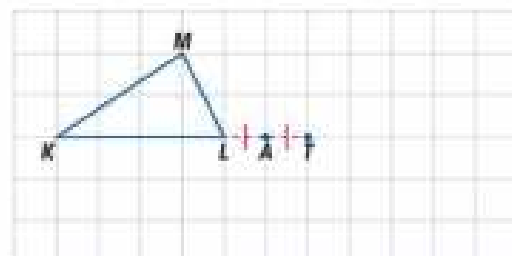
- ondersteunend: 13–14–15–16–017–17–18–019
- doorlopend: 13–14–15–16–17–18–19–20
- uitdagend: 13–14–15–16–17–19–20–U3

Elbert vouwt een blauw blaadje dubbel en knipt er drie figuren uit. Vervolgens vouwt hij het blauwe blaadje open. Elbert vouwt ook een geel blaadje dubbel, knipt er een driehoek uit en vouwt het gele blaadje open.

- Welke bijzondere figuren ontstaan er op deze manier in het blauwe blaadje?
- Zijn de twee uitgeknipte driehoeken op het gele blaadje gelijkvormig? Waarom?



13 Op roosterpapier is een begin gemaakt met het spiegelen van driehoek KLM in punt A . Hierbij is punt T het spiegelbeeld van punt L .



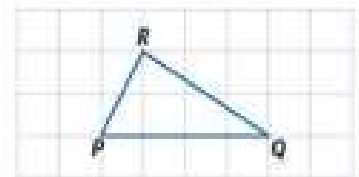
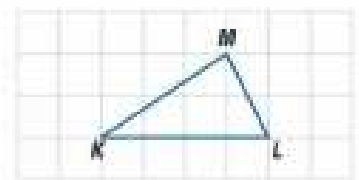
- Spiegel punt K en punt M in punt A . Het spiegelbeeld van punt K is punt V en het spiegelbeeld van punt M is punt U .
- Teken driehoek TUV .
- Meet hoeveel mm de zijden van driehoek KLM en driehoek TUV zijn.
- Meet de hoeken van driehoek KLM en driehoek TUV .
- Kun je driehoek TUV in dezelfde stand draaien als driehoek KLM ?
- Past driehoek TUV precies op driehoek KLM ?

14 Op roosterpapier is nu een begin gemaakt met het spiegelen van driehoek KLM in lijn s . Hierbij is punt R het spiegelbeeld van punt M .



- Spiegel punt K en punt L in lijn s . Het spiegelbeeld van punt K is punt Q en het spiegelbeeld van punt L is punt P .
- Teken driehoek PQR .
- Meet hoeveel mm de zijden van driehoek KLM en driehoek PQR zijn.
- Meet de hoeken van driehoek KLM en driehoek PQR .
- Kun je driehoek PQR in dezelfde stand draaien als driehoek KLM ?

- 15** Roy denkt dat driehoek KLM en driehoek PQR uit opdracht 14 niet gelijkvormig zijn, omdat je ze niet in dezelfde stand kunt draaien. Thom denkt dat driehoek KLM en driehoek PQR wel gelijkvormig zijn en wil dit aantonen.
- Teken op een los blaadje roosterpapier driehoek KLM en driehoek PQR uit opdracht 14. Knip de twee driehoeken uit.
 - Kun je de twee driehoeken nu in dezelfde stand naast elkaar leggen?
 - Past driehoek PQR precies op driehoek KLM ? Zo ja, met welke factor moet je de zijden van driehoek KLM dan vermenigvuldigen om die van driehoek PQR te krijgen?
 - Heeft Roy of heeft Thom gelijk?

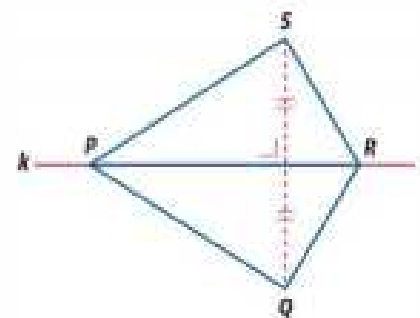


Theorie

Figuren kun je **spiegelen in een lijn** of **spiegelen in een punt**. De figuren die ontstaan zijn gelijkvormig aan de oorspronkelijke figuur.

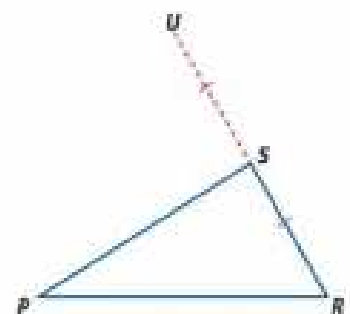
Soms moet je een figuur eerst omkeren om hem in dezelfde stand te kunnen tekenen als de oorspronkelijke figuur.

- 16** Driehoek PRS wordt in lijn k door de punten P en R gespiegeld. Het spiegelbeeld van punt S in lijn k is punt Q .
- Waarom ligt het spiegelbeeld van punt P op punt P ?
 - Waarom is vierhoek $PQRS$ een vlieger?
 - Teken driehoek VWX met $VW = 5$ cm, $\angle V = 80^\circ$ en $\angle W = 45^\circ$.
 - Spiegel driehoek VWX in de lijn door de punten V en X .
 - Is de vierhoek die zo ontstaat ook een vlieger? Verklaar je antwoord.

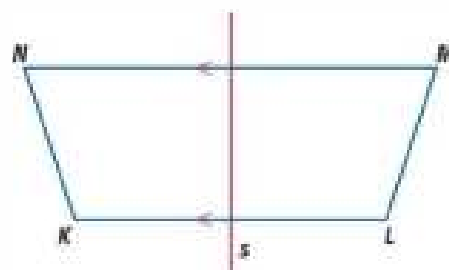


Ondersteunende route → maak opdracht 017

- 17** Driehoek PRS wordt nu in punt S gespiegeld. Het spiegelbeeld van punt R is punt U .
- Spiegel punt P in punt S . Noem het spiegelbeeld punt T .
 - Teken vierhoek $PRTU$.
 - Wat voor een bijzondere vierhoek is vierhoek $PRTU$?



- 18** Vierhoek $KLMN$ is een trapezium dat lijnsymmetrisch is in lijn s .
- Welke zijden van het trapezium zijn even lang?
 - En welke hoeken zijn even groot?
 - Teken een trapezium dat niet lijnsymmetrisch is.



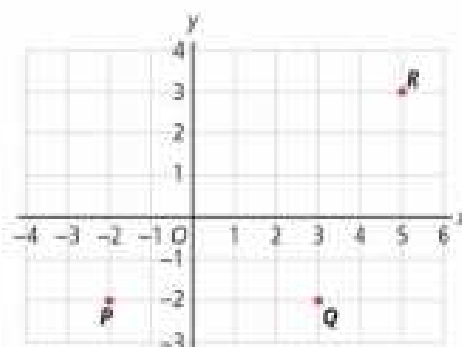
Theorie

Een trapezium dat lijnsymmetrisch is, wordt een **gelijkbenig trapezium** genoemd.

Ondersteunende route → maak opdracht O19

- 19**
- Teken een assenstelsel met op de horizontale as de getallen -5 tot en met 5 en op de verticale as de getallen -2 tot en met 6 . Teken in het assenstelsel het lijnstuk AB met $A(4, 2)$ en $B(1, 5)$. Teken ook het punt $S(2, 2)$.
 - Spiegel lijnstuk AB in punt S . Het spiegelbeeld van punt A is punt C en het spiegelbeeld van punt B is punt D .
 - Teken vierhoek $ABCD$.
 - Wat voor een bijzondere vierhoek is vierhoek $ABCD$?
 - Spiegel punt A en punt B in de verticale as. Het spiegelbeeld van punt A is punt E en het spiegelbeeld van punt B is punt F .
 - Teken vierhoek $EABF$.
 - Wat voor een bijzondere vierhoek is vierhoek $EABF$?

- 20** In het assenstelsel zijn de punten $P(-2, -2)$, $Q(3, -2)$ en $R(5, 3)$ getekend. De punten P , Q en R zijn de hoekpunten van trapezium $PQRS$.
Er zijn twee lijnen waarop punt S kan liggen.
Geef van beide lijnen de formules.



Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten



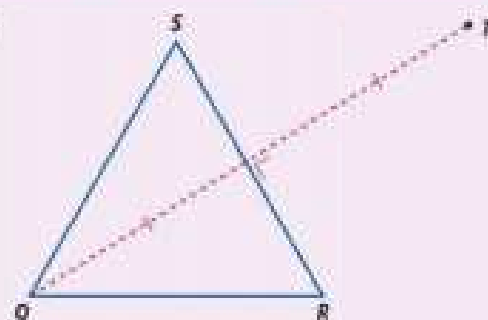
- 017** Het spiegelbeeld van punt A in punt S is punt X .
- W**
- Wat weet je van de lengte van de lijnstukken AS en SX ?
 - Meet de afstand van punt B tot punt S en spiegel dan punt B in punt S . Noem het spiegelbeeld punt Y .
 - Spiegel ook punt C in punt S en noem het spiegelbeeld punt Z .
 - Teken driehoek XYZ .
 - Is driehoek XYZ gelijkvormig met driehoek ABC ?

- 019** In het bovenste assenstelsel zijn de punten K , L , M en T getekend. Het spiegelbeeld van punt K in punt T is punt M .
- W**
- Spiegel punt L ook in punt T . Noem het spiegelbeeld punt N .
 - Teken vierhoek $KLMN$.
 - Waarom is vierhoek $KLMN$ een parallellogram?
 - In het onderste assenstelsel zijn de punten P , Q en S getekend. Het spiegelbeeld van punt P in de verticale as is punt S . Spiegel punt Q ook in de verticale as. Noem het spiegelbeeld punt R .
 - Teken vierhoek $PQRS$.
 - Wat voor een bijzondere vierhoek is vierhoek $PQRS$?



Uitdagende opdrachten

- U3** Driehoek QRS is een gelijkzijdige driehoek. Punt T is het spiegelbeeld van punt Q in de lijn RS . Punt U is het spiegelbeeld van punt R in de lijn QS en punt V is het spiegelbeeld van punt S in de lijn QR .
- W**
- Teken de punten U en V en teken driehoek TUV .
 - Bewijs dat driehoek TUV ook een gelijkzijdige driehoek is.



Je leert

- hoe je aantoonst dat twee driehoeken gelijkvormig zijn
- wat het gelijkvormigheidsteken is

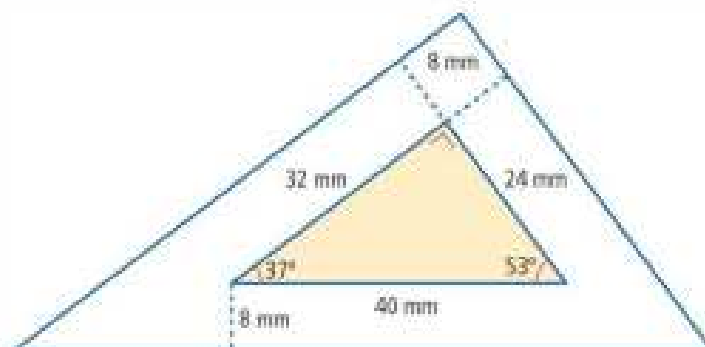
Leerroutes

- ondersteunend: 21–22–23–024–24–025–26
- doorlopend: 21–22–23–24–25–26–27
- uitdagend: 21–22–24–25–26–27–U4

De gele driehoek heeft hoeken van 37° , 53° en 90° en zijden van 24 mm, 32 mm en 40 mm. Ineke heeft een grote driehoek om de gele driehoek getekend.

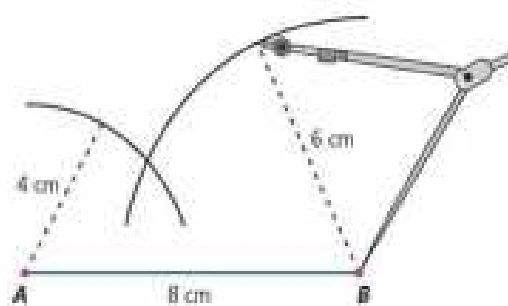
De zijden van de grote driehoek liggen overal 8 mm van de zijden van de gele driehoek af.

- Zijn de grote driehoek en de gele driehoek gelijkvormig? Waarom?



- 21** Van driehoek ABC is $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm en $AC = 4$ cm. In de tekening zie je hoe je driehoek ABC kunt construeren.

- Waarom ligt punt C op het snijpunt van de twee cirkelbogen?
- Construeer driehoek ABC op ware grootte.
- Meet de hoeken van driehoek ABC .
- Construeer op dezelfde manier driehoek PQR met $PQ = 10$ cm, $QR = 7,5$ cm en $PR = 5$ cm.
- Meet de hoeken van driehoek PQR .
- Marsha vermoedt dat de driehoeken ABC en PQR gelijkvormig zijn. Ben jij het eens met haar vermoeden? Waarom?



- 22**
- Van driehoek DEF is $DE = 4$ cm, $\angle D = 50^\circ$ en $\angle E = 70^\circ$. Teken driehoek DEF .
 - Teken ook driehoek KLM met $KL = 6$ cm, $\angle K = 50^\circ$ en $\angle L = 70^\circ$.
 - Meet de zijden van de driehoeken DEF en KLM .
 - Hoe groot is $\angle F$? En hoe groot is $\angle M$?
 - Welk vermoeden heb je?

Theorie

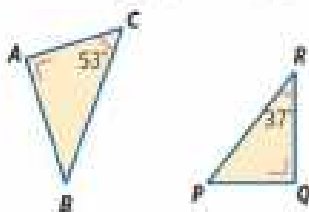
Om aan te tonen dat twee driehoeken **gelijkvormig** zijn, is het voldoende als je kunt aantonen dat aan één van de twee volgende voorwaarden voldaan is.

- > De overeenkomstige hoeken zijn gelijk.
- > De overeenkomstige zijden zijn met dezelfde factor vermenigvuldigd.

Als twee driehoeken gelijkvormig zijn, dan gebruik je vaak het **gelijkvormigheidssteken** $\sim$. Je moet daarbij op de volgorde van de letters van de overeenkomstige hoeken letten. De notatie $\triangle DEF \sim \triangle TSU$ geeft aan dat $\angle D = \angle T$, $\angle E = \angle S$ en $\angle F = \angle U$.

Voorbeeld 1

Is $\triangle ABC$ gelijkvormig met $\triangle PQR$?

**Oplossing**

$$\angle B = 180^\circ - 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$$

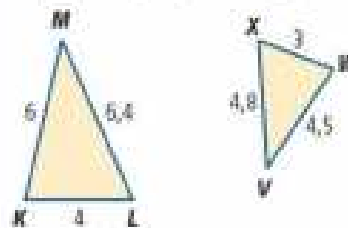
$$\angle P = 180^\circ - 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$$

Voor de hoeken geldt $\angle A = \angle Q$, $\angle B = \angle R$ en $\angle C = \angle P$, dus de overeenkomstige hoeken zijn gelijk.

Ja, $\triangle ABC$ is gelijkvormig met $\triangle PQR$ en er geldt $\triangle ABC \sim \triangle QRP$.

Voorbeeld 2

Is $\triangle KLM$ gelijkvormig met $\triangle VWX$?

**Oplossing**

zijden $\triangle KLM$	$KL = 4$	$LM = 6,4$	$KM = 6$
zijden $\triangle VWX$	$WX = 3$	$VX = 4,8$	$VW = 4,5$

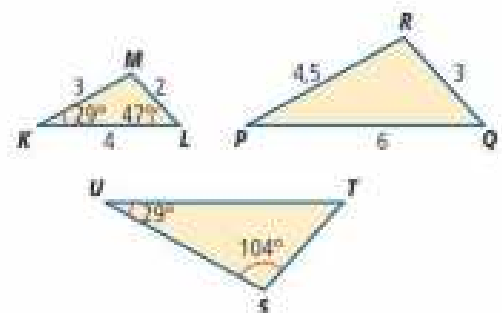
De overeenkomstige zijden zijn met de factor $3 : 4 = 4,8 : 6,4 = 4,5 : 6 = 0,75$ vermenigvuldigd.

Ja, $\triangle KLM$ is gelijkvormig met $\triangle VWK$ en er geldt $\triangle KLM \sim \triangle WXP$.

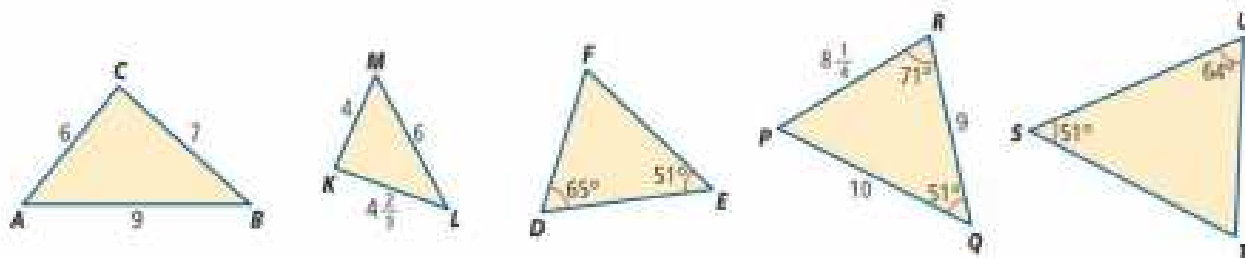
- 23 a** Vul de tabel bij $\triangle KLM$ en $\triangle PQR$ in.

zijden $\triangle KLM$	$KL = \dots$	$LM = \dots$	$KM = \dots$
zijden $\triangle PQR$	$\dots = \dots$	$\dots = \dots$	$\dots = \dots$

- b** Waarom is $\triangle KLM$ gelijkvormig met $\triangle PQR$?
c Hoe groot is $\angle M$? En hoe groot is $\angle T$?
d Toon aan dat $\triangle KLM$ gelijkvormig is met $\triangle STU$.



Ondersteunende route → maak opdracht D24

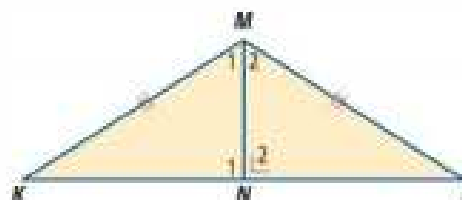


- 24**
- Toon aan dat $\triangle ABC$ gelijkvormig is met $\triangle KLM$.
 - Waarom is de notatie $\triangle ABC \sim \triangle KLM$ niet juist?
 - Vul in: $\triangle ABC \sim \triangle \dots$
 - Is $\triangle PQR$ ook gelijkvormig met $\triangle ABC$? Verklaar je antwoord.
 - Leg uit welke driehoek gelijkvormig is met $\triangle DEF$. Noteer je antwoord als $\triangle DEF \sim \triangle \dots$

Ondersteunende route → maak opdracht D25

- 25** De gelijkbenige driehoek KLM is in twee driehoeken verdeeld.

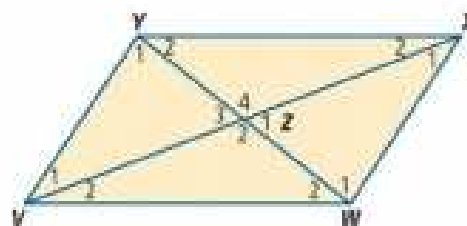
- Bewijs dat $\triangle KNM \sim \triangle LNM$.
- Met welke factor zijn de overeenkomstige zijden vermenigvuldigd?



- 26**
- Teken twee gelijkbenige driehoeken die niet gelijkvormig zijn.
 - Teken er ook twee die wel gelijkvormig zijn.
 - Waarvoor moest je zorgen om de driehoeken uit opdracht b gelijkvormig te laten zijn?
 - Zijn twee gelijkzijdige driehoeken altijd gelijkvormig? Licht je antwoord toe.

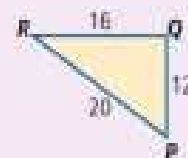
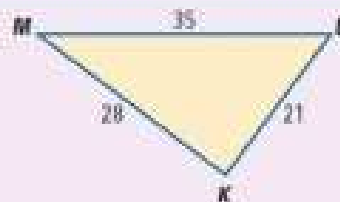
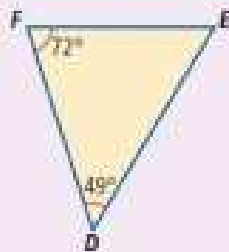
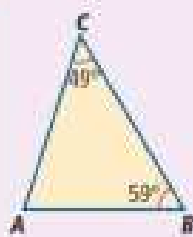
- 27** Vierhoek $VWXY$ is een parallellogram. De diagonalen VX en WY snijden elkaar in punt Z .

- Laat zien dat van de driehoeken VWZ en XYZ de overeenkomstige hoeken even groot zijn en de overeenkomstige zijden even lang zijn.
- Gebruik de driehoeken VWZ en XYZ om te bewijzen dat de diagonalen van een parallellogram elkaar middendoor delen.



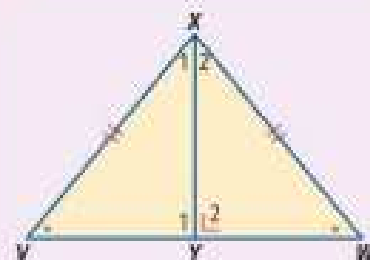
Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten



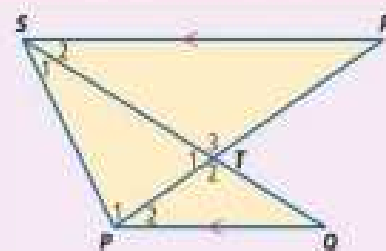
- 024
- Hoe groot is $\angle A$? En hoe groot is $\angle E$?
 - Welke hoek in driehoek DEF is de overeenkomstige hoek van $\angle A$? En welke hoek is dat bij $\angle B$? En bij $\angle C$?
 - Driehoek ABC is gelijkvormig met driehoek DEF . Waarom is de notatie $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ niet juist?
 - Vul in: $\triangle ABC \sim \triangle \dots$
 - Vul de tabel bij $\triangle KLM$ en $\triangle PQR$ in.
- | | | | |
|------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| zijden $\triangle KLM$ | $KL = \dots$ | $LM = \dots$ | $KM = \dots$ |
| zijden $\triangle PQR$ | $\dots = \dots$ | $\dots = \dots$ | $\dots = \dots$ |
- Waarom is driehoek KLM gelijkvormig met driehoek PQR ?
 - Welke hoeken in driehoek KLM en driehoek PQR zijn de overeenkomstige hoeken?
 - Vul in: $\triangle KLM \sim \triangle \dots$

- 025
- De gelijkbenige driehoek VWX is in twee driehoeken verdeeld.
- Waarom zijn $\angle V$ en $\angle W$ even groot?
 - En waarom is $\angle Y_1 = \angle Y_2$?
 - Leg uit dat $\triangle VYX \sim \triangle WYX$.
 - Met welke factor zijn de overeenkomstige zijden vermenigvuldigd?



Uitdagende opdrachten

- U4
- In de figuur is $PQ \parallel RS$ en $\angle S_1 = \angle S_2$.
De lijnstukken QS en PR snijden elkaar in punt T .
Bewijs dat $RS : RT = PS : PT$.

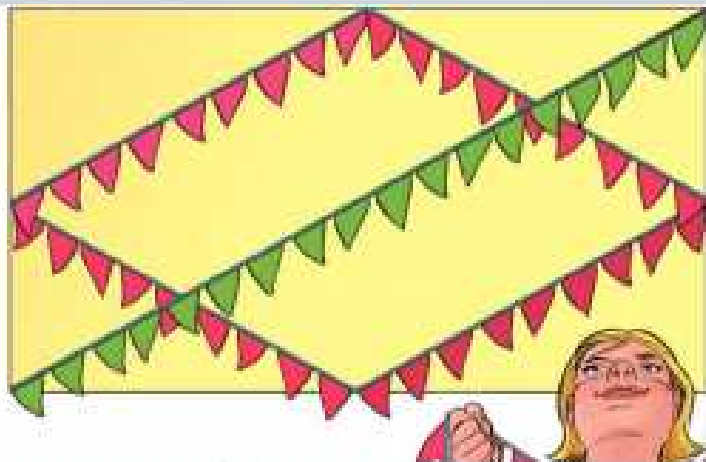


Je leert • hoe je de lengte van een zijde bij gelijkvormige driehoeken berekent

Leerroutes • ondersteunend: 28—29—030—31—32—33—34
 • doorlopend: 28—29—30—31—32—33—34
 • uitdagend: 28—30—31—32—33—U5—U6

Maxima wil slingers ophangen. Het plafond van de kamer heeft de vorm van een rechthoek. Ze heeft één slinger van 9 meter. Deze kan precies van de ene hoek naar de hoek er schuin tegenover worden opgehangen. Ze wil nog vier slingers ophangen, steeds van het midden van de ene muur naar het midden van de muur er naast.

- Zoek uit hoe lang de vier slingers moeten zijn.

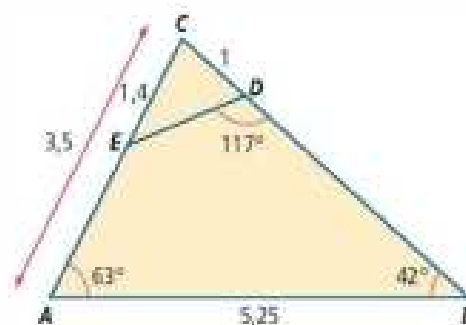


28 In de figuur zitten op het eerste gezicht geen gelijkvormige driehoeken.

- Bereken in $\triangle CDE$ hoe groot $\angle C$, $\angle D$ en $\angle E$ zijn.
- Maak een schets van $\triangle CDE$ in dezelfde stand als $\triangle ABC$ en schrijf de bekende maten erbij.
- Leg uit waarom $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.
- Vul de tabel verder in.

zijden $\triangle ABC$	$AB = \dots$	$BC = \dots$	$AC = \dots$
zijden $\triangle CDE$	$\dots = \dots$	$\dots = \dots$	$\dots = \dots$

- Bereken de lengte van de lijnstukken AE en BD .



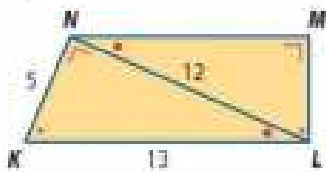
Aanpak

Hoe bereken je de lengte van een zijde bij gelijkvormige driehoeken?

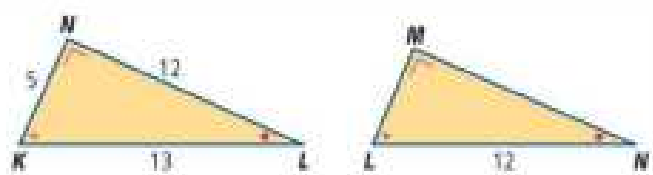
- Maak een schets van de driehoeken in dezelfde stand naast elkaar en schrijf de bekende maten erbij.
- Zet de overeenkomstige zijden van de driehoeken boven elkaar in een verhoudingstabel en bereken de factor van de vergroting.
- Bereken met de factor de lengte van de zijde.

Voorbeeld

De driehoeken KLN en LMN zijn gelijkvormig.
Bereken de lengte van zijde MN .

**Oplossing**

1



$$2 \quad \begin{array}{l|l|l|l} \text{zijden } \triangle KLN & KN = 5 & LN = 12 & KL = 13 \\ \text{zijden } \triangle LMN & LM = \dots & MN = \dots & LN = 12 \end{array}$$

De factor van $\triangle KLN$ naar $\triangle LMN$ is $\frac{12}{13}$.

$$3 \quad \text{De lengte van zijde } MN \text{ is } 12 \times \frac{12}{13} = \frac{144}{13} = 11\frac{1}{13}.$$

29 Bereken in het voorbeeld de lengte van zijde LM .

Ondersteunende route → maak opdracht 030

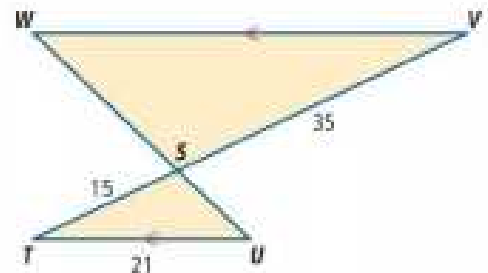
30 In de figuur is $TU \parallel VW$, $TU = 21$, $ST = 15$ en $SV = 35$.

a Leg uit dat $\triangle STU$ gelijkvormig is met $\triangle SVW$.

b Bereken de lengte van zijde VW .

c Verder is $UW = 30$.

Bereken de lengte van zijde SW en de lengte van zijde SU .

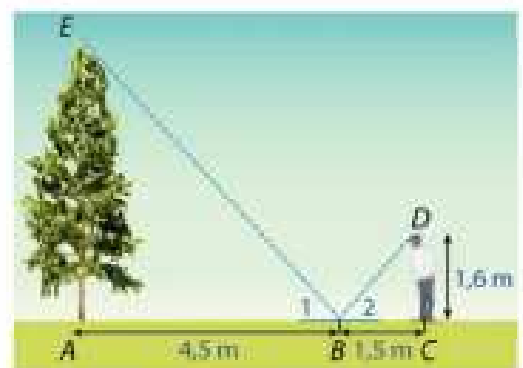


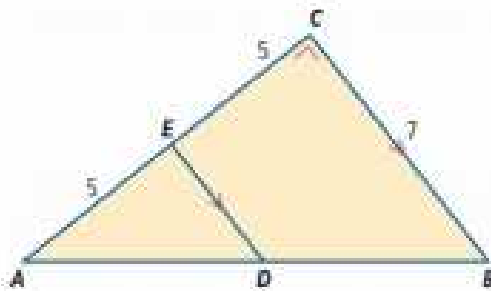
31 Wim weet een manier om de hoogte van een boom te berekenen. Hij legt een spiegel op de grond en gaat zo staan dat hij de top van de boom in de spiegel ziet. Wim meet de ooghoogte, de afstand tot de spiegel en de afstand van de spiegel tot de boom. Een wet uit de natuurkunde zegt dat de hoek van inval $\angle B_1$ gelijk is aan de hoek van terugkaatsing $\angle B_2$, dus $\angle B_1 = \angle B_2$.

a Geef de overeenkomstige hoek van $\angle A$ en van $\angle E$.

b Bereken hoe hoog de boom is.

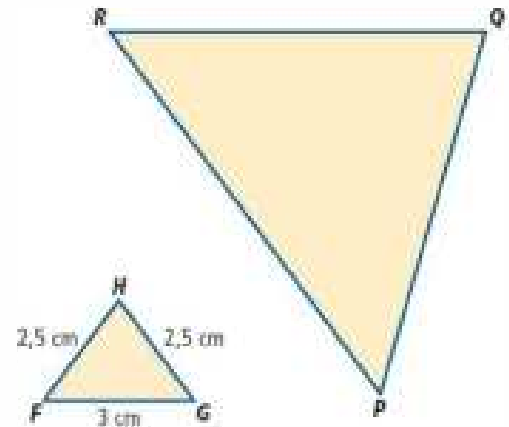
c Ga ook na hoe hoog de boom is als $AB = 10,5$ meter, $BC = 2,1$ meter en $CD = 1,8$ meter.





- 32** Van $\triangle ABC$ is $AE = 5$, $CE = 5$, $BC = 7$, $\angle C = 90^\circ$ en $DE \parallel BC$.
- Bewijs dat $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.
 - Hoe groot is de factor van de vergroting?
 - Bereken de lengte van lijnstuk DE .
 - Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van $\triangle ABC$ als de oppervlakte van $\triangle ADE$?

- 33** De driehoeken FGH en PQR zijn gelijkvormig. De oppervlakte van driehoek PQR is negen keer zo groot als de oppervlakte van driehoek FGH .
- Hoeveel keer zo groot zijn de zijden van driehoek PQR ?
 - Bereken de lengte van de zijden van driehoek PQR .
 - Ook driehoek STU is gelijkvormig met driehoek FGH . De oppervlakte van driehoek STU is twee keer zo groot als de oppervlakte van driehoek FGH . Met welke factor zijn de zijden van driehoek FGH vermenigvuldigd om die van driehoek STU te krijgen?
 - Bereken de lengte van de zijden van driehoek STU . Rond de lengten af op twee decimalen.
 - Construeer een driehoek die gelijkvormig is met driehoek FGH en een oppervlakte heeft die vier keer zo groot is als de oppervlakte van driehoek FGH .



- 34**
- Construeer $\triangle KLM$ met $KL = 4$ cm, $KM = 3$ cm en $LM = 3,4$ cm.
 - Construeer ook $\triangle VWX$ met $VW = 6$ cm, $VX = 4,5$ cm en $WX = 5,1$ cm.
 - Ga na dat en $\triangle VWX$ gelijkvormig zijn.
 - De oppervlakte van $\triangle VWX$ is $11,18 \text{ cm}^2$. Bereken hoeveel cm^2 de oppervlakte van $\triangle KLM$ is. Rond af op twee decimalen.

Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

Ondersteunende opdrachten

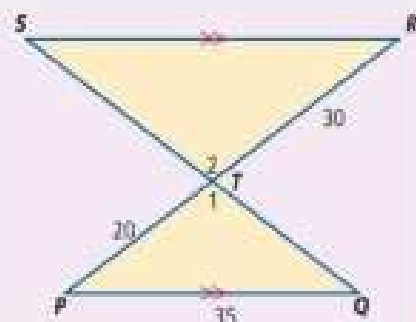
30 In de figuur is $PQ = 35$, $PT = 20$ en $RT = 30$.

- Leg uit dat $\triangle PQT$ gelijkvormig is met $\triangle RST$.
- Maak een schets van $\triangle RST$ in dezelfde stand als $\triangle PQT$.
- Vul de tabel verder in.

zijden $\triangle PQT$	$PQ = 35$	$\dots = \dots$	$\dots = \dots$
zijden $\triangle RST$	$\dots = \dots$	$\dots = \dots$	$\dots = \dots$

- Bereken de lengte van zijde RS .
- Verder is $QS = 55$. Irma is op een blaadje begonnen met het berekenen van de lengte van de zijden QT en ST . Leg uit hoe ze aan $1\frac{1}{2}$ komt en vul het blaadje verder in.

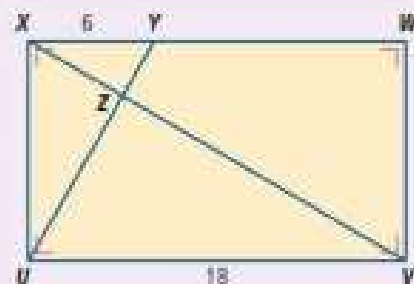
☐	Invullen van $QS = 55$ en $ST = QT \times 1\frac{1}{2}$ in	Irma
☐	$QT + ST = QS$ geeft $QT + \dots = \dots$, dus	
☐	$\dots \times QT = \dots$ en $QT = \dots$	
☐	Invullen van $QT = \dots$ in $ST = QT \times 1\frac{1}{2}$ geeft $ST = \dots$	



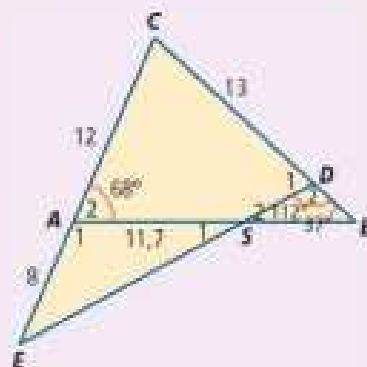
Uitdagende opdrachten

U5 Van de rechthoek $UVWX$ is $UV = 18$ en $XY = 6$. Verder is $UY = 12$.

Bereken de lengte van lijnstuk UZ en de lengte van lijnstuk YZ .



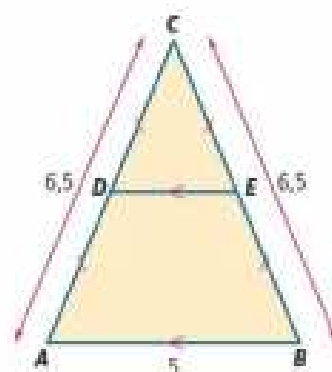
U6 In de figuur is $\angle A_1 = 68^\circ$, $\angle B = 37^\circ$ en $\angle D_2 = 112^\circ$. De lijnstukken AB en DE snijden elkaar in punt S . Verder is $AC = 12$, $AE = 8$, $AS = 11,7$ en $CD = 13$. In de figuur zitten twee paren gelijkvormige driehoeken. Maak gebruik van deze gelijkvormigheid om de lengte van lijnstuk BD en de lengte van lijnstuk DS uit te rekenen.



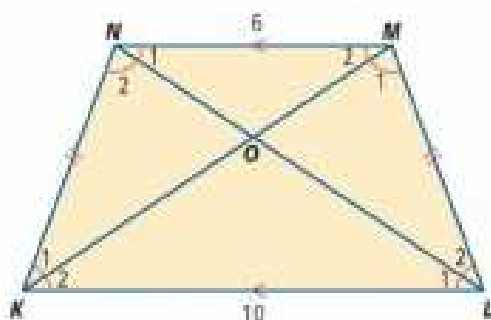
Deze paragraaf bevat opdrachten die een indruk geven van wiskunde C en wiskunde B.

- 35** Van $\triangle ABC$ is $AB = 5$ en $AC = BC = 6,5$. Punt D ligt op het midden van zijde AC , punt E ligt op het midden van zijde BC en $DE \parallel AB$.

- Wat voor een bijzondere driehoek is $\triangle ABC$?
- Toon aan dat $\triangle ABC$ gelijkvormig is met $\triangle CDE$.
- Hoe lang is lijnstuk DE ?
- Bereken de afstand van punt C tot zijde AB .
- Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.
- Bereken de oppervlakte van trapezium $ABED$.

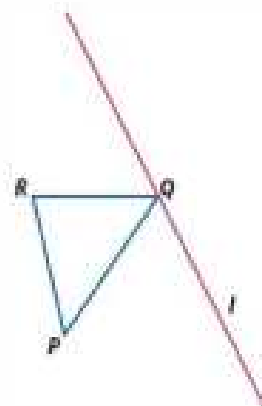


- 36** Van vierhoek $KLMN$ is $KL \parallel MN$, $KN = LM$, $KL = 10$, $MN = 6$ en $KM = LN = 9,6$.

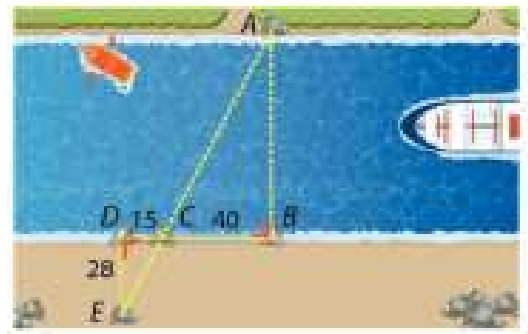


- Wat voor een bijzondere vierhoek is vierhoek $KLMN$?
- Bewijs dat $\triangle KLO \sim \triangle MNO$.
- Bereken de lengte van de lijnstukken LO , MO en NO .

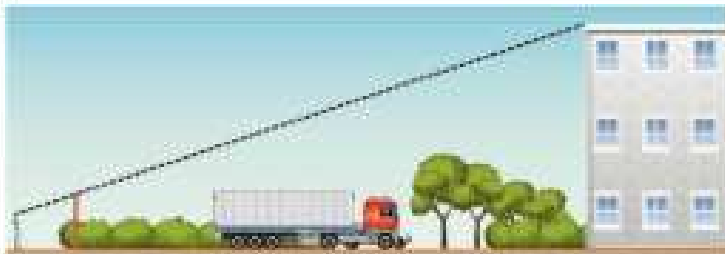
- 37** **W** a Spiegel driehoek PQR in lijn l . Het spiegelbeeld van punt P is punt S en het spiegelbeeld van punt R is punt T .
b Is driehoek PQR gelijkvormig met driehoek QST ?
Waarom?
c Teken vierhoek $PSTR$.
d Wat voor een bijzondere vierhoek is vierhoek $PSTR$?



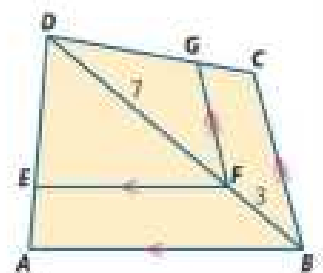
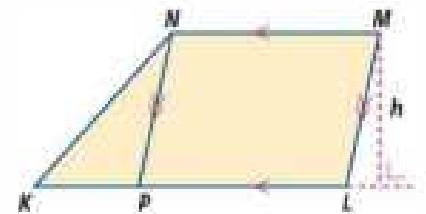
- C38** Djamilla wil de breedte van een rivier berekenen. Aan de overkant van de rivier staat bij punt A een boom. Djamilla legt recht tegenover deze boom een grote steen bij punt B . Na 40 passen van elk 60 cm komt nog een grote steen bij punt C en na 15 passen legt ze weer een grote steen bij punt D . Dan draait ze zich 90° en na 28 passen komt de laatste grote steen bij punt E . Vanaf de plek waar Djamilla eindigt ziet ze de boom en de grote steen op één lijn. Bereken hoeveel meter breed deze rivier is.



- C39** Op 25 meter afstand van een gebouw staat een schutting van 2,25 meter hoog. Kelly kijkt over de schutting naar het gebouw. Als ze 3 meter van de schutting af staat, ziet ze de bovenkant van het gebouw en de bovenkant van de schutting op één lijn. De ooghoogte van Kelly is 1,50 meter.



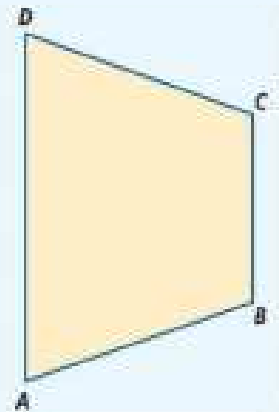
- Maak een schets van de situatie en teken een hulplijn zodat er rechthoekige driehoeken ontstaan.
 - Hoe hoog is het gebouw?
- B40** Het trapezium $KLMN$ is door de lijnstuk NP verdeeld in een parallellogram en een driehoek.
- Leg uit dat je de oppervlakte A van het parallellogram kunt berekenen met de formule $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (LP + MN)$.
 - Bewijs dat je de oppervlakte A van het trapezium kunt berekenen met de formule $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (KL + MN)$.
- B41** In de figuur ligt punt F op de diagonaal BD van vierhoek $ABCD$, zo dat $BF = 3$ en $DF = 7$. Verder is $EF \parallel AB$ en $FG \parallel BC$. Bewijs dat vierhoek $ABCD$ gelijkvormig is met vierhoek $EFGD$.



Theorie

Gelijkbenig trapezium

Een gelijkbenig trapezium is een trapezium dat lijnsymmetrisch is.

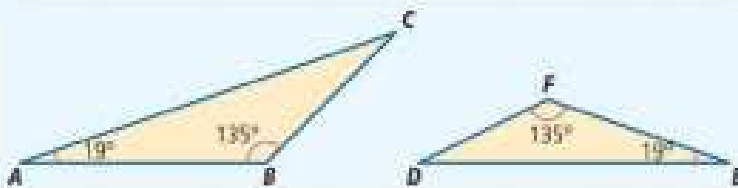


- S1** **W**
- Welke zijden van het gelijkbenig trapezium $ABCD$ zijn even lang?
 - En welke zijden lopen evenwijdig?
 - Zet in de hoeken die even groot zijn dezelfde tekentjes.
 - Teken in het gelijkbenig trapezium $ABCD$ de symmetrieas.

Theorie

Gelijkvormigheidsteken

Als twee driehoeken gelijkvormig zijn, dan gebruik je vaak het gelijkvormigheidsteken $\sim$. Je moet daarbij op de volgorde van de letters van de overeenkomstige hoeken letten. De notatie $\triangle KLM \sim \triangle PRQ$ geeft aan dat $\angle K = \angle P$, $\angle L = \angle R$ en $\angle M = \angle Q$.

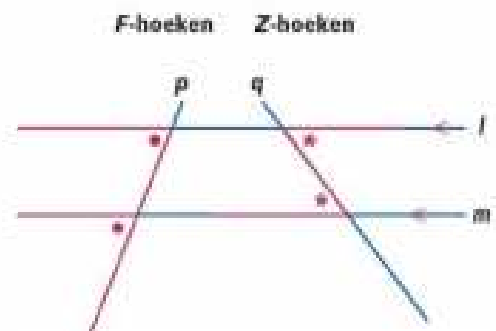


- S2**
- Driehoek ABC is gelijkvormig met driehoek DEF .
 - Schrijf de overeenkomstige hoeken op.
 - Vul in: $\triangle ABC \sim \triangle \dots$

Vaardigheid

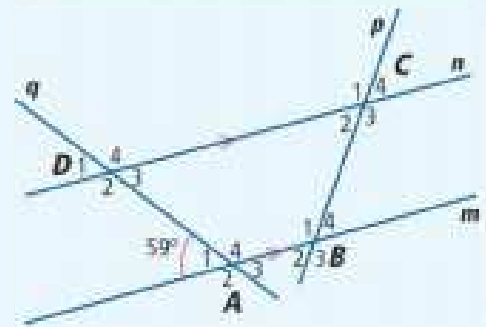
Je kunt met F-hoeken en Z-hoeken werken.

Als evenwijdige lijnen gesneden worden door een andere lijn, dan ontstaan er gelijke hoeken. Die gelijke hoeken zijn F-hoeken of Z-hoeken. In de figuur zijn de hoeken met een stip F-hoeken. De hoeken met een sterretje zijn Z-hoeken. Omgekeerd geldt dat als er, zoals in de figuur, gelijke hoeken ontstaan wanneer lijnen gesneden worden door een andere lijn, dat deze lijnen dan evenwijdig zijn.



- S3** De evenwijdige lijnen m en n worden gesneden door de lijnen p en q .

- a Vul F -hoeken of Z -hoeken in.
 $\angle A_1 = \angle D_1$, want het zijn ...
 $\angle A_4 = \angle D_2$, want het zijn ...
- b Welke hoeken zijn gelijk aan $\angle B_2$?
- c Gegeven is dat $\angle A_1 = 59^\circ$.
 Bereken $\angle D_3$ en $\angle D_4$.



Vaardigheid

Je kunt met vermoeden, bewijs en stelling redeneren.

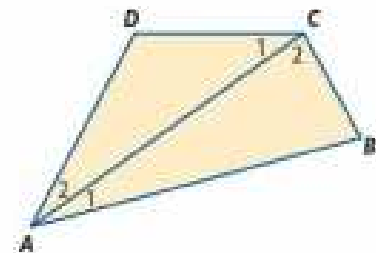
Op basis van een tekening of van een aantal voorbeelden kun je een vermoeden krijgen. Met behulp van eigenschappen en een sluitende redenering kun je proberen om de juistheid van dit vermoeden aan te tonen. Het aantonen van de juistheid van een vermoeden noem je een bewijs. Daarna kun je dit vermoeden een stelling noemen.

Voorbeeld

Bewijs de stelling dat de som van de hoeken van een vierhoek 360° is.

Bewijs

$\angle A_1 + \angle B + \angle C_2 = 180^\circ$ (som van de hoeken in een driehoek) en
 $\angle A_2 + \angle C_1 + \angle D = 180^\circ$ (som van de hoeken in een driehoek), dus
 $\angle A_1 + \angle B + \angle C_2 + \angle A_2 + \angle C_1 + \angle D = 2 \times 180^\circ$
 $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle B + \angle C_1 + \angle C_2 + \angle D = 360^\circ$
 $\angle A_{1,2} + \angle B + \angle C_{1,2} + \angle D = 360^\circ$



- S4** Gebruik de stelling uit het voorbeeld om te bewijzen dat de som van de hoeken van een zeshoek 720° is.

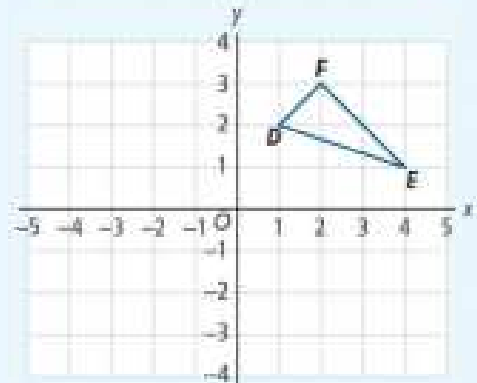
Vaardigheid

Je kunt figuren in een lijn en in een punt spiegelen.

Figuren kun je spiegelen in een lijn of spiegelen in een punt. De figuren die ontstaan zijn gelijkvormig aan de oorspronkelijke figuur.

Soms moet je een figuur eerst omkeren om hem in dezelfde stand te kunnen tekenen als de oorspronkelijke figuur.

- S5** **W**
- Spiegel driehoek DEF in de oorsprong. Het spiegelbeeld van punt D is punt L , het spiegelbeeld van punt E is punt M en het spiegelbeeld van punt F is punt K .
 - Spiegel driehoek DEF in de verticale as. Het spiegelbeeld van punt D is punt Q , het spiegelbeeld van punt E is punt P en het spiegelbeeld van punt F is punt R .
 - Is driehoek KLM gelijkvormig met driehoek PQR ?
Waarom?



Vaardigheid

Je kunt aantonen dat twee driehoeken gelijkvormig zijn.

Om aan te tonen dat twee driehoeken gelijkvormig zijn, is het voldoende als je kunt aantonen dat aan één van de twee volgende voorwaarden voldaan is.

- > De overeenkomstige hoeken zijn gelijk.
- > De overeenkomstige zijden zijn met dezelfde factor vermenigvuldigd.

Voorbeeld

Is $\triangle ABC$ gelijkvormig met $\triangle KLM$?



Oplossing

zijden $\triangle ABC$	$AB = 3,8$	$BC = 4$	$AC = 3$
zijden $\triangle KLM$	$KM = 5,7$	$KL = 6$	$LM = 4,5$

De overeenkomstige zijden zijn met de factor $5,7 : 3,8 = 6 : 4 = 4,5 : 3 = 1,5$ vermenigvuldigd. Ja, $\triangle ABC$ is gelijkvormig met $\triangle KLM$ en er geldt $\triangle ABC \sim \triangle KLM$.



- S6**
- Hoe groot is $\angle H$?
 - En hoe groot is $\angle M$?
 - Toon aan dat $\triangle GHI$ gelijkvormig is met $\triangle MNO$.

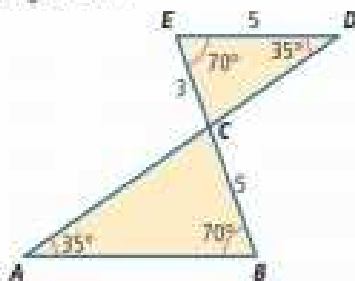
Vaardigheid

Je kunt de lengte van een zijde bij gelijkvormige driehoeken berekenen.

- Maak een schets van de driehoeken in dezelfde stand naast elkaar en schrijf de bekende maten erbij.
- Zet de overeenkomstige zijden van de driehoeken boven elkaar in een verhoudingstabel en bereken de factor van de vergroting.
- Bereken met de factor de lengte van de zijde.

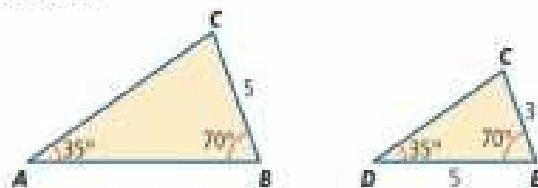
Voorbeeld

De driehoeken ABC en CDE zijn gelijkvormig.
Bereken de lengte van zijde AB .



Oplossing

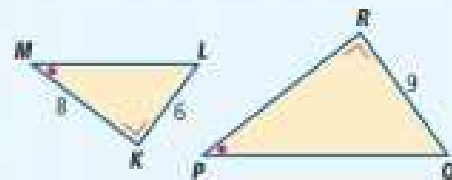
1



- 2
- | | | | |
|------------------------|--------------|----------|--------------|
| zijden $\triangle ABC$ | $AB = \dots$ | $BC = 5$ | $AC = \dots$ |
| zijden $\triangle CDE$ | $DE = 5$ | $CE = 3$ | $CD = \dots$ |
- De factor van $\triangle CDE$ naar $\triangle ABC$ is $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

- 3 De lengte van zijde AB is $5 \times 1\frac{2}{3} = 8\frac{1}{3}$.

- S7** Driehoek KLM is gelijkvormig met driehoek PQR .
Bereken de lengte van zijde PR .



- T1** Daniëlle heeft een zogenaamde schaarlamp boven haar bureau hangen. Door het lattenwerk kan ze de lamp verder van de muur af laten hangen.

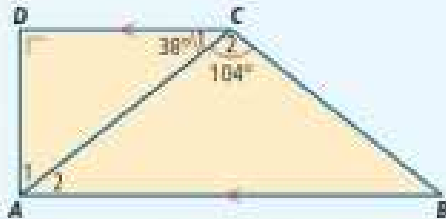
W

- Teken in de schaarlamp twee paar *Z*-hoeken.
- Teken in de schaarlamp ook twee paar *F*-hoeken.
- De hoek boven in de linker ruit van het lattenwerk is 116° .

Bereken de andere hoeken van het lattenwerk.



- T2** Van vierhoek $ABCD$ is $AD \perp CD$, $AB \parallel CD$, $\angle C_1 = 38^\circ$ en $\angle C_2 = 104^\circ$.



- Wat voor een bijzondere vierhoek is vierhoek $ABCD$?
- Toon aan dat $AC = BC$.

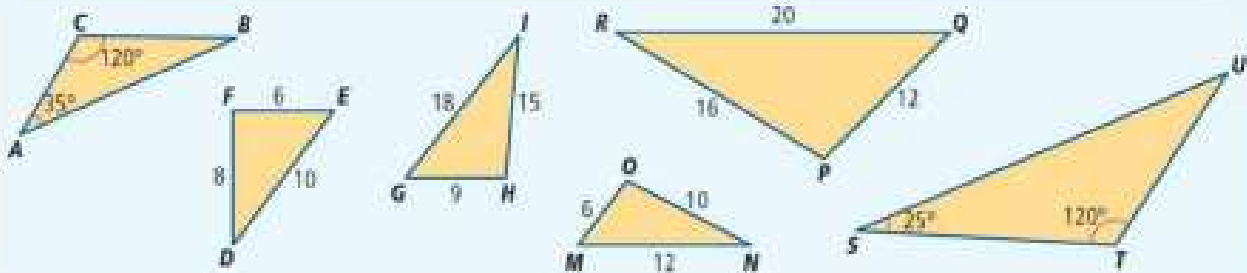
- T3** Marcella wil een plantentafeltje maken. Je ziet twee werktekeningen.

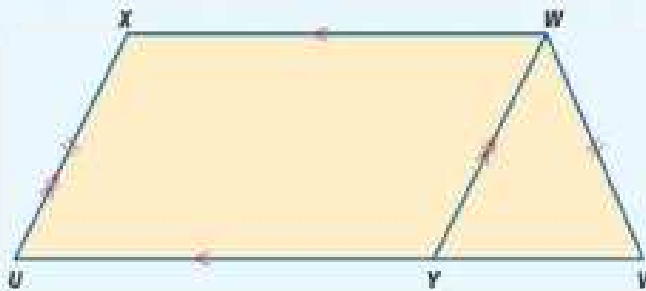
- Geef voor elk tafeltje de factor waarmee je de afmetingen van de onderste driehoek moet vermenigvuldigen om die van de bovenste driehoek te krijgen.
- Bereken bij welk tafeltje de oppervlakte van het tafelblad het grootst is.



- T4** Elk van de driehoeken is met één van de andere driehoeken gelijkvormig.

Welke driehoeken zijn gelijkvormig met elkaar? Leg uit waarom en geef indien mogelijk de bijbehorende factor.



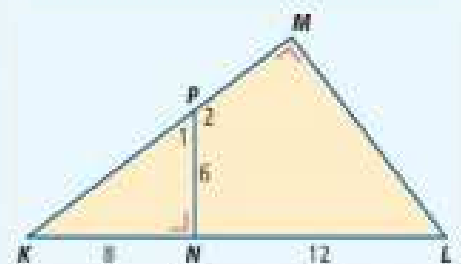


T5 Van vierhoek $UVWX$ is $UV \parallel WX$, $UX \parallel WV$ en $UX = VW$.

- Meet hoe groot de hoeken en hoeveel mm de zijden van driehoek VWY zijn.
- Welke vermoeden heb je over het soort driehoek dat driehoek VWY is?
- Bewijs je vermoeden.

T6 Van $\triangle KLM$ is $\angle M = 90^\circ$, $NP \perp KL$, $KN = 8$, $LN = 12$ en $NP = 6$.

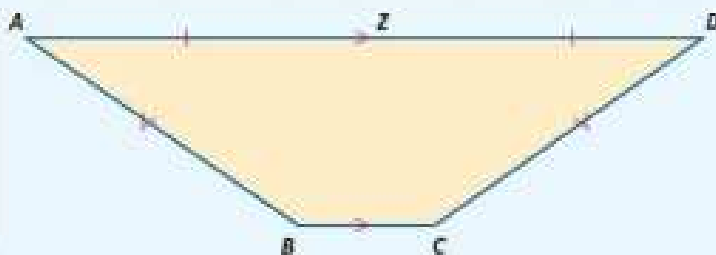
- Toon aan dat $\triangle KLM \sim \triangle KPN$.
- Bereken de lengte van lijnstuk MP en van zijde LM .
- Abdullah heeft $\triangle RST$ getekend waarvoor geldt $\triangle KNP \sim \triangle RST$. De oppervlakte van $\triangle RST$ is 54. Bereken de lengte van de zijden van $\triangle RST$.



T7 Van vierhoek $ABCD$ is $AB = CD$, $BC \parallel AD$ en punt Z ligt in het midden van zijde AD .

W

- Wat voor een bijzondere vierhoek is vierhoek $ABCD$?
- Spiegel punt B en punt C in punt Z . Het spiegelbeeld van punt B is punt E en het spiegelbeeld van punt C is punt F .
- Teken zeshoek $ABCDEF$.
- Toon aan dat de driehoeken ABZ en DEZ gelijkvormig zijn. Hoe groot is de bijbehorende factor?

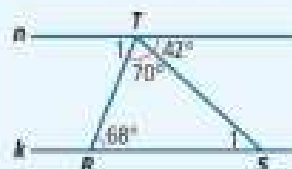
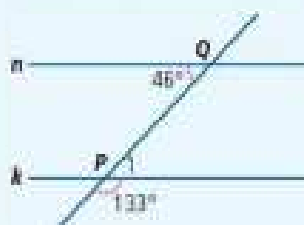


Je kunt met F-hoeken en Z-hoeken werken.

- E1** De evenwijdige lijnen l en m worden gesneden door lijn p .
- Bereken alle andere hoeken als $\angle A_1 = 43^\circ$.
 - Hoeveel graden is $\angle A_3 + \angle B_4$ dan?
 - Hoeveel graden is $\angle A_3$ als je weet dat $\angle B_4 = 87^\circ$?
 - En hoeveel graden is $\angle A_3$ als je weet dat $\angle B_4 = 6^\circ$?



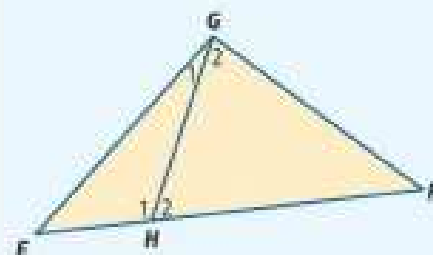
- E2**
- Bereken $\angle P_1$ in de linker figuur.
 - Zijn de lijnen k en n in de linker figuur evenwijdig?



- Ga ook na of de lijnen k en n in de rechter figuur evenwijdig zijn.

Je kunt met vermoeden, bewijs en stelling redeneren.

- E3** In driehoek EFG ligt punt H op zijde EF .
Bewijs dat $\angle H_1 = \angle F + \angle G_2$.

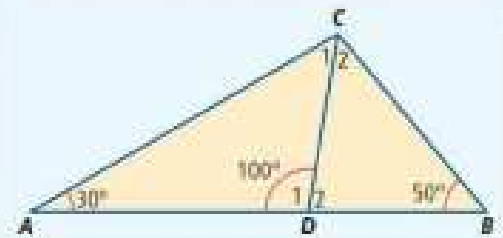


Je kunt figuren in een lijn en in een punt spiegelen.

- E4**
- Teken een assenstelsel met op beide assen de getallen -6 tot en met 6 . Teken in het assenstelsel de punten $K(2, 1)$, $L(5, 2)$ en $M(1, 4)$ en teken driehoek KLM .
 - Spiegel driehoek KLM in de horizontale as. Het spiegelbeeld van punt K is punt R , het spiegelbeeld van punt L is punt Q en het spiegelbeeld van punt M is punt P .
 - Is driehoek KLM gelijkvormig met driehoek PQR ?
Waarom?
 - Spiegel driehoek KLM in de oorsprong. Het spiegelbeeld van punt K is punt F , het spiegelbeeld van punt L is punt D en het spiegelbeeld van punt M is punt E .
 - Is driehoek PQR gelijkvormig met driehoek DEF ?

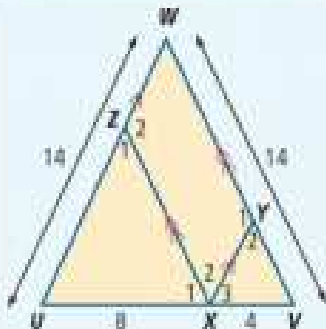
Je kunt aantonen dat twee driehoeken gelijkvormig zijn.

- E5** a Toon aan dat $\triangle ABC$ gelijkvormig is met $\triangle ADC$.
 b Vul in: $\triangle ABC \sim \triangle \dots$



Je kunt de lengte van een zijde bij gelijkvormige driehoeken berekenen.

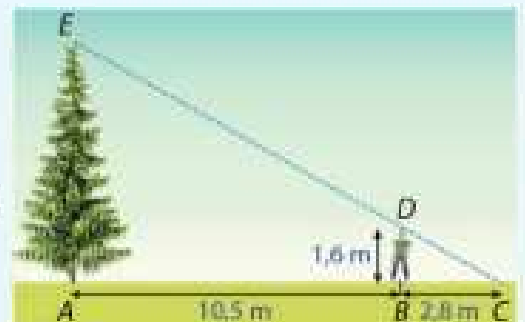
- E6** Van $\triangle UVW$ is $VW \parallel XZ$, $UW \parallel XY$, $UX = 8$, $XV = 4$, $UW = 14$ en $VW = 14$.



- a Waarom is $\triangle UXZ$ gelijkvormig met $\triangle XZY$?
 b Bereken de lengte van lijnstuk UZ en van lijnstuk WZ .
- E7** De hoogte van een boom kun je als volgt berekenen. Loop van de boom af tot de schaduw van je hoofd samenvalt met de schaduw van de boomtop. Meet daarna de afstand AB tot de boom, de lengte BC van je eigen schaduw en je eigen lengte BD .
- a Waarom zijn de driehoeken ACE en BCD gelijkvormig?
 b In de tekening is $AB = 10,5$ meter, $BC = 2,8$ meter en $BD = 1,6$ meter.
 Vul de afmetingen in de tabel in.

zijden $\triangle ACE$ in m	$AC = \dots$	$AE = \dots$	$CE = \dots$
zijden $\triangle BCD$ in m	$BC = \dots$	$\dots = \dots$	$\dots = \dots$

- c Bereken eerst de factor en dan de hoogte van de boom.
 d Ga ook na hoe hoog de boom is als $AB = 9,3$ meter, $BC = 1,5$ meter en $BD = 1,8$ meter.





De *abc*-formule

4

In dit hoofdstuk

In klas 2 heb je geleerd hoe je met bordjes of met ontbinden in factoren kwadratische vergelijkingen oplost.

Sommige kwadratische vergelijkingen hebben wel oplossingen, maar die kun je niet vinden met bordjes of met ontbinden in factoren. In dit hoofdstuk leer je twee nieuwe manieren, kwadraat afsplitsen en de *abc*-formule, om van deze kwadratische vergelijkingen toch de oplossingen te vinden.

In hoofdstuk 7 en hoofdstuk 11 heb je het kwadraat afsplitsen en de *abc*-formule opnieuw nodig. Daarmee ga je dan onder andere de coördinaten van snijpunten berekenen.

Aanpak

Hoe los je een kwadratische vergelijking op met bordjes?

- 1 Kijk goed waar je het bordje moet leggen.
- 2 Reken uit wat op het bordje moet staan.
- 3 Bereken vervolgens de oplossingen. Controleer je oplossingen door ze in te vullen in de vergelijking.

Voorbeeld 1

Los op $x^2 - 12 = 52$.

Oplossing

1 $x^2 - 12 = 52$

2 $64 - 12 = 52$

$x^2 = 64$

3 $x = 8$ of $x = -8$

Controle

$8^2 - 12 = 64 - 12 = 52$, klopt

$(-8)^2 - 12 = 64 - 12 = 52$, klopt

Voorbeeld 2

Los op $(x - 5)^2 = 36$.

Oplossing

1 $(x - 5)^2 = 36$

2 $6^2 = 36$ of $(-6)^2 = 36$

$x - 5 = 6$ of $x - 5 = -6$

3 $x = 11$ of $x = -1$

Controle

$(11 - 5)^2 = 6^2 = 36$, klopt

$(-1 - 5)^2 = (-6)^2 = 36$, klopt

Voorbeeld 3

Los op $2x^2 + 30 = 14$.

Oplossing

1 $2x^2 + 30 = 14$

2 $2x^2 = -16$

$2 \times -8 = -16$

$x^2 = -8$

- 3 Dit kan niet. De vergelijking heeft geen oplossingen.

V1 Los de vergelijkingen op met bordjes.

a $x^2 = 25$

d $2x^2 + 5 = 1$

b $c^2 - 7 = 8$

e $15 - 3a^2 = -3$

c $(m - 2)^2 = 81$

f $(5 + d)^2 = 0$

V2 Schrijf de formules zonder haakjes.

a $a = 3(9 - 2k)$

c $f = -(t + 3)^2$

b $c = 10 - 2(2g + 5)$

d $e = (u + 8)(5 - 2u)$

V3 Je gaat de formule $y = 6a^2 - 4a$ ontbinden in factoren.

- a Geef de grootste gemeenschappelijke factor van de termen $6a^2$ en $-4a$.

- b Vul de vermenigvuldigtabel verder in.

$\times$	...	...
...	$6a^2$	$-4a$

- c Schrijf de formule $y = 6a^2 - 4a$ in de vorm $y = \dots(\dots - \dots)$.

Aanpak**Hoe ontbind je een drieterm in factoren?**

- 1 Stel vast naar welk product en welke som je zoekt.
- 2 Maak een overzicht van alle mogelijkheden waarmee je het gezochte product kunt krijgen.
- 3 Kijk bij welke getallen de gezochte som hoort.
- 4 Schrijf de drieterm als product van twee factoren.

Voorbeeld

Ontbind de drieterm in de formule $y = x^2 + 5x - 14$ in factoren.

Oplossing

- 1 Het product is -14 en de som is $+5$.

2

product	getallen	som
-14	1 en -14	-13
-14	-1 en 14	+13
-14	2 en -7	-5
-14	-2 en 7	$+5$

- 3 Met de getallen -2 en 7 vind je het product -14 en de som $+5$.

- 4 De formule wordt $y = (x - 2)(x + 7)$.

V4 Ontbind de drietermen in de formules in factoren.

- a $k = c^2 - 12c + 32$ c $d = p^2 + 10p + 21$
 b $g = b^2 + 5b + 6$ d $z = u^2 - u - 42$

Theorie

Wanneer een vergelijking geschreven is in de vorm $A \times B = 0$, dan kun je de oplossingen vinden door de vergelijkingen $A = 0$ en $B = 0$ op te lossen. Soms is het nodig een kwadratische vergelijking eerst in de vorm $A \times B = 0$ te schrijven door te ontbinden in factoren.

Voorbeeld

Los op $6w^2 + 18w = 0$.

Oplossing

$$\begin{aligned}
 6w^2 + 18w &= 0 \\
 6w(w + 3) &= 0 \\
 6w = 0 \text{ of } w + 3 &= 0 \\
 w = 0 \text{ of } w &= -3
 \end{aligned}$$

V5 Los de vergelijkingen op.

- a $2p(12p + 36) = 0$ d $x^2 - 7x + 12 = 0$
 b $(x - 3)(4x + 6) = 0$ e $q^2 - 6q - 16 = 0$
 c $4a^2 + 3a = 0$ f $7w^2 - 28w = 0$

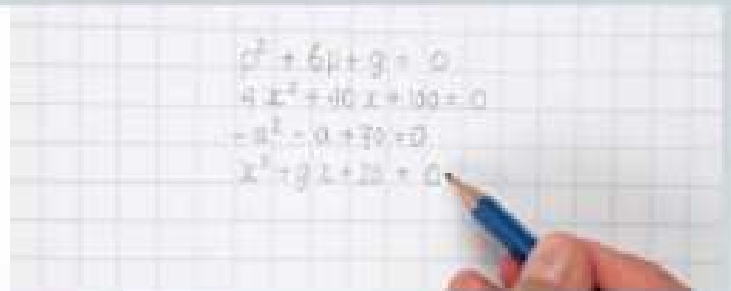
Je leert

- hoe je een kwadratische vergelijking met ontbinden in factoren oplost
- wat een merkwaardig product is

Leerroutes

- ondersteunend: 1-2-03-4-5-06-6-7-8
- doorlopend: 1-2-3-4-5-6-7-8-9
- uitdagend: 1-2-3-5-6-7-8-9-U1

- Welke van de vier kwadratische vergelijkingen kun je al oplossen?



- Los de vergelijking $x^2 - 9x + 18 = 0$ op.
 - Vul de gevonden oplossingen in de vergelijking $2x^2 - 18x + 36 = 0$ in. Wat valt je op?
 - Deel in de vergelijking $2x^2 - 18x + 36 = 0$ aan beide kanten van het gelijkteken alle termen door 2.
 - Waarom hebben de vergelijkingen dezelfde oplossingen?

- Mark lost de vergelijking $-0,2x^2 + 3x - 10 = 0$ op.

 - Met welk getal vermenigvuldigt Mark aan beide kanten van het gelijkteken alle termen?
 - Los de vergelijking verder op.
 - Krijgt Mark dezelfde oplossingen als hij aan beide kanten van het gelijkteken alle termen door $-0,2$ deelt?

					Mark
☐	$-0,2x^2 + 3x - 10 = 0$				
☐	$x^2 - 15x + 50 = 0$				
☐	...				

Theorie

Je kunt bij een vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ alleen **ontbinden in factoren** als $a = 1$.

Voorbeeld 1

Los op $3x^2 + 30x + 72 = 0$.

Oplossing

$$3x^2 + 30x + 72 = 0$$

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

$$(x + 4)(x + 6) = 0$$

$$x + 4 = 0 \text{ of } x + 6 = 0$$

$$x = -4 \text{ of } x = -6$$

Voorbeeld 2

Los op $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 5 = 0$.

Oplossing

$$\frac{1}{4}x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$(x - 2)(x - 10) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ of } x - 10 = 0$$

$$x = 2 \text{ of } x = 10$$

Voorbeeld 3

Los op $-x^2 - 7x + 30 = 0$.

Oplossing

$$-x^2 - 7x + 30 = 0$$

$$x^2 + 7x - 30 = 0$$

$$(x - 3)(x + 10) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ of } x + 10 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = -10$$

Ondersteunende route → maak opdracht 03

3 Los de vergelijkingen op.

- a $-x^2 + 3x + 18 = 0$ d $2x^2 + 10x - 28 = 0$
 b $\frac{1}{2}x^2 - 6x + 18 = 0$ e $-3x^2 + 36x - 96 = 0$
 c $\frac{1}{4}x^2 - x - 8 = 0$ f $0,1x^2 - x + 0,9 = 0$

4 Bij een actie op school worden cupcakes verkocht. De winst W in euro's bij een prijs van p centen voor een cupcake kun je berekenen met de functie $W(p) = -2p^2 + 90p - 700$.

- a Bereken de prijs van een cupcake die bij $W = 0$ hoort.
 b Welke vergelijking hoort er bij een winst van 200 euro?
 c Hoeveel kost een cupcake bij een winst van 200 euro?

5 Noa moet de vergelijking $-2(x+3)(x+5) = 0$ oplossen.

- a Waarom moet $(x+3)(x+5) = 0$ zijn?
 b Los de vergelijking op door het blaadje van Noa verder in te vullen.

	Noa
☐	$-2(x+3)(x+5) = 0$
☐	$(x+3)(x+5) = 0$
☐	$x+3 = \dots$ of $x+5 = \dots$
☐	$x = \dots$ of $x = \dots$

	Sjors
☐	$3(x+3)(x-4) = 24$
☐	$(x+3)(x-4) = 8$
☐	$x^2 - \dots x - \dots = 8$
☐	$\dots$

- c Sjors moet de vergelijking $3(x+3)(x-4) = 24$ oplossen. Hij beweert dat dan $(x+3)(x-4) = 8$ moet gelden. Leg uit waarom hij gelijk heeft.
 d Vul het blaadje verder in en los de vergelijking op.

Ondersteunende route → maak opdracht 06

6 Los de vergelijkingen op.

- a $-0,5(x-3)(5-x) = 0$ d $x^2 + 2x - 16 = 8$
 b $4b^2 - 12b = 16$ e $-2(x-3)(x+3) = -32$
 c $2d(d+5) = -12$ f $-3x^2 + 12x = -63$

4.1 Ontbinden in factoren

- 7
- a Los de vergelijking $x^2 - 36 = 0$ op met bordjes.
 - b Los de vergelijking $(x + 6)(x - 6) = 0$ op. Wat valt je op?
 - c Schrijf de vergelijking $(x + 6)(x - 6) = 0$ zonder haakjes en verklaar je antwoord van opdracht b.

Theorie

De vergelijking $x^2 - p^2 = 0$ kun je met bordjes of met ontbinden in factoren oplossen. Bij het ontbinden in factoren schrijf je de vergelijking als $(x + p)(x - p) = 0$. De vorm $(x + p)(x - p)$ heet een **merkwaardig product**.

Voorbeeld 1

Los op $x^2 - 81 = 0$.

Oplossing

met bordjes

$$x^2 - 81 = 0$$

$$x^2 = 81$$

$$9^2 = 81 \text{ of } (-9)^2 = 81$$

$$x = 9 \text{ of } x = -9$$

Voorbeeld 2

Los op $x^2 - 81 = 0$.

Oplossing

met een merkwaardig product

$$x^2 - 81 = 0$$

$$(x + 9)(x - 9) = 0$$

$$x + 9 = 0 \text{ of } x - 9 = 0$$

$$x = -9 \text{ of } x = 9$$

- 8 Los de vergelijkingen met een merkwaardig product op.
- a $x^2 - 25 = 0$
 - b $x^2 - 4 = 0$
 - c $2x^2 - 32 = 0$
 - d $-4x^2 + 10 = 6$
- 9 Femke gaat de vergelijking $4(x - 8)^2 - 36 = 0$ oplossen.
- a Femke beweert dat dan $(x - 8)^2 - 9 = 0$ moet gelden. Leg uit waarom ze gelijk heeft.
 - b Femke ziet dat ze de vergelijking $(x - 8)^2 - 9 = 0$ nu met een merkwaardig product op kan lossen. Leg uit hoe ze dat ziet en los de vergelijking verder op met een merkwaardig product.

Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

03 Op het blaadje zie je hoe een begin is gemaakt met het oplossen van drie vergelijkingen.

- a Waarom moet je bij vergelijking A eerst aan beide kanten van het gelijkteken alle termen door 4 delen?
- b Los vergelijking A verder op.
- c Vul in.

Bij vergelijking B moet je eerst aan beide kanten van het gelijkteken alle termen met ... vermenigvuldigen of door ... delen.

Bij vergelijking C moet je eerst aan beide kanten van het gelijkteken alle termen met ... vermenigvuldigen of door ... delen.

- d Los de vergelijkingen B en C verder op.

Los de vergelijkingen op.

e $5x^2 + 30x + 40 = 0$ g $\frac{1}{2}x^2 - 5x - 12 = 0$

f $-0,2x^2 - x + 10 = 0$ h $-2x^2 + 24x - 64 = 0$

A	$4x^2 + 20x - 56 = 0$
	$x^2 + 5x - 14 = 0$
	$(x-2)(x+7) = 0$
	...
B	$-x^2 + 3x + 10 = 0$
	$x^2 - 3x - 10 = 0$
	...
C	$\frac{1}{2}x^2 - 3x - 8 = 0$
	$x^2 - 6x - 16 = 0$
	...

06 Drie leerlingen zijn begonnen met het oplossen van vergelijkingen.

Los de vergelijkingen verder op.

$3(p+7)(p+8) = 0$ $(p+7)(p+8) = 0$ $p+7 = \dots$ of $p+8 = \dots$...	$-3(x-2)(x-5) = 6$ $(x-2)(x-5) = -2$ $x^2 - \dots x + \dots = -2$...	$3x^2 + 33x = -90$ $3x^2 + 33x + 90 = 0$ $x^2 + \dots x + \dots = 0$...
Ahlm	Jill	Mitch

Uitdagende opdrachten

U1 Tim verkoopt op de vrijmarkt zelfgemaakte hamburgers. Met de functie $W(p) = -0,01p^2 + 3,5p - 34$ kan hij de winst W in euro's berekenen. Hierin is p de prijs van een hamburger in centen.

- a Bij welke prijs maakt Tim de grootste winst?
- b Hoeveel euro is de grootste winst?



Je leert • hoe je een kwadratische vergelijking met kwadraat afsplitsen oplost

Leerroutes • ondersteunend: 10—11—12—13—14—15—016—17—18
 • doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16—17—18
 • uitdagend: 10—11—13—15—16—17—18—U2—U3

Michael lost de vergelijkingen $x^2 + 8x + 7 = 0$ en $(x + 4)^2 = 9$ op. Tot zijn verbazing vindt hij bij beide vergelijkingen dezelfde oplossingen.

- Leg uit waarom Michael dezelfde oplossingen vindt.



- 10** a Los de vergelijking $(x + 2)^2 = 49$ met bordjes op.
 b Schrijf de vergelijking $(x + 2)^2 = 49$ zonder haakjes en laat zien dat je de vergelijking $x^2 + 4x - 45 = 0$ krijgt.
 c Los de vergelijking $x^2 + 4x - 45 = 0$ met ontbinden in factoren op. Krijg je dezelfde oplossingen als bij opdracht a?
- 11** Pim gaat de vergelijking $(a - 8)^2 = 6$ met bordjes oplossen.
- a Leg uit waarom hij $a - 8 = \sqrt{6}$ of $a - 8 = -\sqrt{6}$ krijgt.
 b Vul het blaadje van Pim verder in.
 c Schrijf de vergelijking $(a - 8)^2 = 6$ zonder haakjes.
 d Kun je de vergelijking die je bij opdracht c krijgt met ontbinden in factoren oplossen? Licht je antwoord toe.

	Pim
☐	$(a - 8)^2 = 6$
☐	$(\sqrt{6})^2 = 6$ of $(-\sqrt{6})^2 = 6$
☐	$a - 8 = \sqrt{6}$ of $a - 8 = -\sqrt{6}$
☐	$a = \dots + \sqrt{6}$ of $a = \dots - \sqrt{6}$

Soms kun je een kwadratische vergelijking wel met bordjes oplossen, maar niet met ontbinden in factoren. Je gaat nu manieren leren waarmee je alle kwadratische vergelijkingen op kunt lossen.

- 12** a De formule $y = x^2 + 10x + 25$ kun je in de vorm $y = (x + \dots)^2$ schrijven.
Welk getal moet er op de puntjes staan?
- b Schrijf in de vorm $y = (x + \dots)^2$ of $y = (x - \dots)^2$.
- A $y = x^2 + 6x + 9$ C $y = x^2 - 16x + 64$
B $y = x^2 - 2x + 1$ D $y = x^2 + 12x + 36$
- 13** Vul op de puntjes de juiste getallen in.
- a Je kunt $y = x^2 + 8x + \dots$ schrijven als $y = (x + 4)^2$.
- b Je kunt $y = x^2 - 14x + \dots$ schrijven als $y = (x - 7)^2$.
- c Je kunt $y = x^2 + 20x + \dots$ schrijven als $y = (x + \dots)^2$.
- d Je kunt $y = x^2 - 18x + \dots$ schrijven als $y = (x - \dots)^2$.
- 14** a Roos zegt dat je de formule $y = x^2 + 6x$ kunt schrijven als $y = (x + 3)^2 - 9$.
Schrijf de formule $y = (x + 3)^2 - 9$ zonder haakjes en laat zien dat Roos gelijk heeft.
- b Youri zegt dat je de formule $y = x^2 + 6x + 14$ kunt schrijven als $y = (x + 3)^2 - 9 + 14$.
Leg uit waarom hij gelijk heeft.
- c Fatima schrijft de formule $y = x^2 + 6x - 10$ als $y = (x + 3)^2 - \dots - \dots$.
Welke getallen schrijft ze op de puntjes?
- d Daarna schrijft ze de formule korter als $y = (x + 3)^2 - \dots$.
Welk getal schrijft Fatima op de puntjes?
- 15** Ben wil de vergelijking $x^2 - 6x - 13 = 0$ oplossen.
- a Ga na dat hij de vergelijking niet met ontbinden in factoren kan oplossen.
- b Op het blaadje zie je hoe Ben de vergelijking eerst in de vorm $(x - \dots)^2 - \dots = 0$ schrijft en daarna oplost.
Vul het blaadje verder in.

☐	$x^2 - 6x - 13 = 0$	Ben
☐	$(x - \dots)^2 - \dots - 13 = 0$	
☐	$(x - \dots)^2 - \dots = 0$	
☐	$(x - \dots)^2 = \dots$	
☐	$x - \dots = \sqrt{\dots}$ of $x - \dots = -\sqrt{\dots}$	
☐	$x = \dots + \sqrt{\dots}$ of $x = \dots - \sqrt{\dots}$	

Theorie

Elke vergelijking van de vorm $x^2 + bx + c = 0$ kun je in de vorm $(x + p)^2 + q = 0$ schrijven, waarbij p de helft van b is. Dit heet **kwadraat afsplitsen**. In deze vorm kun je de vergelijking met bordjes oplossen.

Voorbeeld 1

Los op $x^2 + 12x + 7 = 0$.

Oplossing

$$x^2 + 12x + 7 = 0$$

$$(x + 6)^2 - 36 + 7 = 0$$

$$(x + 6)^2 - 29 = 0$$

$$(x + 6)^2 = 29$$

$$x + 6 = \sqrt{29} \text{ of } x + 6 = -\sqrt{29}$$

$$x = -6 + \sqrt{29} \text{ of } x = -6 - \sqrt{29}$$

Voorbeeld 2

Los op $x^2 + 10x + 35 = 0$.

Oplossing

$$x^2 + 10x + 35 = 0$$

$$(x + 5)^2 - 25 + 35 = 0$$

$$(x + 5)^2 + 10 = 0$$

$$(x + 5)^2 = -10$$

Dit kan niet. De vergelijking heeft geen oplossingen.

Ondersteunende route → maak opdracht D16

16 Los de vergelijkingen met kwadraat afsplitsen op.

a $x^2 + 22x - 5 = 0$

d $q^2 + 8q + 10 = 0$

b $x^2 + 10x + 5 = 0$

e $q^2 - 6q + 15 = 0$

c $x^2 - 18x + 2 = 0$

f $q^2 - 4q - 9 = 0$

17 a De vergelijking $t^2 + 8t + 3 = 4$ kun je oplossen door eerst op nul te herleiden en dan kwadraat af te splitsen. Los de vergelijking op deze manier op.

b Los de volgende vergelijkingen op dezelfde manier op.

A $a^2 + 12a = -29$

C $c^2 - 2c + 18 = 7$

B $b^2 - 12b - 14 = 5$

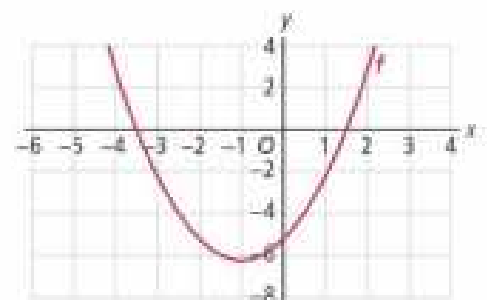
D $d^2 + 6d = 25$

18 De grafiek hoort bij de functie $f(x) = x^2 + 2x - 5,25$.

a Lees zo precies mogelijk de x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as af.

b Waarom kun je deze x -coördinaten niet berekenen door de bijbehorende vergelijking te ontbinden in factoren?

c Bereken met kwadraat afsplitsen de x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.



Uitdagende route → maak opdracht U2 en U3

Ondersteunende opdrachten

	Marieke
•	$x^2 - 20x + 70 = 0$
•	$(x - 10)^2 - \dots + 70 = 0$
•	$(x - \dots)^2 - \dots = 0$
•	$(x - \dots)^2 = \dots$
•	$x - \dots = \sqrt{\dots}$ of $x - \dots = -\sqrt{\dots}$
•	$x = \dots + \sqrt{\dots}$ of $x = \dots - \sqrt{\dots}$

	Thomas
•	$q^2 + 8q + 17 = 0$
•	$(q + \dots)^2 - \dots + 17 = 0$
•	$(q + \dots)^2 + \dots = 0$
•	$(q + \dots)^2 = \dots$
•	Dit kan niet. De vergelijking heeft geen oplossingen.

- 016** Op de blaadjes zie je hoe Marieke en Thomas een vergelijking met kwadraat afsplitsen oplossen.
- Waarom schrijft Marieke op de tweede regel $(x - 10)^2$?
 - Leg uit waarom Marieke op de tweede regel op de puntjes het getal 100 moet invullen.
 - Vul het blaadje van Marieke verder in.
 - Vul het blaadje van Thomas verder in.
 - Waarom heeft de vergelijking van Thomas geen oplossingen?

Los de vergelijkingen met kwadraat afsplitsen op.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| f $x^2 + 6x - 5 = 0$ | i $q^2 - 4q + 15 = 0$ |
| g $x^2 - 2x + 2 = 0$ | j $q^2 + 10q + 8 = 0$ |
| h $x^2 + 16x + 5 = 0$ | k $q^2 - 12q - 7 = 0$ |

Uitdagende opdrachten

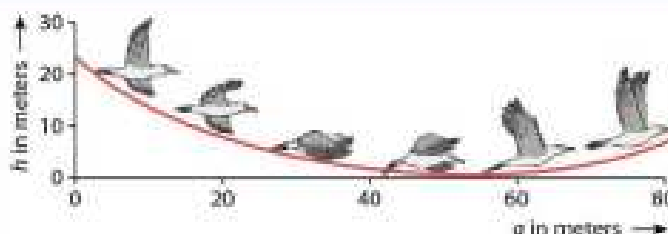
- U2** Met kwadraat afsplitsen hoef je niet altijd een geheel getal tussen de haakjes te krijgen.
Los de vergelijkingen met kwadraat afsplitsen op.
- $x^2 + 9x + 11\frac{1}{4} = 0$
 - $x^2 + \frac{1}{2}x = 2\frac{3}{16}$
- U3**
- Waarom heeft de vergelijking $x^2 + 6x + 100 = 0$ geen oplossingen?
 - Voor welke waarde van c heeft de vergelijking $x^2 + 6x + c = 0$ één oplossing?

- Je leert**
- hoe je een kwadratische vergelijking met de *abc*-formule oplost
 - hoe je met de discriminant nagaat hoeveel oplossingen een kwadratische vergelijking heeft
- Leerroutes**
- ondersteunend: 19—20—21—O22—23—24—25
 - doorlopend: 19—20—21—22—23—24—25
 - uitdagend: 19—21—22—23—24—U4—U5

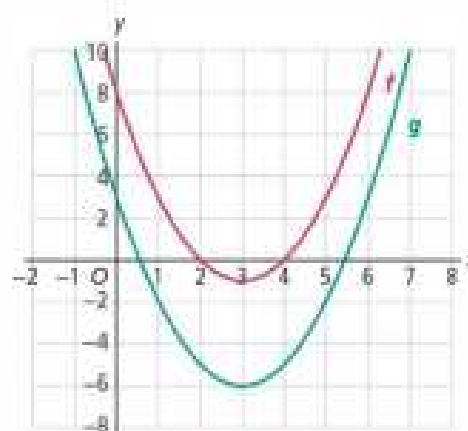
De hoogte h in meters van een vogel tijdens een vlucht kun je berekenen met de functie $h(a) = 0,01a^2 - a + 25,5$.

Hierin is a de horizontale afstand in meters vanaf het startpunt.

- Raakt de vogel de grond?



- 19** De grafieken van de functies $f(x) = x^2 - 6x + 8$ en $g(x) = x^2 - 6x + 3$ zijn getekend.
- Los met ontbinden in factoren de vergelijking $x^2 - 6x + 8 = 0$ op en bereken de x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
 - Tom moet de vergelijking $x^2 - 6x + 3 = 0$ oplossen. Waarom lukt dat niet met ontbinden in factoren?
 - Los de vergelijking van Tom met kwadraat afsplitsen op. Rond je antwoord af op één decimaal.
 - Controleer je antwoord met behulp van de grafiek.



Theorie

Niet elke kwadratische vergelijking is met ontbinden in factoren op te lossen. Er is een formule die gebaseerd is op kwadraat afsplitsen waarmee je elke kwadratische vergelijking kunt oplossen. De oplossingen van de kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ of } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Deze *abc-formule* schrijf je vaak korter door daarin de *discriminant* $D = b^2 - 4ac$ te gebruiken.

De oplossingen van de kwadratische vergelijking zijn dan

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ of } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Voorbeeld 1Los op $2x^2 + x - 6 = 0$.**Oplossing**

$$a = 2, b = 1 \text{ en } c = -6$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 1^2 - 4 \times 2 \times -6 = 49$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ of } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2 \times 2} \text{ of } x = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{-1 + 7}{4} = 1\frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{-1 - 7}{4} = -2$$

Voorbeeld 2Los op $x^2 - 5x - 3 = 0$.**Oplossing**

$$a = 1, b = -5 \text{ en } c = -3$$

$$D = b^2 - 4ac$$

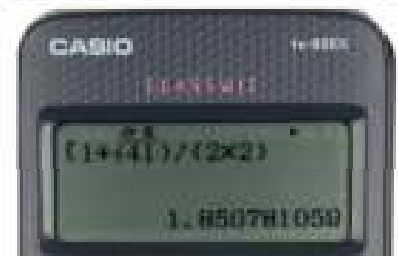
$$D = (-5)^2 - 4 \times 1 \times -3 = 37$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ of } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2 \times 1} \text{ of } x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2} \text{ of } x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2}$$

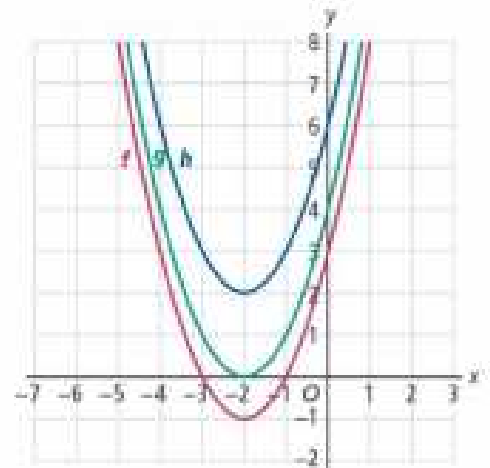
- 20** a Waarom staan er in voorbeeld 2 bij het berekenen van de discriminant haakjes om -5 ?
- b Ga na dat de exacte oplossingen in voorbeeld 2 op twee decimalen afgerond gelijk zijn aan $5,54$ en $-0,54$.
- 21** Rob lost de vergelijking $2x^2 - x - 5 = 0$ met behulp van de *abc*-formule op.
- a Welke waarden hebben a , b en c van de *abc*-formule in deze vergelijking?
- b Op de bovenste rekenmachine zie je hoe Rob de discriminant berekent. Waarom zet Rob haakjes om -1 ?
- c Op de onderste rekenmachine zie je hoe Rob één van de twee oplossingen berekent. Waarom gebruikt Rob hier haakjes?
- d Ga na dat de tweede oplossing van de vergelijking op twee decimalen afgerond gelijk is aan $-1,35$.



Ondersteunende route → maak opdracht D22

- 22** Los de vergelijkingen met de *abc*-formule op. Geef exacte antwoorden en een benadering in twee decimalen.
- a $-2x^2 + 13x - 15 = 0$ d $13p + 18p^2 + 2 = 0$
- b $5x^2 - 6x - 1 = 0$ e $4v^2 + 3v - 1 = 0$
- c $-\frac{1}{4}w^2 - w + 1 = 0$ f $r^2 - 6\frac{1}{2}r + 3 = 0$

- 23** De parabolen horen bij de functies $f(x) = x^2 + 4x + 3$, $g(x) = x^2 + 4x + 4$ en $h(x) = x^2 + 4x + 6$.
- Los de vergelijking $f(x) = 0$ met de abc-formule op.
 - Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $f(x) = 0$? Hoe kun je dat aan de bijbehorende grafiek zien?
 - Is de discriminant in opdracht a positief, negatief of gelijk aan 0?
 - Maak de opdrachten a, b en c ook voor de vergelijking $g(x) = 0$.
 - Ga na dat de discriminant van de vergelijking $h(x) = 0$ negatief is.
 - Verklaar met de grafiek van h dat de vergelijking $h(x) = 0$ geen oplossingen heeft.



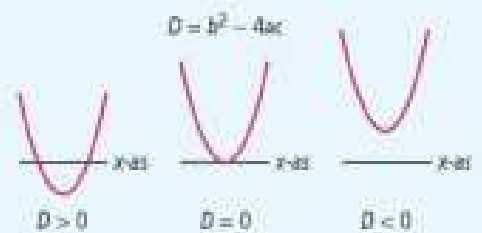
Theorie

Aan de discriminant van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ kun je zien hoeveel oplossingen deze vergelijking heeft.

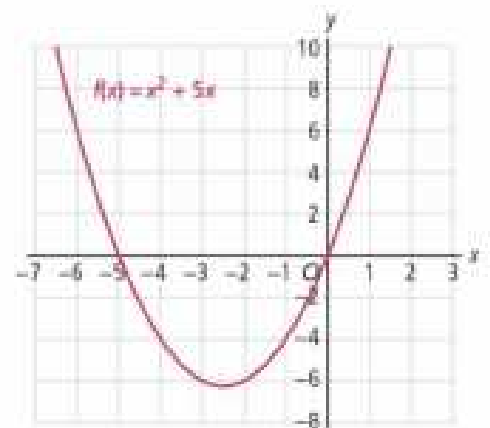
Als $D > 0$, dan zijn er twee oplossingen.

Als $D = 0$, dan is er één oplossing.

Als $D < 0$, dan zijn er geen oplossingen.



- 24** Ga met de discriminant na hoeveel oplossingen de vergelijkingen hebben.
- $x^2 + 2x - 10 = 0$
 - $2x^2 - 9x + 11 = 0$
 - $8x^2 - 16x + 8 = 0$
 - $3x^2 - 7x + 4 = 0$
- 25** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 5x + c$. In het assenstelsel zie je dat de bij $c = 0$ horende parabool twee snijpunten met de x -as heeft.
- Hoeveel snijpunten heeft de bij $c = 3$ horende parabool met de x -as? Controleer je antwoord met behulp van de discriminant.
 - Laat zien dat de bij $c = 6,25$ horende parabool precies één gemeenschappelijk punt met de x -as heeft.
 - Bij welke waarden van c heeft de bijbehorende parabool geen snijpunten met de x -as?



Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5

Ondersteunende opdrachten

- 022 Phill gaat de vergelijking $3x^2 - 6x + 2 = 0$ met de *abc*-formule oplossen.
- Welke waarden hebben a , b en c van de *abc*-formule in deze vergelijking?
 - Waarom zet Phill bij het berekenen van de discriminant haakjes om -6 ?
 - Ga na dat de discriminant gelijk is aan 12.
 - Waarom schrijft Phill bij het invullen van de getallen in de *abc*-formule 6 in plaats van -6 op?
 - Vul het blaadje verder in en schrijf de exacte oplossingen op.
 - Ga na dat de exacte oplossingen van de vergelijking op twee decimalen afgerond gelijk zijn aan 1,58 en 0,42.

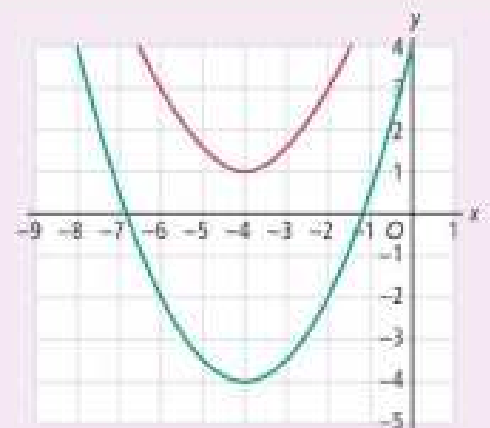
Los de vergelijkingen met de *abc*-formule op. Geef exacte antwoorden en een benadering in twee decimalen.

- | | |
|---------------------------------|-----------------------|
| g $2x^2 + 3x - 4 = 0$ | j $2p^2 - 7p + 1 = 0$ |
| h $6x^2 - 13x + 5 = 0$ | k $-r - 3r^2 + 2 = 0$ |
| i $-v^2 + 4v - \frac{1}{2} = 0$ | l $4w^2 + 6w + 2 = 0$ |

	$3x^2 - 6x + 2 = 0$	Phill
	$a = 3, b = -6$ en $c = 2$	
	$D = b^2 - 4ac$	
	$D = (-6)^2 - 4 \times \dots \times \dots = \dots$	
	$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ of $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$	
	$x = \frac{6 + \sqrt{\dots}}{2 \times 3}$ of $x = \frac{6 - \sqrt{\dots}}{2 \times 3}$	
	$x = \frac{6 + \sqrt{\dots}}{\dots}$ of $x = \frac{6 - \sqrt{\dots}}{\dots}$	

Uitdagende opdrachten

- U4 Voor twee waarden van c zijn de grafieken van de functie $f(x) = 0,5x^2 + 4x + c$ getekend. Voor welke waarden van c heeft de grafiek van f geen punten gemeenschappelijk met de x -as?



- U5 De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ zijn volgens de *abc*-formule $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ of $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$. De symmetrieas van de parabool ligt midden tussen de snijpunten van de parabool met de x -as. Laat zien dat de formule voor de symmetrieas $x = \frac{-b}{2a}$ is.

Je leert • hoe je de manier kiest waarmee je een kwadratische vergelijking oplost

Leerroutes • ondersteunend: 26—27—28—029—30—31
 • doorlopend: 26—27—28—29—30—31
 • uitdagend: 27—28—29—30—31—U6

- Geef van iedere vergelijking aan met welke manieren je deze kunt oplossen.

A $q^2 + 8q + 7 = 0$

B $y^2 - 81 = 0$

C $3(x + 10)(x + 2) = 0$

D $3a^2 + 10a - 7 = 0$

E $p^2 + 2p = 0$



26 Gegeven zijn vier vergelijkingen.

A $(2l - 3)^2 = 49$

C $20 - (10 - 4m)^2 = 16$

B $3k^2 + 6k = 5k^2$

D $-\frac{1}{2}n^2 + 4n - 3\frac{1}{2} = 0$

- Los vergelijking A met bordjes op.
- Welke vergelijking kun je nog meer met bordjes oplossen? Los die vergelijking op.
- Los vergelijking B met ontbinden in factoren op.
- Vermenigvuldig in vergelijking D aan beide kanten van het gelijkteken alle termen met -2 en los de verkregen vergelijking met ontbinden in factoren op.

27 Op het blaadje staan vijf vergelijkingen.

- Welke vergelijking met haakjes los je met $A \times B = 0$ op? Los die vergelijking op.
- Los de andere vergelijking met haakjes op.
- Herleid vergelijking C op nul en leg uit dat je de verkregen vergelijking niet met ontbinden in factoren kunt oplossen.
- Los vergelijking C met kwadraat afsplitsen op.
- Los vergelijking A met ontbinden in factoren op.
- Los vergelijking E met de abc-formule op.

A $2w^2 + 10w + 12 = 0$

B $(2y + 5)(y - 3) = -12$

C $v^2 - 8 = -14v$

D $-10(x - 5)(x - 16) = 0$

E $z^2 - 11z - 7 = 0$

- 28 a Welke vergelijking op het blaadje is geschreven in de vorm $A \times B = 0$? Los die vergelijking op.
- b Bij welke vergelijking kun je ontbinden in factoren? Los ook die vergelijking op.
- c Los de vergelijking op die je eerst op nul moet herleiden.
- d Eén vergelijking is te ontbinden in factoren nadat je eerst aan beide kanten van het gelijkteken alle termen met 10 hebt vermenigvuldigd. Los die vergelijking op.
- e Los de overgebleven vergelijkingen met kwadraat afsplitsen of met de abc -formule op.

A $s^2 + 4s - 10 = 0$

B $u^2 - u = 12$

C $3t^2 - 5t = 0$

D $(3p - 7)(p + 2) = 0$

E $0,1r^2 - 0,2r - 0,3 = 0$

F $2q^2 - q - 28 = 0$

Theorie

Bij het oplossen van een kwadratische vergelijking kun je soms kiezen uit meer manieren. Kijk goed naar de vorm van de vergelijking en kies dan de manier die jij het handigst vindt.

Voorbeeld 1

Los op $8(x - 7)(2x + 5) = 0$.

Oplossing

met $A \times B = 0$

$$8(x - 7)(2x + 5) = 0$$

$$x - 7 = 0 \text{ of } 2x + 5 = 0$$

$$x = 7 \text{ of } 2x = -5$$

$$x = 7 \text{ of } x = -2\frac{1}{2}$$

Voorbeeld 2

Los op $(x - 6)^2 = 16$.

Oplossing

met bordjes

$$(x - 6)^2 = 16$$

$$4^2 = 16 \text{ of } (-4)^2 = 16$$

$$x - 6 = 4 \text{ of } x - 6 = -4$$

$$x = 10 \text{ of } x = 2$$

Voorbeeld 3

Los op $3x^2 + 24x = 0$.

Oplossing

met ontbinden in factoren

$$3x^2 + 24x = 0$$

$$3x(x + 8) = 0$$

$$3x = 0 \text{ of } x + 8 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -8$$

Voorbeeld 4

Los op $x^2 + 6x + 5 = 13$.

Oplossing

met kwadraat afsplitsen

$$x^2 + 6x + 5 = 13$$

$$x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$(x + 3)^2 - 9 - 8 = 0$$

$$(x + 3)^2 - 17 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 17$$

$$x + 3 = \sqrt{17} \text{ of } x + 3 = -\sqrt{17}$$

$$x = -3 + \sqrt{17} \text{ of } x = -3 - \sqrt{17}$$

Voorbeeld 5

Los op $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

Oplossing

met de abc -formule

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$a = 3, b = -5 \text{ en } c = 2$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ of } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{1}}{2 \times 3} = 1 \text{ of } x = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$$

Ondersteunende route → maak opdracht D29

29 Los de vergelijkingen op.

- | | |
|------------------------------|-------------------------|
| a $\frac{1}{4}p^2 + 2p = -3$ | e $s^2 + 10 = 4s + 6$ |
| b $(3 - 6x)(2x - 5) = 0$ | f $0,2(x - 4)^2 = 5$ |
| c $(k - 5)^2 + 13 = 17$ | g $3m^2 + 18m - 15 = 0$ |
| d $8a - 3a^2 = 0$ | h $-q(6 - 2q) = 20$ |

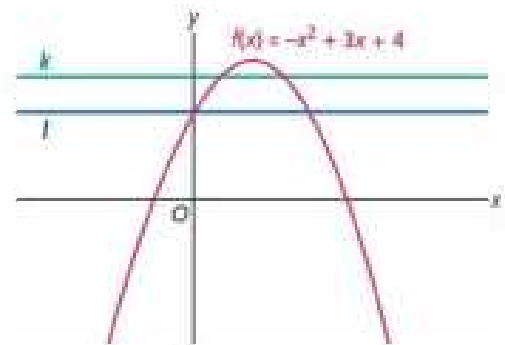
30 Los de vergelijkingen op.

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| a $x(x - 2) = 3$ | d $(x - 4)^2 + 9 = 7$ |
| b $-3(p + 2)(8p - 2) = 0$ | e $2(t + 1)(t + 3) = 6$ |
| c $(2h - 4)^2 = 121$ | f $2r^2 = 9r - 7$ |

31 De parabool bij de functie $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ en de lijnen k en l zijn geschetst. Hierbij kun je drie vergelijkingen opstellen.

- A $-x^2 + 3x + 4 = 4$
 B $-x^2 + 3x + 4 = 0$
 C $-x^2 + 3x + 4 = 5$

- a Welke vergelijking hoort bij welke situatie?
- 1 Je berekent de x -coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as.
 - 2 Je berekent de x -coördinaten van de snijpunten van de parabool met de lijn $y = 4$.
 - 3 Je berekent de x -coördinaten van de snijpunten van de parabool met de lijn $y = 5$.
- b Los de vergelijkingen op.
- c Bij situatie 4 hoort de vergelijking $-x^2 + 3x + 4 = -4$. Omschrijf de situatie en los de vergelijking op. Rond de antwoorden af op twee decimalen.



Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

- 029** Op het blaadje staan zes vergelijkingen
- Herschrijf vergelijking A in de vorm $A \times B = 0$ en los de verkregen vergelijking op.
 - Waarom moet je bij het oplossen van vergelijking A de haakjes niet wegwerken, maar bij vergelijking B wel?
 - Los vergelijking B op.
 - Los vergelijking C met bordjes op.
 - Herleid vergelijking D op nul en los de verkregen vergelijking met ontbinden in factoren op.
 - Los vergelijking E met ontbinden in factoren op nadat je aan beide kanten van het gelijkteken alle termen door 3 hebt gedeeld.
 - Leg uit dat je vergelijking F niet met ontbinden in factoren kunt oplossen.
 - Los vergelijking F met kwadraat afsplitsen op.

Los de volgende vergelijkingen op.

- $(r+2)^2 + 5 = 54$
- $x^2 - 3x - 4 = 2$
- $g^2 - 8g + 3 = 12$
- $4k^2 - 16 = -12k$

A $4(3x+2)(-2x+4) = 0$
 B $2(x-3)(x+4) = 36$
 C $(h-7)^2 - 80 = 1$
 D $k^2 = 4k - 3$
 E $3w^2 - 12w = 15$
 F $y^2 - 6y = 54$

Uitdagende opdrachten

- U6** De boog van de Waalbrug in Nijmegen heeft de vorm van een parabool. Met de functie $h(a) = -0,008a^2 + 1,6a - 10$ kun je de hoogte h in meters van de boog ten opzichte van het wegdek berekenen. Hierin is a de horizontale afstand in meters tot de linker pijler.
- Hoeveel meter is de afstand van het weggedeelte tussen de punten A en B? Rond je antwoord af op één decimaal.

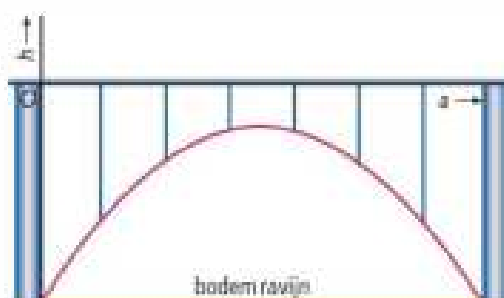
Deze paragraaf bevat opdrachten die een indruk geven van wiskunde A/C en wiskunde B.

32 Los de vergelijkingen op.

- a $7d^2 - 5d - 2 = 0$ d $\frac{1}{3}v^2 = 27$
 b $-10(2x - 5)(x - 16) = 0$ e $2(h - 5)^2 - 16 = 0$
 c $6w + 7w^2 = 3w^2$ f $4k^2 + 20k = -24$

33 Een brug loopt over een ravijn. De boog aan de onderkant van de brug heeft de vorm van een parabool. Met de functie $h(a) = -0,01a^2 + 1,5a - 71$ kun je de hoogte h van de boog in meters gemeten vanaf het wegdek berekenen. Hierin is a het aantal meters vanaf de linker pilaar.

- a Bereken $h(0)$ en leg uit wat deze waarde betekent.
 b Bereken de afstand tussen de twee pilaren.
 c Bereken hoeveel meter het hoogste punt van de boog boven de bodem van het ravijn ligt.
 d Een stuntvlieger wil onder de boog door vliegen. De afstand tot de bodem moet minimaal 26 meter zijn. Leg uit dat in deze situatie $h(a) = -45$.
 e Bereken hoe breed de boog is op een hoogte van 26 meter boven de bodem.



34 Los de vergelijkingen op en zet de letter bij de vergelijking in het hokje boven de oplossing.

4,24 1,73	-3 0 0,2 0,6	1,5 1,33 4 4,24 -0,24 1			
12 0 0,6 -3,5	0,5 0	11 0,6 0 1	4,24 4,5 0 -3,5	5 0,6	-1,73 1,4 0,75 7 -2 4,24 -0,24 12

- A $5x^2 + 49 = 42x$ L $x(x - 13) + 12 = 0$
 B $x^2 + 4x + 4 = 0$ O $(x - 2)^2 - 5 = 0$
 C $(3x - 4)^2 = 0$ P $7x^2 = 21$
 D $2x^2 - 4x = 30$ R $(2x - 7)(4x + 3) = -44x$
 E $-2x(3x + 4) = -x^2 - 11x$ S $-x^2 + 3x - 2\frac{1}{4} = 0$
 H $x^2 = 8(x - 2)$ V $2x^2 - 31x + 99 = 0$
 J $(2x + 1)^2 - 8x = 0$ Z $25x^2 - 10x = -1$

- 35** De grafiek van één van de functies $f(x) = (x + 3)^2 + 4$, $g(x) = -x^2 + 6x - 9$ en $h(x) = x^2 - 4x - 6,25$ is geschetst. In de schets zie je de ligging van de grafiek ten opzichte van de x -as.
- Welk functievoorschrift past bij de geschetste grafiek?
 - Maak voor de andere functievoorschriften ook zo'n schets van de grafiek.



- AC36** De directie van voetbalclub WHW wil de prijs van de seizoenkaarten verhogen. Eerst doet ze een onderzoek naar de gevolgen voor de verkoop. Het blijkt dat voor iedere € 20,- die de prijs omhoog gaat er honderd seizoenkaarten minder verkocht zullen worden. Bij een prijs van € 900,- zullen er helemaal geen seizoenkaarten meer verkocht worden.
- Leg uit dat je het aantal seizoenkaarten a bij een prijs van p euro's kunt berekenen met de formule $a = 4500 - 5p$.
 - De directie wil 3000 seizoenkaarten verkopen. Bereken hoeveel de seizoenkaart dan moet kosten.
 - Ga na dat bij 3000 seizoenkaarten de totale opbrengst voor de club € 900.000,- wordt.
 - Laat zien dat voor de totale opbrengst TO in euro's de formule $TO = p(4500 - 5p)$ geldt.
 - Bij welke prijs is de totale opbrengst maximaal en hoeveel euro is de totale opbrengst dan?
 - Hoeveel seizoenkaarten worden er verkocht als de totale opbrengst maximaal is?



- B37** Los de vergelijkingen met de abc -formule en met kwadraat afsplitsen op en laat zien dat de oplossingen hetzelfde zijn.
- $x^2 - 2x - 3 = 2$
 - $t^2 + 14t = -39$
 - $-v^2 + 6v = \frac{1}{2}$
- B38** Voor welke waarden van p ligt de parabool bij de functie $f(x) = -2x^2 + px - 18$ in zijn geheel onder de x -as?

Theorie

Merkwaardig product

Als je de vergelijking $x^2 - p^2 = 0$ met ontbinden in factoren oplost, dan kun je de vergelijking als $(x + p)(x - p) = 0$ schrijven. De vorm $(x + p)(x - p)$ heet een merkwaardig product.

Voorbeeld 1

Los op $x^2 - 16 = 0$.

Oplossing

met bordjes

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$4^2 = 16 \text{ of } (-4)^2 = 16$$

$$x = 4 \text{ of } x = -4$$

Voorbeeld 2

Los op $x^2 - 16 = 0$.

Oplossing

met een merkwaardig product

$$x^2 - 16 = 0$$

$$(x + 4)(x - 4) = 0$$

$$x + 4 = 0 \text{ of } x - 4 = 0$$

$$x = -4 \text{ of } x = 4$$

S1 Los de vergelijkingen met een merkwaardig product op.

a $x^2 - 121 = 0$

b $3x^2 - 48 = 0$

Vaardigheid

Je kunt een kwadratische vergelijking met ontbinden in factoren oplossen.

Je kunt bij een vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ alleen ontbinden in factoren als $a = 1$.

Voorbeeld 1

Los op $7x^2 - 14x - 21 = 0$.

Oplossing

$$7x^2 - 14x - 21 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x + 1 = 0 \text{ of } x - 3 = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 3$$

Voorbeeld 2

Los op $\frac{1}{3}x^2 + 3x + 6 = 0$.

Oplossing

$$\frac{1}{3}x^2 + 3x + 6 = 0$$

$$x^2 + 9x + 18 = 0$$

$$(x + 3)(x + 6) = 0$$

$$x + 3 = 0 \text{ of } x + 6 = 0$$

$$x = -3 \text{ of } x = -6$$

Voorbeeld 3

Los op $-x^2 - 3x + 28 = 0$.

Oplossing

$$-x^2 - 3x + 28 = 0$$

$$x^2 + 3x - 28 = 0$$

$$(x - 4)(x + 7) = 0$$

$$x - 4 = 0 \text{ of } x + 7 = 0$$

$$x = 4 \text{ of } x = -7$$

S2 Los de vergelijkingen op.

a $2x^2 + 12x + 18 = 0$

b $3x^2 - 18x + 15 = 0$

c $-\frac{1}{2}x^2 - 3x + 8 = 0$

d $-x^2 - 2x + 24 = 0$

Vaardigheid

Je kunt een kwadratische vergelijking met kwadraat afsplitsen oplossen.

Elke vergelijking van de vorm $x^2 + bx + c = 0$ kun je in de vorm $(x + p)^2 + q = 0$ schrijven, waarbij p de helft van b is. Dit heet kwadraat afsplitsen. In deze vorm kun je de vergelijking met bordjes oplossen.

Voorbeeld 1

Los op $x^2 - 14x + 8 = 0$.

Oplossing

$$x^2 - 14x + 8 = 0$$

$$(x - 7)^2 - 49 + 8 = 0$$

$$(x - 7)^2 - 41 = 0$$

$$(x - 7)^2 = 41$$

$$x - 7 = \sqrt{41} \text{ of } x - 7 = -\sqrt{41}$$

$$x = 7 + \sqrt{41} \text{ of } x = 7 - \sqrt{41}$$

Voorbeeld 2

Los op $x^2 + 12x + 50 = 0$.

Oplossing

$$x^2 + 12x + 50 = 0$$

$$(x + 6)^2 - 36 + 50 = 0$$

$$(x + 6)^2 + 14 = 0$$

$$(x + 6)^2 = -14$$

Dit kan niet. De vergelijking heeft geen oplossingen.

S3 Los de vergelijkingen met kwadraat afsplitsen op.

a $x^2 - 10x - 5 = 0$

b $q^2 + 26q + 24 = 0$

Vaardigheid

Je kunt een kwadratische vergelijking met de **abc-formule** oplossen.

Niet elke kwadratische vergelijking is met ontbinden in factoren op te lossen. Er is een formule die gebaseerd is op kwadraat afsplitsen waarmee je elke kwadratische vergelijking kunt oplossen. De oplossingen van de kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ of } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Deze **abc-formule** schrijf je vaak korter door daarin de discriminant $D = b^2 - 4ac$ te gebruiken.

De oplossingen van de kwadratische vergelijking zijn dan

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ of } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Voorbeeld

Los op $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

Oplossing

$$a = 3, b = -2 \text{ en } c = -1$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-2)^2 - 4 \times 3 \times -1 = 16$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ of } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x = \frac{2 + \sqrt{16}}{2 \times 3} \text{ of } x = \frac{2 - \sqrt{16}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{2 + 4}{6} = 1 \text{ of } x = \frac{2 - 4}{6} = -\frac{1}{3}$$

S4 Los de vergelijkingen met de **abc-formule** op.

a $3x^2 - 5x - 8 = 0$

b $-5v^2 + 2v + 14 = 0$

Vaardigheid

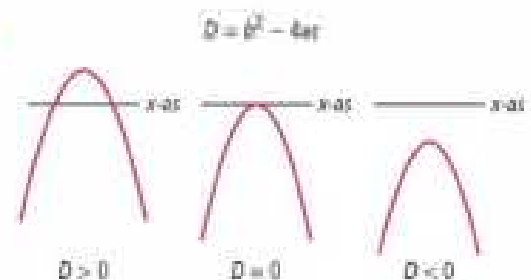
Je kunt met de discriminant **nagaan hoeveel oplossingen een kwadratische vergelijking heeft**.

Aan de discriminant van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ kun je zien hoeveel oplossingen deze vergelijking heeft.

Als $D > 0$, dan zijn er twee oplossingen.

Als $D = 0$, dan is er één oplossing.

Als $D < 0$, dan zijn er geen oplossingen.



S5 Ga met de discriminant na hoeveel oplossingen de vergelijkingen hebben.

a $x^2 - 10x - 20 = 0$

b $3x^2 + 8x + 15 = 0$

c $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Vaardigheid

Je kunt de manier kiezen waarmee je een kwadratische vergelijking oplost.

Bij het oplossen van een kwadratische vergelijking kun je soms kiezen uit meer manieren. Kijk goed naar de vorm van de vergelijking en kies dan de manier die jij het handigst vindt.

Voorbeeld 1

Los op $73 - (x - 2)^2 = 48$.

Oplossing

met bordjes

$$73 - (x - 2)^2 = 48$$

$$(x - 2)^2 = 25$$

$$5^2 = 25 \text{ of } (-5)^2 = 25$$

$$x - 2 = 5 \text{ of } x - 2 = -5$$

$$x = 7 \text{ of } x = -3$$

Voorbeeld 2

Los op $2x^2 + 3x = 9x$.

Oplossing

met ontbinden in factoren

$$2x^2 + 3x = 9x$$

$$2x^2 - 6x = 0$$

$$2x(x - 3) = 0$$

$$2x = 0 \text{ of } x - 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 3$$

Voorbeeld 3

Los op $7(x - 5)(3x + 9) = 0$.

Oplossing

met $A \times B = 0$

$$7(x - 5)(3x + 9) = 0$$

$$x - 5 = 0 \text{ of } 3x + 9 = 0$$

$$x = 5 \text{ of } 3x = -9$$

$$x = 5 \text{ of } x = -3$$

Voorbeeld 4

Los op $x^2 + 8x + 5 = 18$.

Oplossing

met kwadraat afsplitsen

$$x^2 + 8x + 5 = 18$$

$$x^2 + 8x - 13 = 0$$

$$(x + 4)^2 - 16 - 13 = 0$$

$$(x + 4)^2 - 29 = 0$$

$$(x + 4)^2 = 29$$

$$x + 4 = \sqrt{29} \text{ of } x + 4 = -\sqrt{29}$$

$$x = -4 + \sqrt{29} \text{ of } x = -4 - \sqrt{29}$$

Voorbeeld 5

Los op $3x^2 - 7x - 1 = 0$.

Oplossing

met de abc-formule

$$3x^2 - 7x - 1 = 0$$

$$a = 3, b = -7 \text{ en } c = -1$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-7)^2 - 4 \times 3 \times -1 = 61$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ of } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x = \frac{7 + \sqrt{61}}{2 \times 3} \text{ of } x = \frac{7 - \sqrt{61}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{7 + \sqrt{61}}{6} \text{ of } x = \frac{7 - \sqrt{61}}{6}$$

S6 Los de vergelijkingen op.

a $-2h^2 + 6h + 56 = 0$

b $(a + 11)^2 - 5 = 20$

c $2(x - 6)(4x - 20) = 0$

d $r^2 + 6r - 2 = -9$

T1 Los de vergelijkingen met ontbinden in factoren op.

- a $h^2 - 6h - 40 = 0$
- b $3a^2 + 12a + 6 = -6$
- c $0,2x^2 + 0,4x = 3$
- d $-x^2 + 7x - 12 = 0$

T2 Los de vergelijkingen met kwadraat afsplitsen op.

- a $t^2 + 12t + 25 = 0$
- b $d^2 - 2d = 4$
- c $x^2 + 12x + 16 = 0$
- d $g^2 - 8g = -36$

T3 Mieke verkoopt donuts. De winst die ze op een dag maakt, is afhankelijk van de prijs van een donut. Haar winst in euro's op een dag kun je berekenen met de functie $W(p) = -0,1p^2 + 15p - 360$.

Hierin is p de prijs van een donut in centen.

- a Hoeveel winst maakt Mieke bij een prijs van 50 cent per donut?
- b Welke prijs heeft een donut bij een winst van € 202,50?
- c Is dit de maximale winst? Leg je antwoord uit.



T4 Los de vergelijkingen met de *abc*-formule op. Geef exacte antwoorden en een benadering in twee decimalen.

- a $2w^2 + 7w = 4$
- b $0,5r^2 - 5r = -3$
- c $3k + 2k^2 - 1 = 0$
- d $x^2 + 2x + 1\frac{3}{4} = 0$

T5 Ga met de discriminant na hoeveel oplossingen de vergelijkingen hebben.

- a $5x^2 + 7x + 1 = 0$
- b $-x^2 + 3x - 10 = 0$
- c $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$
- d $3x^2 + 8x - 7 = 0$

- T6** Peter gooit van een flatgebouw een bal schuin omhoog. De hoogte h van de bal in meters vanaf de grond kun je berekenen met de functie $h(t) = -5t^2 + 10t + 40$. Hierin is t de tijd in seconden vanaf het moment dat Peter de bal omhoog gooit.
- Vanaf welke hoogte gooit Peter de bal omhoog?
 - Bereken na hoeveel seconden de bal weer op dezelfde hoogte als Peter is.
 - Bereken na hoeveel seconden de bal op de grond terecht komt.

- T7** Los de vergelijkingen op.

- | | |
|----------------------------|----------------------------------|
| a $2(x - 4)^2 = 18$ | e $-k(k + 4) = 8$ |
| b $3t^2 - 2t = 0$ | f $4(a + 1)(a - 6) = 120$ |
| c $4q^2 + 1 = -4q$ | g $4(g - 9)(g + 6) = 0$ |
| d $0,5r^2 - r = 2$ | h $2x^2 - 90 = 8$ |

- T8** Met de functie $h(a) = -0,09a^2 + 0,7a$ kun je de sprong van een atleet beschrijven. Hierin is h de hoogte in meters en a de afstand tot de afzetlijn in meters.
- Hoe ver komt de atleet met deze sprong?
 - Bij de tweede sprong van de atleet hoort de functie $h(a) = -0,1a^2 + 0,8a - 0,1$.
Los de vergelijking $-0,1a^2 + 0,8a - 0,1 = 0$ op. Hoeveel meter komt hij nu vanaf de afzetlijn neer?
 - Hoe kun je aan de oplossingen van opdracht b zien dat de tweede sprong ongeldig is?



- T9** Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 5x + 14$ en de lijn $y = 18$.
- De grafiek van f en de lijn snijden elkaar in twee punten. Bereken de coördinaten van die snijpunten.
 - Bereken voor welke waarden van c de grafiek van f één punt gemeenschappelijk heeft met de lijn $y = c$.

Je kunt een kwadratische vergelijking met ontbinden in factoren oplossen.

- E1 a Door welk getal heeft Sjaak aan beide kanten van het gelijktteken alle termen gedeeld?
 b Los zijn vergelijking verder op.
 c Met welk getal heeft Manique aan beide kanten van het gelijktteken alle termen vermenigvuldigd?
 d Los haar vergelijking verder op.
 e Los de volgende vergelijkingen op.

A $3x^2 + 15x - 18 = 0$

C $0,1x^2 + 2x + 10 = 0$

B $\frac{1}{2}x^2 + 6x + 10 = 0$

D $-4x^2 - 28x - 24 = 0$

- E2 Los de vergelijkingen op.

a $3y^2 - 6y - 9 = 0$

d $-x^2 + 7x - 12 = 0$

b $\frac{1}{3}a^2 + 3a = -6$

e $5x^2 - 30x = -40$

c $4x^2 - 12x + 10 = 2$

f $-0,5x^2 - 5x = 12$

Je kunt een kwadratische vergelijking met kwadraat afsplitsen oplossen.

- E3 Los de vergelijkingen met kwadraat afsplitsen op.

a $k^2 - 14k + 15 = 0$

d $t^2 - 8t = 10$

b $d^2 + 10d + 20 = 0$

e $v^2 - 12v + 60 = 0$

c $g^2 + 2g - 5 = 0$

f $p^2 - 6p = 18$

Je kunt een kwadratische vergelijking met de abc-formule oplossen.

- E4 Los de vergelijkingen met de abc-formule op. Geef exacte antwoorden en een benadering in twee decimalen.

a $x^2 + 1\frac{1}{2}x - 1 = 0$

d $2f^2 + 11f = -5$

b $\frac{1}{3}k^2 - 3k + \frac{1}{2} = 0$

e $-x^2 - 6x + 7 = 3$

c $3a^2 + 4a - 4 = 0$

f $0,6t^2 - 0,25t = 0,4$

Je kunt met de discriminant nagaan hoeveel oplossingen een kwadratische vergelijking heeft.

- E5 Ga met de discriminant na hoeveel oplossingen de vergelijkingen hebben.

a $3q^2 + 6q - 5 = 0$

c $8r^2 - 8r + 2 = 0$

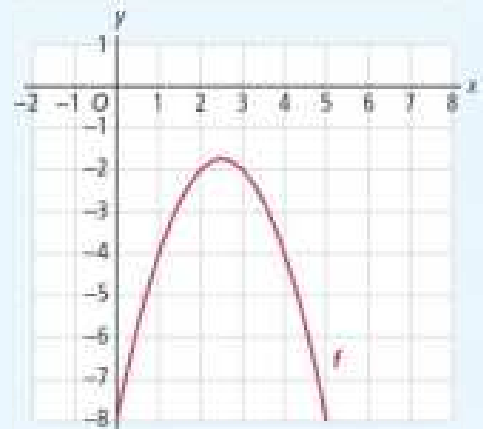
b $5h^2 + 4h + 5 = 0$

d $-u^2 + 2u - 5 = 0$

☐	$2x^2 + 24x + 40 = 0$			
☐	$x^2 + 12x + 20 = 0$			
☐	...			Sjaak

☐	$-\frac{1}{2}x^2 + 4x + 24 = 0$			
☐	$x^2 - 8x - 48 = 0$			
☐	...			Manique

- E6** Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 - 5x + c$. In het assenstelsel is de parabool bij $c = -8$ getekend.
- Hoeveel snijpunten heeft de parabool bij $c = -4$ met de x -as? Controleer je antwoord met behulp van de discriminant.
 - Laat zien dat bij $c = -6,25$ de parabool precies één gemeenschappelijk punt met de x -as heeft.
 - Bij welke waarden van c heeft de bijbehorende parabool twee snijpunten met de x -as?



Je kunt de manier kiezen waarmee je een kwadratische vergelijking oplost.

- E7**
- Welke vergelijking op het blaadje kun je met bordjes oplossen? Los die vergelijking op.
 - Waarom is het bij vergelijking A niet handig om aan beide kanten van het gelijkteken alle termen door 2 te delen?
 - Los vergelijking A met de abc -formule op.
 - Deel bij de twee overgebleven vergelijkingen aan beide kanten van het gelijkteken alle termen door 2 en herleid ze op nul.
 - Een van de verkregen vergelijkingen kun je met ontbinden in factoren oplossen. Los die vergelijking op.
 - Los de laatste vergelijking met kwadraat afsplitsen op.

A $2x^2 + 5x + 3 = 0$
 B $2x^2 + 4x + 8 = 14$
 C $2x^2 + 5 = 13$
 D $2x^2 + 8x + 8 = 14$

- E8**
- Welke twee vergelijkingen met haakjes los je met $A \times B = 0$ op? Los deze vergelijkingen op.
 A $(4x + 1)(2x - 5) = 0$ C $4(x + 3)(-x - 14) = 40$
 B $(x + 4)(x - 5) = 10$ D $2x(x - 9) = 0$
 - Los de overgebleven twee vergelijkingen op.

- E9** Los de vergelijkingen op.
- | | |
|-------------------------------|----------------------------|
| a $3(p - 2)^2 + 4 = 31$ | e $4(3x - 12)(5x - 1) = 0$ |
| b $(g + 1)(g - 5) = 7$ | f $s^2 + 8s - 3 = -4$ |
| c $2r = -6r^2$ | g $4m^2 - 15 = 125$ |
| d $\frac{1}{2}z(2z - 6) = -6$ | h $85 - 2v(v + 5) = -15$ |

Tussendoortje | Königsberg

Eulerwandeling

In de stad Königsberg bevinden zich zeven bruggen over de rivier de Pregel.

De wiskundige Euler, die leefde van 1707 tot 1783, formuleerde het probleem om een wandeling te maken waarbij je elke brug precies één keer oversteekt. Dit probleem is bekend geworden als de Eulerwandeling.

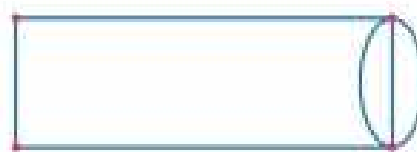
- Denk je dat het mogelijk is zo'n wandeling te maken?



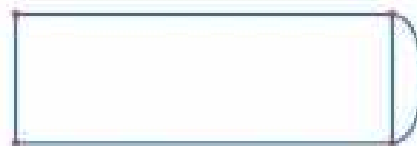
Grafen

Hiernaast zie je drie schematische tekeningen van een aantal plaatsen en de verbindingen tussen die plaatsen. Zo'n tekening noem je een graaf. De plaatsen noem je knooppunten en de verbindingen zijn de wegen.

- Is het mogelijk om bij graaf 1 een wandeling te maken zodat je alle wegen precies één keer doorloopt?
- Maakt het uit bij welk knooppunt je begint?
- Is het bij graaf 2 mogelijk om alle wegen precies één keer te doorlopen? Zo ja, bij welk knooppunt kun je dan beginnen?
- Waarom is het bij graaf 3 niet mogelijk om een wandeling te maken waarbij je alle wegen maar één keer doorloopt?
- Teken een extra weg in graaf 3 waardoor het wel mogelijk wordt.



1



2

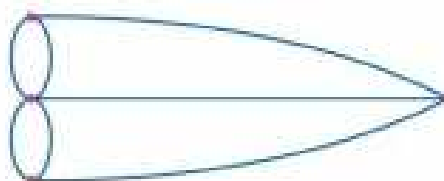


3

Zeven bruggen

Van de stad Königsberg zie je hiernaast een graaf. De bruggen zijn getekend als wegen.

- Leg uit waarom het niet mogelijk is om een wandeling te maken waarbij je elke brug precies één keer oversteekt.



$$x + 56$$





Nieuwe grafieken

5

In dit hoofdstuk

In de vorige hoofdstukken heb je kennis gemaakt met de eigenschappen van de grafieken van lineaire, kwadratische en exponentiële functies. In dit hoofdstuk komen daar de eigenschappen bij van grafieken die zichzelf herhalen.

Je leert welk effect het optellen van een getal bij een functievoorschrift op de grafiek heeft. Ook leer je welk effect het vermenigvuldigen met een factor van een functievoorschrift op de grafiek heeft. Daarna komt het combineren van optellen en vermenigvuldigen aan bod. Ten slotte leer je hoe je twee functievoorschriften bij elkaar optelt of van elkaar aftrekt en welk effect dat op de grafieken heeft.

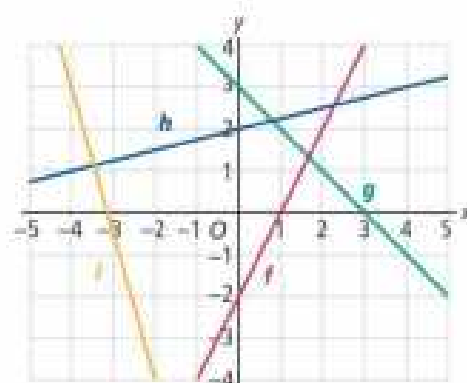


- V1 a Teken in een assenstelsel de grafiek van de functie $f(x) = -2x + 2$. Neem voor x de waarden -5 tot en met 5 .
- b Teken in hetzelfde assenstelsel ook de grafieken van de functies $g(x) = 2x + 2$ en $h(x) = -x + 2$.

Theorie

Het functievoorschrift $f(x) = ax + b$ is de algemene vorm van een **lineaire functie**. Hierin is a het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt en b het startgetal. De bijbehorende grafiek is een rechte lijn.

- V2 In het assenstelsel zijn vier rechte lijnen getekend.
- a Stel van de functies f , g en h het functievoorschrift op.
- b Leg uit dat van de functie i de richtingscoëfficiënt $-3\frac{1}{2}$ is.
- c Voor het functievoorschrift van i geldt $i(x) = -3\frac{1}{2}x + b$. Bereken met de coördinaten van het punt $(-4, 3)$ het startgetal en geef het functievoorschrift van i .
- d De lineaire functie j heeft de richtingscoëfficiënt 3 en de grafiek van j gaat door het punt $(7, 8)$. Stel het functievoorschrift van j op.
- e De grafiek van de lineaire functie k loopt evenwijdig aan de grafiek van g en gaat door het punt $(14, 23)$. Stel het functievoorschrift van k op.



Theorie

Het functievoorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ is de algemene vorm van een **kwadratische functie**. De bijbehorende grafiek is een dalparabool of een bergparabool. Parabolen hebben een top en een symmetrieas.

Als het getal voor x^2 positief is, dan is de grafiek een dalparabool. Als het getal voor x^2 negatief is, dan is de grafiek een bergparabool.

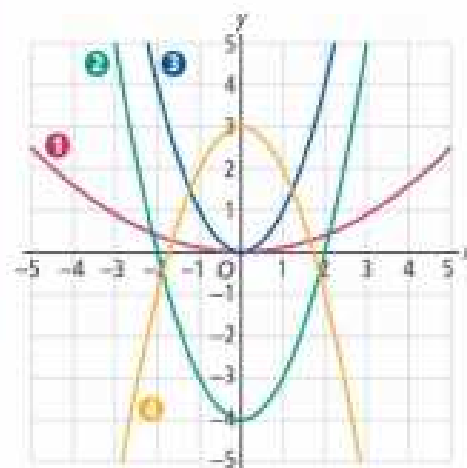
- V3 Zoek bij iedere functie de juiste parabool hiernaast.

A $f(x) = -x^2 + 3$

C $h(x) = x^2$

B $g(x) = 0,1x^2$

D $i(x) = x^2 - 4$



- V4 Gegeven is de functie $f(x) = ax^2$.
- Is de grafiek bij $a = 2$ een bergparabool of een dalparabool?
 - En de grafiek bij $a = -2$? En de grafiek bij $a = \frac{1}{2}$?
 - Voor welke waarden van a zijn de bijbehorende grafieken bergparabolen?
 - Bereken de waarde van a waarbij de bijbehorende grafiek door het punt $(-3, 81)$ gaat.
 - Neem $a = 2$ en vul de tabel verder in.

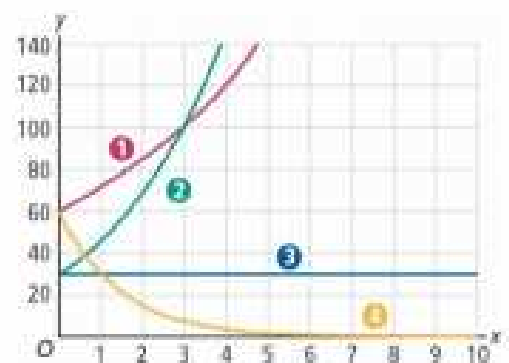
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

- Teken de grafiek bij de tabel.

Theorie

Het functievoorschrift $f(x) = b \cdot g^x$ is de algemene vorm van een **exponentiële functie**. Hierin is b de beginhoeveelheid en g de groeifactor.

- V5 Bij de grafieken horen deze exponentiële functies.
- $f(x) = 30 \cdot 1,5^x$
 - $g(x) = 30 \cdot 1^x$
 - $h(x) = 60 \cdot 0,5^x$
 - $i(x) = 60 \cdot 1,2^x$
- Welke van deze functies hoort bij grafiek 4?
 - Geef bij de overgebleven grafieken aan welke functie erbij hoort.
 - Welke van deze functies is eigenlijk een lineaire functie?



- V6 Gegeven zijn de functies $k(x) = \frac{3}{4} \cdot 2^x$ en $l(x) = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
- Geef bij beide functies de beginhoeveelheid.
 - Bereken $k(5)$.
 - Ga na of het punt $(6, 2\frac{1}{2})$ op de grafiek van l ligt.

- V7 Schrijf de formules op de manier van Jody zonder haakjes.

- $y = 3(x - 4)$
- $y = -2\frac{1}{2}(8x + 10)$
- $y = -(-5x + 2) - 3x$
- $y = -4(x^2 + 5) + 9$
- $y = \frac{1}{2}(x^2 + 6x - 8)$
- $y = 2(3x^2 - 7x) - 1$

				Jody
●	$y = -2(3 - 2x)$			
●	x	3	$-2x$	
●	-2	-6	$+4x$	
●	$y = -6 + 4x$			

Je leert · hoe je van periodieke grafieken de periode, de evenwichtstand en de amplitude berekent

Leerroutes · ondersteunend: 1–2–3–04–5–6–7
· doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7
· uitdagend: 1–2–3–4–6–7–U1

De maancyclus nieuwe maan – eerste kwartier – volle maan – laatste kwartier – nieuwe maan duurt ongeveer 29 dagen en 12:44 uur.

Op 9 juli 2017 om 6:19 uur was het volle maan.

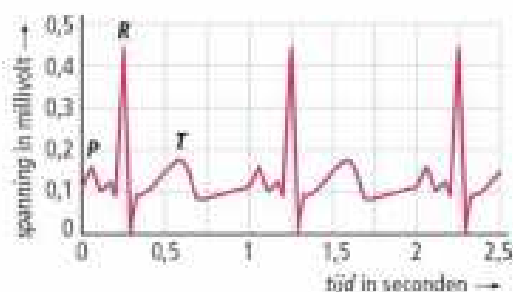
- Op 7 augustus was het weer volle maan.
Hoe laat was het toen volle maan?
- Wanneer was het in oktober volle maan?



1 Bij een hartonderzoek wordt soms een hartfilmpje gemaakt. Zo'n hartfilmpje heet een elektrocardiogram. Verschillende delen van het hart trekken zich samen door elektrische spanning. In de figuur zie je een elektrocardiogram.

W Bij punt *P* trekken de boezems van dit hart zich samen. De punten *R* en *T* geven de actie van de hartkamers weer.

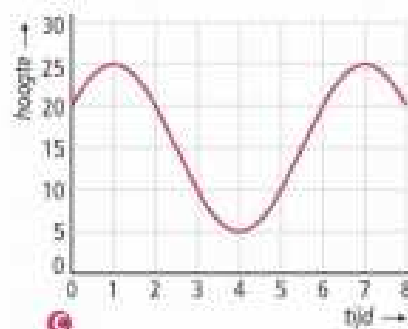
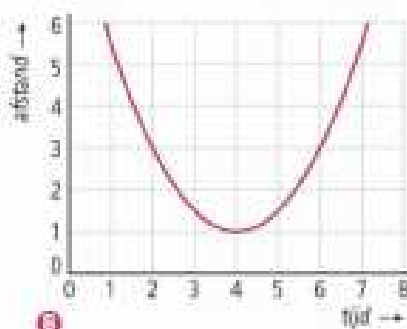
- a Zet de *P*, *R* en *T* ook op andere plaatsen bij de grafiek.
- b Na hoeveel seconden herhaalt de grafiek zich?
- c Hoeveel slagen per minuut klopt dit hart?



Theorie

Een grafiek die zichzelf steeds herhaalt, heet een **periodieke grafiek**.

- 2** a Geef bij elke grafiek aan of die periodiek is.
W b Breid de periodieke grafieken uit tot $tijd = 16$.



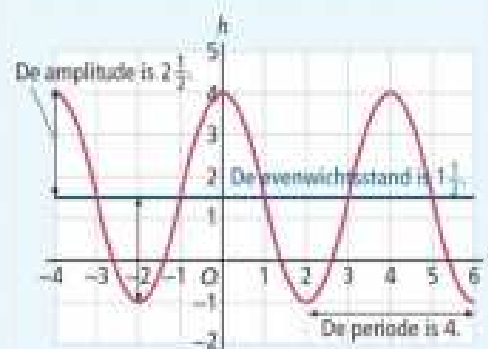
- 3 Op volle snelheid draait het reuzenrad in één minuut één keer rond. De diameter van het reuzenrad is 40 meter. De laagste stand van punt A waar de cabine vast zit, is 2,5 meter boven de grond.
- Hoeveel seconden duurt het voor punt A weer op dezelfde plaats is?
 - Leg uit dat de as op een hoogte van 22,5 meter zit.
 - Na hoeveel seconden is punt A voor het eerst op de hoogte van de as?
 - Hoeveel seconden daarna is punt A weer op de hoogte van de as?
 - Wanneer neemt de hoogte het snelst toe?
 - Teken de grafiek die bij de hoogte van punt A hoort. Neem $t_{\text{tijd}} = 0$ voor het moment dat punt A onderaan is.
 - Hoe hoog is punt A na 150 seconden? En hoe hoog na 225 seconden?



Theorie

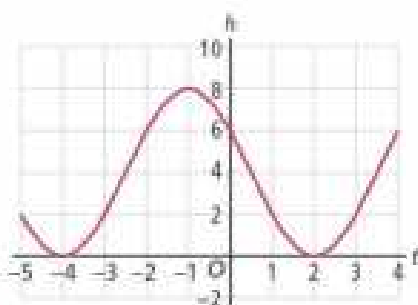
Een periodieke grafiek herhaalt zichzelf steeds. De kortste tijd die het duurt tot herhaling optreedt, heet de **periode**. Als in een periodieke grafiek een horizontale lijn getekend kan worden die het gemiddelde niveau aangeeft, dan heet dit de **evenwichtsstand**.

De grootste afwijking van de grafiek ten opzichte van de evenwichtsstand heet de **amplitude**.

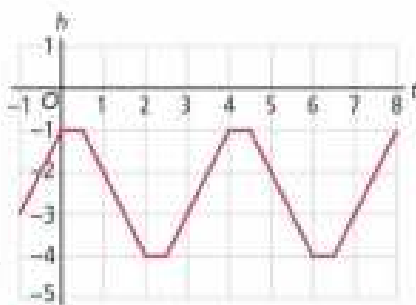


Ondersteunende route → maak opdracht 04

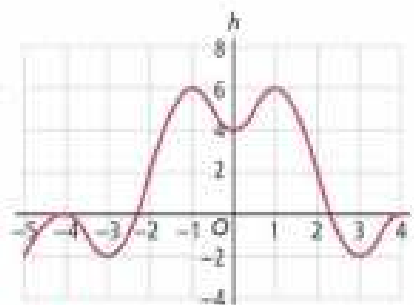
- 4 Bereken bij de drie periodieke grafieken de periode, de evenwichtsstand en de amplitude.



A



B



C

- 5 In de tabel zie je de gemiddelde maandtemperaturen in Moskou.

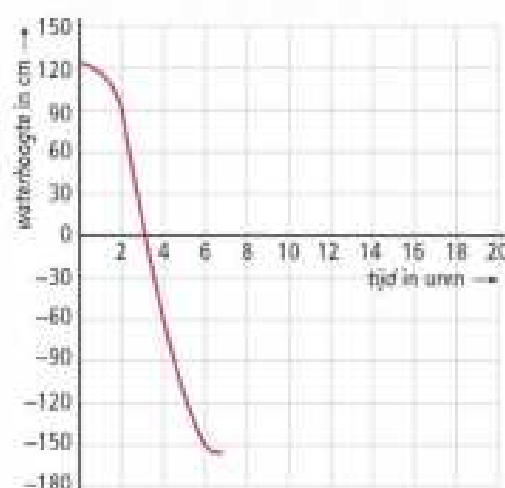
maand	jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sept	okt	nov	dec
temperatuur in °C	-6	-8	-1	7	13	17	21	18	13	6	1	-5

- Teken de bijbehorende temperatuurgrafiek als een vloeiende lijn.
- Bereken de evenwichtsstand en teken deze in de grafiek.
- Bereken de amplitude en geef deze in de grafiek aan.

- 6 In Delfzijl is op een dag de waterhoogte van het zeewater bijgehouden. Op het tijdstip 0.00 uur werd de hoogste stand van 124 cm boven NAP bereikt. Om 6.40 uur werd de laagste stand van -156 cm bereikt.

Het begin van een grafiek bij deze situatie is getekend.

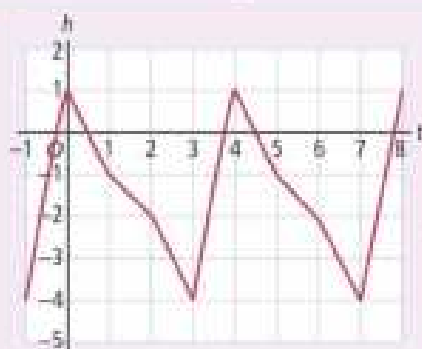
- Op welk tijdstip was de waterhoogte -60 cm?
- Na de laagste stand werd vijf uur en drie kwartier later de hoogste stand weer bereikt.
Breid de grafiek uit tot de hoogste stand weer werd bereikt.
- Hoeveel uur zat er tussen twee opeenvolgende tijdstippen met de hoogste stand?
- Bereken welke waterhoogte bij de evenwichtsstand van de grafiek hoort.
- Hoeveel cm is de amplitude van de grafiek?
- Breid de grafiek uit zodat de waterhoogte gedurende 24 uur zichtbaar is.
- Op welke tijdstippen ongeveer was op die dag de waterhoogte 0 cm?



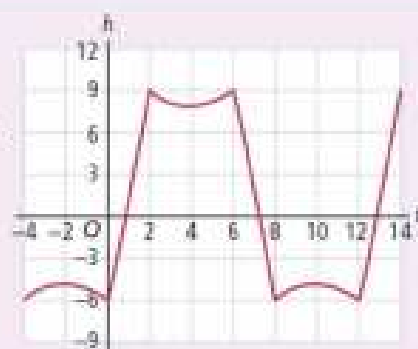
- 7 Van een periodieke grafiek is de evenwichtsstand 3, de periode 12 en de amplitude 6. De grafiek gaat door het punt (2, 9).
- Schrijf de hoogste waarde en de laagste waarde op die de grafiek bereikt.
 - Teken twee perioden van een grafiek die bij de gegevens past.

Uitdagende route → maak opdracht U1

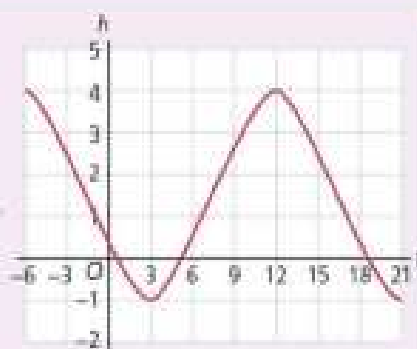
Ondersteunende opdrachten



A



B



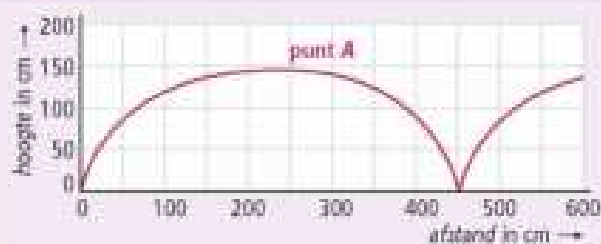
C

04

W

- Leg uit dat bij de periodieke grafiek A de periode 4 is.
- Welke waarde van h hoort er bij het hoogste punt van grafiek A? En welke bij het laagste punt?
- Teken in grafiek A de evenwichtsstand.
- Hoe groot is bij grafiek A de evenwichtsstand?
- En hoe groot is bij grafiek A de amplitude?
- Bereken bij de periodieke grafieken B en C de periode, de evenwichtsstand en de amplitude.

Uitdagende opdrachten



U1

W

- De fiets in de tekening is rond 1860 ontworpen door de Engelsman James Starley. Bij één trapbeweging draait het voorwiel precies één keer rond. Met deze fiets leg je met één trapbeweging een flinke afstand af. De diameter van het voorwiel is 144 cm. Punt A ligt op het voorwiel. Naast de fiets zie je een stukje van de grafiek van de hoogte van punt A.
- Bereken hoeveel cm de periode van de grafiek van punt A is.
 - Breid de grafiek uit tot twee omwentelingen van het voorwiel.
 - De diameter van het achterwiel is 48 cm.
Hoe vaak draait het achterwiel rond als het voorwiel één keer rond draait?
 - Punt B ligt op het achterwiel.
Teken in het assenstelsel de grafiek van de hoogte van punt B.

Je leert

- hoe je na het verticaal verschuiven van een grafiek het bijbehorende functievoorschrift opstelt

Leerroutes

- ondersteunend: 8—9—010—011—11—12
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 8—9—10—11—13—U2

Op het dak van ADAM Toren prijkt Europa's hoogste schommel: Over The Edge.

Je kunt er over de rand van de 100 meter hoge toren schommelen met een prachtig uitzicht op Amsterdam.

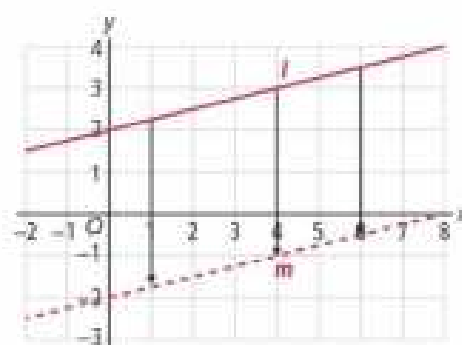
In de foto is de grafiek getekend van de hoogte waarop je je tijdens het schommelen ten opzichte van het dak van de toren bevindt.

- Hoe ziet de grafiek van deze schommel ten opzichte van de grond er uit?



- 8 Een telecombedrijf hanteert een vast tarief van € 5,- per maand plus een bedrag van € 0,10 per gebelde minuut.
- Stel de formule op voor het bedrag dat je per maand moet betalen. Neem b voor het bedrag in euro's per maand en m voor het aantal gebelde minuten.
 - Teken de bijbehorende grafiek.
 - Na een jaar stijgt het vast tarief met € 3,-. Geef de nieuwe formule waarmee je nu het bedrag per maand kunt berekenen.
 - Teken in hetzelfde assenstelsel de grafiek van de nieuwe formule.

- 9 Gegeven is de functie $l(x) = \frac{1}{4}x + 2$.
- Leg uit dat de getekende grafiek bij de functie hoort.
 - Geef het startgetal en de richtingscoëfficiënt van m .
 - Stel het functievoorschrift van m op.
 - Hoeveel moet je de grafiek van l omlaag schuiven om de grafiek van m te krijgen?
 - Vergelijk de functievoorschriften van l en m . Verklaar met je antwoord van opdracht d het verschil tussen deze functievoorschriften.
 - De grafiek van l wordt 25 omhoog geschoven. Zo ontstaat de grafiek van n . Stel het functievoorschrift van n op.

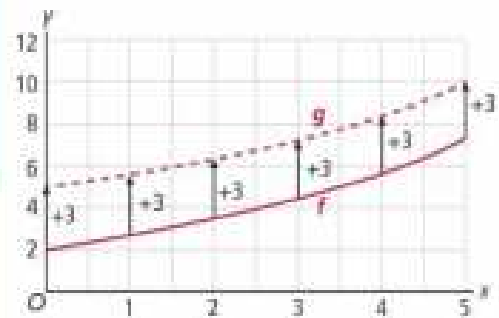


Theorie

Een grafiek kun je **verticaal verschuiven**. Bij alle functiewaarden wordt dan een vast getal opgeteld of afgetrokken. De grafiek die zo ontstaat, heet de **beeldgrafiek**.

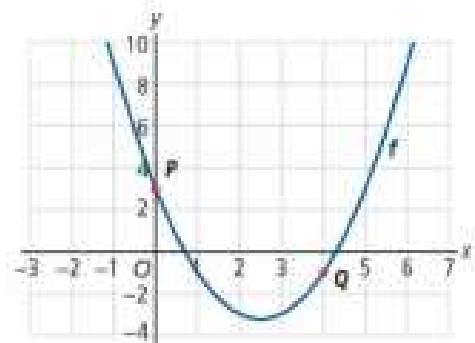
Voorbeeld

De grafiek van de functie $f(x) = 2 \cdot 1,3^x$ wordt 3 omhoog geschoven.
Bij elke functiewaarde wordt dan 3 opgeteld.
Grafiek g is de beeldgrafiek van f .



Ondersteunende route → maak opdracht D10

- 10** In het assenstelsel zie je de grafiek van $f(x) = x^2 - 5x + 3$.
- Toon aan dat de punten $P(0, 3)$ en $Q(4, -1)$ op de grafiek van f liggen.
 - De grafiek van f wordt 2 omhoog geschoven. De punten P en Q op de grafiek van f schuiven ook mee en daarbij horen de punten P' en Q' op de beeldgrafiek.
Geef de coördinaten van de punten P' en Q' .
 - Toon met berekeningen aan dat de punten P' en Q' op de grafiek van $g(x) = x^2 - 5x + 5$ liggen.

**Theorie**

Als de grafiek van een functie f bijvoorbeeld 4 omlaag geschoven wordt, dan geldt voor het functievoorschrift van de beeldgrafiek $g(x) = f(x) - 4$.
Door het verticaal verschuiven van de grafiek verandert alleen de constante in het functievoorschrift.

Voorbeeld

De grafiek van de functie $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ wordt 7 omhoog geschoven. De grafiek van g is de beeldgrafiek.
Welk functievoorschrift heeft de beeldgrafiek?

Oplossing

$$g(x) = f(x) + 7$$

$$g(x) = (2x^2 + 4x - 6) + 7$$

$$g(x) = 2x^2 + 4x + 1$$

Ondersteunende route → maak opdracht D11

11 Vul de tabel verder in.

functievoorschrift van de grafiek	verticaal verschuiven	functievoorschrift van de beeldgrafiek
$f(x) = 7x - 6$	10 omlaag	$g(x) = \dots$
$k(x) = 4x^2 + 2x - 1$	4 omhoog	$h(x) = \dots$
$m(x) = 5 \cdot 3^x$	...	$n(x) = 5 \cdot 3^x - 15$
$p(x) = \dots$	50 omhoog	$q(x) = 2x^2 - 5x + 46$

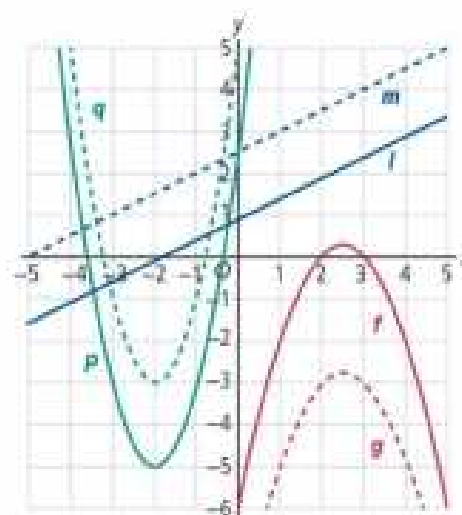
12 Sasha laat van een hoge rots een steen naar beneden vallen. Voor de hoogte h in meters die de steen bereikt na een tijd van t seconden geldt het functievoorschrift $h(t) = 60 - 5t^2$.

- Hoe hoog is de rots waar Sasha op staat?
- Na hoeveel seconden komt de steen op de grond? Rond je antwoord af op één decimaal.
- Teken de grafiek die bij de functie hoort.
- Haar zusje Tine staat op een 40 meter hoge rots en laat op hetzelfde moment net zo'n steen naar beneden vallen. Teken in hetzelfde assenstelsel de grafiek bij die steen.
- Stel het functievoorschrift op waarmee je de hoogte die de steen van Tine bereikt, kunt berekenen.

13 Hiernaast zie je de grafieken van de functies

$$f(x) = -x^2 + 5x - 6, \quad h(x) = \frac{1}{2}x + 1 \text{ en } p(x) = 2x^2 + 8x + 3.$$

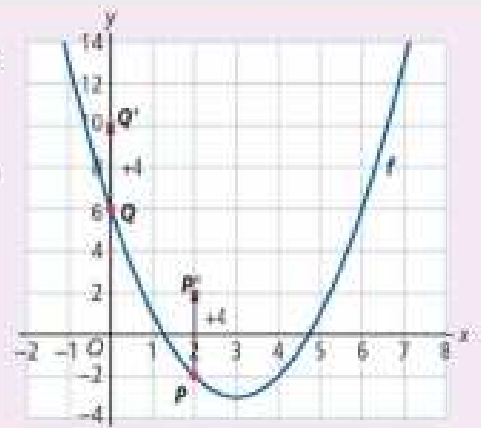
- De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f verticaal te verschuiven.
Welke verschuiving is toegepast?
- Stel het functievoorschrift van g op.
- De grafiek van m ontstaat door de grafiek van l verticaal te verschuiven.
Stel het functievoorschrift van m op.
- De grafiek van q ontstaat uit de grafiek van p .
Toon aan dat $q(x) = 2x^2 + 8x + 5$.
- Hugo zegt: 'Als je de grafieken van p en q doortrekt, dan snijden ze elkaar.'
Leg uit waarom hij geen gelijk heeft.



Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

- 010 In het assenstelsel zie je de grafiek van $f(x) = x^2 - 6x + 6$.
- Vul $x = 2$ in het functievoorschrift in en toon aan dat het punt $P(2, -2)$ op de grafiek van f ligt.
 - Toon aan dat het punt $Q(0, 6)$ op de grafiek van f ligt.
 - De grafiek van f wordt 4 omhoog geschoven. De punten P en Q op de grafiek van f schuiven ook mee en daarbij horen de punten P' en Q' op de beeldgrafiek. Waarom heeft punt Q' dan de coördinaten $(0, 10)$?
 - En welke coördinaten heeft punt P' dan?
 - Toon met berekeningen aan dat de punten P' en Q' op de grafiek van $g(x) = x^2 - 6x + 10$ liggen.



- 011 Vul het blaadje verder in.

De grafiek van de functie $f(x) = 3x^2 + x + 4$ wordt 5 omhoog geschoven. De grafiek van g is de beeldgrafiek.

Voor het functievoorschrift $g(x)$ geldt

$$g(x) = f(x) + 5$$

$$g(x) = (3x^2 + x + 4) + 5$$

$$g(x) = \dots$$

De grafiek van de functie $h(x) = -9x + 2$ wordt 7 omlaag geschoven. De grafiek van k is de beeldgrafiek.

Voor het functievoorschrift $k(x)$ geldt

$$k(x) = h(x) - 7$$

$$k(x) = (\dots + \dots) - 7$$

$$k(x) = \dots$$

Uitdagende opdrachten

- U2 Je kunt in plaats van verticaal verschuiven een grafiek ook horizontaal verschuiven. De grafiek van de functie $f(x) = x^2$ is 3 naar rechts verschoven.

- a Welk functievoorschrift hoort bij de beeldgrafiek?

A $g(x) = x^2 + 3$

D $g(x) = x^2 - 3$

B $g(x) = (x + 3)^2$

E $g(x) = (x - 3)^2$

C $g(x) = x^2 + 9$

F $g(x) = x^2 - 9$

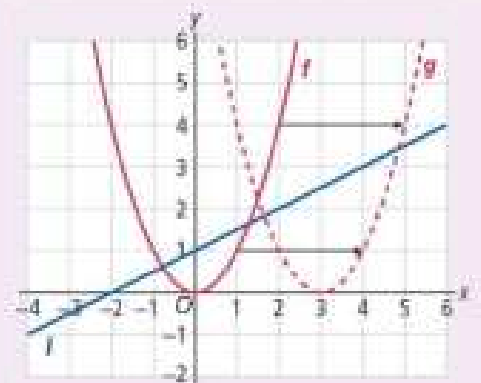
- b De grafiek van h ontstaat uit de grafiek van f door deze 4 naar links te verschuiven.

Welk functievoorschrift hoort bij de grafiek van h ?

- c De grafiek van de functie $l(x) = \frac{1}{2}x + 1$ wordt 6 naar rechts geschoven. De grafiek van m is de beeldgrafiek.

Welk functievoorschrift hoort bij de grafiek van m ?

- d Welke verticale verschuiving van de grafiek van l geeft dezelfde beeldgrafiek?



Je leert

- hoe je na het vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as van een grafiek het bijbehorende functievoorschrift opstelt

Leerroutes

- ondersteunend: 14—15—016—16—17—018
- doorlopend: 14—15—16—17—18—19
- uitdagend: 14—15—16—18—19—U3



De Eefdessebrug is 68 meter lang en 13 meter hoog. In een PowerPointpresentatie over de Eefdessebrug is bij het plakken van een foto iets misgegaan. Hierboven zie je de foto en rechts de foto in de PowerPointpresentatie.

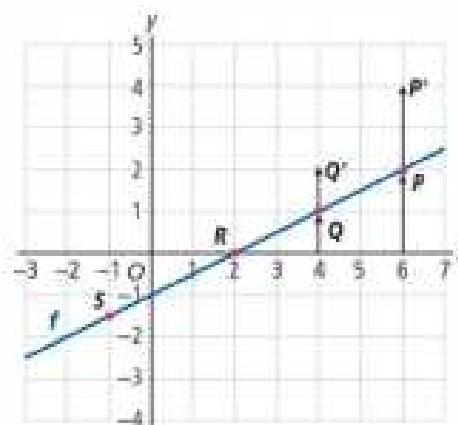
- Wat is er bij het plakken van de foto in de PowerPointpresentatie mis gegaan?
- Als de brug op de foto in de PowerPointpresentatie 68 meter lang zou zijn, hoe hoog zou die brug dan zijn?



14 In het assenstelsel zie je de grafiek van $f(x) = 0,5x - 1$.

W De punten P , Q , R en S liggen op de grafiek van f . Je krijgt de punten P' en Q' door de afstand van de punten P en Q tot de x -as 2 keer zo groot te maken.

- Teken op dezelfde manier de punten R' en S' .
- Welk punt op de grafiek van f blijft op zijn plaats bij het 2 keer zo groot maken van de afstand tot de x -as?
- De beeldgrafiek gaat door de punten P' , Q' , R' en S' . Teken de beeldgrafiek.
- Welke richtingscoëfficiënt hoort bij de beeldgrafiek? En welk startgetal?
- De grafiek van g is de beeldgrafiek. Stel het functievoorschrift van g op.

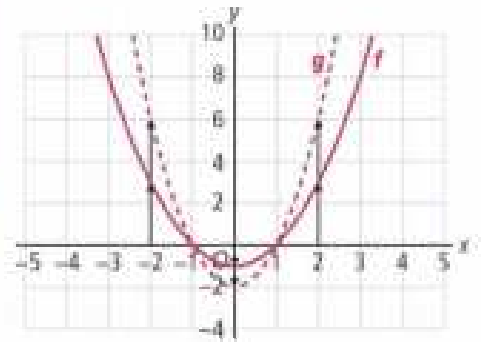


Theorie

Een grafiek kun je **vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as**. Alle functiewaarden worden dan met dezelfde factor vermenigvuldigd. Bij zo'n vermenigvuldiging blijven de snijpunten van de grafiek met de x -as op hun plaats.

Voorbeeld

De grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 1$ wordt ten opzichte van de x -as met de factor 2 vermenigvuldigd. Alle punten van de grafiek komen dan 2 keer zo ver van de x -as te liggen.



15 De parabool is de grafiek van $f(x) = -x^2 + 4x - 2$.

W **a** De grafiek van f wordt ten opzichte van de x -as met de factor 2 vermenigvuldigd. De grafiek van g is de beeldgrafiek.

Teken in het assenstelsel de grafiek van g .

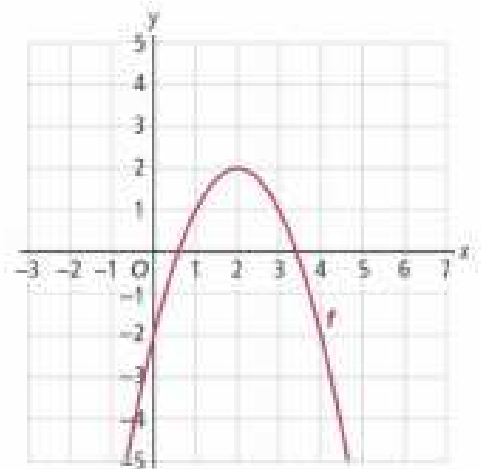
b De grafiek van f wordt nu ten opzichte van de x -as met de factor $-0,5$ vermenigvuldigd.

Leg uit waarom de beeldgrafiek nu een dalparabool is die vergeleken met de grafiek van f ingedrukt is.

c Teken in hetzelfde assenstelsel deze parabool.

d De parabool van opdracht c is de grafiek van $h(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$.

Toon aan hoe je met het functievoorschrift van f en de factor $-0,5$ het functievoorschrift van h kunt afleiden.

**Theorie**

Als de grafiek van een functie f ten opzichte van de x -as met bijvoorbeeld de factor 4 vermenigvuldigd wordt, dan geldt voor het functievoorschrift van de beeldgrafiek $g(x) = 4 \times f(x)$. Bij het vereenvoudigen hiervan is het gebruik van haakjes belangrijk.

Voorbeeld

De grafiek van de functie $f(x) = 2x^2 - 4x$ wordt ten opzichte van de x -as met de factor 7 vermenigvuldigd. De grafiek van g is de beeldgrafiek.

Welk functievoorschrift heeft de beeldgrafiek?

Oplossing

$$g(x) = 7 \times f(x)$$

$$g(x) = 7(2x^2 - 4x)$$

$$g(x) = 14x^2 - 28x$$

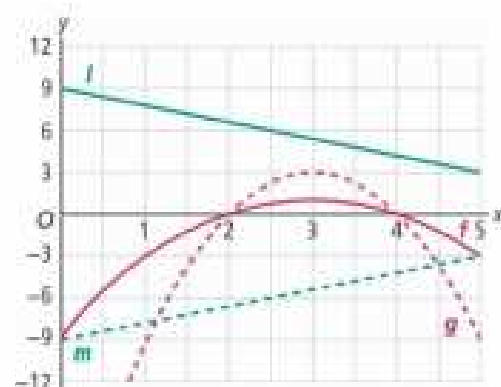
Ondersteunende route → maak opdracht D16

16 Vul de tabel verder in.

functievoorschrift van de grafiek	ten opzichte van de x -as vermenigvuldigen met	functievoorschrift van de beeldgrafiek
$f(x) = 3x + 8$	de factor 6	$g(x) = \dots$
$h(x) = x^2 - 4x + 5$	de factor -1	$l(x) = \dots$
$m(x) = \dots$	de factor -3	$n(x) = -x^2 + 6x - 9$
$p(x) = 20 \cdot 75^x$	de factor $\dots$	$q(x) = 300 \cdot 75^x$

17 De grafieken van de functies $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ en $h(x) = -1,2x + 9$ zijn beide ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd.

- Met welke factor is de grafiek van f vermenigvuldigd zodat de grafiek van g ontstaat?
- Stel het functievoorschrift van g op.
- De grafiek van m ontstaat uit de grafiek van l . Met welke factor is de grafiek van l vermenigvuldigd?
- Stel het functievoorschrift van m op.



Ondersteunende route → maak opdracht D18

18 De grafiek van de functie $p(x) = 9 \cdot 1,8^x$ wordt ten opzichte van de x -as met de factor $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigd. De grafiek van q is de beeldgrafiek. Leandra zegt: 'Bij de beeldgrafiek hoort het functievoorschrift $q(x) = 3 \cdot 0,6^x$.'

- Waarom klopt dat niet?
- Stel het juiste functievoorschrift van q op.

19 a De grafiek van de functie $f(x) = 8x^2 - 5x - 12$ wordt ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd. De beeldgrafiek gaat door het punt $(3, -9)$. Met welke factor wordt vermenigvuldigd?

b De grafiek van g is de beeldgrafiek. Stel het functievoorschrift van g op.

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

016 Vul het blaadje verder in.

De grafiek van de functie $f(x) = -4x + 11$ wordt ten opzichte van de x -as met de factor 5 vermenigvuldigd. De grafiek van g is de beeldgrafiek.

Voor het functievoorschrift $g(x)$ geldt

$$g(x) = 5 \times f(x)$$

$$g(x) = 5(-4x + 11)$$

$$g(x) = \dots$$

De grafiek van de functie $h(x) = x^2 - 8x + 2$ wordt ten opzichte van de x -as met de factor $-\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd. De grafiek van k is de beeldgrafiek.

Voor het functievoorschrift $k(x)$ geldt

$$k(x) = -\frac{1}{2} \times h(x)$$

$$k(x) = -\frac{1}{2}(\dots - \dots + \dots)$$

$$k(x) = \dots$$

018 **W** In de grafiek zie je dat het aantal sprinkhanen in land A exponentieel groeit. Tegelijk is het aantal sprinkhanen in land B telkens precies de helft.

- a In land A zijn in het begin 2000 sprinkhanen en na 9 dagen zijn er 10 320 sprinkhanen.
Hoeveel sprinkhanen zijn er op die dagen in land B?

- b Teken in het assenstelsel de grafiek van het aantal sprinkhanen in land B.

- c Bij het aantal sprinkhanen in land A hoort de functie $s(t) = 2000 \cdot 1,2^t$.

Hoort bij het aantal sprinkhanen in land B de functie $s(t) = 1000 \cdot 0,6^t$ of de functie $s(t) = 1000 \cdot 1,2^t$?

Controleer je antwoord door $t = 9$ in te vullen.

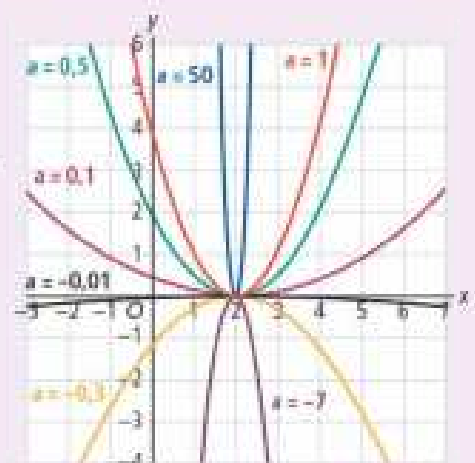


Uitdagende opdrachten

- 013 a De grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 4x + 4$ wordt ten opzichte van de x -as met de factor a vermenigvuldigd. In het assenstelsel zie je een aantal beeldgrafieken. Pierre zegt: 'Bij elk punt in het assenstelsel kan ik een waarde van a uitrekenen zodat er een beeldgrafiek door dat punt gaat.'

Leg uit dat Pierre geen gelijk heeft.

- b Eén van de beeldgrafieken gaat door het punt $(-4, 10)$. Stel het functievoorschrift $g(x)$ op van die beeldgrafiek.
- c De grafiek van de functie $p(x) = x^3 + 4$ wordt ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd. Is het mogelijk dat het functievoorschrift van de beeldgrafiek $q(x) = -3x^3 - 10$ is? Licht je antwoord toe.



Je leert

- hoe je verticaal verschuiven en vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as combineert

Leerroutes

- ondersteunend: 20–21–022–22–23–24–025–26
- doorlopend: 20–21–22–23–24–25–26–27
- uitdagend: 20–21–22–24–25–27–U4–U5

De grafiek hoort bij de waterhoogte in een haven in een normale situatie.

Bij springtij is het verschil tussen de hoogste stand en de laagste stand 1,5 keer zo groot als normaal. Bij een storm kan het water nog eens ruim 1 meter hoger komen te staan.

- Hoe hoog komt het water maximaal als het stormt tijdens springtij?



- 20** In het assenstelsel zie je de grafiek van de functie

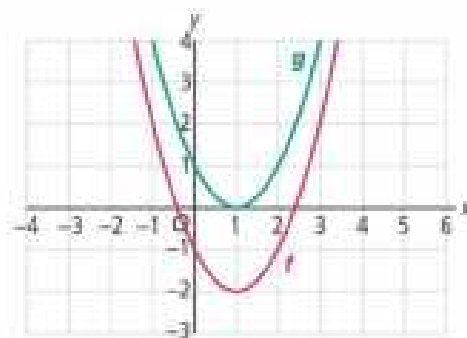
W $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

De grafiek van f wordt eerst 2 omhoog geschoven.

- Leg uit dat $g(x) = x^2 - 2x + 1$ het functievoorschrift van de beeldgrafiek is.
- De grafiek van g wordt vervolgens ten opzichte van de x -as met de factor $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd zodat de grafiek van h ontstaat.

Teken de grafiek van h .

- Stel het functievoorschrift van h op.



- 21** In het assenstelsel zie je nogmaals de grafiek van de functie

W $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Nu wordt de volgorde van de

bewerkingen omgedraaid. De grafiek van f wordt eerst ten opzichte van de x -as met de factor $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd.

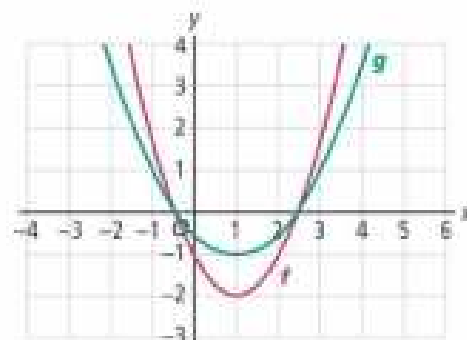
- Leg uit dat $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$ het functievoorschrift van de beeldgrafiek is.

- De grafiek van g wordt vervolgens 2 omhoog geschoven zodat de grafiek van h ontstaat.

Teken de grafiek van h .

- Stel het functievoorschrift van h op.

- Krijg je hetzelfde functievoorschrift als bij opdracht 20c?



Theorie

Bij het **vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as** en **verticaal verschuiven** van een grafiek is de volgorde waarin je dat doet van belang. Als je de volgorde omdraait, dan krijg je meestal een andere beeldgrafiek.

Voorbeeld 1

De grafiek van de functie $f(x) = -x^2 + 4x$ wordt eerst 2 omlaag geschoven en daarna ten opzichte van de x -as met de factor $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd. Welk functievoorschrift heeft de beeldgrafiek?

Oplossing

Eerst 2 omlaag schuiven.

$$g(x) = f(x) - 2$$

$$g(x) = (-x^2 + 4x) - 2$$

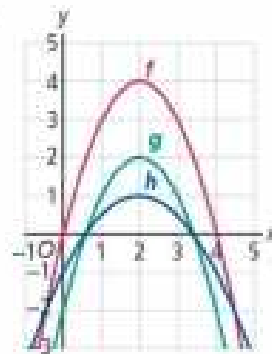
$$g(x) = -x^2 + 4x - 2$$

Dan met de factor $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen.

$$h(x) = \frac{1}{2} \times g(x)$$

$$h(x) = \frac{1}{2} (-x^2 + 4x - 2)$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$$

**Voorbeeld 2**

De grafiek van de functie $f(x) = -x^2 + 4x$ wordt eerst ten opzichte van de x -as met de factor $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd en daarna 2 omlaag geschoven. Welk functievoorschrift heeft de beeldgrafiek?

Oplossing

Eerst met de factor $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen.

$$i(x) = \frac{1}{2} \times f(x)$$

$$i(x) = \frac{1}{2} (-x^2 + 4x)$$

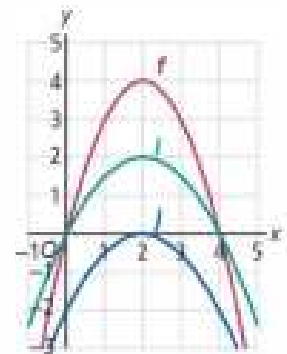
$$i(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$

Dan 2 omlaag schuiven.

$$j(x) = i(x) - 2$$

$$j(x) = (-\frac{1}{2}x^2 + 2x) - 2$$

$$j(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$$



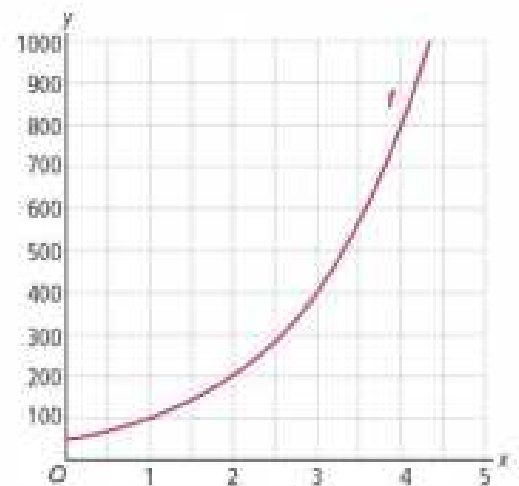
Ondersteunende route → maak opdracht 022

22

W

De grafiek van de functie $f(x) = 50 \cdot 2^x$ wordt eerst ten opzichte van de x -as met de factor $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd en daarna 200 omhoog geschoven.

- Teken de beeldgrafiek.
- De grafiek van h is de beeldgrafiek. Stel het functievoorschrift van h op.
- Draai de volgorde van vermenigvuldigen en verschuiven om en teken in een nieuw assenstelsel de beeldgrafiek.
- De grafiek van j is de beeldgrafiek. Stel het functievoorschrift van j op.

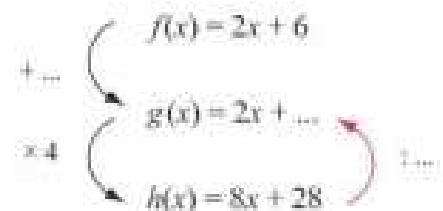


5.4 Combineren

- 23** De grafiek van de functie $k(x) = \frac{1}{4}x + 2$ wordt eerst 5 omlaag geschoven en daarna ten opzichte van de x -as met de factor 6 vermenigvuldigd.
- De grafiek van m is de beeldgrafiek.
Stel het functievoorschrift van m op.
 - Draai de volgorde van verschuiven en vermenigvuldigen om. De grafiek van q is de beeldgrafiek.
Stel het functievoorschrift van q op.

- 24** De grafiek van de functie $f(x) = 2x + 6$ is eerst verticaal verschoven en daarna ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd. Zo is de grafiek van de functie $h(x) = 8x + 28$ ontstaan.

- Jet zegt: 'Na het verschuiven heeft de functie de vorm $g(x) = 2x + \dots$. Die $2x$ moet daarna nog $8x$ worden.'
Laat zien dat de factor dan 4 moet zijn.
- Vind met het schema het functievoorschrift van g .
- Welke verschuiving is toegepast?



Ondersteunende route → maak opdracht 025

- 25** De grafiek van de functie $k(x) = 6x^2 + x - 5$ is eerst ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd en daarna verticaal verschoven. Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $m(x) = -30x^2 - 5x - 50$. Welke vermenigvuldiging en welke verschuiving is toegepast? Gebruik een schema zoals bij opdracht 24.
- 26** De grafiek van de functie $q(x) = 150 \cdot 6^x$ is eerst verticaal verschoven en daarna ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd. Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $s(x) = 450 \cdot 6^x + 30$. Welke verschuiving en welke vermenigvuldiging is toegepast?
- 27** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x - \frac{1}{2}$ en $h(x) = 6x - 1$.
- De grafiek van f is eerst ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd en daarna verticaal verschoven. De grafiek van h is de beeldgrafiek. Welke vermenigvuldiging en welke verschuiving is toegepast?
 - De grafiek van h is eerst ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd en daarna verticaal verschoven. De grafiek van f is de beeldgrafiek. Welke vermenigvuldiging en welke verschuiving is toegepast?

Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5

Ondersteunende opdrachten

022

W

De grafiek van de functie $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ wordt eerst ten opzichte van de x -as met de factor 2 vermenigvuldigd en daarna 1 omhoog geschoven.

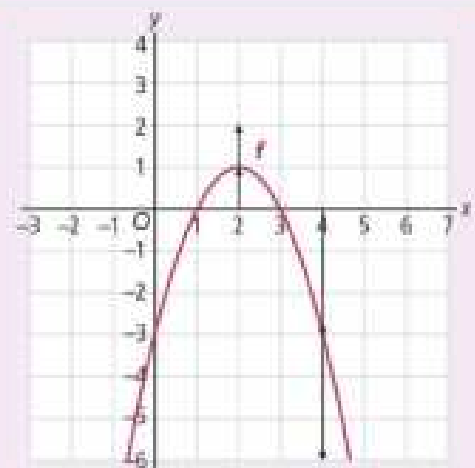
- Teken de grafiek van g die ontstaat als je de grafiek van f ten opzichte van de x -as met de factor 2 vermenigvuldigt.
- Verschuif de grafiek van g nu 1 omhoog en teken de grafiek van h die zo ontstaat.
- Vul in.

$$g(x) = 2 \times f(x) \qquad h(x) = g(x) + 1$$

$$g(x) = 2(-x^2 + 4x - 3) \qquad h(x) = \dots + 1$$

$$g(x) = \dots \qquad h(x) = \dots$$

- Draai de volgorde van vermenigvuldigen en verschuiven om en teken in een nieuw assenstelsel de beeldgrafiek.
- Stel het functievoorschrift j op van de beeldgrafiek.



025

De grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 4x + 5$ is eerst ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd en daarna verticaal verschoven. Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $h(x) = 3x^2 - 12x + 36$.

- Wat moet er in het schema op de puntjes bij $g(x)$ staan?
- Vul het schema verder in.
- Welke vermenigvuldiging en welke verschuiving is toegepast?

$$\begin{array}{l} \times 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 4x + 5 \\ g(x) = 3x^2 - \dots + \dots \end{array} \right. \\ + \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x) = 3x^2 - \dots + \dots \\ h(x) = 3x^2 - 12x + 36 \end{array} \right. \end{array}$$

Uitdagende opdrachten

U4

De grafiek van de functie $p(x) = 92 \cdot 8^x$ wordt eerst 28 omlaag geschoven, dan ten opzichte van de x -as met de factor $\frac{1}{4}$ vermenigvuldigd en daarna 7 omhoog geschoven. De grafiek van s is de beeldgrafiek.

- Stel het functievoorschrift van s op.
- Hoe had je de grafiek van s in één keer uit de grafiek van p kunnen krijgen?
- Waarom geldt dat ook als je dezelfde bewerkingen met de grafiek van de functie $f(x) = 92 + 8x$ doet?

U5

De grafiek van de functie $l(x) = \frac{3}{4}x + 1$ wordt eerst ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd en daarna verticaal verschoven. De beeldgrafiek gaat door de punten $(1, 19)$ en $(10, 100)$. Welke vermenigvuldiging en welke verschuiving is toegepast?

Je leert • hoe je van twee functies de somfunctie en de verschilfunctie opstelt

Leerroutes • ondersteunend: 28—29—030—30—31
• doorlopend: 28—29—30—31—32
• uitdagend: 28—29—30—32—U6

Geluidsgolven kun je niet zien, maar wel horen. Een lage toon heeft een lange periode en een hoge toon heeft een korte periode. Als de amplitude groter is, dan is de toon harder. Je hoort twee tonen tegelijkertijd. Door de grafieken bij elkaar op te tellen, krijg je de grafiek van de toon die je dan hoort.

- Is de toon die je dan hoort een hogere toon, een lagere toon of een even hoge toon?
- Is de toon die je dan hoort harder, zachter of even hard?



28 Karel en Jan doen samen mee aan een sponsorloop. Karel verdient hiermee € 10,- en € 0,50 per rondje. Jan kan met de formule $b = 0,70a + 10$ het bedrag berekenen dat hij krijgt. Hierin is b het bedrag in euro's en a het aantal rondjes.

- Stel de formule op waarmee je het bedrag dat Karel verdient kunt berekenen.
- Teken in één assenstelsel bij beide formules de grafiek. Laat de horizontale as lopen van 0 tot en met 10. De verticale as loopt van 0 tot en met 40 met stapgrootte 5.
- Ze tellen de bedragen die ze verdienen bij elkaar op. Vul in de tabel de bedragen en de totaalbedragen in.

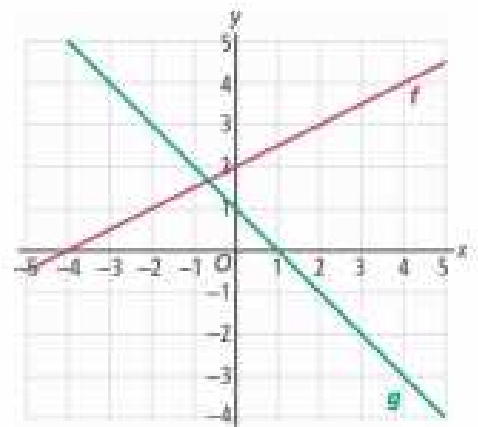
aantal rondjes	0	2	4	6	8	10
bedrag Karel in euro's	...	...	...	...	...	...
bedrag Jan in euro's	...	...	...	...	...	...
totaalbedrag in euro's	...	...	...	...	...	...

- Teken de grafiek die hoort bij het totaalbedrag in het assenstelsel van opdracht b.
- Hoeveel krijgen ze er samen per rondje bij?
- En hoeveel krijgen ze samen al aan het begin van de sponsorloop?
- Stel de formule op voor het totaalbedrag.
- Leg uit hoe je de formule voor het totaalbedrag kunt maken met behulp van de formules van Karel en Jan.



29**W**

- a Stel de functievoorschriften van f en g op.
- b Je krijgt de grafiek van $f + g$ door voor elke waarde van x de functiewaarde van f en de functiewaarde van g bij elkaar op te tellen.
Teken de grafiek van $f + g$ en zet er $f + g$ bij.
- c Stel het functievoorschrift van $s = f + g$ op.
- d Je kunt ook voor elke waarde van x de functiewaarde van g aftrekken van de functiewaarde van f .
Teken in een nieuw assenstelsel de grafiek van $f - g$ en zet er $f - g$ bij.
- e Hoe kun je uit de grafiek van $f - g$ aflezen voor welke waarde van x de grafieken van f en g elkaar snijden?
- f Stel het functievoorschrift van $v = f - g$ op.
- g Teken in het assenstelsel van opdracht d de grafiek van $g - f$ en zet er $g - f$ bij.
- h Zijn de grafieken van $f - g$ en $g - f$ hetzelfde?
- i En zijn de grafieken van $f + g$ en $g + f$ hetzelfde?



Theorie

De **somfunctie** van twee functies f en g ontstaat door de functievoorschriften van f en g bij elkaar op te tellen.

De **verschilfunctie** van twee functies f en g ontstaat door de functievoorschriften van f en g van elkaar af te trekken.

Bij het van elkaar aftrekken van de functievoorschriften van f en g , moet je goed op de volgorde letten en is het gebruik van haakjes belangrijk.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de functies
 $f(x) = 3x^2 - 4$ en $g(x) = -x + 7$.
 Welk functievoorschrift heeft de somfunctie $s = f + g$?

Oplossing

$$\begin{aligned}s(x) &= (3x^2 - 4) + (-x + 7) \\s(x) &= 3x^2 - 4 - x + 7 \\s(x) &= 3x^2 - x + 3\end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Gegeven zijn de functies
 $k(x) = -x^2 - 2x$ en $m(x) = 4x + 2$.
 Welk functievoorschrift heeft de verschilfunctie $v = k - m$?

Oplossing

$$\begin{aligned}v(x) &= (-x^2 - 2x) - (4x + 2) \\v(x) &= -x^2 - 2x - 4x - 2 \\v(x) &= -x^2 - 6x - 2\end{aligned}$$

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de functies
 $k(x) = -x^2 - 2x$ en $m(x) = 4x + 2$.
 Welk functievoorschrift heeft de verschilfunctie $w = m - k$?

Oplossing

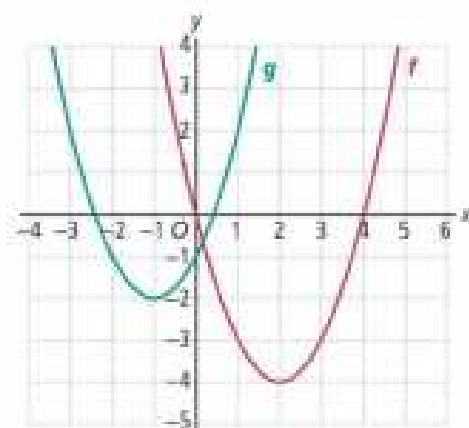
$$\begin{aligned}w(x) &= (4x + 2) - (-x^2 - 2x) \\w(x) &= 4x + 2 + x^2 + 2x \\w(x) &= x^2 + 6x + 2\end{aligned}$$

Ondersteunende route → maak opdracht D30

- 30** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ en $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$.
- Stel het functievoorschrift van de somfunctie $s = f + g$ op.
 - Stel het functievoorschrift van de verschilfunctie $v = f - g$ op.
 - Doe hetzelfde voor de verschilfunctie $w = g - f$.

- 31** Een fabrikant maakt poppen. De totale opbrengst TO in euro's kun je berekenen met de formule $TO = 8q$ en de totale kosten TK in euro's kun je berekenen met de formule $TK = 800 + 4q$. Hierbij is q het aantal poppen dat per week wordt gemaakt.
- Teken beide grafieken in één assenstelsel. Laat de horizontale as lopen van 0 tot en met 500. De verticale as loopt van -1000 tot en met 4000 met stapgrootte 500.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt.
 - Welke betekenis heeft het snijpunt voor de fabrikant?
 - De totale winst in euro's kun je berekenen door de totale kosten van de totale opbrengst af te trekken. Teken de grafiek van de totale winst in het assenstelsel.
 - Stel de formule op voor de totale winst TW .

- 32** In het assenstelsel zie je de parabolen van de functies $f(x) = x^2 - 4x$ en $g(x) = x^2 + 2x - 1$.
- Stel het functievoorschrift van de somfunctie $s = f + g$ op.
 - Teken de grafiek van de somfunctie s .
 - Wat voor soort grafiek is dit?
 - Stel het functievoorschrift van de verschilfunctie $v = f - g$ op.
 - Teken in een nieuw assenstelsel de grafiek van de verschilfunctie v .
 - Wat voor soort grafiek is dit?



Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten**30** Vul de blaadjes verder in.

Gegeven zijn de functies $p(x) = 5x + 1$ en $q(x) = -3x^2 + 2x - 1$.
 Voor het functievoorschrift van de somfunctie $s = p + q$ geldt
 $s(x) = (5x + 1) + (-3x^2 + \dots - \dots)$
 $s(x) = 5x + 1 - \dots$
 $s(x) = \dots$

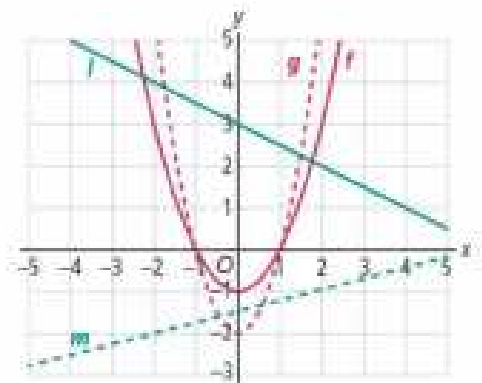
Gegeven zijn de functies $t(x) = 3x^2 - x - 4$ en $u(x) = -x^2 + 5x - 3$.
 Voor het functievoorschrift van de verschilfunctie $v = t - u$ geldt
 $v(x) = (3x^2 - x - 4) - (-x^2 + \dots - \dots)$
 $v(x) = 3x^2 - x - 4 + \dots$
 $v(x) = \dots$

Uitdagende opdrachten

- 6** Van de functie f is gegeven dat $f(x) = x^2 + x$.
- Het functievoorschrift van g is niet gegeven.
 De somfunctie $s = f + g$ heeft als functievoorschrift $s(x) = x^2 - x + 5$.
 Stel het functievoorschrift van g op.
 - Het functievoorschrift van h is ook niet gegeven.
 De verschilfunctie $v = f - h$ heeft als functievoorschrift $v(x) = -2x^2 - 10x + \frac{1}{2}$.
 Stel het functievoorschrift van h op.
 - De grafiek van de functie $p(x) = x^2 - 6x + 8$ wordt eerst ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd en daarna verticaal verschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie r .
 Voor de somfunctie $t = p + r$ geldt $t(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$.
 Zoek uit welke vermenigvuldiging en welke verschuiving is toegepast.

Deze paragraaf bevat opdrachten die een indruk geven van wiskunde A/C en wiskunde B.

- 33** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 1$ en $h(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.
- Met welke factor is de grafiek van f ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd zodat de grafiek van g is ontstaan?
 - Stel het functievoorschrift van g op.
 - Met welke factor is de grafiek van h ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd zodat de grafiek van m is ontstaan?
 - Stel het functievoorschrift van m op.
 - De grafiek van l wordt ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd. De grafiek van n is de beeldgrafiek en gaat door het punt $(3, 12)$.
Stel het functievoorschrift van n op.

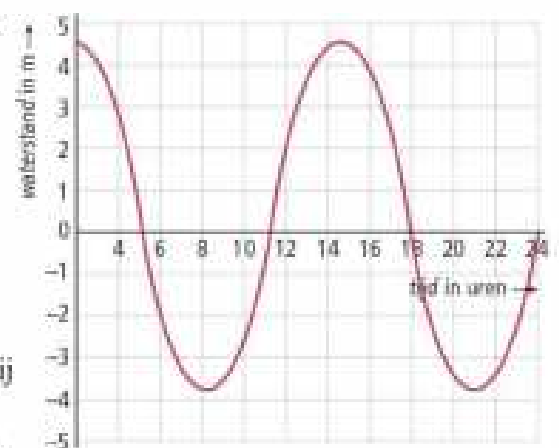


- 34** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + 3$ en $g(x) = x^2 - 2$.
- Teken de grafieken van f en g in één assenstelsel. Laat de horizontale as lopen van -3 tot en met 3 . De verticale as loopt van -4 tot en met 20 met stapgrootte 2 .
 - Teken ook de grafiek van $f + g$ in het assenstelsel.
 - Stel het functievoorschrift van de somfunctie $s = f + g$ op.
 - De grafiek van s is te krijgen door de grafiek van f eerst ten opzichte van de x -as te vermenigvuldigen en daarna verticaal te verschuiven.
Met welke vermenigvuldiging en welke verschuiving?
 - Teken ook de grafiek van $f - g$ in het assenstelsel.
 - Stel het functievoorschrift van de verschilfunctie $v = f - g$ op.

AC35 De grafiek geeft de waterstand aan de Franse kust op een maandag weer. Het strand is goed begaanbaar als de waterstand lager dan -2 meter is.

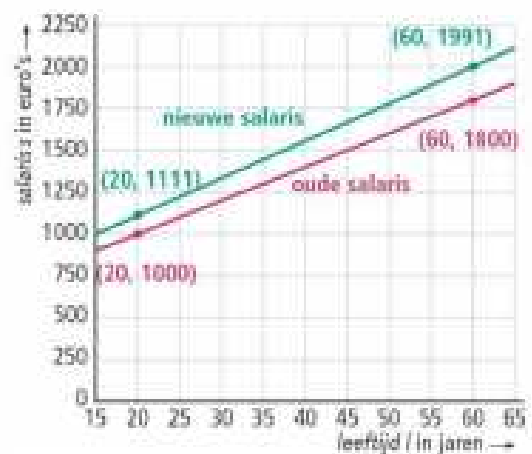
W

- Josefine wil een strandwandeling maken van 2,5 uur. Op welke tijdstippen kan ze met de strandwandeling beginnen?
- Op dinsdag is wegens een sterke wind de hele dag een verlaging van de waterstand van 1 meter.
Teken de grafiek van de waterhoogte op dinsdag.
- Welke periode, evenwichtsstand en amplitude horen bij de grafiek van dinsdag?
- Door de verlaging van de waterstand kan Josefine een langere strandwandeling gaan maken.
Geef de maximale tijdsduur van de strandwandeling.



- AC36** De directie van een bedrijf verhoogt alle salarissen met hetzelfde percentage en doet er daarna een vast bedrag bij. In het assenstelsel zie je dat voor een werknemer van 20 jaar het salaris wordt verhoogd van € 1.000,- tot € 1.111,-. Voor een werknemer van 60 jaar wordt het salaris verhoogd van € 1.800,- tot € 1.991,-. Neem l voor de leeftijd in jaren en s voor het salaris in euro's.

- Ga na dat voor het oude salaris geldt $s_{\text{oud}} = 20l + 600$.
- Stel de formule op voor het nieuwe salaris s_{nieuw} .
- Met welk percentage en met welk vast bedrag worden de salarissen verhoogd?



- B37** Gegeven zijn de functies $f(x) = 7x + 3$ en $h(x) = 14x + 9$.

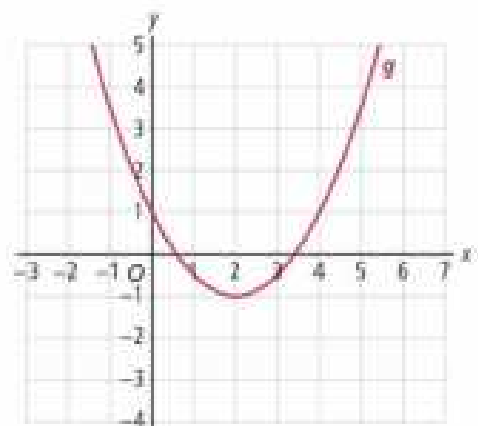
- Leg uit dat je door de grafiek van f verticaal te verschuiven niet de grafiek van h kunt krijgen.
- Door de grafiek van f verticaal te verschuiven en ten opzichte van de x -as te vermenigvuldigen, kun je wel de grafiek van h krijgen.

Geef twee manieren waarop dat kan.

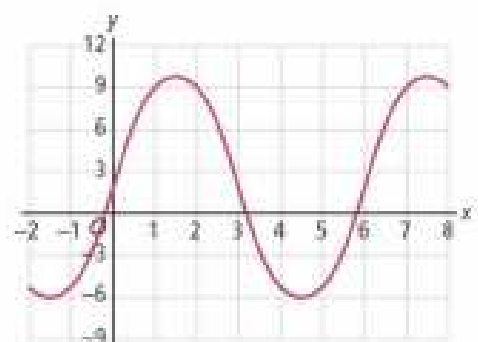
- B38** Gegeven is de functie $g(x) = a(x - 2)^2 + b$. Voor bepaalde waarden van a en b ontstaat de grafiek in het assenstelsel.

W

- Het punt $(2, -1)$ ligt op de grafiek van g .
Leg uit dat b dan gelijk moet zijn aan -1 .
- Het punt $(0, 1)$ ligt ook op de grafiek van g .
Gebruik dit gegeven om de waarde van a te berekenen.
- Teken in het assenstelsel de beeldgrafiek die ontstaat door de grafiek van g ten opzichte van de x -as met de factor -2 te vermenigvuldigen.
- De grafiek van h is de beeldgrafiek.
Stel het functievoorschrift van h op.
- Leg uit hoe de grafiek van $s = g + h$ eruit ziet.



- B39** Van een periodieke grafiek is een stukje getekend. Zoek uit hoeveel hoogste punten en hoeveel laagste punten de grafiek tussen $x = 79$ en $x = 118$ heeft en hoe vaak de grafiek de x -as daar snijdt.

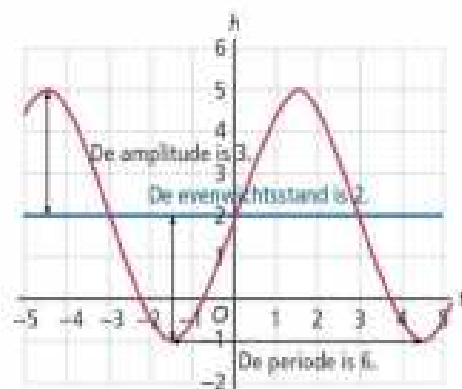


Vaardigheid

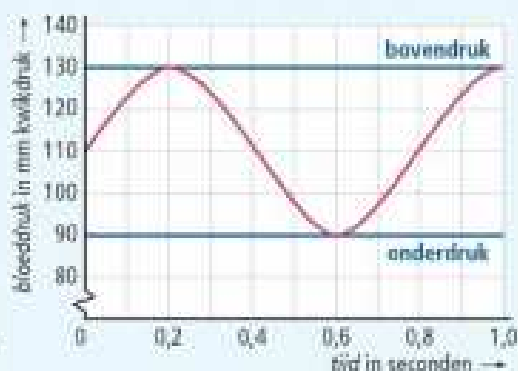
Je kunt van periodieke grafieken de periode, de evenwichtsstand en de amplitude berekenen.

Een periodieke grafiek is een grafiek die zichzelf steeds herhaalt. De periode is de kortste tijd die het duurt tot herhaling optreedt.

Als in een periodieke grafiek een horizontale lijn getekend kan worden die het gemiddelde niveau aangeeft, dan heet dit de evenwichtsstand. De amplitude is de grootste afwijking van de grafiek ten opzichte van de evenwichtsstand.



- S1** De grafiek geeft een versimpeld model van de manier waarop de bloeddruk van een mens verandert onder invloed van de hartslag. Horizontaal staat de tijd in seconden en verticaal staat de bloeddruk in mm kwikdruk.
- Lees de periode van deze grafiek af.
 - Hoe groot is de gemiddelde bloeddruk?
 - En hoe groot is de amplitude?
 - Bereken het aantal slagen dat het hart per minuut maakt.



Vaardigheid

Je kunt na het verticaal verschuiven van een grafiek het bijbehorende functievoorschrift opstellen.

Bij verticaal verschuiven van een grafiek wordt bij alle functiewaarden een vast getal opgeteld of afgetrokken. De grafiek die zo ontstaat, heet de beeldgrafiek.

Door het verticaal verschuiven van een grafiek verandert alleen de constante in het functievoorschrift.

Voorbeeld

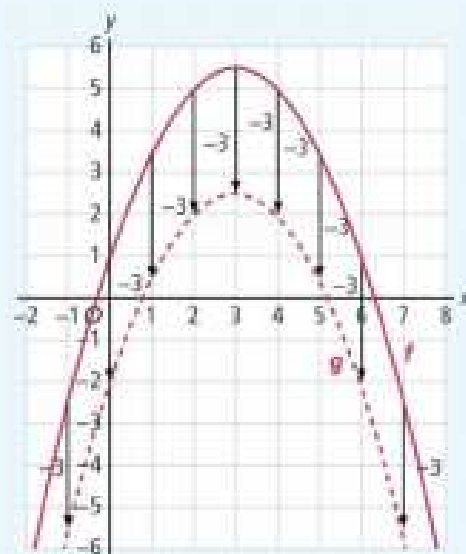
De grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$ wordt 3 omlaag geschoven. De grafiek van g is de beeldgrafiek. Welk functievoorschrift heeft de beeldgrafiek?

Oplossing

$$g(x) = f(x) - 3$$

$$g(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 1\right) - 3$$

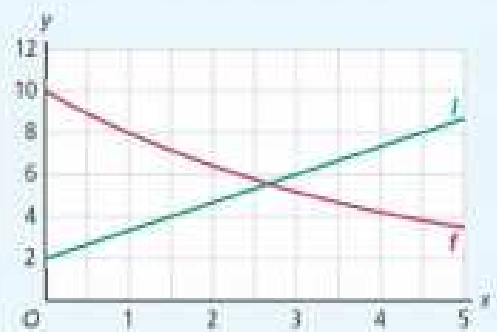
$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$$



S2 In het assenstelsel zie je de grafieken van de functies $f(x) = 10 \cdot 0,8^x$ en $h(x) = 1\frac{1}{3}x + 2$.

W

- De grafiek van f wordt 2 omlaag geschoven.
Teken de beeldgrafiek.
- De grafiek van g is de beeldgrafiek.
Stel het functievoorschrift van g op.
- De grafiek van l wordt 3 omhoog geschoven.
Teken de beeldgrafiek.
- De grafiek van m is de beeldgrafiek.
Stel het functievoorschrift van m op.



Vaardigheid

Je kunt na het vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as van een grafiek het bijbehorende functievoorschrift opstellen.

Bij het vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as van een grafiek worden alle functiewaarden met dezelfde factor vermenigvuldigd. Bij zo'n vermenigvuldiging blijven de snijpunten van de grafiek met de x -as op hun plaats.

Voorbeeld

De grafiek van de functie $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$ wordt ten opzichte van de x -as met de factor 2 vermenigvuldigd. De grafiek van g is de beeldgrafiek.

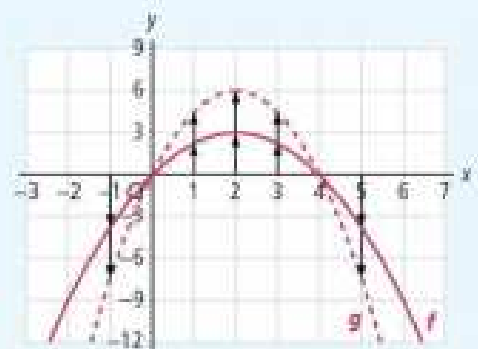
Welk functievoorschrift heeft de beeldgrafiek?

Oplossing

$$g(x) = 2 \times f(x)$$

$$g(x) = 2 \times \left(-\frac{3}{4}x^2 + 3x\right)$$

$$g(x) = -1\frac{1}{2}x^2 + 6x$$



S3 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 4x + 8$.

- De grafiek van f wordt ten opzichte van de x -as met de factor 4 vermenigvuldigd. De grafiek van g is de beeldgrafiek.
Stel het functievoorschrift van g op.
- De grafiek van f wordt met een andere factor vermenigvuldigd. Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $h(x) = 2x^2 + 32x - 64$.
Bereken de gebruikte factor.

Vaardigheid

Je kunt verticaal verschuiven en vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as combineren.

Bij het vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en verschuiven van een grafiek is de volgorde waarin je dat doet van belang. Als je de volgorde omdraait, dan krijg je meestal een andere beeldgrafiek.

Voorbeeld 1

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ wordt eerst ten opzichte van de x -as met de factor 2 vermenigvuldigd en daarna $2\frac{1}{2}$ omhoog geschoven. Welk functievoorschrift heeft de beeldgrafiek?

Oplossing

Eerst met de factor 2 vermenigvuldigen.

$$g(x) = 2 \times f(x)$$

$$g(x) = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)$$

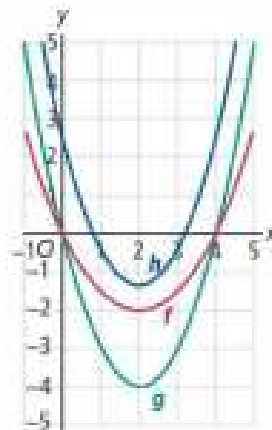
$$g(x) = x^2 - 4x$$

Dan $2\frac{1}{2}$ omhoog schuiven.

$$h(x) = g(x) + 2\frac{1}{2}$$

$$h(x) = (x^2 - 4x) + 2\frac{1}{2}$$

$$h(x) = x^2 - 4x + 2\frac{1}{2}$$



Voorbeeld 2

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ wordt eerst $2\frac{1}{2}$ omhoog geschoven en daarna ten opzichte van de x -as met de factor 2 vermenigvuldigd. Welk functievoorschrift heeft de beeldgrafiek?

Oplossing

Eerst $2\frac{1}{2}$ omhoog schuiven.

$$i(x) = f(x) + 2\frac{1}{2}$$

$$i(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right) + 2\frac{1}{2}$$

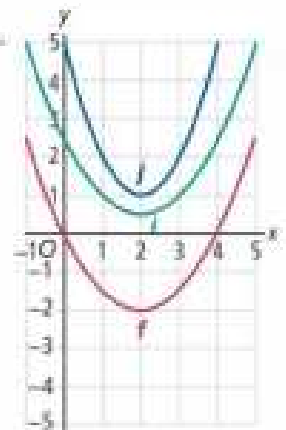
$$i(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\frac{1}{2}$$

Dan met de factor 2 vermenigvuldigen.

$$j(x) = 2 \times i(x)$$

$$j(x) = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\frac{1}{2}\right)$$

$$j(x) = x^2 - 4x + 5$$



S4 In het assenstelsel zie je de grafieken van de functies $l(x) = 2x - 1$ en $n(x) = -4x - 4$.

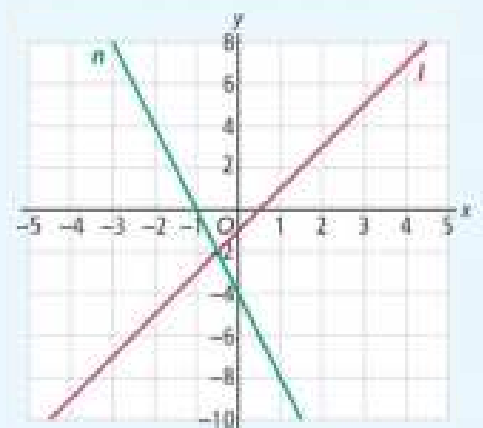
- a** De grafiek van n kun je uit de grafiek van l krijgen door eerst ten opzichte van de x -as te vermenigvuldigen en daarna verticaal te verschuiven.

Met welke factor moet je vermenigvuldigen?

- b** Hoeveel moet je de grafiek vervolgens verschuiven?

- c** De grafiek van de functie n wordt eerst 4 omlaag geschoven en daarna ten opzichte van de x -as met de factor $-\frac{1}{4}$ vermenigvuldigd. De grafiek van q is de beeldgrafiek.

Stel het functievoorschrift van q op.



Vaardigheid

Je kunt van twee functies de somfunctie en de verschilfunctie opstellen.

De somfunctie van twee functies f en g ontstaat door de functievoorschriften van f en g bij elkaar op te tellen.

De verschilfunctie van twee functies f en g ontstaat door de functievoorschriften van f en g van elkaar af te trekken.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de functies $f(x) = x + 2$ en $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 1$.
Welk functievoorschrift heeft de somfunctie $s = f + g$?

Oplossing

$$s(x) = (x + 2) + (-\frac{1}{4}x^2 - 1)$$

$$s(x) = x + 2 - \frac{1}{4}x^2 - 1$$

$$s(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

Voorbeeld 2

Gegeven zijn de functies $k(x) = -x + 9$ en $m(x) = x^2 - 6$.
Welk functievoorschrift heeft de verschilfunctie $v = k - m$?

Oplossing

$$v(x) = (-x + 9) - (x^2 - 6)$$

$$v(x) = -x + 9 - x^2 + 6$$

$$v(x) = -x^2 - x + 15$$

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de functies $k(x) = -x + 9$ en $m(x) = x^2 - 6$.
Welk functievoorschrift heeft de verschilfunctie $w = m - k$?

Oplossing

$$w(x) = (x^2 - 6) - (-x + 9)$$

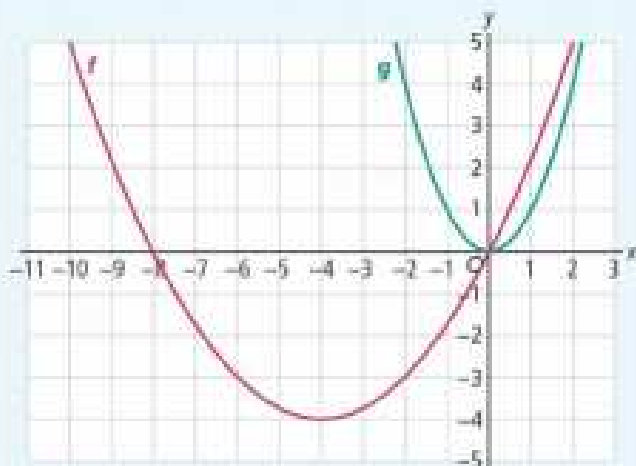
$$w(x) = x^2 - 6 + x - 9$$

$$w(x) = x^2 + x - 15$$

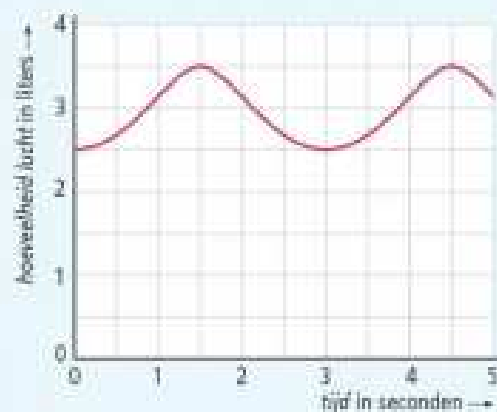
S5 In het assenstelsel zie je de grafieken van de functies

W $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$ en $g(x) = \frac{3}{4}x^2$.

- Teken de grafiek van $s = f + g$ in het assenstelsel.
- Stel het functievoorschrift van de somfunctie $s = f + g$ op.
- Stel ook het functievoorschrift van de verschilfunctie $w = g - f$ op.



T1 Door inademen en uitademen verandert de hoeveelheid lucht in je longen. De grafiek laat zien hoe deze hoeveelheid lucht bij Robert verandert.



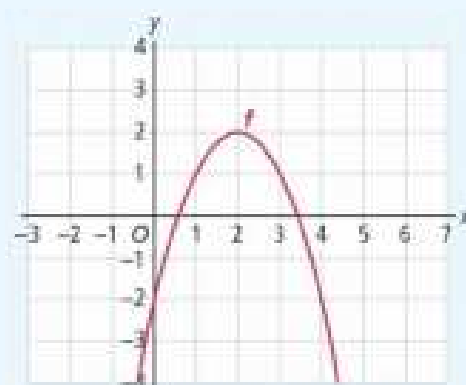
- Hoeveel liter lucht wordt er bij één keer in- en uitademen ververst? Licht je antwoord toe.
- Hoeveel seconden is de periode van zijn ademhaling?
- Hoeveel liter lucht zit er gemiddeld in zijn longen?
- De ademhaling van Robert verandert niet.
Teken in een nieuw assenstelsel het gedeelte van de grafiek vanaf de 23e seconde tot en met de 29e seconde.
- Geef in de grafiek van opdracht d de periode en de amplitude aan.

T2 Gegeven zijn de functies $f(x) = -2x + 16$, $g(x) = 20 \cdot 8^x$ en $h(x) = -2(x + 4)$.

- De grafiek van f wordt 10 omlaag geschoven. De grafiek van i is de beeldgrafiek.
Stel het functievoorschrift van i op.
- De grafiek van m ontstaat door de grafiek van g eerst 40 omhoog te schuiven en daarna ten opzichte van de x -as met de factor $\frac{1}{4}$ te vermenigvuldigen.
Stel het functievoorschrift van m op.
- Draai de volgorde van verschuiven en vermenigvuldigen om. De grafiek van q is de beeldgrafiek.
Stel het functievoorschrift van q op.
- Welke verticale verschuiving moet je toepassen op de grafiek van f zodat de beeldgrafiek precies op de grafiek van h past?

T3 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 4x - 2$.

- W**
- De grafiek van f wordt ten opzichte van de x -as met de factor $\frac{1}{5}$ vermenigvuldigd. De grafiek van g is de beeldgrafiek.
Teken de beeldgrafiek.
 - Stel het functievoorschrift van g op.
 - De grafiek van f wordt nu ten opzichte van de x -as met een andere factor vermenigvuldigd. De nieuwe beeldgrafiek is een dalparabool.
Wat weet je van de factor die gebruikt is?
 - Het functievoorschrift van de nieuwe beeldgrafiek is $h(x) = 5x^2 - 20x + 10$.
Geef de factor die gebruikt is.



- T4** Bij Bakkerij Pater is het salaris afhankelijk van de leeftijd. Je kunt het salaris berekenen met de formule $S = 30L + 1100$. In deze formule is S het salaris in euro's per maand en L de leeftijd van de werknemer in jaren. Na overleg met de vakbonden wordt besloten alle salarissen met 8% en met een vast bedrag van € 150,- te verhogen.

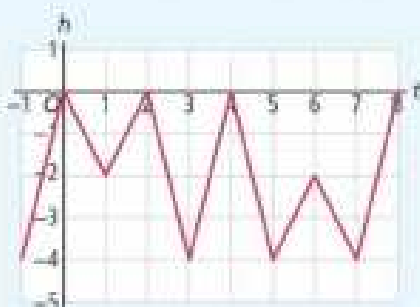
- Stel de formule op voor S_{nieuw} als de salarissen eerst met 8% verhoogd worden en er daarna € 150,- bij gedaan wordt.
- Welke formule krijg je voor S_{nieuw} als je de volgorde omdraait?
- Welke formule zou jij als werknemer kiezen? Waarom?



- T5**
- Teken de grafiek van de functie $f(x) = 2x - 5$. Laat de horizontale as lopen van -3 tot en met 3 . De verticale as loopt van -12 tot en met 8 .
 - De grafiek van f wordt eerst 4 omhoog geschoven en daarna ten opzichte van de x -as met de factor $1\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd. De grafiek van h is de beeldgrafiek. Teken in hetzelfde assenstelsel grafiek van h .
 - Stel het functievoorschrift van h op.
 - De grafiek van de functie $j(x) = x + 1$ ontstaat uit de grafiek van f door eerst ten opzichte van de x -as te vermenigvuldigen en dan verticaal te verschuiven. Met welke vermenigvuldiging en welke verschuiving?
 - De grafiek van j kan ook uit de grafiek van f ontstaan door de volgorde van vermenigvuldigen en verschuiven om te draaien. Met welke verschuiving en welke vermenigvuldiging?

- T6** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + 7x - 1$ en $g(x) = -2x + 1$.
- Stel het functievoorschrift van de somfunctie $s = f + g$ op.
 - Stel het functievoorschrift van de verschilfunctie $v = f - g$ op.
 - Stel ook het functievoorschrift van de verschilfunctie $w = g - f$ op.
 - Hoe moet je de grafiek van f verschuiven zodat de beeldgrafiek door het punt $(-3, 27)$ gaat?

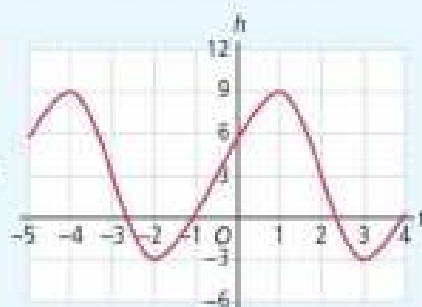
Je kunt van periodieke grafieken de periode, de evenwichtsstand en de amplitude berekenen.



A



B



C

- E1 Geef bij elke grafiek aan of die periodiek is. Zo ja, bereken dan de periode, de evenwichtsstand en de amplitude.

Je kunt na het verticaal verschuiven van een grafiek het bijbehorende functievoorschrift opstellen.

- E2 Vul de tabel verder in.

functievoorschrift van de grafiek	verticaal verschuiven	functievoorschrift van de beeldgrafiek
$f(x) = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$	10 omlaag	$g(x) = \dots$
$k(x) = \dots$	12 omhoog	$l(x) = -\frac{1}{3}x + 3$

- E3
- Teken de grafiek van $f(x) = -x^2 + 4$.
 - De grafiek van f wordt 3 omlaag geschoven. Teken de beeldgrafiek in hetzelfde assenstelsel.
 - De grafiek van g is de beeldgrafiek. Stel het functievoorschrift van g op.

Je kunt na het vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as van een grafiek het bijbehorende functievoorschrift opstellen.

- E4 Vul de tabel verder in.

functievoorschrift van de grafiek	ten opzichte van de x -as vermenigvuldigen met	functievoorschrift van de beeldgrafiek
$f(x) = 24 \cdot 6^x$	de factor $\frac{1}{3}$	$g(x) = \dots$
$k(x) = \dots$	de factor -4	$l(x) = -6x + 12$

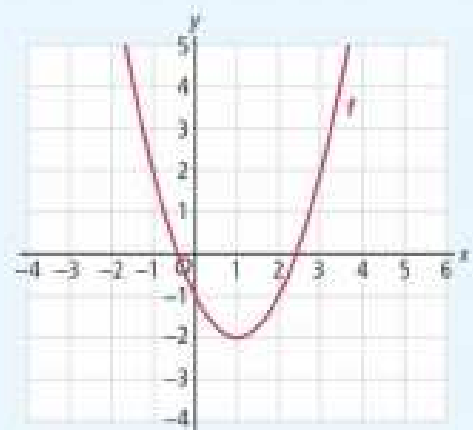
E5 In het assenstelsel zie je de grafiek van $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

W **a** De grafiek van f wordt ten opzichte van de x -as met de factor -2 vermenigvuldigd. De grafiek van g is de beeldgrafiek.

Teken in het assenstelsel de grafiek van g .

b Leg uit waarom de grafiek van g een bergparabool is die vergeleken met de grafiek van f uitgerekt is.

c Stel het functievoorschrift van g op.



Je kunt verticaal verschuiven en vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as combineren.

E6 Vul de tabel verder in.

functievoorschrift van de grafiek	eerst verticaal verschuiven	daarna ten opzichte van de x -as vermenigvuldigen met	functievoorschrift van de beeldgrafiek
$f(x) = -2x + 5$	10 omlaag	de factor -2	$h(x) = \dots$
$k(x) = -2x^2 + x + 2$	4 omhoog	de factor $\frac{1}{2}$	$m(x) = \dots$
$n(x) = 2x^2 + 6x$	3 omhoog	de factor $\dots$	$p(x) = -10x^2 - 30x - 15$
$r(x) = 18 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$	$\dots$	de factor 2	$t(x) = 36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 12$

E7 De grafiek van de functie $p(x) = -4x^2 - 5x + 6$ is eerst ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd en daarna verticaal verschoven. Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $r(x) = 2x^2 + 2\frac{1}{2}x + 5$.

Welke vermenigvuldiging en welke verschuiving is toegepast?

Je kunt van twee functies de somfunctie en de verschilfunctie opstellen.

E8 Stel bij elk paar functievoorschriften de somfunctie $s = f + g$, de verschilfunctie $v = f - g$ en de verschilfunctie $w = g - f$ op.

a $f(x) = x + 5$ en $g(x) = -\frac{3}{4}x + 5$

b $f(x) = -x^2 + 2x$ en $g(x) = 2x + 4$

c $f(x) = 3x^2 + 17x - 4$ en $g(x) = 3x^2 + 1$



In dit hoofdstuk

In klas 2 heb je geleerd hoe je met de stelling van Pythagoras de lengte van een zijde berekent in een rechthoekige driehoek.

In dit hoofdstuk leer je hoe je, in rechthoekige driehoeken waarvan je een hoek en een zijde weet, de lengte van een andere zijde berekent. Ook leer je hoe je een hoek berekent als je van twee zijden van een rechthoekige driehoek de lengte weet. Ten slotte leer je hoe je hoeken berekent in ruimtefiguren.

In de bovenbouw ga je bij wiskunde B verder met het berekenen van hoeken in de meetkunde.

- V1 Van $\triangle KLM$ is $\angle M = 90^\circ$, $LM = 30$ en $KM = 15$.
- Maak een schets van deze driehoek en zet de gegevens erbij.
 - Welke zijden zijn de rechthoekszijden?
 - En welke zijde is de langste zijde?
 - Vul het schema verder in en bereken met de stelling van Pythagoras de lengte van zijde KL .

zijde	kwadraat
$LM = \dots$	$\dots$
$KM = \dots$	$\dots +$
$KL = \dots$	$\dots$

Aanpak

Hoe bereken je de lengte van een zijde in een rechthoekige driehoek?

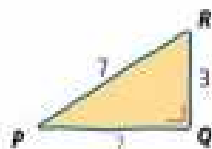
- Maak een schets van de driehoek en zet de gegevens erbij.
- Zet de bekende afmetingen in een schema. Zorg ervoor dat de langste zijde altijd onderaan staat.
- Bereken de kwadraten van de gegeven zijden.
- Bereken het kwadraat van de onbekende zijde.
- Neem de wortel. Geef een exact antwoord.

Voorbeeld

Van $\triangle PQR$ is $\angle Q = 90^\circ$, $PR = 7$ en $QR = 3$.
Bereken de lengte van zijde PQ .

Oplossing

1



2

zijde	kwadraat
$QR = 3$	9
$PQ = \dots$	$\dots +$
$PR = 7$	49

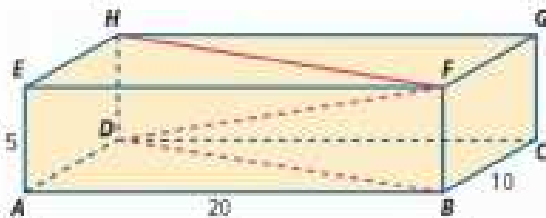
4 $PQ^2 = 49 - 9$

$PQ^2 = 40$

5 $PQ = \sqrt{40}$

- V2 Bereken met de gegevens van de driehoeken hieronder de lengte van de onbekende zijde.

- $\triangle ABC$ met $\angle B = 90^\circ$, $AB = 7$ en $BC = 9$
- $\triangle GHI$ met $\angle G = 90^\circ$, $GH = 4$ en $HI = \sqrt{90}$
- $\triangle KLM$ met $\angle K = 90^\circ$, $KL = 15$ en $KM = 20$



- V3 Van de balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 20$, $BC = 10$ en $AE = 5$. Inge moet de lengte van lijnstuk DF berekenen. Ze maakt eerst een schets van hulpvlak $DBFH$.

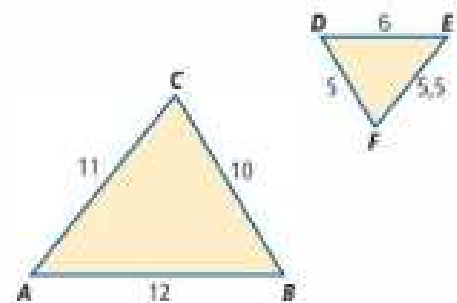
- Ga met een berekening na dat $BD = \sqrt{500}$.
- Daarna gaat Inge de lengte van lijnstuk DF berekenen. Waarom rekent ze met het exacte tussenantwoord door?
- Bereken de lengte van lijnstuk DF .

zijde	kwadraat
$BD = \sqrt{500}$	...
$BF = 5$	... +
$DF = \dots$	...

- V4 Driehoek DEF is een vergroting van driehoek ABC .
- Vul de lengte van de overeenkomstige zijden in de tabel in.

zijden $\triangle ABC$	$AB = \dots$	$BC = \dots$	$AC = \dots$
zijden $\triangle DEF$	$\dots = \dots$	$\dots = \dots$	$\dots = \dots$

- Met welke factor moet je de lengte van de zijden van $\triangle ABC$ vermenigvuldigen om die van $\triangle DEF$ te krijgen?
- Wat weet je van de overeenkomstige hoeken?

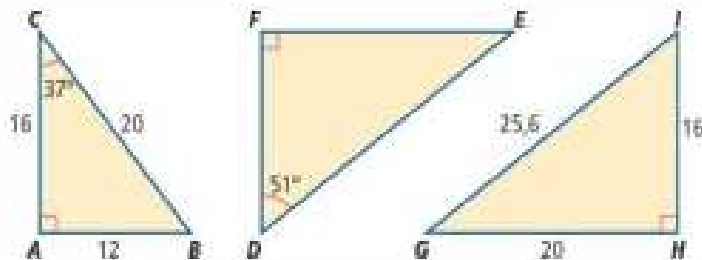


Theorie

Om aan te tonen dat twee driehoeken **gelijkvormig** zijn, is het voldoende als je kunt aantonen dat aan één van de twee volgende voorwaarden voldaan is.

- > De overeenkomstige hoeken zijn gelijk.
- > De overeenkomstige zijden zijn met dezelfde factor vermenigvuldigd.

- V5
- Zijn $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ gelijkvormig?
 - En zijn $\triangle ABC$ en $\triangle GHI$ gelijkvormig?



Je leert

- wat de hellingshoek en de tangens is
- hoe je met de tangens een hellingshoek berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 1-02-3-4-05-6
- doorlopend: 1-2-3-4-5-6
- uitdagend: 1-2-3-5-6-U1

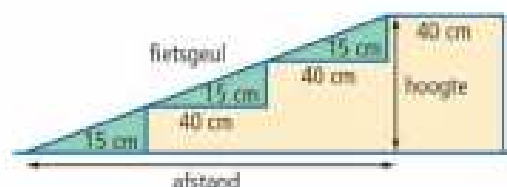
Op steeds meer plekken in de wereld zie je zonnepanelen waarvan de hoek verstelbaar is.

- Waarom is het voor de opbrengst goed als de hoek van een zonnepaneel verstelbaar is?



- 1 De stationstrap op de foto heeft een fietsgeul. Een fiets die over de fietsgeul naar boven wordt geduwd, wordt over een horizontale afstand en in hoogte verplaatst. Een tekening van drie treden van die trap met de fietsgeul staat onder de foto.

- Welke afstand en welke hoogte horen bij de trap met drie treden?
- Als de trap uit 13 treden bestaat, welke afstand en welke hoogte horen er dan bij de trap?
- En welke afstand en welke hoogte horen er bij één trede?
- Bereken bij de opdrachten a, b en c de uitkomst van de deling $\frac{\text{hoogte}}{\text{afstand}}$. Wat valt je op?
- Zal de helling van de fietsgeul veranderen als de trap uit een ander aantal treden bestaat?
- Meet de hoek die de fietsgeul met de grond maakt.



Theorie

Je kunt op twee manieren aangeven hoe groot de helling van lijn AC in de rechthoekige driehoek is.

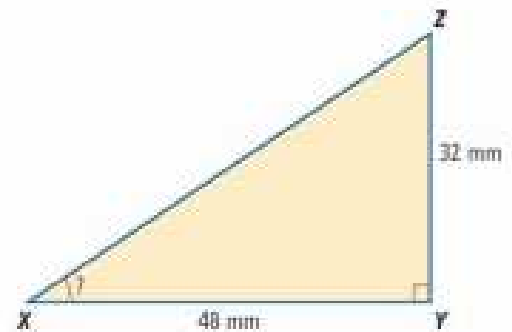
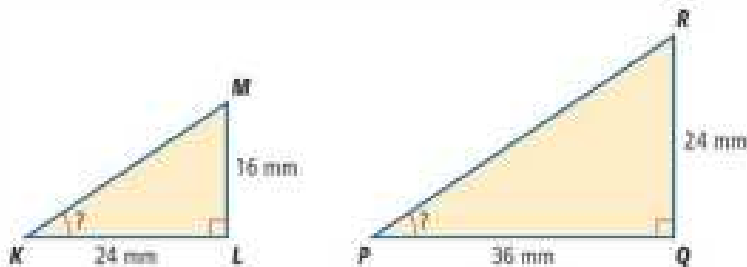
- > Met de grootte van hoek A . Je noemt deze hoek de **hellingshoek**.
- > Met de deling $\frac{\text{hoogte}}{\text{afstand}}$. De uitkomst van deze deling is het hellingsgetal of de **tangens** van hoek A . Je schrijft dat als $\tan \angle A$.

Voorbeeld

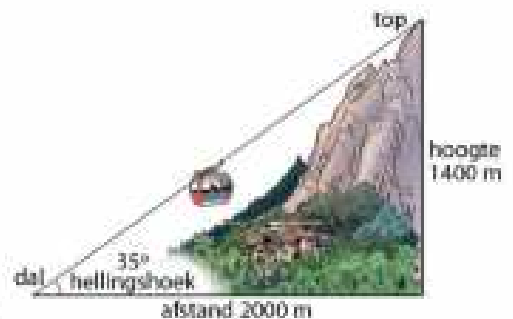


De tangens van hoek A is $\frac{12}{25}$ oftewel $\tan \angle A = \frac{12}{25} = 0,48$.

Ondersteunende route → maak opdracht 02



- 2 De driehoeken KLM , PQR en XYZ zijn gelijkvormig.
- Bereken de tangens van hoek K , hoek P en hoek X .
 - Wat valt je op aan de antwoorden? Hoe komt dat?
 - Meet in elke driehoek de hellingshoek.
- 3 In de tekening zie je een kabelbaan die het dal met de top van een berg verbindt. De hellingshoek van de kabelbaan is 35° .
- Laat met een berekening zien dat het hellingsgetal van de kabelbaan 0,7 is.
 - Vul in: $\tan 35^\circ = \frac{\quad}{\quad} = \dots$
 - In opdracht b heb je $\tan 35^\circ$ uitgerekend door de hoogte te delen door de afstand. Je kunt $\tan 35^\circ$ ook uitrekenen door op je rekenmachine $\boxed{\tan} \boxed{35} \boxed{=}$ in te typen. Ga dat na.
 - Andersom kun je met je rekenmachine ook de hellingshoek bij het hellingsgetal 0,7 vinden door $\boxed{\tan^{-1}} \boxed{0,7} \boxed{=}$ in te typen. Ga na dat je zo een hellingshoek van 35° vindt.



- 4 Een helling gaat 7 meter omhoog over een horizontale afstand van 11 meter.
- Maak een schets van een rechthoekige driehoek en zet de gegevens erbij.
 - Schrijf de tangens op die bij de hellingshoek hoort.
 - Ranita, Divya en Jonny berekenen de hellingshoek met de rekenmachine. Wie vindt de juiste hellingshoek?

Ranita

$$\tan^{-1}\left(\frac{7}{11}\right)$$

Divya

$$\tan^{-1}(7 \div 11)$$

Jonny

$$\tan^{-1}(0,64)$$

Aanpak

Hoe bereken je met de tangens een hellingshoek?

- 1 Maak een schets en zet alle gegevens erbij.
- 2 Schrijf de tangens op die bij de hellingshoek hoort.
- 3 Gebruik $\tan^{-1}$ op je rekenmachine om de hellingshoek te berekenen. Rond hoeken altijd af op hele graden.

Voorbeeld

Met de glijbaan van het zwembad glijd je over een horizontale afstand van 20 meter 8 meter naar beneden. Hoe groot is de hellingshoek van de glijbaan?

Oplossing



2 $\tan \angle R = \frac{8}{20}$

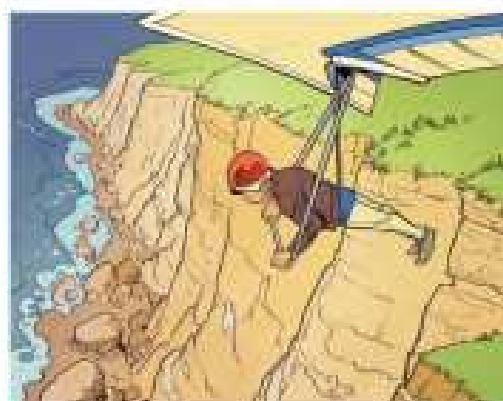
3 $\angle R \approx 22^\circ$

Ondersteunende route → maak opdracht 05

- 5 Erik rijdt met zijn rolstoel de helling voor het gemeentehuis op. Het hoogteverschil is 20 cm en de horizontale afstand is 5 meter. Volgens de wettelijke eisen mag de hellingshoek van een rolstoelhelling niet groter dan 3° zijn. Voldoet deze helling aan de wettelijke eisen?

- 6 Björn springt met een hangglider van een aantal hoge krijtrotsen af. De hangglider daalt in een rechte lijn. In de tabel zie je van deze vluchten een deel van de gegevens.

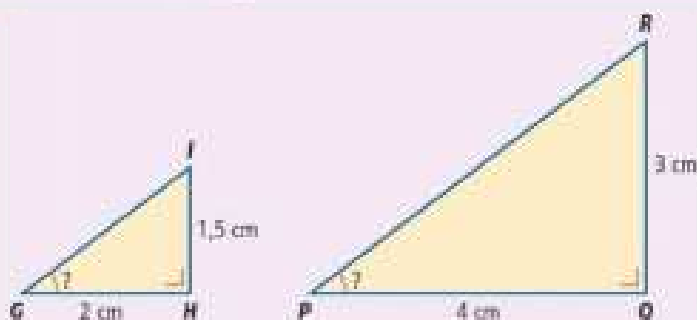
vlucht	hoogte in meters	afstand in meters	tangens	hellingshoek
A	15	120	...	...
B	375	75	...	...
C	...	160	0,25	...
D	...	200	...	17°



- Bereken in graden nauwkeurig de hellingshoek van vlucht A en van vlucht B.
- Vul de tabel verder in.
- Vul in: Hoe groter de tangens, hoe ... de hellingshoek.

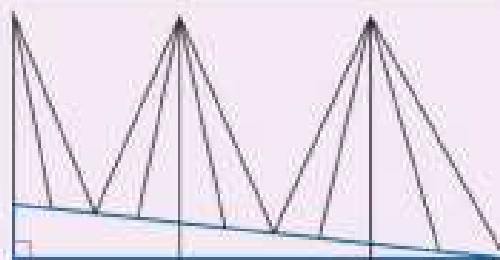
Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten



- 02 De driehoeken GHI en PQR zijn gelijkvormig.
- Van driehoek GHI is de hoogte 1,5 cm en de afstand 2 cm.
Vul in: de tangens van hoek G is $\frac{\quad}{\quad}$.
 - Welke hoogte hoort bij hoek P ? En welke afstand?
 - Aron zegt: 'De tangens van hoek P is $\frac{4}{3}$ '.
Welke fout maakt Aron?
 - Bereken de tangens van hoek P .
 - Meet in beide driehoeken de hellingshoek.
 - Waarom hebben beide hoeken hetzelfde hellingsgetal?
 - Teken een driehoek XYZ met hetzelfde hellingsgetal.

- 05 Petra rijdt in Frankrijk over het viaduct van Millau. Het viaduct overbrugt een afstand van 2459 meter en het hoogteverschil daarbij is 74 meter.
- Zet de juiste maten in de schets van het viaduct.
 - Bereken de tangens van de hellingshoek.
 - Gebruik $\tan^{-1}$ op je rekenmachine en bereken de hellingshoek.



Uitdagende opdrachten

- U1 Bij een hellingspercentage van 17 procent stijgt een weg 17 meter per 100 meter.
- Welke helling is steiler: een helling van 17% of een helling van 17° ?
 - Welke hellingshoek hoort er bij een helling van 100%?
 - Hoeveel graden is de hellingshoek bij een verticale wand?

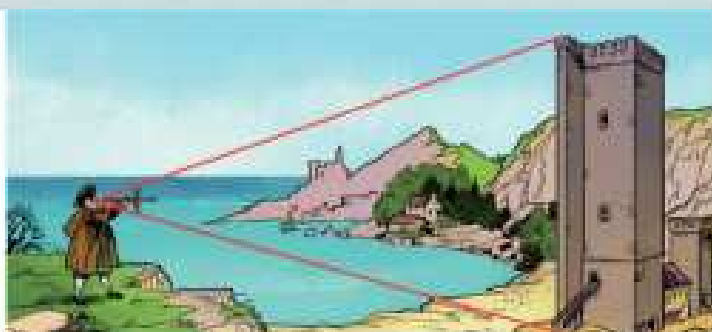


Je leert • hoe je met de tangens de lengte van een zijde berekent

Leerroutes • ondersteunend: 7—8—09—10—11—012—13—14
• doorlopend: 7—8—9—10—11—12—13—14
• uitdagend: 7—8—9—10—11—12—14—U2

Voor het vinden van de hoogte van gebouwen was de jakobsstaf, in de 17e eeuw een handig hulpmiddel. De verticale meetlat is verstelbaar en je kunt er de afstand en de hoogte op aflezen.

- Beschrijf hoe je met de jakobsstaf de hoogte van een gebouw kunt vinden.



- 7 Je moet berekenen hoe groot $\angle P$ in $\triangle PQR$ is.
- Teken $\triangle PQR$ zó dat zijde PR de horizontale afstand is.
 - Vul in.
 $\tan \angle P = \dots$
 $\angle P = \dots$



Theorie

Rechthoekige driehoeken worden niet altijd met de hoogte verticaal getekend. Je kunt daarom beter onthouden

$$\tan \angle A = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van hoek } A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van hoek } A}$$

Voorbeeld

aanliggende
rechthoekszijde
van hoek A



overstaande
rechthoekszijde
van hoek A

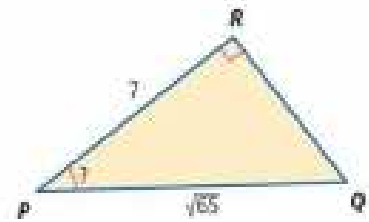
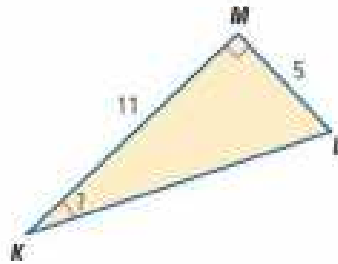
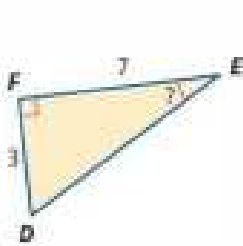
$$\text{TOA } T = \frac{O}{A}$$

$$\tan \angle A = \frac{21}{31}$$

$$\angle A \approx 34^\circ$$

- 8
- Welke zijde in het voorbeeld is de overstaande rechthoekszijde van hoek B ?
 - Welke zijde is de aanliggende rechthoekszijde van hoek B ?
 - Vul in: $\tan \angle B = \dots$, dus $\angle B = \dots$
 - Hoe had je $\angle B$ ook kunnen berekenen?

Ondersteunde route → maak opdracht 09



- 9 a Vul in: $\tan \angle E = \frac{\dots}{\dots}$, dus $\angle E \approx \dots$
 b Bereken $\angle K$.
 c Bereken eerst de lengte van zijde QR en dan $\angle P$.
- 10 Een weg heeft een hellingshoek van 8° . Levita wil weten hoeveel de weg over een horizontale afstand van 3 km stijgt. Ze maakt een schets en begint op een blaadje een berekening.



$\tan 8^\circ = \frac{h}{3}$
$h = \dots \times \tan 8^\circ$
$h = \dots$

Levita

denk aan

$$2 = \frac{6}{3}$$

$$6 = 3 \times 2$$

- a Waarom is het niet nodig dat haar schets heel precies op schaal is?
- b Vul Levita's blaadje verder in. Rond de hoogte in km af op één decimaal.
- 11 De Domtoren in Utrecht is 110 meter hoog. Naomi ziet de Domtoren onder een hoek van 13° . Ze wil weten hoe ver ze van de Domtoren staat en maakt een schets van de situatie.
- a Vul de berekening op Naomi's blaadje verder in.
- b Waarom heeft het geen zin om het aantal meters op twee decimalen af te ronden?



$\tan \dots = \frac{110}{a}$
$a = \frac{110}{\tan \dots}$
$a \approx \dots$

Naomi

denk aan

$$2 = \frac{6}{3}$$

$$3 = \frac{6}{2}$$

Aanpak

Hoe bereken je met de tangens de lengte van een zijde?

- 1 Maak een schets en zet alle gegevens erbij.
- 2 Vul voor de bekende hoek alle gegevens in bij $\tan \dots = \frac{\dots}{\dots}$.
- 3 Voer een vermenigvuldiging of een deling uit en bereken zo de lengte van de zijde. Rond verstandig af.

Voorbeeld 1

Hoeveel meter stijg je als je een helling oprijdt met een hellingshoek van 20° en een horizontale afstand van 250 meter?

Oplossing

1



$$2 \quad \tan 20^\circ = \frac{BC}{250}$$

$$3 \quad BC = 250 \times \tan 20^\circ \\ BC \approx 91 \text{ meter}$$

Voorbeeld 2

Hoe groot is de horizontale afstand als je een helling oprijdt met een hellingshoek van 20° en een hoogteverschil van 120 meter?

Oplossing

1



$$2 \quad \tan 20^\circ = \frac{120}{DE}$$

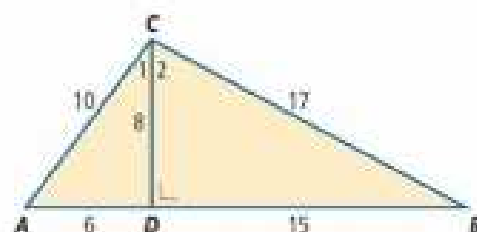
$$3 \quad DE = \frac{120}{\tan 20^\circ} \\ DE \approx 330 \text{ meter}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 012

- 12 De kapitein van een schip ziet de top van een vuurtoren onder een hoek van 7° . Hij weet dat de vuurtoren 40 meter hoog is.
Bereken de afstand van het schip tot de vuurtoren.

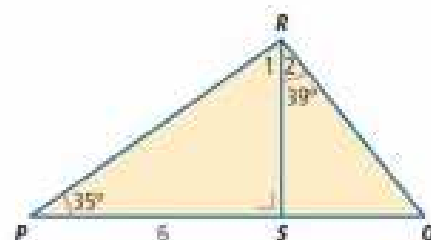
- 13 Van $\triangle ABC$ is $AD = 6$, $BD = 15$, $BC = 17$, $AC = 10$, $CD = 8$ en staat lijnstuk CD loodrecht op zijde AB .

- a Volgens Niek is $\tan \angle A = \frac{17}{10}$.
Leg uit waarom dat niet goed is.
- b Bereken $\angle A$ en $\angle B$.
- c Hoe groot is $\angle C$? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.
- d Bereken $\angle C_1$ en $\angle C_2$.



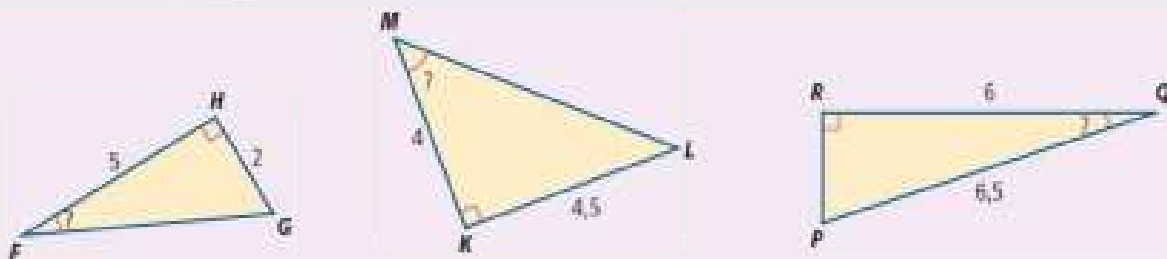
- 14 Van $\triangle PQR$ is $PS = 6$, $\angle P = 35^\circ$, $\angle R_2 = 39^\circ$ en staat lijnstuk RS loodrecht op zijde PQ .

- a Bereken de lengte van lijnstuk RS .
- b Hoe lang is lijnstuk QS ?
- c En hoe lang is zijde PQ ?



Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

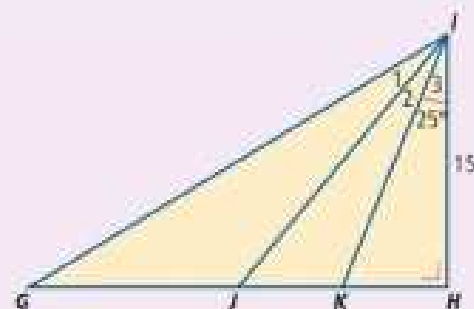


- 09
- Zijde GH is de overstaande rechthoekszijde van hoek F . Welke zijde is de aanliggende rechthoekszijde van hoek F ?
 - Vul in: $\tan \angle F = \frac{\dots}{\dots}$
 - Bereken $\angle F$.
 - Welke zijde is de overstaande rechthoekszijde van hoek M ? En welke zijde is de aanliggende rechthoekszijde van hoek M ?
 - Vul in: $\tan \angle M = \frac{\dots}{\dots}$, dus $\angle M = \dots$
 - Waarom kun je hoek Q nog niet meteen berekenen?
 - Bereken met de stelling van Pythagoras de lengte van zijde PR .
 - Bereken $\angle Q$.

- 012
- Katy kijkt omhoog naar het puntje van de kerktoeren. Ze ziet deze onder een hoek van 47° . De kerktoeren staat 56 meter van haar af.
- Maak een schets van een rechthoekige driehoek en zet alle gegevens erbij.
 - Vul voor de bekende hoek de gegevens in bij $\tan \dots = \frac{\dots}{\dots}$.
 - Hoeveel meter hoog is de kerktoeren?

Uitdagende opdrachten

- U2
- In de figuur is $HI = 15$ en $\angle I_3 = 25^\circ$. Punt J ligt midden tussen de punten G en H en punt K ligt midden tussen de punten H en J . Bereken $\angle I_1$.



Je leert

- wat de goniometrische verhoudingen zijn
- hoe je met de sinus en de cosinus een hoek berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 15–16–017–17–018–19
- doorlopend: 15–16–17–18–19–20
- uitdagend: 15–16–17–18–19–U3

Erik is in Vlaanderen en gaat met de fiets de Kemmelberg beklimmen. Hij heeft daarvoor een hoogteverschil van 109 meter moeten overwinnen. Als Erik op de top aankomt, ziet hij op zijn kilometerteller dat hij 1385 meter heeft gefietst.

- Erik wil de hellingshoek weten en berekent de tangens met de deling $\frac{109}{1385}$.
Welke fout maakt hij?
- Hoe kan Erik de hellingshoek berekenen?



15 Driehoek ABC is gelijkvormig met driehoek DEF .

a Reken de onderstaande delingen uit.

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\dots}{\dots} = \dots \quad \frac{BC}{AC} = \frac{\dots}{\dots} = \dots \quad \frac{AB}{AC} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$\frac{EF}{DE} = \frac{\dots}{\dots} = \dots \quad \frac{EF}{DF} = \frac{\dots}{\dots} = \dots \quad \frac{DE}{DF} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

b Driehoek KLM ontstaat door alle zijden van driehoek ABC drie keer zo groot te maken.

Teken driehoek KLM .

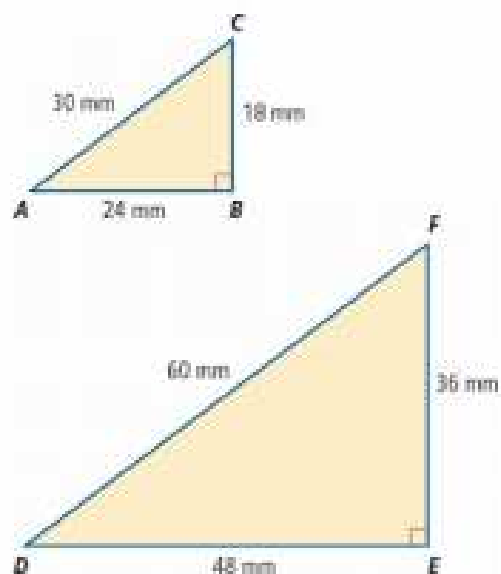
c Reken de onderstaande delingen uit.

$$\frac{LM}{KL} = \frac{\dots}{\dots} = \dots \quad \frac{LM}{KM} = \frac{\dots}{\dots} = \dots \quad \frac{KL}{KM} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

d Bij gelijkvormige driehoeken geven overeenkomstige delingen dezelfde uitkomst.

Leg uit waardoor dat komt.

e Bij welke van de delingen krijg je de tangens als uitkomst?



Theorie

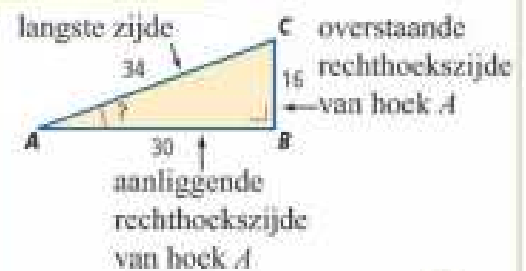
Voor het berekenen van hoeken is het soms handiger om in plaats van de tangens de **sinus** of de **cosinus** te gebruiken. De sinus van hoek A schrijf je kort als $\sin \angle A$ en bereken je met

$$\sin \angle A = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van hoek } A}{\text{langste zijde}}$$

De cosinus van hoek A schrijf je kort als $\cos \angle A$ en bereken je met

$$\cos \angle A = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van hoek } A}{\text{langste zijde}}$$

De sinus, de cosinus en de tangens noem je de **goniometrische verhoudingen**.

Voorbeeld

$$\sin \angle A = \frac{16}{34}$$

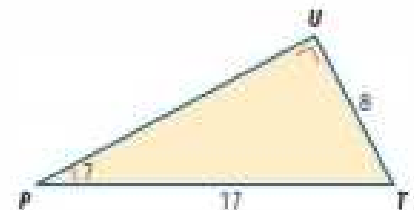
$$\cos \angle A = \frac{30}{34}$$

$$\angle A \approx 28^\circ$$

$$\text{SOL } S = \frac{O}{L}$$

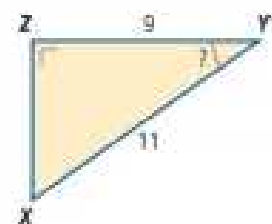
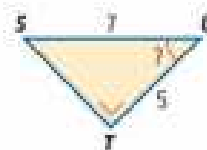
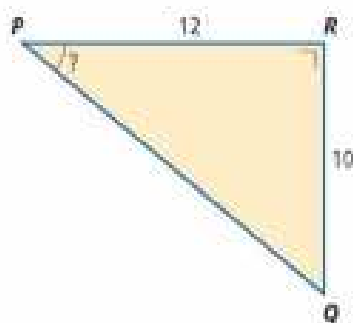
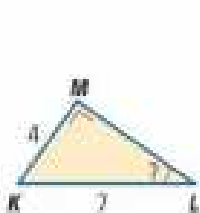
$$\text{CAL } C = \frac{A}{L}$$

- 16** a Vul voor hoek P de goniometrische verhoudingen in.
 $\tan \angle P = \frac{\dots}{\dots}$ $\sin \angle P = \frac{\dots}{\dots}$ $\cos \angle P = \frac{\dots}{\dots}$
 b Net als bij de tangens kun je met de toetsen $\sin^{-1}$ en $\cos^{-1}$ op je rekenmachine de hoeken berekenen. Bereken $\angle P$ met $\tan^{-1}$, met $\sin^{-1}$ en met $\cos^{-1}$ en laat zien dat je steeds dezelfde hoekgrootte vindt.
 c Waarom kun je bij het berekenen van hoek S in $\triangle STU$ het best de sinus gebruiken?
 d Vul in.
 $\sin \angle S = \frac{\dots}{\dots}$
 $\angle S = \dots$



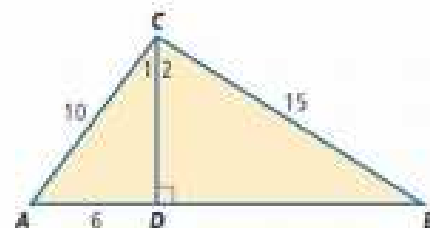
Ondersteunde route → maak opdracht 017

- 17** Bereken $\angle L$, $\angle P$, $\angle U$ en $\angle Y$.



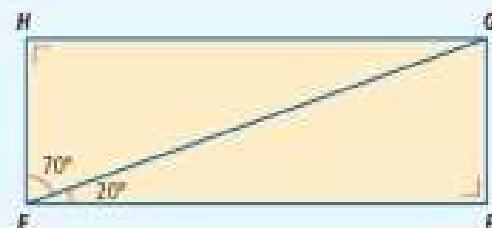
Ondersteunde route → maak opdracht O18

- 18 Van driehoek ABC is $AC = 10$, $BC = 15$, $AD = 6$ en staat lijnstuk CD loodrecht op zijde AB . Pieter wil nagaan of driehoek ABC een rechthoekige driehoek is.
- Bereken $\angle C_1$.
 - Hoe groot is $\angle C_2$?
 - Zal Pieter concluderen dat driehoek ABC een rechthoekige driehoek is? Leg je antwoord uit.

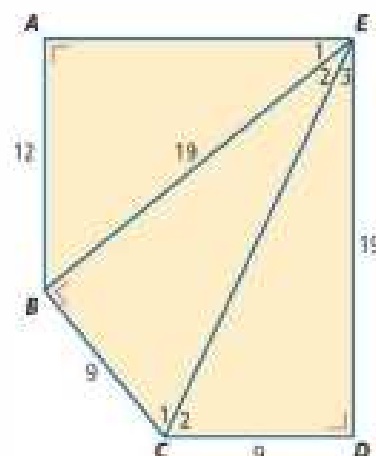


Theorie

In rechthoek $EFGH$ is niet duidelijk welke hoek je bedoelt met $\angle E$. Is dat de hoek van 20° , de hoek van 70° of de hele hoek van 90° ? Om misverstanden te voorkomen kun je de **hoek met drie letters** aanduiden. Je noemt de hoek van 20° dan $\angle GEF$ of $\angle FEG$. De hoek van 70° noem je $\angle HEG$ of $\angle GEH$. De middelste letter hoort altijd bij het hoekpunt.



- 19 Drie rechthoekige driehoeken zijn tegen elkaar gelegd.
- Schrijf $\angle E_1$, $\angle E_2$, $\angle E_3$, $\angle C_1$ en $\angle C_2$ als hoeken met drie letters.
 - Bereken $\angle ABE$.
 - Hoe groot is $\angle BEA$?
 - Bereken $\angle BCE$.
 - Hoe groot is $\angle ECD$?
 - Wat voor een bijzondere vierhoek is vierhoek $BCDE$?
- 20
- Teken in een assenstelsel de punten $P(1, 2)$, $Q(5, 2)$, $R(5, 5)$, $S(1, 5)$ en $T(5, 8)$. Teken rechthoek $PQRS$ met de diagonaal PR . Teken ook driehoek RST .
 - Bereken $\angle PRQ$.
 - Hoe groot is $\angle RTS$?



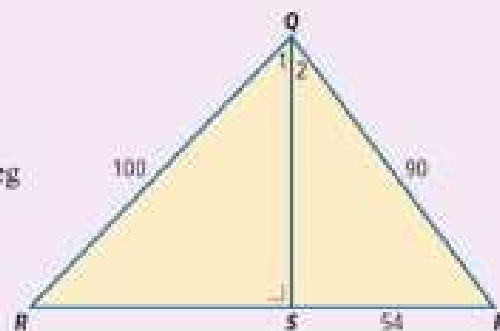
Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

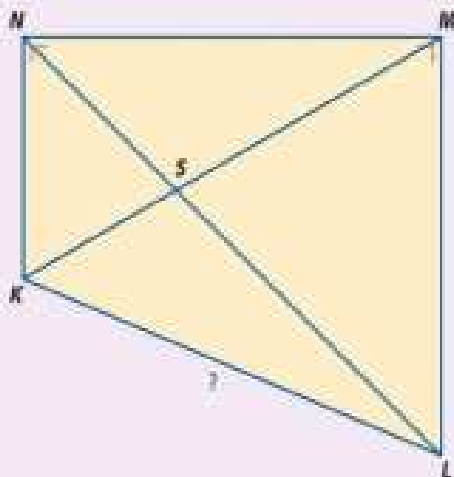
- 017 a Welke zijde van $\triangle DEF$ is de langste zijde?
 b Vul in.
 Zijde DE is de ... rechthoekszijde van hoek F .
 c Met welke goniometrische verhouding kun je hoek F berekenen?
 d Bereken $\angle F$.



- 018 Van driehoek PQR is $PQ = 90$, $QR = 100$ en $PS = 54$ en staat lijnstuk QS loodrecht op zijde PR . Magdalena wil nagaan of driehoek PQR een rechthoekige driehoek is.
 a Bereken $\angle Q_1$.
 b Om $\angle Q_1$ direct te kunnen berekenen, heb je niet genoeg gegevens.
 Bereken met de stelling van Pythagoras de lengte van lijnstuk QS .
 c Bereken $\angle Q_1$.
 d Bereken $\angle Q_{12}$ en leg uit of Magdalena zal concluderen dat driehoek PQR een rechthoekige driehoek is.



Uitdagende opdrachten



- U3 Van vierhoek $KLMN$ is $\angle LMN = \angle MNK = 90^\circ$, $\angle MNL = 45^\circ$, $\angle NMK = 30^\circ$ en $LN = \sqrt{32}$.
 De diagonalen KM en LN snijden elkaar in punt S .
 a Bereken de lengte van lijnstuk KL . Rond je antwoord af op één decimaal.
 b Bereken in één decimaal nauwkeurig de omtrek van vierhoek $KLMN$.

Je leert • hoe je met goniometrische verhoudingen de lengte van een zijde berekent

Leerroutes • ondersteunend: 21—022—22—23—024—25
 • doorlopend: 21—22—23—24—25—26
 • uitdagend: 21—22—23—24—26—U4

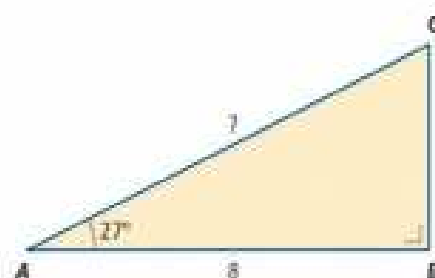
Langs de oever van een meer staan twee bakens in de punten K en L . Een landmeter staat in punt M . Zowel de afstand van punt M naar punt K als de afstand van punt M naar punt L is 630 meter en $\angle KML = 34^\circ$.

- Hoe kan de landmeter de afstand tussen de bakens in de punten K en L berekenen?



21 Lieke wil de lengte van zijde AC berekenen.

- Is zijde AC de aanliggende rechthoekszijde van hoek A , de overstaande rechthoekszijde van hoek A of de langste zijde?
- Is de lengte gegeven van de aanliggende rechthoekszijde van hoek A , van de overstaande rechthoekszijde van hoek A of van de langste zijde?
- Volgens Lieke moet je nu $\cos 27^\circ$ gebruiken. Waarom is het voor het berekenen van de lengte van zijde AC niet handig om $\sin 27^\circ$ of $\tan 27^\circ$ te gebruiken?
- Vul in: $\cos 27^\circ = \frac{\dots}{\dots}$
- Bereken de lengte van zijde AC . Rond verstandig af.



Aanpak

Hoe bereken je met goniometrische verhoudingen de lengte van een zijde?

- Kijk of de gegeven zijde de aanliggende rechthoekszijde of de overstaande rechthoekszijde van de gegeven hoek is, of dat het de langste zijde is.
- Kijk of de te berekenen zijde de aanliggende rechthoekszijde of de overstaande rechthoekszijde van de gegeven hoek is, of dat het de langste zijde is.
- Ga na of je het best de sinus, de cosinus of de tangens kunt gebruiken.
- Bereken hiermee de lengte van de zijde. Rond verstandig af.

Voorbeeld 1

Bereken de lengte van zijde PQ .



Oplossing

- 1 Van hoek P is de overstaande rechthoekszijde gegeven.
- 2 Je moet de langste zijde berekenen.
- 3 Je kunt het best de sinus gebruiken.

$$\sin 34^\circ = \frac{7}{PQ}$$

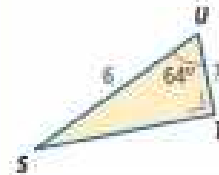
$$PQ = \frac{7}{\sin 34^\circ}$$

$$PQ \approx 12,5$$



Voorbeeld 2

Bereken de lengte van zijde TU .



Oplossing

- 1 De langste zijde is gegeven.
- 2 Je moet de aanliggende rechthoekszijde van hoek U berekenen.
- 3 Je kunt het best de cosinus gebruiken.

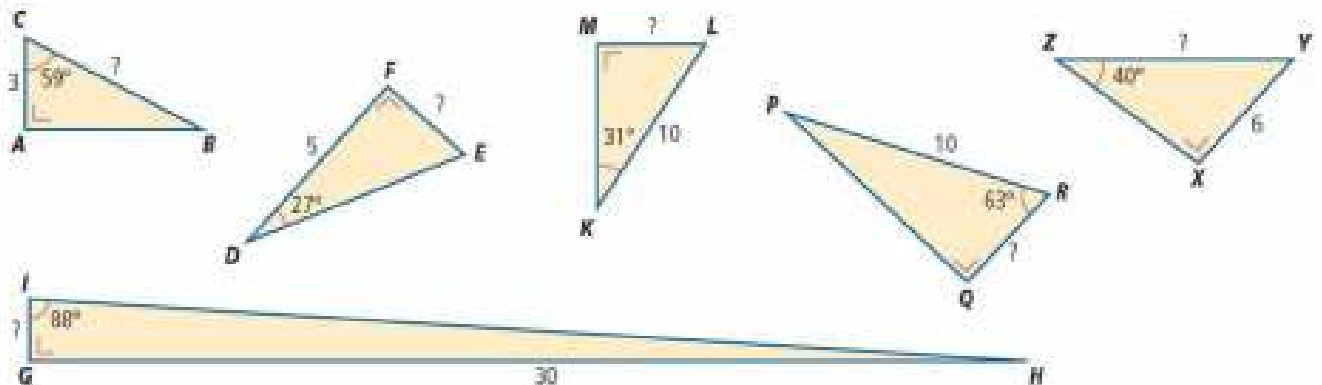
$$\cos 64^\circ = \frac{TU}{6}$$

$$TU = 6 \times \cos 64^\circ$$

$$TU \approx 2,6$$



Ondersteunde route → maak opdracht 022

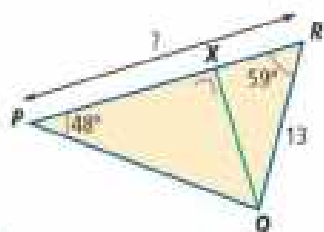


22 Bereken de lengte van de zijden waar een vraagteken bij staat.

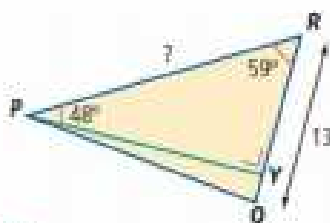
- 23 Van driehoek DEF is $\angle D = \angle E = 55^\circ$ en $DF = 8$.
- a Schets driehoek DEF en zet de bekende gegevens erbij.
 - b Waarom lukt het niet meteen om de lengte van zijde DE te berekenen?
 - c Teken in je schets een hulplijn vanuit punt F loodrecht op zijde DE .
 - d Bereken met behulp van deze hulplijn de lengte van zijde DE .

In een driehoek zonder rechte hoek moet je eerst een hulplijn tekenen die een rechte hoek maakt. Vaak kun je dan de lengte van een zijde of de grootte van een hoek met de sinus, de cosinus of de tangens berekenen.

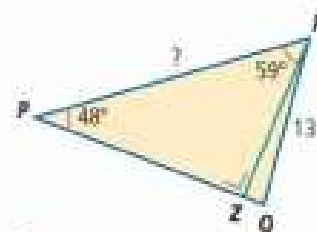
Ondersteunde route → maak opdracht 024



1



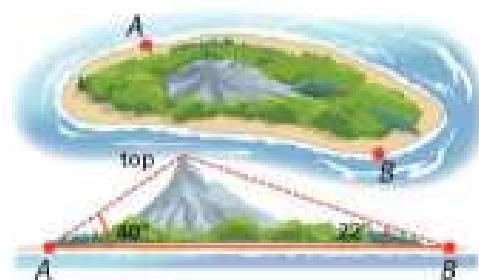
2



3

- 24 Je ziet drie keer $\triangle PQR$ met telkens een andere hulplijn.
- In welke tekeningen kun je met behulp van de hulplijn de lengte van zijde PR berekenen? En in welke niet?
 - Kies een tekening en bereken de lengte van zijde PR .

- 25 De dorpen Antigon en Borbon liggen op een eiland. Tussen deze dorpen ligt een berg waarvan de top op 1350 meter hoogte ligt. Vanuit Antigon zie je de top van de berg onder een hoek van 40° en vanuit Borbon onder een hoek van 22° . De dorpen zijn onderling alleen bereikbaar over zee. Men wil een tunnel door de berg boren om de verbinding tussen de dorpen te verbeteren. Bereken hoeveel meter die tunnel wordt.



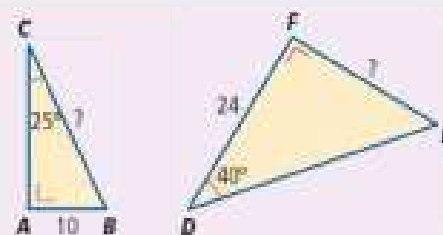
- 26 De plaatsen Hattem en Zwolle liggen aan de oevers van de IJssel. Leerlingen van een school uit Hattem willen de afstand tussen de kerktoeren van Hattem (H) en de kerktoeren van Zwolle (Z) berekenen. Ze meten de afstand van de kerktoeren in Hattem tot de grote spoorbrug (S) en vinden dat deze afstand hemelsbreed 2,3 km is. Vervolgens meten ze de hoeken op. Dat geeft $\angle SHZ = 37^\circ$ en $\angle HZS = 20^\circ$.
- Maak een schets van de situatie, zet de bekende gegevens erbij en teken een geschikte hulplijn.
 - Bereken de afstand tussen de kerktoeren van Hattem en de kerktoeren van Zwolle.



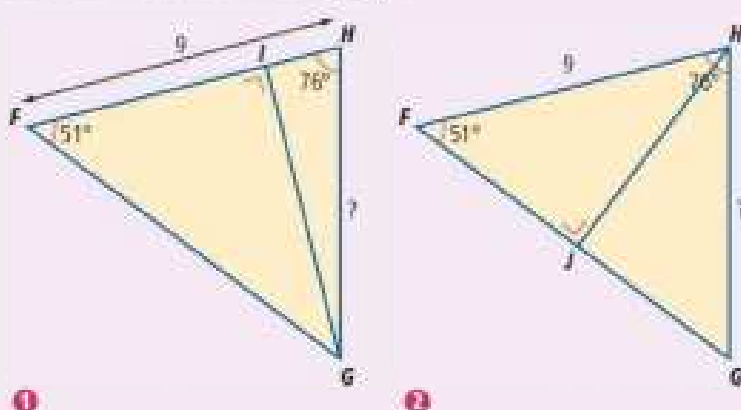
Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

- 022 a Van $\triangle ABC$ is $\angle C = 25^\circ$ en $AB = 10$.
Is zijde AB de overstaande rechthoekszijde van hoek C of de aanliggende rechthoekszijde van hoek C ?
- b Zijde BC is de langste zijde van $\triangle ABC$.
Moet je de sinus, de cosinus of de tangens gebruiken om de lengte van zijde BC te berekenen?
- c Bereken de lengte van zijde BC .
- d Van $\triangle DEF$ is $\angle D = 40^\circ$ en $DF = 24$.
Waarom kun je het best de tangens gebruiken om de lengte van zijde EF te berekenen?
- e Bereken de lengte van zijde EF .



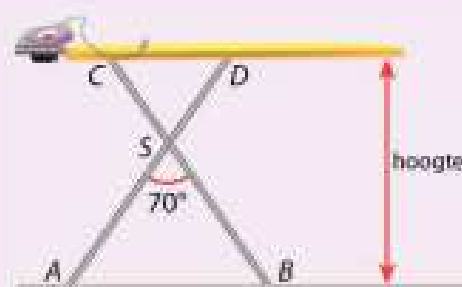
- 024 René moet de lengte van zijde GH berekenen en tekent in $\triangle FGH$ twee keer een hulplijn.



- a Waarom kan René in tekening 1 de lengte van zijde GH niet meteen berekenen?
- b Bereken de lengte van hulplijn HJ .
- c Hoe groot is $\angle FGH$?
- d Bereken de lengte van zijde GH .

Uitdagende opdrachten

- U4 De poten van de strijklank zijn 120 cm lang en zitten in punt S onder een hoek van 70° aan elkaar vast. Verder is $AS = BS = 80$ cm.
- a Bereken de hoogte van de strijklank.
- b Bereken hoe ver de poten AD en BC op de grond uit elkaar staan.



Je leert • hoe je de hoek tussen twee lijnstukken in een ruimtetfiguur berekent

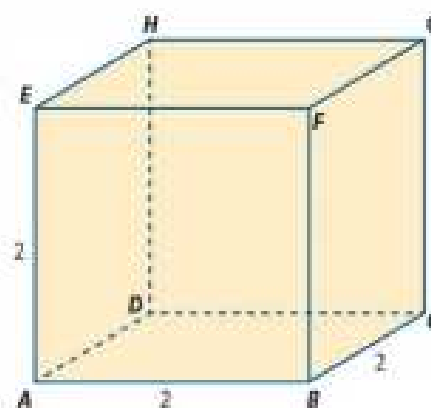
Leerroutes • ondersteunend: 27—28—29—O30—30
 • doorlopend: 27—28—29—30—31
 • uitdagend: 27—29—30—31—U5

Het klimrek heeft een vierkant grondvlak en de vier opstaande palen zijn 2,5 meter lang.

- Hoe verandert de hoek tussen de palen in de top als je het klimrek hoger maakt?



- 27** De kubus $ABCD.EFGH$ heeft ribben van 2.
- Hoe groot zijn $\angle BAE$, $\angle BAD$ en $\angle DAE$?
 - En hoe groot is $\angle CAE$?
 - Je moet $\angle CAG$ berekenen. Dat is de hoek tussen lijnstuk AG en lijnstuk AC . Lijnstuk AG en lijnstuk AC liggen in hulpvlak $ACGE$. Welke vorm heeft hulpvlak $ACGE$?
 - Maak een schets van hulpvlak $ACGE$ en zet de bekende gegevens erbij.
 - Is driehoek ACG een rechthoekige driehoek?
 - Leg uit dat je eerst nog de lengte van een lijnstuk moet berekenen voordat je $\angle CAG$ kunt berekenen.
 - Bereken $\angle CAG$.



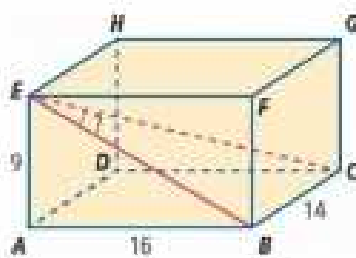
Aanpak

Hoe bereken je de hoek tussen twee lijnstukken in een ruimtetfiguur?

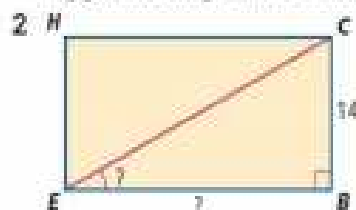
- 1 Zoek een hulpvlak waarin beide lijnstukken liggen.
- 2 Maak een schets van dit hulpvlak en zet de bekende gegevens erbij.
- 3 Kijk of je de gevraagde hoek al kunt berekenen. Soms moet je eerst de lengte van een lijnstuk berekenen.
- 4 Gebruik het exacte tussenantwoord om de hoek te berekenen.

Voorbeeld

Bereken in de balk $\angle BEC$.

**Oplossing**

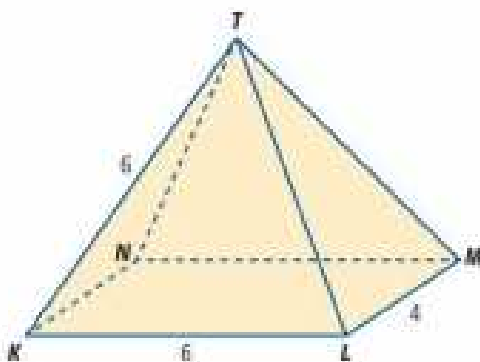
1 De lijnstukken BE en CE liggen in hulpvlak $BCHE$.



zijde	kwadraat
$AE = 9$	81
$AB = 16$	256
$BE = \dots$	337

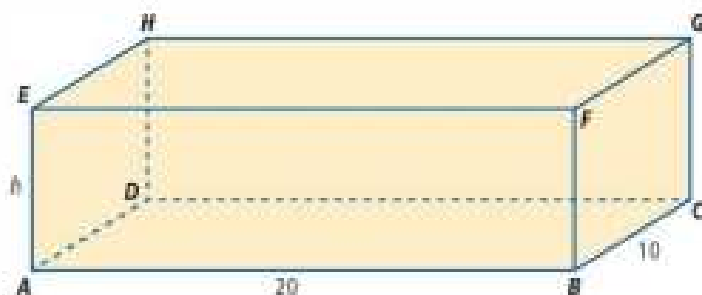
$BE = \sqrt{337}$
 4 $\tan \angle BEC = \frac{14}{\sqrt{337}}$
 $\angle BEC \approx 37^\circ$

- 28 a Bereken in de balk in het voorbeeld de hoek tussen lijnstuk BH en ribbe DH .
 b Bereken ook $\angle AGB$.
- 29 De piramide $T.KLMN$ heeft een rechthoekig grondvlak van 6 bij 4. De opstaande ribben hebben lengte 6.



- a Hoe kun je zonder de sinus, de cosinus of de tangens te gebruiken al weten dat $\angle TKL = 60^\circ$?
 b Hoe groot is in deze piramide $\angle TLM$?
 c Maak een schets van $\triangle NLT$.
 d Waarom kun je nog niet met de sinus, de cosinus of de tangens in $\triangle NLT$ rekenen?
 e Teken een geschikte hulplijn en bereken $\angle LNT$.

Ondersteunde route → maak opdracht 030



30 Van de balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 20$, $BC = 10$ en $AE = h$.

- Bereken $\angle DFB$ als $h = 6$.
- Bereken $\angle DFC$ als $h = 6$.
- Welke waarde heeft h als $\angle DFC = 50^\circ$? Rond je antwoord af op één decimaal.

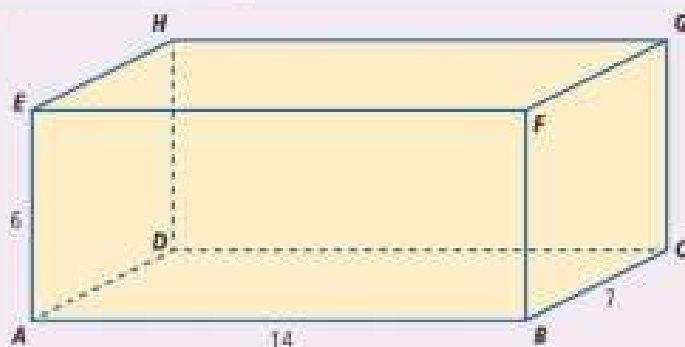
31 Bij een rechthoekig dorpspleintje zijn drie snoeren met lampen aan een boom gehangen. De drie snoeren beginnen bij de boom op een hoogte van 6 meter en eindigen bij palen met een hoogte van 3,5 meter. Het pleintje is 15 meter lang.



- Snoer 3 maakt een hoek van 76° met de boom. Ga met behulp van snoer 3 na dat het pleintje ongeveer 10 meter breed is.
- Bereken de hoek die snoer 1 met de boom maakt.
- Hoe groot is de hoek die snoer 2 met de boom maakt?

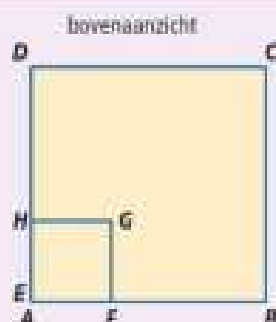
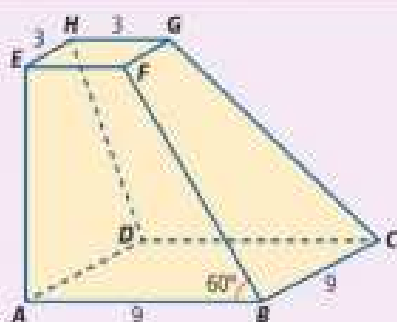
Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten



- 030** Van de balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 14$, $BC = 7$ en $AE = 6$.
- In welk hulpvlak ligt $\angle DBH$?
 - Maak een schets van het hulpvlak waarin $\angle DBH$ ligt en zet de bekende gegevens erbij.
 - Om $\angle DBH$ te kunnen berekenen moet je eerst de lengte van lijnstuk BD berekenen.
Bereken met de stelling van Pythagoras de lengte van lijnstuk BD .
 - Bereken $\angle DBH$.

Uitdagende opdrachten



- U5** De ruimtefiguur is ontstaan door van een piramide de top af te halen. Het grondvlak $ABCD$ is een vierkant met zijde 9. Het bovenvlak $EFGH$ is een vierkant met zijde 3. Ribbe AE staat loodrecht op het grondvlak en loodrecht op het bovenvlak. Verder is $\angle ABF = 60^\circ$.
Bereken $\angle ACG$.

Deze paragraaf bevat opdrachten die een indruk geven van wiskunde B.

- 32** Aan de mast van een schip zitten twee strak gespannen vlaggenlijnen vast. De korte vlaggenlijn is 6,5 meter lang en maakt een hoek van 35° met de mast. De lange vlaggenlijn is 10 meter lang.
- Bereken in cm nauwkeurig hoe lang de mast is.
 - Bereken de lengte van het schip.
 - Hoe groot is de hoek die de twee vlaggenlijnen met elkaar in de top van de mast maken?

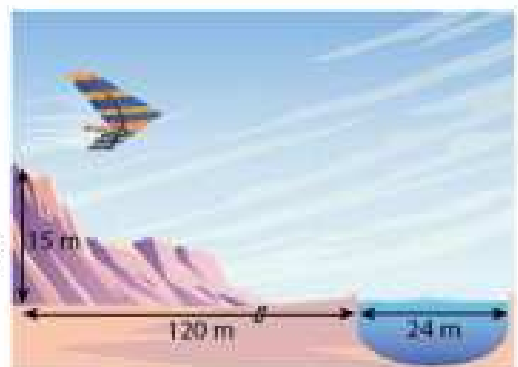


- 33** Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 82^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ en $AC = 5$.
- Bereken de lengte van zijde AB .
 - Bereken de lengte van zijde BC .
 - Van $\triangle PQR$ is $\angle P = \angle Q = 56^\circ$ en $PQ = 7$. Hoe lang is zijde PR ?

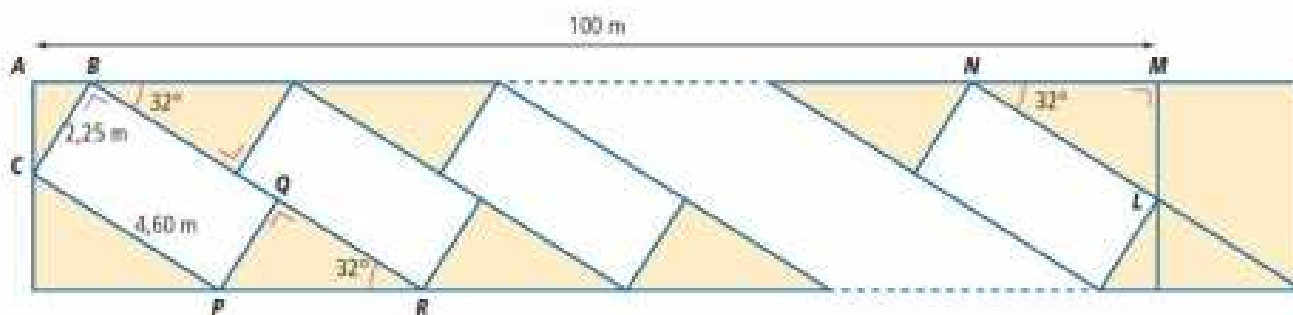
- 34** Een motorjacht vaart over het Michiganmeer. Na 50 km varen ziet de kapitein de vuurtoren van de haven van bestemming in zuidoostelijke richting in plaats van in het oosten. Klaarblijkelijk is het motorjacht door de stroming van het meer flink naar het noorden afgedreven.
- Waarom is $\angle B = 45^\circ$?
 - Na nog 15 km varen loopt het motorjacht de haven van bestemming binnen. Hoeveel kilometer vaart het motorjacht om?
 - Het motorjacht vaart met een gemiddelde snelheid van 9 knopen. Een knoop is ongeveer 1,852 km per uur. Hoeveel minuten doet het motorjacht langer over de tocht?



- 35** De hoogte van de rots is 15 meter. Jim probeert de rivier met een hanglider over te steken. De afstand van de voet van de rots tot de rivier is 120 meter. De rivier is 24 meter breed.
- Onder welke hoek moet Jim dalen wil hij precies op de linker oever van de rivier landen?
 - En onder welke hoek moet hij dalen als hij precies op de rechter oever van de rivier wil landen?
 - Jim daalt onder een vaste hoek van 6° met de grond. Maakt Jim een droge landing?



- B36**
- Teken in een assenstelsel de punten $K(2, 2)$, $L(6, 4)$, $M(2, 6)$ en $N(1, 4)$ en teken vierhoek $KLMN$.
 - Bereken $\angle KLM$.
 - Toon aan dat $\angle LNM = 90^\circ$.
- B37**
- Bereken $\tan 89^\circ$, $\tan 89,9^\circ$ en $\tan 89,99^\circ$.
 - Verklaar met behulp van een schets wat er bij $\tan 90^\circ$ gebeurt.
 - Onno denkt dat $\frac{\tan 80^\circ}{2} = \tan 40^\circ$.
Onderzoek of Onno gelijk heeft.
 - Leg met behulp van een schets uit waarom geldt dat $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$.
- B38**
- Van driehoek ABC is $\angle A = 80^\circ$ en $AC = 8$. Verder verhouden $\angle B$ en $\angle C$ zich als $2 : 3$.
- Bereken $\angle B$ en $\angle C$.
 - Bereken de omtrek van de driehoek ABC .
- B39**
- Een aantal parkeerhavens heeft de vorm van een rechthoek met een lengte van 4,60 meter en een breedte van 2,25 meter. De parkeerhoek is 32° .



- Bereken de lengte van lijnstuk PR .
- Bereken de lengte van de lijnstukken AB en MN .
- Leg met behulp van de tekening uit dat het maximaal aantal parkeerhavens per 100 meter gevonden kan worden met de formule

$$\text{maximaal aantal parkeerplaatsen} = 1 + \frac{100 - AB - MN}{PR}$$
- Hoeveel parkeerhavens kun je maximaal over een lengte van 100 meter maken bij een parkeerhoek van 32° ?
- Welke parkeerhoeken zouden bij de termen langsparkeren en haaksparkeren horen?

Theorie

Hellingshoek en tangens

Je kunt op twee manieren aangeven hoe groot de helling van lijn AC in de rechthoekige driehoek is.

- > Met de grootte van hoek A . Dat is de hellingshoek.
- > Met de deling $\frac{\text{hoogte}}{\text{afstand}}$. De uitkomst van de deling is de tangens van hoek A . Je schrijft dat als $\tan \angle A$.

Voorbeeld



De tangens van hoek A is $\frac{15}{40}$ oftewel $\tan \angle A = \frac{15}{40} = 0,375$.



- S1 Van $\triangle PQR$ is $\angle P = 90^\circ$, $PQ = 26$ en $PR = 5$.
- Bereken de tangens van hoek Q .
 - Bereken $\tan 41^\circ$ in drie decimalen nauwkeurig.

Theorie

Goniometrische verhoudingen

In elke rechthoekige driehoek gelden de goniometrische verhoudingen

$$\sin \angle A = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van hoek } A}{\text{langste zijde}},$$

$$\cos \angle A = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van hoek } A}{\text{langste zijde}} \text{ en}$$

$$\tan \angle A = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van hoek } A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van hoek } A}.$$

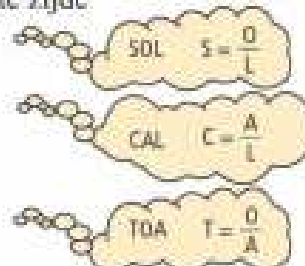
Voorbeeld



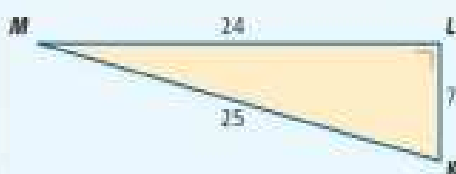
$$\sin \angle A = \frac{5}{13}$$

$$\cos \angle A = \frac{12}{13}$$

$$\tan \angle A = \frac{5}{12}$$



- S2 Van $\triangle KLM$ is $\angle L = 90^\circ$, $KL = 7$, $LM = 24$ en $KL = 25$.
Vul in: $\sin \angle M = \frac{\dots}{\dots}$, $\cos \angle M = \frac{\dots}{\dots}$ en $\tan \angle M = \frac{\dots}{\dots}$



Vaardigheid

Je kunt met de tangens een hellingshoek berekenen.

- 1 Maak een schets en zet alle gegevens erbij.
- 2 Schrijf de tangens op die bij de hellingshoek hoort.
- 3 Gebruik $\tan^{-1}$ op je rekenmachine om de hellingshoek te berekenen. Rond hoeken altijd af op hele graden.

Voorbeeld

Bij een helling ga je over een horizontale afstand van 25 meter 15 meter omlaag. Hoe groot is de hellingshoek?

Oplossing

$$2 \quad \tan \angle Q = \frac{15}{25}$$

$$3 \quad \angle Q \approx 31^\circ$$

- S3** Een paraglider gaat 700 meter omlaag over een horizontale afstand van 5 kilometer. Bereken de hellingshoek.

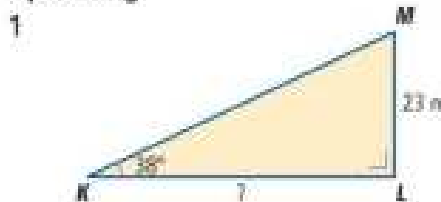
Vaardigheid

Je kunt met de tangens de lengte van een zijde berekenen.

- 1 Maak een schets en zet alle gegevens erbij.
- 2 Vul voor de bekende hoek alle gegevens in bij $\tan \dots = \frac{\dots}{\dots}$.
- 3 Voer een vermenigvuldiging of een deling uit en bereken zo de lengte van de zijde. Rond verstandig af.

Voorbeeld

Op een afstand zie je een boom van 23 meter hoog. De top van de boom zie je onder een hoek van 38° . Op hoeveel meter van de boom sta je?

Oplossing

$$2 \quad \tan 38^\circ = \frac{23}{KL}$$

$$3 \quad KL = \frac{23}{\tan 38^\circ}$$

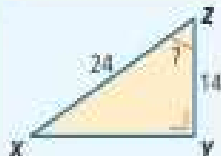
$$KL \approx 29 \text{ meter}$$

- S4** Hidde ziet op Terschelling de top van de vuurtoren onder een hoek van 31° . Hij staat 93 meter van de vuurtoren af. Hoeveel meter hoog is de vuurtoren?

Vaardigheid

Je kunt met de sinus en de cosinus een hoek berekenen.

Voor het berekenen van hoeken kun je ook de sinus of de cosinus gebruiken. De sinus van hoek A schrijf je korter als $\sin \angle A$ en de cosinus van hoek A schrijf je korter als $\cos \angle A$.



S5 Bereken $\angle L$ en $\angle Z$.

Voorbeeld

Bereken $\angle D$.



Oplossing

$$\sin \angle D = \frac{12}{30}$$

$$\angle D \approx 24^\circ$$

Vaardigheid

Je kunt met goniometrische verhoudingen de lengte van een zijde berekenen.

- 1 Kijk of de gegeven zijde de aanliggende rechthoekszijde of de overstaande rechthoekszijde van de gegeven hoek is, of dat het de langste zijde is.
- 2 Kijk of de te berekenen zijde de aanliggende rechthoekszijde of de overstaande rechthoekszijde van de gegeven hoek is, of dat het de langste zijde is.
- 3 Ga na of je het best de sinus, de cosinus of de tangens kunt gebruiken.
- 4 Bereken hiermee de lengte van de zijde. Rond verstandig af.

Voorbeeld 1

Bereken de lengte van zijde QR .



Oplossing

- 1 De langste zijde is gegeven.
- 2 Je moet de aanliggende rechthoekszijde van hoek Q berekenen.
- 3 Je kunt het best de cosinus gebruiken.

$$\cos 35^\circ = \frac{QR}{6}$$

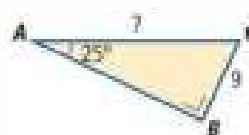
$$QR = 6 \times \cos 35^\circ$$

$$QR \approx 4,9$$



Voorbeeld 2

Bereken de lengte van zijde AC .



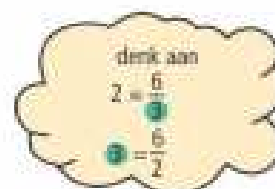
Oplossing

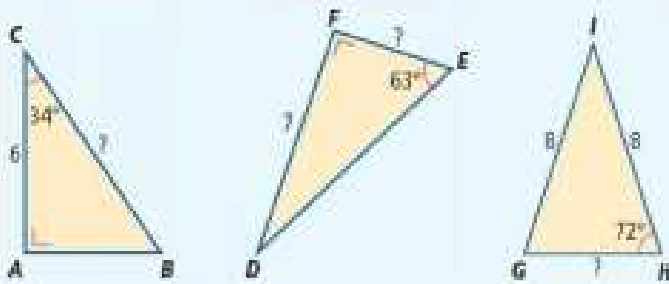
- 1 Van hoek A is de overstaande rechthoekszijde gegeven.
- 2 Je moet de langste zijde berekenen.
- 3 Je kunt het best de sinus gebruiken.

$$\sin 25^\circ = \frac{9}{AC}$$

$$AC = \frac{9}{\sin 25^\circ}$$

$$AC \approx 21,3$$





- 56** Bereken in de driehoeken de lengte van de zijde waar een vraagteken bij staat.

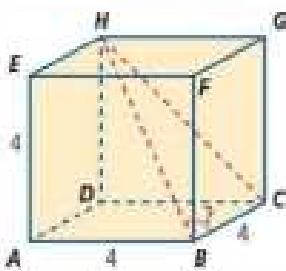
Vaardigheid

Je kunt de hoek tussen twee lijnstukken in een ruimtefiguur berekenen.

- 1 Zoek een hulpvlak waarin beide lijnstukken liggen.
- 2 Maak een schets van dit hulpvlak en zet de bekende gegevens erbij.
- 3 Kijk of je de gevraagde hoek al kunt berekenen. Soms moet je eerst de lengte van een lijnstuk berekenen.
- 4 Gebruik het exacte tussenantwoord om de hoek te berekenen.

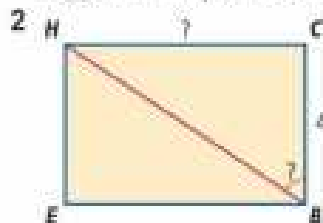
Voorbeeld

Bereken in de kubus $\angle CBH$.



Oplossing

- 1 Lijnstuk BH en ribbe BC liggen in hulpvlak $BCHE$.



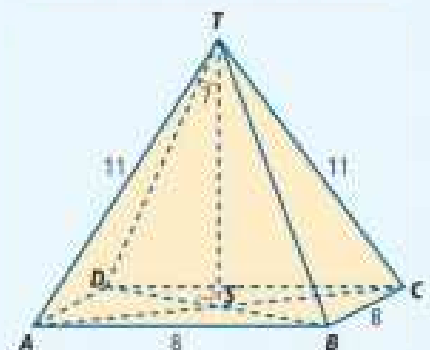
zijde	kwadraat
$CG = 4$	16
$GH = 4$	16 +
$CH = \dots$	32

$$CH = \sqrt{32}$$

$$\tan \angle CBH = \frac{\sqrt{32}}{4}$$

$$\angle CBH \approx 55^\circ$$

- 57** Van de piramide $TABCD$ is het grondvlak een vierkant met zijden van 8 en de opstaande ribben zijn 11. Je moet gaan berekenen hoe groot $\angle ATS$ is.
- a Maak een schets van hulpvlak ATC en zet de bekende gegevens erbij.
 - b Hoe groot is $\angle ATS$?

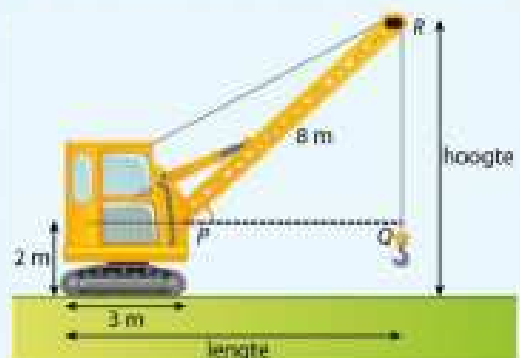


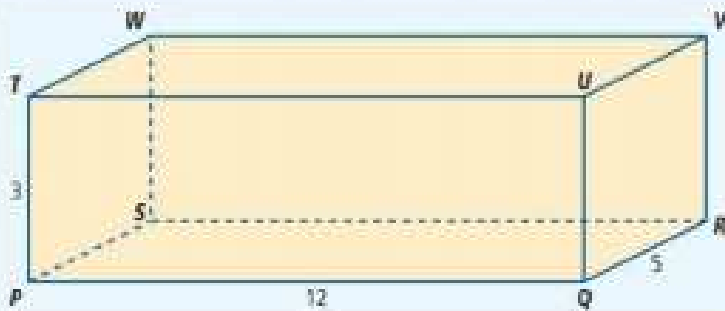
- T1**
- a** Een sportvliegtuig vertrekt van de landingsbaan. Nadat het sportvliegtuig horizontaal 1 km heeft afgelegd, is het op een hoogte van 315 meter.
Onder welke hellingshoek vertrekt dit sportvliegtuig?
 - b** Even later vertrekt een tweede sportvliegtuig onder een hellingshoek van 18° .
Bereken de hoogte van dit sportvliegtuig na 1 km.
 - c** Een derde sportvliegtuig bevindt zich boven Apeldoorn op een hoogte van 3500 meter. Het moet zo snel mogelijk op vliegveld Terlet landen omdat de brandstof opraakt. De afstand Apeldoorn-Terlet is hemelsbreed 17 km.
Bereken onder welke hoek de piloot moet dalen om op Terlet te landen.

- T2**
- a** Een vuurtorenwachter zit op 40 meter hoogte. Hij ziet in één richting twee schepen onder hoeken van 68° en 74° .
Bereken hoeveel meter de afstand tussen de schepen is.
 - b** Van een andere vuurtoren ligt de top 43 meter boven het water. De schipper van een boot ziet de top van deze vuurtoren onder een hoek van 11° .
Hoe ver is de schipper van deze vuurtoren af?



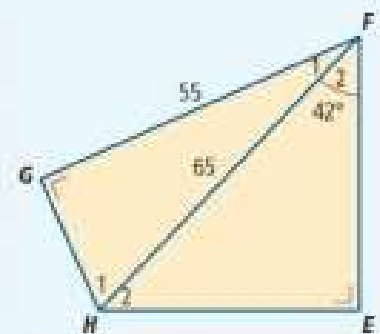
- T3** Van $\triangle VWX$ is $\angle X = 70^\circ$, $VX = 10$ en $VW = 11$.
- a** Maak een schets van $\triangle VWX$.
 - b** Bereken de lengte van zijde WX .
- T4** De lengte en de hoogte van de hijskraan is afhankelijk van de grootte van hoek P .
- a** Bereken de maximale lengte van de hijskraan.
 - b** Hoe hoog is de hijskraan bij een minimale lengte?
 - c** Welke lengte vind je als $\angle P = 22^\circ$?
 - d** En welke hoogte vind je als $\angle P = 69^\circ$?
 - e** De hijskraan moet onder een viaduct met een maximale doorrijhoogte van 4,1 meter door.
Bij welke hoek P past de hijskraan nog net onder het viaduct door?





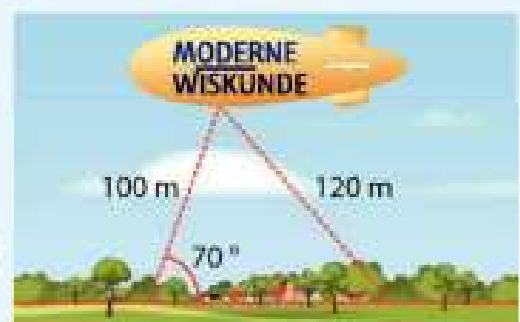
- T5** Van de balk $PQRS.TUVW$ is $PQ = 12$, $QR = 5$ en $PT = 3$.
- Hoe groot is $\angle WVU$?
 - Bereken de hoek die lijnstuk PV en ribbe RV met elkaar maken.
 - Bereken $\angle PVQ$.

- T6**
- Schrijf $\angle H_1$ als een hoek met drie letters.
 - Bereken $\angle H_1$.
 - Welke hoek wordt bedoeld met $\angle EFH$?
 - Bereken de lengte van zijde EF .
 - Welke lengte heeft zijde EH ?



- T7**
- Teken parallellogram $ABCD$ met $\angle A = 47^\circ$, $AB = 5$ cm en $AD = 3$ cm.
 - Teken een hulplijn vanuit punt D loodrecht op zijde AB . De hulplijn snijdt zijde AB in het punt E .
 - Bereken hoeveel cm de lengte van de hulplijn DE is.
 - De hulplijn verdeelt hoek D in twee hoeken. Geef die twee hoeken met drie letters aan.

- T8** Bij windstil weer wordt een reclameballon opgelaten. De ballon is met twee kabels aan de grond vastgemaakt. De ene kabel is 100 meter lang en de andere kabel is 120 meter lang. De kabel van 100 meter maakt een hoek van 70° met de grond.
- Bereken hoeveel meter boven de grond de ballon zweeft.
 - Hoe groot is de hoek die de twee kabels met elkaar maken?



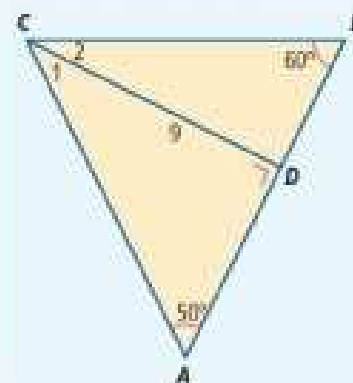
Je kunt met de tangens een hellingshoek berekenen.

- E1** Katrien springt met een hangglider van een 60 meter hoge rots. Ze vliegt in een rechte lijn en landt 960 meter verder op de grond.
- Hoe groot is de tangens die bij haar vlucht hoort?
 - En hoe groot is de hellingshoek die bij haar vlucht hoort?
 - Raymond springt van dezelfde rots. De horizontale afstand die hij aflegt is 920 meter. Is de hellingshoek die bij de vlucht van Raymond hoort kleiner of groter dan de hellingshoek die bij de vlucht van Katrien hoort?



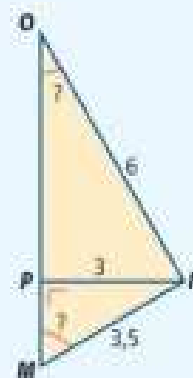
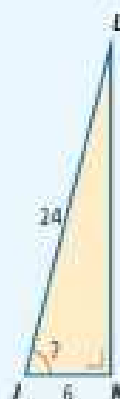
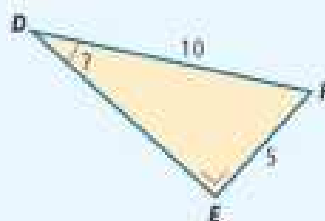
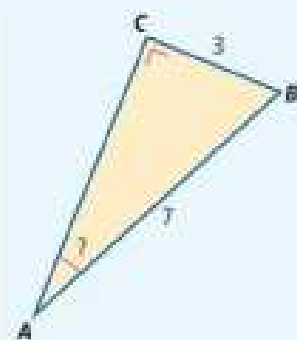
Je kunt met de tangens de lengte van een zijde berekenen.

- E2** Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $CD = 9$ en staat lijnstuk CD loodrecht op zijde AB .
- Bereken de lengte van lijnstuk BD .
 - Bereken de lengte van lijnstuk AB .



Je kunt met de sinus en de cosinus een hoek berekenen.

- E3** Bereken $\angle A$, $\angle D$, $\angle G$, $\angle J$, $\angle M$ en $\angle O$.



Je kunt met goniometrische verhoudingen de lengte van een zijde berekenen.

- E4** Myrthe staat 60 meter van een kasteeltoren. Ze ziet de top van de kasteeltoren onder een hoek van 26° .
- Bereken de hoogte van de kasteeltoren.
 - Diana staat ergens tussen Myrthe en de kasteeltoren in. Ze ziet de top van de kasteeltoren onder een hoek van 34° . Hoeveel meter staat Diana van de kasteeltoren af?
 - Bereken onder welke hoek je de kasteeltoren ziet als je op 80 meter staat.
 - Ga na of de volgende bewering waar is: 'Als de hoek van Diana twee keer zo groot is als de hoek van Myrthe, dan staat Diana precies midden tussen Myrthe en de kasteeltoren in.'

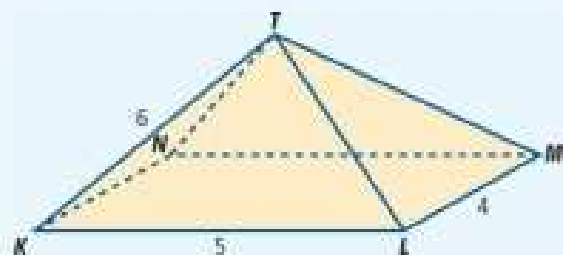
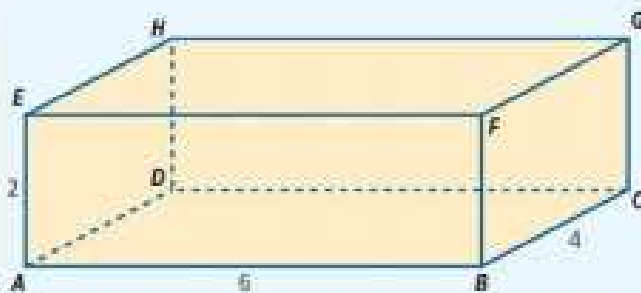
- E5** Van $\triangle ABC$ is $\angle B = 90^\circ$, $AB = 4$, $AC = \sqrt{160}$ en M is het midden van BC .

- Bereken $\angle BAC$.
- Hoe groot is $\angle BCA$?
- En hoe groot is $\angle MAB$?
- Bereken $\angle MAC$.



Je kunt de hoek tussen twee lijnstukken in een ruimtefiguur berekenen.

- E6**
- Bereken in de balk $ABCD.EFGH$ de hoek tussen lijnstuk DF en zijde BF .
 - Hoe groot is $\angle DFC$?
 - Piramide $T.KLMN$ heeft een rechthoekig grondvlak van 5 bij 4. De opstaande ribben hebben lengte 6. Bereken $\angle TMK$.



Tussendoortje | Möbiusbanden

Van stroken naar Möbiusbanden

Door stroken papier op verschillende manieren aan elkaar te plakken ontstaan Möbiusbanden.

- Knip in de lengte van een A4'tje een strook papier met een breedte van 2 cm af.
- Maak een ring en plak de uiteinden op elkaar.
- Doe hetzelfde, maar nu door de strook één keer te draaien.
- Herhaal dit door de strook twee, drie, vier, ... keer te draaien.

Een mier gaat lopen

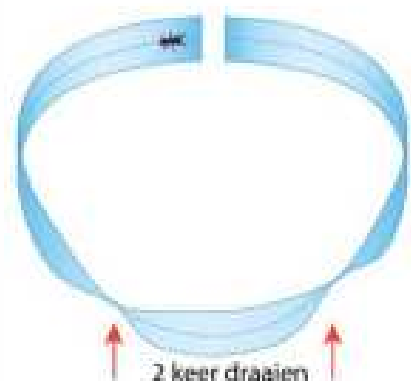
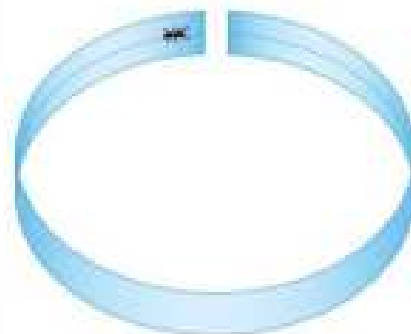
Een mier die langs de stippellijn over de niet-gedraaide Möbiusband gaat lopen, zal na een rondje in hetzelfde punt uitkomen. Hij loopt over de binnenkant en de buitenkant blijft voor hem onbereikbaar.

- Ga na hoe dat zit als de mier over de één keer gedraaide Möbiusband gaat lopen.
- Ga ook na hoe dat zit als de mier over de twee, drie, vier, ... keer gedraaide Möbiusband gaat lopen.
- Welke regelmaat ontdek je?

De Möbiusbanden in tweeën knippen

Als je op 1 cm van de zijkanalen de Möbiusband langs de stippellijn in tweeën knipt, dan krijg je twee losse Möbiusbanden.

- Ga na hoe dat zit als je de één keer gedraaide Möbiusband over de stippellijn in tweeën knipt.
- Ga ook na hoe dat zit als je de twee, drie, vier, ... keer gedraaide Möbiusband over de stippellijn in tweeën knipt.
- Welke regelmaat ontdek je?
- Maak nu Möbiusbanden van 3 cm breed en knip deze in drieën.





Kwadratische functies

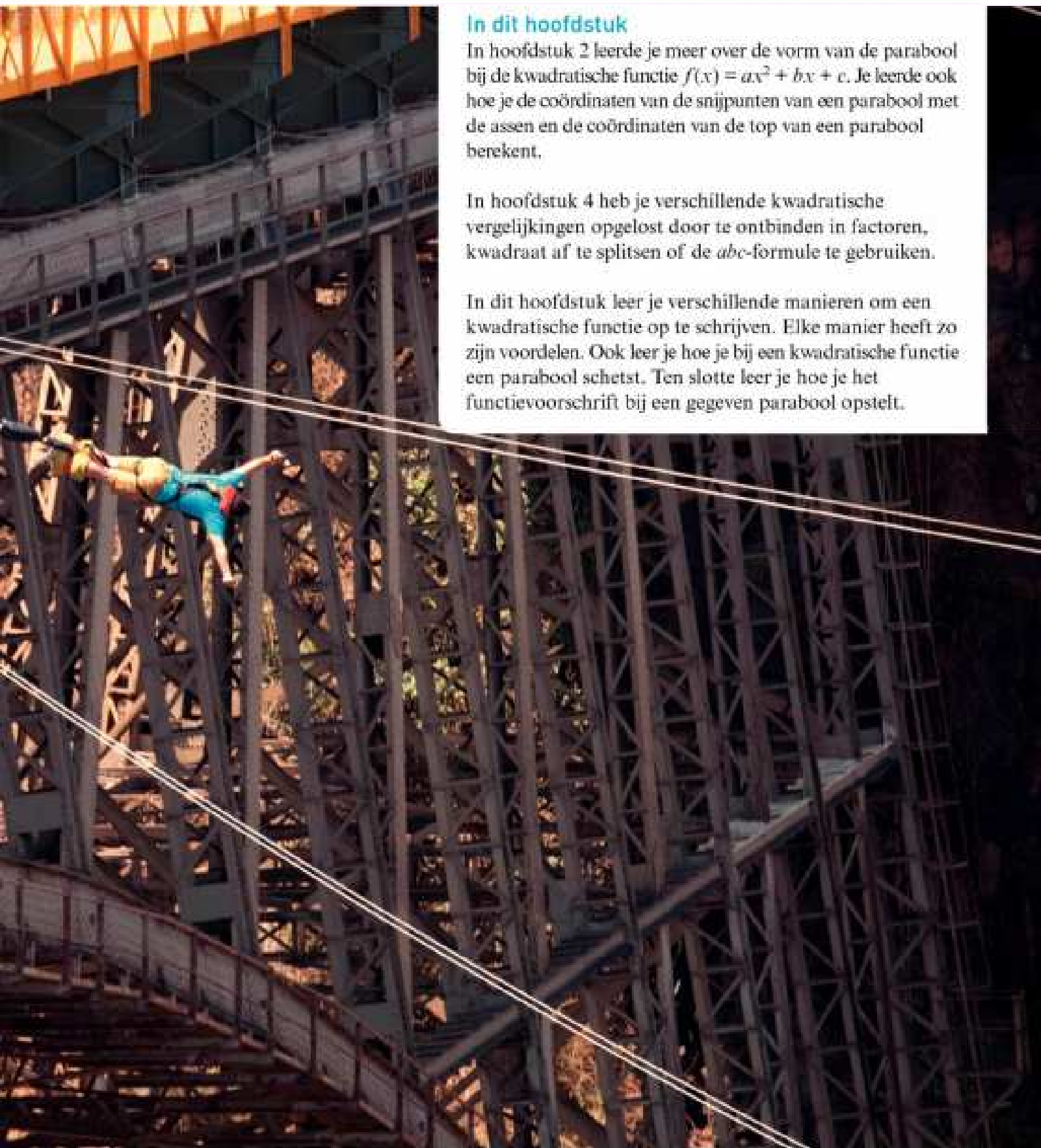
7

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 2 leerde je meer over de vorm van de parabool bij de kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$. Je leerde ook hoe je de coördinaten van de snijpunten van een parabool met de assen en de coördinaten van de top van een parabool berekent.

In hoofdstuk 4 heb je verschillende kwadratische vergelijkingen opgelost door te ontbinden in factoren, kwadraat af te splitsen of de abc -formule te gebruiken.

In dit hoofdstuk leer je verschillende manieren om een kwadratische functie op te schrijven. Elke manier heeft zo zijn voordelen. Ook leer je hoe je bij een kwadratische functie een parabool schetst. Ten slotte leer je hoe je het functievoorschrift bij een gegeven parabool opstelt.



V1 Boris lost het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} x - y = 7 \\ 4y - 10 = 2x \end{cases}$ op.

Eerst herleid hij de vergelijkingen tot formules van de vorm $y = ax + b$. Daarna stelt hij deze formules aan elkaar gelijk.

- Vul het blaadje verder in en bereken de waarde van x .
- Bereken de waarde van y door de waarde van x in één van de formules in te vullen.
- Vul in: de oplossing van het stelsel vergelijkingen is $x = \dots$ en $y = \dots$.
- Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

A $\begin{cases} y = 5 - x \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

$$C \quad \begin{cases} 2y + x = 6 \\ 3y + 9 = 3x \end{cases}$$

$$\text{B } \begin{cases} 2y - x = 12 \\ 30 + 5x = 4y \end{cases}$$

$$\text{D } \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4y + 17 = 3x \end{cases}$$

V2 Los op.

$$\mathbf{a} \quad 2y(x-3) = 0$$

e $x^2 - 6x + 8 = 0$

b $(2x + 7)(x - 6) = 0$

$$\text{f. } 2x^2 - 10x + 8 = 0$$

c. $(x + 7)^2 = 0$

9. $3(2x - 1)^2 = 75$

d $2x^2 + 5x = 0$

h $(2x + 5)^2 - 5 = 31$

Theorem

Formules van de vorm $y = x^2 + bx + c$ kun je in de vorm $y = (x + p)^2 + q$ schrijven, waarbij p de helft van b is. Dit heet **kwadraat afsplitsen**.

Videoconferenced

Schrijf de formule $y = x^2 + 10x + 18$ in de vorm $y = (x + p)^2 + q$.

Oplossing

$$y = x^2 + 10x + 18$$

$$y = (x + 5)^2 - 25 + 18$$

$$y = (x + 5)^2 - 7$$

V3 Schrijf de formules in de vorm $y = (x + p)^2 + q$.

a $r = x^2 - 6x + 10$

d. $y = x^2 + 12x + 25$

b $y = x^2 + 10x - 4$

c. $y = x^2 + 2x + 1$

c $y = x^2 - 4x - 7$

$$f(x) = x^2 + 4x - 10$$



V4 Los de vergelijkingen met de *abc*-formule op.

- a $2x^2 - 9x + 4 = 0$ d $4x^2 - 7x - 2 = 0$
 b $3x^2 - 12x + 3 = 0$ e $2x^2 + 3x - 20 = 0$
 c $3x^2 + 8x - 16 = 0$ f $14x^2 + x - 3 = 0$

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ of } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Hierin is $D = b^2 - 4ac$ de discriminant.

Theorie

Uit het functievoorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ kun je al iets over de ligging en de vorm van de bijbehorende parabool afleiden.

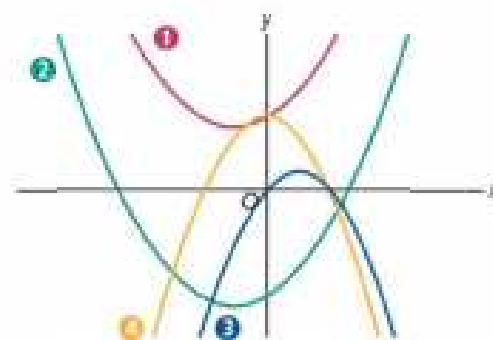
- > Als $a > 0$, dan is de grafiek een dalparabool.
 Als $a < 0$, dan is de grafiek een bergparabool.
- > Hoe verder de waarde van a van 0 af ligt, hoe smaller de parabool is. Hoe dichterbij 0, hoe breder de parabool is.
- > De coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y -as zijn $(0, c)$.

V5 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en $g(x) = 3x^2 + 2x - 3$.

- a Is de grafiek van f een bergparabool of een dalparabool? En de grafiek van g ?
 b Is de grafiek van f smaller of breder dan de grafiek van g ?
 c De grafieken snijden de y -as in hetzelfde punt. Schrijf de coördinaten van dat punt op.

V6 Zoek bij iedere functie de juiste parabool.

- A $f(x) = x^2 + x + 2$
 B $g(x) = x^2 + x - 3$
 C $h(x) = -2x^2 + 2x$
 D $k(x) = -2x^2 + 2$



Je leert

- hoe je uit de vorm $f(x) = a(x-s)(x-t)$ opmaakt in welke punten de grafiek van f de x -as snijdt

Leerroutes

- ondersteunend: 1-2-3-04-5-6-07-7-8
- doorlopend: 1-2-3-4-5-6-7-8-9
- uitdagend: 2-3-4-5-6-7-9-U1-U2

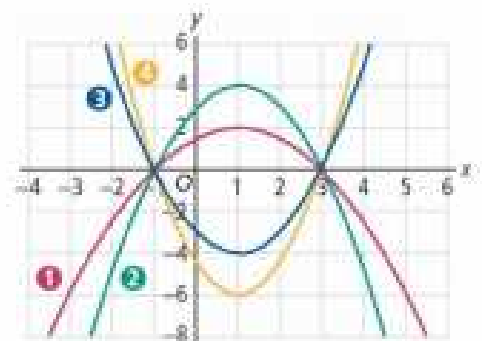
De boog van de tunnel heeft de vorm van een parabool. De hoogte h van de boog boven de grond in meters kun je berekenen met de functie $h(a) = -0,25(a - 5,3)(a + 5,3)$.

Hierin is a de horizontale afstand vanaf het midden van de weg in meters.

- Hoeveel meter breed is de weg?



- Gegeven is de functie $f(x) = (x+2)(x-4)$.
 - Leg uit dat de grafiek van f de x -as snijdt in de punten $(-2, 0)$ en $(4, 0)$.
 - Schrijf het functievoorschrift van f zonder haakjes.
 - Waarom volgt uit opdracht b dat de grafiek van f een dalparabool is?
 - Schrijf de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as op.
- Van de functie $h(x) = a(x+1)(x-3)$ zijn voor $a = -1$, $a = -\frac{1}{2}$, $a = 1$ en $a = 1\frac{1}{2}$ de grafieken getekend.
 - De grafieken hebben dezelfde snijpunten met de x -as. Leg uit hoe je de coördinaten van deze punten kunt opmaken uit het functievoorschrift van h .
 - Leg uit dat bij grafiek 1 de waarde $a = -\frac{1}{2}$ hoort.
 - Geef de functievoorschriften bij de andere grafieken.



- De grafieken bij de functies $f(x) = (x+5)(x-4)$ en $g(x) = \frac{1}{4}(x+5)(x-4)$ worden in één assenstelsel getekend.
 - Is de grafiek van f smaller of breder dan de grafiek van g ? Licht je antwoord toe.
 - In welke punten snijden beide grafieken de x -as?

Theorie

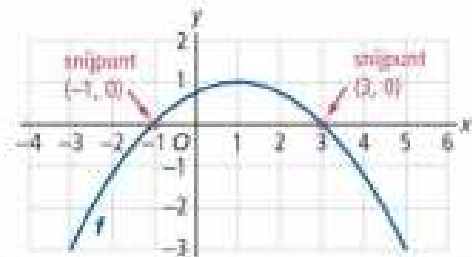
Uit het functievoorschrift $f(x) = a(x - s)(x - t)$ kun je opmaken in welke punten de grafiek van f de x -as snijdt. De punten $(s, 0)$ en $(t, 0)$ zijn de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.

Voorbeeld

Geef bij de functie $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 1)(x - 3)$ de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.

Oplossing

Uit het functievoorschrift van f kun je opmaken dat $s = -1$ en $t = 3$. De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(-1, 0)$ en $(3, 0)$.



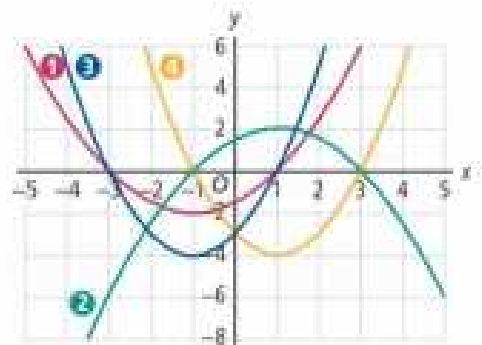
Ondersteunende route → maak opdracht 04

- 4 Geef bij elke functie de coördinaten van de snijpunten van de bijbehorende grafiek met de x -as.

a $f(x) = 2(x - 4)(x - 3)$ c $h(x) = -\frac{2}{3}(x + 3)(x + 6)$
 b $g(x) = (x - 7)(x + 1\frac{1}{2})$ d $l(x) = -2,3(x + 2)(x - 1)$

- 5 De vier getekende grafieken horen bij de functies $f(x) = 0,5(x - 1)(x + 3)$, $g(x) = -0,5(x - 3)(x + 1)$, $h(x) = (x - 1)(x + 3)$ en $l(x) = (x - 3)(x + 1)$.

- a Schrijf de coördinaten op van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
 b Is de grafiek van f een bergparabool of een dalparabool? Waaraan kun je dat zien?
 c Welke grafiek hoort bij de functie f ?
 d Zoek bij de drie andere functies de juiste grafiek.
- 6 De parabool bij de functie $f(x) = 2(x - s)(x - t)$ gaat door de punten $(-6, 0)$ en $(3, 0)$.
- a Welke waarde heeft s ? En welke waarde heeft t ?
 b Schrijf de formule van de symmetrieas van de bijbehorende parabool op.
 c Bereken de coördinaten van de top van de parabool.



Theorie

Uit het functievoorschrift $f(x) = a(x - s)(x - t)$ kun je opmaken in welke punten de grafiek van f de x -as snijdt. De symmetrieas van de grafiek van f ligt midden tussen deze snijpunten.

Je vindt de y -coördinaat van de top van de grafiek van f door de x -waarde die bij de symmetrieas hoort in te vullen in het functievoorschrift.

Voorbeeld

Geef bij de functie $f(x) = 2(x + 1)(x - 5)$ de formule van de symmetrieas en de coördinaten van de top van de grafiek van f .

Oplossing

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(-1, 0)$ en $(5, 0)$.

De symmetrieas ligt bij $x = (-1 + 5) : 2$, oftewel bij $x = 2$. Invullen van $x = 2$ geeft $f(2) = 2 \times (2 + 1) \times (2 - 5) = -18$. De coördinaten van de top zijn $(2, -18)$.

Ondersteunende route → maak opdracht 07

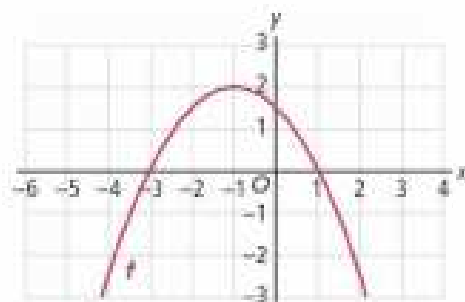
- 7 Geef bij elke functie de formule van de symmetrieas en de coördinaten van de top van de bijbehorende grafiek.

a $f(x) = -3(x - 2)(x - 8)$ c $h(x) = -1\frac{1}{2}(x + 3)(x - 9)$

b $g(x) = 2(x + 2)(x - 8)$ d $k(x) = -4(x + 6)(x - 7)$

- 8 De parabool hoort bij de functie $f(x) = a(x - s)(x - t)$.

- Lees de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as af en schrijf de waarden van s en t op.
- Waarom geldt $a < 0$?
- Geef de coördinaten van de top van de parabool.
- Bereken met behulp van de coördinaten van de top de waarde van a . Ga na of je antwoord klopt met je antwoord bij opdracht b.



- 9 De parabool bij de functie $g(x) = a(x - s)(x - t)$ gaat door de punten $(-3, 0)$, $(2, 0)$ en $(6, 72)$.

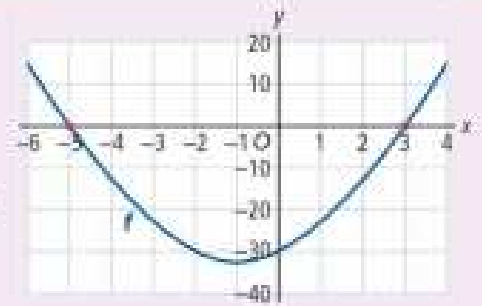
- Schrijf de waarden van s en t op.
- Bereken de waarde van a .
- Bereken de coördinaten van de top van de parabool.

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

04 De grafiek hoort bij de functie $f(x) = 2(x - 3)(x + 5)$.

- De grafiek van f snijdt de x -as in twee punten.
De coördinaten van het rechter snijpunt zijn $(3, 0)$.
Leg uit hoe je de coördinaten van dit snijpunt kunt opmaken uit het functievoorschrift.
- Maak uit het functievoorschrift ook de coördinaten van het linker snijpunt op en controleer je antwoord met de grafiek van f .

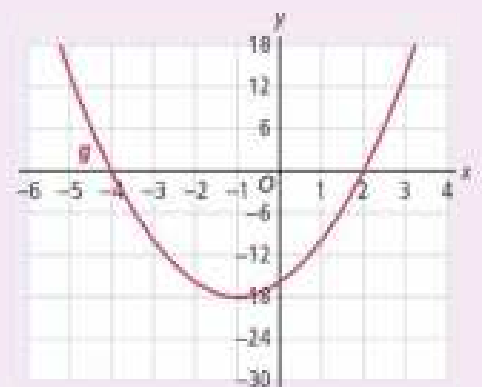


Geef van elke functie de coördinaten van de snijpunten van de bijbehorende grafiek met de x -as.

- c $g(x) = 3(x - 2)(x - 6)$ e $h(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)(x + 3)$
 d $h(x) = (x - 2)(x + 4)$ f $j(x) = -3(x - 4)(x + 8)$

07 De grafiek hoort bij de functie $g(x) = 2(x - 4)(x - 2)$.

- Schrijf de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as op.
- Leg uit dat de getekende grafiek hoort bij de functie $g(x) = 2(x + 4)(x - 2)$.
- De symmetrieas ligt midden tussen de snijpunten van de grafiek van g met de x -as.
Vul in: de symmetrieas ligt bij $x = (-4 + 2) : 2$, dus de formule van de symmetrieas is $x = \dots$
- Vul de x -waarde die bij de symmetrieas hoort in het functievoorschrift in en bereken de y -coördinaat van de top van de grafiek van g .



Uitdagende opdrachten

U1 De parabool bij de functie $g(x) = a(x - s)(x - t)$ gaat door de punten $(-6, 0)$ en $(4, 0)$. De y -coördinaat van de top van de parabool is gelijk aan 4. Bereken a .

U2 Gegeven is de functie $f(x) = (x + c)(x - 2c)$.

- Bereken voor $c = -1$ de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.
- Er is een waarde van c zodat de bijbehorende parabool de lijn $x = 2$ als symmetrieas heeft.
Bereken deze waarde van c en schrijf de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool op.

- Je leert** · hoe je uit de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$ opmaakt welk punt de top van de grafiek van f is
- Leerroutes** · ondersteunend: 10—11—D12—13—D14—14—15
 · doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16
 · uitdagend: 11—12—14—15—16—U3—U4

Marit verkoopt taarten. Met de functie $W(a) = -\frac{1}{4}(a - 40)^2 + 200$ kan ze haar winst W in euro's berekenen als ze a taarten verkoopt.

- Hoeveel euro winst kan Marit maximaal maken?



- 10** Gegeven zijn de functies $f(x) = -x^2 + 4$ en $g(x) = x^2 + 1$.
- Op het blaadje zie je hoe je met redeneren vindt dat $(0, 4)$ de coördinaten van de top van de grafiek van f zijn. Leg op dezelfde manier uit dat $(0, 1)$ de coördinaten van de top van de grafiek van g zijn.
 - Leg op dezelfde manier uit dat $(0, -3)$ de coördinaten van de top van de grafiek van de functie $h(x) = -x^2 - 3$ zijn.

De uitkomst van x^2 is positief of nul, dus $-x^2$ is negatief of nul.
 De grootste uitkomst van $-x^2 + 4$ is dus 4.
 De grootste uitkomst krijg je door voor x het getal 0 in te vullen.
 De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(0, 4)$.

- 11** Gegeven is de functie $k(x) = (x + 2)^2 + 5$.
- Schrijf het functievoorschrift zonder haakjes.
 - Waarom is de grafiek van k een dalparabool?
 - Op het bovenste blaadje zie je hoe Xander beredeneert dat de grafiek van k een dalparabool is. Vul het blaadje verder in.
 - Op het onderste blaadje berekent hij de coördinaten van de top van de grafiek van k . Vul het onderste blaadje verder in.
 - Beredeneer op de manier van Xander of de grafiek bij de functie $m(x) = -(x - 3)^2 + 4$ een bergparabool of een dalparabool is.
 - Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van m .
 - Maak de opdrachten e en f ook voor de functie $n(x) = 3(x + 1)^2 - 5$.

					Xander
☐	De uitkomst van $(x + 2)^2$ is				
☐	positief of nul, dus de grafiek				
☐	van k is een ...				

					Xander
☐	De kleinste uitkomst krijg je als				
☐	$x + 2 = 0$, dus als $x = \dots$				
☐	Invullen van $x = \dots$ geeft				
☐	$k(\dots) = (\dots + 2)^2 + 5 = \dots^2 + 5 = \dots$				
☐	De coördinaten van de top van de grafiek van k zijn $(\dots, \dots)$.				

Theorie

Uit het functievoorschrift $f(x) = a(x - p)^2 + q$ kun je opmaken welk punt de top van de grafiek van f is. Het punt (p, q) is de top van de grafiek van f .

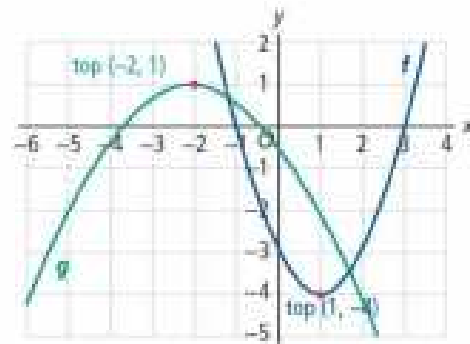
Voorbeeld

Geef bij de functies $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ en $g(x) = -\frac{1}{3}(x + 2)^2 + 1$ de coördinaten van de top van de bijbehorende grafiek. Vermeld ook of die grafiek een bergparabool of een dalparabool is.

Oplossing

Uit het functievoorschrift van f kun je opmaken dat $p = 1$ en $q = -4$. De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(1, -4)$. De grafiek van f is een dalparabool, want $a = 1$.

Uit het functievoorschrift van g kun je opmaken dat $p = -2$ en $q = 1$. De coördinaten van de top van de grafiek van g zijn $(-2, 1)$. De grafiek van g is een bergparabool, want $a = -\frac{1}{3}$.



Ondersteunende route → maak opdracht 012

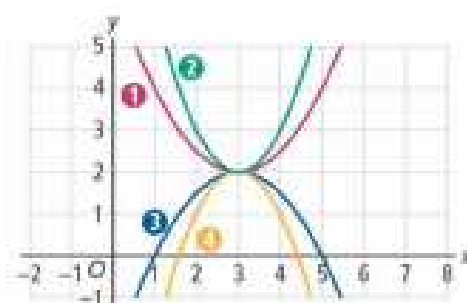
- 12** Geef bij elke functie de coördinaten van de top van de grafiek. Vermeld ook of die grafiek een bergparabool of een dalparabool is.

- | | |
|--|---|
| a $f(x) = \frac{1}{3}(x + 1)^2 + 3$ | d $k(x) = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 + 3$ |
| b $g(x) = -2(x - 2)^2 + 4$ | e $l(x) = (x - 2)^2 + 4$ |
| c $h(x) = 2(x + 1)^2$ | f $m(x) = -2x^2 + 3$ |

- 13** Gegeven is de functie $g(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$.
- Geef de coördinaten van de top van de grafiek van g .
 - Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as.
 - Teken de grafiek van g .

Ondersteunende route → maak opdracht D14

- 14** Van de functie $f(x) = a(x - 3)^2 + 2$ zijn voor $a = -1$, $a = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$ en $a = 1$ de grafieken getekend.
- Leg uit waarom de vier grafieken door het punt $(3, 2)$ gaan.
 - Schrijf bij elke grafiek de bijbehorende waarde van a op.
 - Voor welke waarde van a gaat de bijbehorende grafiek door het punt $(0, 8)$?
 - Voor welke waarde van a gaat de bijbehorende grafiek door het punt $(6, 1)$?



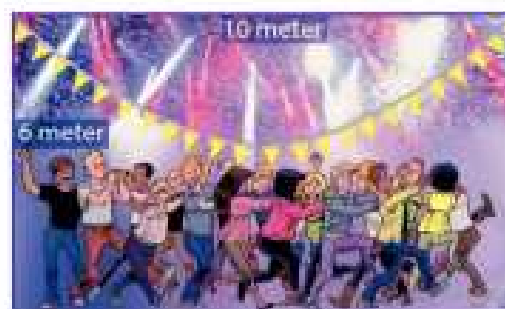
- 15** Gegeven is de functie $g(x) = a(x + 4)^2 - 3$. De grafiek van g gaat door het punt $(-2, 9)$.
- Geef de coördinaten van de top van de grafiek van g .
 - Bereken de waarde van a die bij de grafiek van g hoort.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as.
 - Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as.

- 16** In een zaal hangt een slinger aan het plafond. De zaal is 10 meter lang en 6 meter hoog.

De hoogte h van de slinger boven de grond in meters kun je berekenen met de functie $h(a) = b(a - p)^2 + q$.

Hierin is a de afstand vanaf de linkerkant van de zaal in meters.

- Leg uit waarom $p = 5$.
- Het laagste punt van de slinger hangt 4 meter boven de grond.
Bereken de waarde van b .
- In een andere zaal wordt op dezelfde manier een slinger opgehangen.
De hoogte h van deze slinger boven de grond in meters kun je berekenen met de functie $h(a) = \frac{1}{12}(a - p)^2 + q$.
Het laagste punt van deze slinger hangt 3 meter onder het plafond. Het plafond is 5 meter hoog.
Hoe lang is deze zaal?



Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

- 012** Gegeven is de functie $f(x) = -3(x+2)^2 + 6$.
- Waarom is de grafiek van f een bergparabool?
 - De top van de grafiek bij het functievoorschrift $f(x) = a(x-p)^2 + q$ is het punt (p, q) .
Waarom is in dit geval $p = -2$?
 - Geef de coördinaten van de top van de grafiek van f .

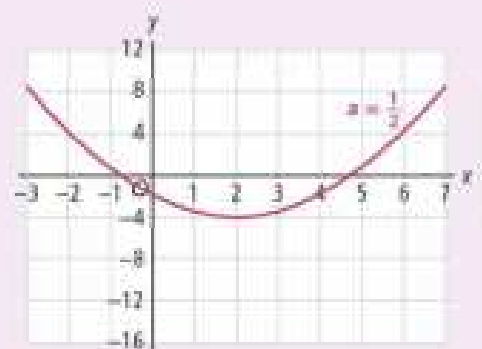
Geef bij elke functie de coördinaten van de top van de grafiek. Vermeld ook of die grafiek een bergparabool of een dalparabool is.

- d** $g(x) = 2(x-4)^2 + 1$ **g** $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2$
e $h(x) = -\frac{1}{3}(x-5)^2 + 9$ **h** $k(x) = (x+1)^2 + 9$
f $l(x) = -(x+3)^2 - 4$ **i** $l(x) = 7x^2 - 6$

- 014** Van de functie $f(x) = a(x-2)^2 - 4$ is voor $a = \frac{1}{2}$ de grafiek getekend.

W

- Teken in hetzelfde assenstelsel voor $a = 2$ en voor $a = -1$ de bijbehorende grafieken.
- Schrijf van de grafieken de coördinaten van de top op.
- Bij een andere waarde van a ligt het punt $(0, 6)$ op de grafiek van f .
Vul in: je kunt de bijbehorende waarde van a berekenen door de vergelijking $a \times (\dots - 2)^2 - 4 = \dots$ op te lossen.
- Los de vergelijking op en schrijf het bijbehorende functievoorschrift op.

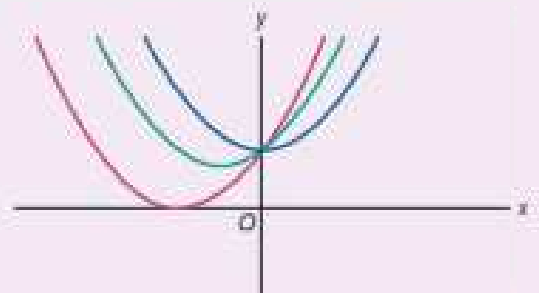


Uitdagende opdrachten

- U3** Gegeven is de functie $f(x) = (x-a)^2 + 2a - 1$.
De top van de bijbehorende grafiek ligt op de lijn $y = x$.
Zoek uit welke waarde van a hierbij hoort.

- U4** Van de functie $g(x) = (x-b)^2 + 4 - b^2$ zijn voor $b = -2$, $b = -1$ en $b = 0$ de grafieken geschetst. Deze drie grafieken gaan door één punt.

- Toon aan dat de grafieken door één punt gaan.
- Voor welke waarden van b ligt de top van de bijbehorende grafiek op de y -as?



- Je leert** • hoe je kwadratische vormen herleidt
- Leerroutes** • ondersteunend: 17—18—19—O20—20—21
 • doorlopend: 17—18—19—20—21—22
 • uitdagend: 18—19—20—22—U5—U6

Mason verkoopt bekertjes met limonade. Hij kan zijn winst W in euro's berekenen met de functies $W(a) = -\frac{1}{2}(a-4)(a-16)$ of $W(a) = -\frac{1}{2}(a-10)^2 + 18$. In beide functies is a het aantal verkochte bekers.

- Met welke functie kan hij handiger de maximale winst berekenen?



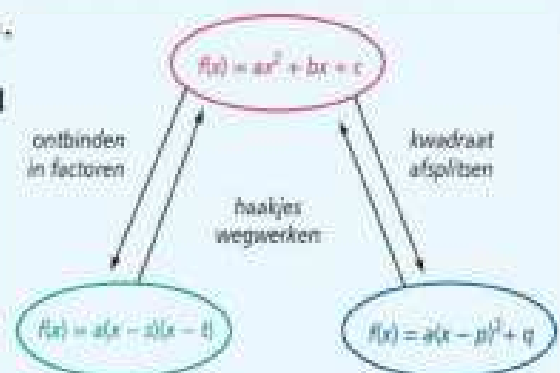
- 17** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 6x + 8$.
- Vul in.
Met ontbinden in factoren kun je het functievoorschrift van f schrijven als $f(x) = (x - \dots)(x - \dots)$.
 - Los de vergelijking $x^2 - 6x + 8 = 0$ met kwadraat afsplitsen op.
 - Vul in.
Met kwadraat afsplitsen kun je het functievoorschrift van f schrijven als $f(x) = (x - \dots)^2 - \dots$.
 - Je hebt het functievoorschrift van f nu in drie vormen geschreven.
Welke vorm is het handigst om de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as te berekenen?
 - En welke vorm is het handigst om de coördinaten van de top van de grafiek van f te berekenen?
- 18** Gegeven is de functie $g(x) = (x - 3)(x + 5)$.
- Geef de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as.
 - Schrijf het functievoorschrift van g in de vorm $g(x) = x^2 + \dots x - \dots$.
 - Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as.
 - Gebruik kwadraat afsplitsen om het functievoorschrift van g te schrijven als $g(x) = (x - \dots)^2 + \dots$.
 - Geef de coördinaten van de top van de grafiek van g .

- 19 Gegeven is de functie $h(x) = (x - 4)^2 - 64$.
- Geef de coördinaten van de top van de grafiek van h .
 - Laat zien dat je het functievoorschrift van h kunt herleiden tot $h(x) = x^2 - 8x - 48$.
 - Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de y -as.
 - Vul in.
Je kunt het functievoorschrift van h ook herleiden tot $h(x) = (x + \dots)(x - \dots)$.
 - Geef de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de x -as.

Theorie

Door het functievoorschrift bij een parabool te herleiden, kun je het functievoorschrift in meer vormen schrijven. Uit elke vorm kun je herkenbare punten van de parabool opmaken.

- > Bij de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ is het punt $(0, c)$ het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.
- > Bij de vorm $f(x) = a(x - s)(x - t)$ zijn de punten $(s, 0)$ en $(t, 0)$ de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
- > Bij de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$ is het punt (p, q) de top van de grafiek van f .



Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $g(x) = x^2 + 6x - 16$.

- > Het punt $(0, -16)$ is het snijpunt van de grafiek van g met de y -as.
- > Met ontbinden in factoren kun je het functievoorschrift van g herleiden tot $g(x) = (x + 8)(x - 2)$.
De punten $(-8, 0)$ en $(2, 0)$ zijn de snijpunten van de grafiek van g met de x -as.
- > Met kwadraat afsplitsen kun je het functievoorschrift van g herleiden tot $g(x) = (x + 3)^2 - 25$.
Het punt $(-3, -25)$ is de top van de grafiek van g .

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $h(x) = (x - 1)^2 - 9$.

- > Het punt $(1, -9)$ is de top van de grafiek van h .
- > Met haakjes wegwerken kun je het functievoorschrift van h herleiden tot $h(x) = x^2 - 2x - 8$.
Het punt $(0, -8)$ is het snijpunt van de grafiek van h met de y -as.
- > Met ontbinden in factoren kun je het functievoorschrift van h herleiden tot $h(x) = (x + 2)(x - 4)$.
De punten $(-2, 0)$ en $(4, 0)$ zijn de snijpunten van de grafiek van h met de x -as.

Ondersteunende route → maak opdracht D20

- 20** Gegeven zijn de functies $g(x) = x^2 + 8x + 12$,
 $h(x) = (x + 2)(x - 8)$ en $i(x) = (x - 3)^2 - 9$.
- Herleid de functievoorschriften van h en i tot de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.
 - Herleid de functievoorschriften van g en i tot de vorm $f(x) = a(x - s)(x - t)$.
 - Herleid de functievoorschriften van g en h tot de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$.
 - Vul voor de functies g , h en i de ontbrekende waarden in het schema in.

	snijpunt met de y -as	snijpunten met de x -as	top
g	(0, 12)	(..., 0) en (..., 0)	(..., ...)
h	(0, ...)	(-2, 0) en (8, 0)	(..., ...)
i	(0, ...)	(..., 0) en (..., 0)	(3, -9)

- 21** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + 10x + 16$,
 $g(x) = x(x + 4)$ en $h(x) = (x - 2)^2 - 1$.
- Geef van elke functie de coördinaten van het snijpunt van de bijbehorende grafiek met de y -as.
 - Bereken van elke functie de coördinaten van de snijpunten van de bijbehorende grafiek met de x -as.
 - Bereken van elke functie de coördinaten van de top van de bijbehorende grafiek.

- 22** Met het functievoorschrift $h(a) = -0,01a(a - 180)$ kun je de hoogte h van de boog van een brug in meters ten opzichte van het wateroppervlak berekenen. Hierin stelt a de horizontale afstand vanaf de linker oever in meters voor.
- Los de vergelijking $h(a) = 0$ op en leg uit wat de oplossingen van de vergelijking betekenen.
 - Bereken de maximale hoogte van de boog van de brug ten opzichte van het wateroppervlak.
 - Vul in.
 Je kunt het functievoorschrift van h ook schrijven als $h(a) = -0,01(a - \dots)^2 + \dots$



Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

Ondersteunende opdrachten

020 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 2x - 15$.

- a Schrijf de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as op.
- b Op het blaadje zie je hoe Noor het functievoorschrift van f met ontbinden in factoren tot een andere vorm herleidt.
Vul haar blaadje verder in.
- c Bij de vorm $f(x) = a(x - s)(x - t)$ zijn de punten $(s, 0)$ en $(t, 0)$ de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
Geef de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
- d Op het blaadje zie je hoe Joost het functievoorschrift van f met kwadraat afsplitsen tot een andere vorm herleidt.
Vul zijn blaadje verder in.
- e Bij de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$ is het punt (p, q) de top van de grafiek van f .
Geef de coördinaten van de top van de grafiek van f .

				Noor
☐	$f(x) = x^2 + 2x - 15$			
☐	Het product is -15 en de			
☐	som is $+2$.			
☐	$f(x) = (x - \dots)(x + \dots)$			

				Joost
☐	$f(x) = x^2 + 2x - 15$			
☐	$f(x) = (x + \dots)^2 - \dots - 15$			
☐	$f(x) = (x + \dots)^2 - \dots$			
☐				

Uitdagende opdrachten

U5 Babette gaat het functievoorschrift $f(x) = 3x^2 + 12x - 8$ tot de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$ herleiden.

- a Vul het blaadje van Babette verder in en schrijf de coördinaten van de top van de grafiek van f op.
- b Bereken op dezelfde manier van de volgende functies de coördinaten van de top van de grafiek.

A $g(x) = 2x^2 - 10x + 9$

B $h(x) = -3x^2 + 21x - 14$

				Babette
☐	$f(x) = 3x^2 + 12x - 8$			
☐	$f(x) = 3(x^2 + 4x) - 8$			
☐	$f(x) = 3((x + 2)^2 - \dots) - 8$			
☐	$f(x) = 3(x + 2)^2 - \dots - 8$			
☐	$f(x) = 3(x + 2)^2 - \dots$			

U6 Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$.

- a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
- b Laat zien dat je het functievoorschrift van f kunt schrijven als $f(x) = 2(x + 2)(x - \frac{1}{2})$.
- c Schrijf de functievoorschriften $g(x) = 3x^2 + 13x + 12$ en $h(x) = 2x^2 - x - 15$ in de vorm $f(x) = a(x - s)(x - t)$.

Je leert • hoe je bij een functie de parabool schetst

Leerroutes • ondersteunend: 23—24—025—26—027—27
 • doorlopend: 23—24—25—26—27—28
 • uitdagend: 23—24—25—26—28—U7

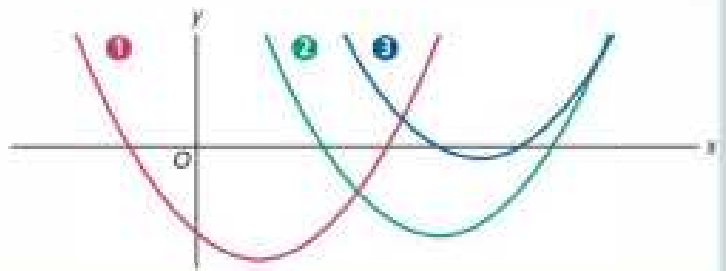
Drie parabolen zijn geschetst bij de volgende functies.

A $f(x) = 2(x - 3)^2 - 4$

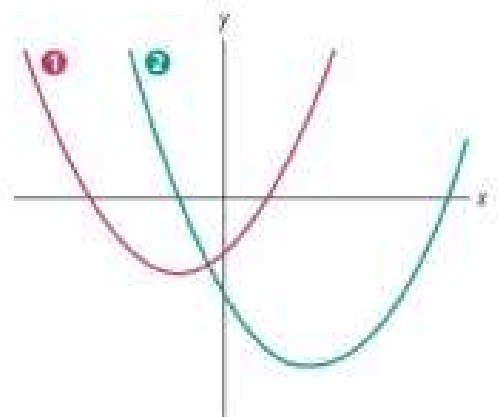
B $g(x) = 2(x - 3)(x - 4)$

C $h(x) = 2x^2 - 3x - 4$

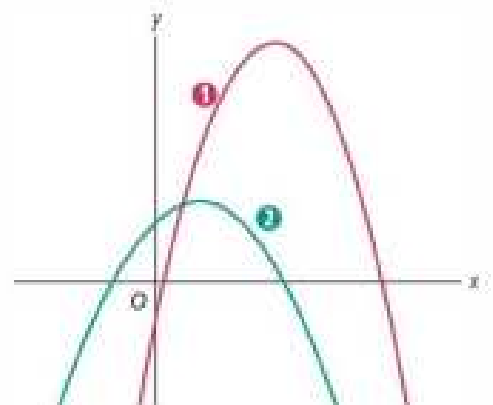
• Zoek bij iedere functie de juiste parabool.



- 23** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 5)$. Een van de twee geschetste grafieken hoort bij de functie f .
- Hoe kun je uit het functievoorschrift van f opmaken dat de grafiek van f een dalparabool is?
 - Vul in.
De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(\dots, 0)$ en $(\dots, 0)$.
 - Waarom ligt de top van de grafiek van f onder de x -as?
 - Waarom ligt de top van de grafiek van f rechts van de y -as?
 - Welke van de geschetste grafieken hoort bij de functie f ?
 - Leg uit dat de andere geschetste grafiek bij de functie $g(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 2$ kan horen.



- 24** Gegeven is de functie $h(x) = -3(x - 2)^2 + 4$. Een van de twee geschetste grafieken hoort bij de functie h .
- Waarom is de grafiek van h een bergparabool?
 - Schrijf de coördinaten van de top van de grafiek van h op.
 - Weet je nu al welke van de twee geschetste grafieken bij de functie h hoort?
 - Bereken $h(0)$.
 - Leg uit waarom grafiek 2 bij de functie h hoort.
 - Welke functie kan bij grafiek 1 horen,
 $k(x) = -2(x - 1)^2 + 2$ of $l(x) = -2(x + 1)^2 + 2$?



Theorie

Bij het schetsen van een parabool bij de vorm $f(x) = a(x-s)(x-t)$ of $f(x) = a(x-p)^2 + q$, maak je eerst uit het functievoorschrift van f enkele kenmerken van de parabool op.

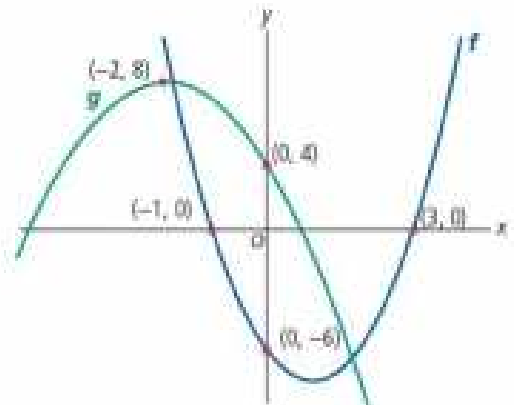
- > Uit de waarde van a kun je opmaken of de grafiek van f een bergparabool of een dalparabool is.
- > Uit de vorm $f(x) = a(x-s)(x-t)$ kun je opmaken in welke punten de grafiek van f de x -as snijdt. Met deze snijpunten kun je opmaken of de top van de grafiek van f links of rechts van de y -as ligt.
- > Uit de vorm $f(x) = a(x-p)^2 + q$ kun je opmaken welk punt de top van de grafiek van f is.
- > Uit $f(0)$ kun je opmaken welke coördinaten het snijpunt van de grafiek van f met de y -as heeft.

Voorbeeld

Schets de grafieken bij de functies $f(x) = 2(x+1)(x-3)$ en $g(x) = -(x+2)^2 + 8$.

Oplossing

- > De grafiek van f is een dalparabool, want $a = 2$.
- > De punten $(-1, 0)$ en $(3, 0)$ zijn de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
De top van de grafiek van f ligt rechts van de y -as.
- > Omdat $f(0) = -6$, zijn de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as $(0, -6)$.
- > De grafiek van g is een bergparabool, want $a = -1$.
- > Het punt $(-2, 8)$ is de top van de grafiek van g .
- > Omdat $g(0) = 4$, zijn de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as $(0, 4)$.



Ondersteunende route → maak opdracht 025

25 Schets de grafieken bij de functies.

- | | |
|---------------------------------|---|
| a $f(x) = 2(x+4)(x+7)$ | c $h(x) = 4(x-3)^2 + 5$ |
| b $g(x) = -2(x+1)^2 + 9$ | d $i(x) = \frac{1}{3}(x-4)(x+1)$ |

7.4 Parabolen schetsen

- 26** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x + 2$.
- Is de grafiek van f een bergparabool of een dalparabool?
 - Schrijf de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as op.
 - Herleid het functievoorschrift tot de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$ en geef de coördinaten van de top van de grafiek van f .
 - Schets de grafiek van f .

Theorie

Bij het schetsen van een parabool bij de vorm

$f(x) = ax^2 + bx + c$, maak je eerst uit het functievoorschrift van f enkele kenmerken van de parabool op.

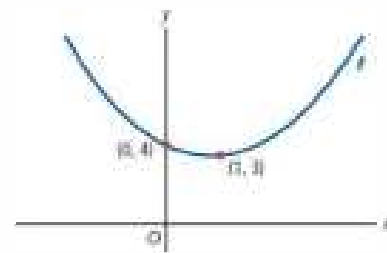
- > Uit de waarde van a kun je opmaken of de grafiek van f een bergparabool of een dalparabool is.
- > Uit de waarde van c kun je opmaken dat het punt $(0, c)$ het snijpunt van de grafiek van f met de y -as is.
- > Daarna moet je de coördinaten van de top van de grafiek van f nog berekenen.

Voorbeeld

Schets de grafiek bij de functie $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

Oplossing

- > De grafiek van f is een dalparabool, want $a = 1$.
- > Het snijpunt van de grafiek van f met de y -as is $(0, 4)$.
- > Het functievoorschrift van f kun je herleiden tot $f(x) = (x - 1)^2 + 3$. De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(1, 3)$.



Ondersteunende route → maak opdracht D27

- 27** Schets de grafieken bij de functies.
- $f(x) = x^2 + 8x - 20$
 - $g(x) = x^2 - 4x + 6$
 - $h(x) = x^2 - 10x + 24$
 - $i(x) = x^2 + 6x - 1$

- 28** Schets de grafieken bij de functies.
- $f(x) = -\frac{2}{3}(x + 2)(x - 3)$
 - $g(x) = x^2 - 12x + 27$
 - $h(x) = 1\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3$
 - $i(x) = -3x^2 + 9x + 12$

Uitdagende route → maak opdracht U7

Ondersteunende opdrachten

- 025 Je gaat de grafieken schetsen bij de functies $f(x) = -2(x+1)(x-7)$ en $g(x) = 6(x+3)^2 - 2$.
- Leg uit waarom de grafiek van f een bergparabool is en de grafiek van g een dalparabool is.
 - Vul in.
De snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn de punten $(-1, 0)$ en $(\dots, 0)$.
 - Leg uit waarom de top van de grafiek van f rechts van de y -as ligt.
 - Bereken $f(0)$ en geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.
 - Schets de grafiek van f .
 - Geef de coördinaten van de top van de grafiek van g .
 - Bereken $g(0)$ en leg uit dat de grafiek van g de y -as in een punt boven de x -as snijdt.
 - Schets de grafiek van g .

Schets de grafieken bij de functies.

- $h(x) = -(x+4)(x-3)$
- $k(x) = 2(x-8)^2 - 10$

De punten $(s, 0)$ en $(t, 0)$ zijn de snijpunten van de grafiek bij de functie $f(x) = a(x-s)(x-t)$ met de x -as.

Het punt (p, q) is de top van de grafiek bij de functie $g(x) = a(x-p)^2 + q$.

- 027 Je gaat de grafiek schetsen bij de functie $f(x) = x^2 - 8x + 2$.
- Is de grafiek van f een bergparabool of een dalparabool?
 - Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.
 - Op het blaadje heeft João de coördinaten van de top van de grafiek van f met kwadraat afsplitsen berekend. Vul het blaadje van João verder in.
 - Schets de grafiek van f .

	João
$f(x) = x^2 - 8x + 2$	
$f(x) = (x-4)^2 - \dots + 2$	
$f(x) = (x-4)^2 - \dots$	
De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(\dots, \dots)$.	

Uitdagende opdrachten

- 027 Gegeven is de functie $f(x) = ax^2 + px + 6p$.
- Neem $a = 1$ en $p = 3$ en schets de bijbehorende grafiek.
 - De bij $a = 2$ behorende grafiek gaat door het punt $(p, -3)$. Schets de bijbehorende grafiek.
 - Gegeven is de functie $g(x) = 2(x+4)(x-p)$. De grafiek van g gaat door het punt $(-2, -24)$. Schets de grafiek van g .

Je leert · hoe je het functievoorschrift bij een parabool opstelt

Leerroutes · ondersteunend: 29—30—11—31—32
 · doorlopend: 29—30—31—32—33
 · uitdagend: 29—30—31—33—U9

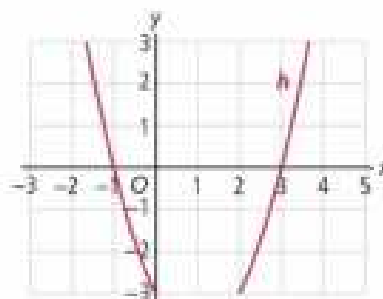
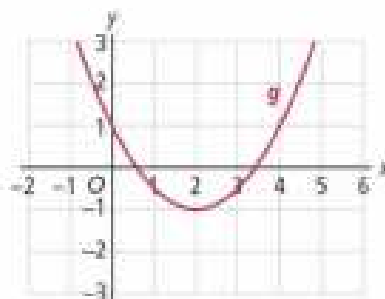
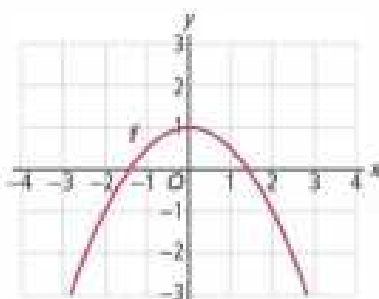
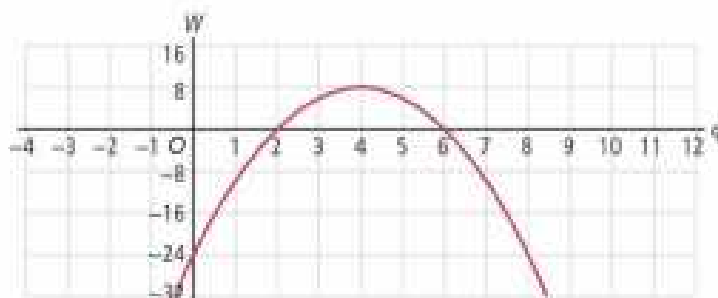
De drie gegeven functies horen bij de getekende grafiek. Een aantal getallen zijn daarbij weggelaten.

A $W(q) = -2(q - \dots)^2 + \dots$

B $W(q) = -2q^2 + 16q + \dots$

C $W(q) = -2(q - \dots)(q - \dots)$

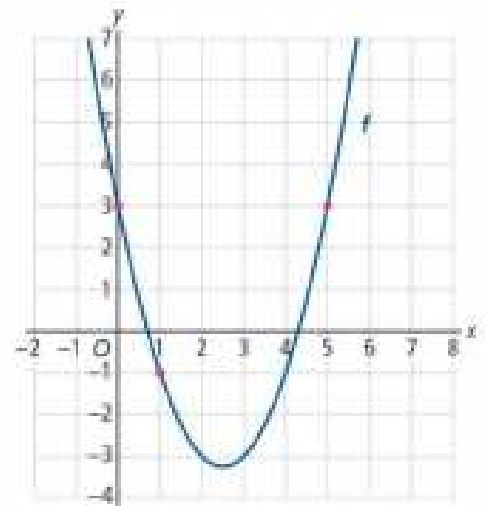
- Vul op de puntjes de juiste getallen in.



- 29**
- Leg uit waarom bij de grafiek van f een functievoorschrift van de vorm $f(x) = ax^2 + 1$ past.
 - Gebruik de coördinaten van een punt op de grafiek van f om de waarde van a te berekenen.
 - Van de grafiek van g kun je de coördinaten van de top aflezen.
Vul de waarden van p en q in het functievoorschrift $g(x) = a(x - p)^2 + q$ in.
 - Bereken de waarde van a door de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as in te vullen.
 - Je kunt de coördinaten van de top van de grafiek van h niet aflezen, maar je kunt wel de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de x -as aflezen.
Vul de waarden van s en t in het functievoorschrift $h(x) = a(x - s)(x - t)$ in.
 - Bereken de waarde van a door de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de y -as in te vullen in het functievoorschrift.

- 30** Bij het opstellen van het functievoorschrift bij de grafiek van f gebruik je de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$, omdat je alleen de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as kunt aflezen.

- Welke waarde heeft c ?
- De grafiek van f gaat door het punt $(1, -1)$.
Laat door invullen zien dat geldt $a + b + 3 = -1$.
- De grafiek van f gaat ook door het punt $(5, 3)$.
Stel nog zo'n vergelijking met a en b op.
- Leg uit dat a en b moeten voldoen aan het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} a + b + 3 = -1 \\ 25a + 5b + 3 = 3 \end{cases}$
- Herleid beide vergelijkingen tot de vorm $b = \dots$ en los het stelsel vergelijkingen verder op.
- Schrijf het functievoorschrift bij de grafiek van f op.



Aanpak

Hoe stel je het functievoorschrift bij een parabool op?

- > Zijn de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as bekend?

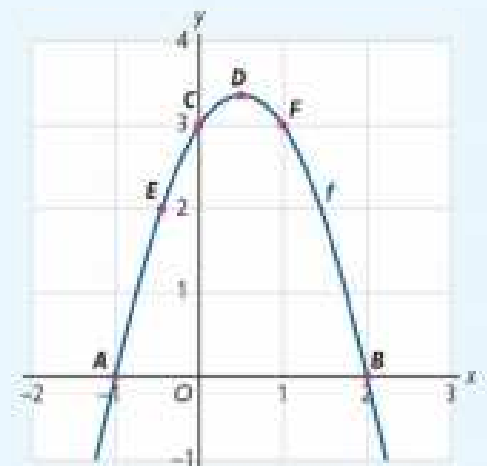
- Gebruik de vorm $f(x) = a(x - s)(x - t)$.
- Uit de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as volgen de waarden van s en t .
- Bereken de waarde van a met behulp van de coördinaten van een derde punt.

- > Zijn de coördinaten van de top van de parabool bekend?

- Gebruik de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$.
- Uit de coördinaten van de top van de parabool volgen de waarden van p en q .
- Bereken de waarde van a met behulp van de coördinaten van een tweede punt.

- > Zijn de coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y -as en twee willekeurige punten bekend?

- Gebruik de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Uit de coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y -as volgt de waarde van c .
- Vul de coördinaten van de twee punten in om een stelsel vergelijkingen te maken. Bereken de waarden van a en b door het stelsel vergelijkingen op te lossen.



- > De punten A , B en F zijn bekend.

Gebruik dan de vorm

$$f(x) = a(x - s)(x - t),$$

- > De top D en punt E zijn bekend.

Gebruik dan de vorm

$$f(x) = a(x - p)^2 + q,$$

- > De punten C , E en F zijn bekend.

Gebruik dan de vorm

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

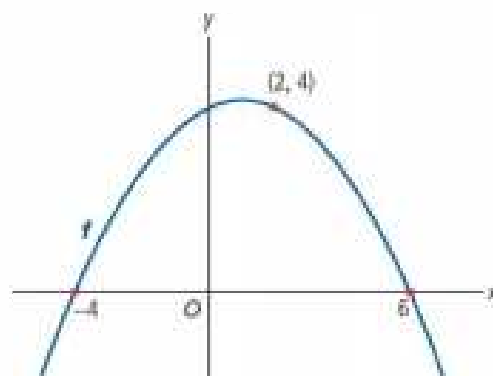
Voorbeeld

Stel het functievoorschrift bij de parabool op.

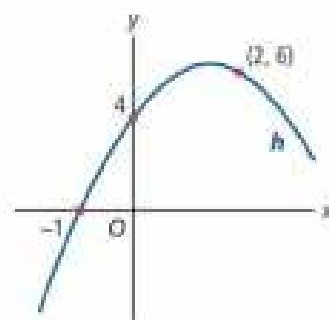
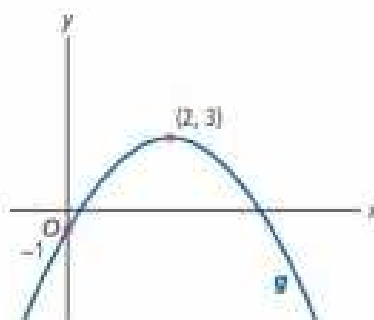
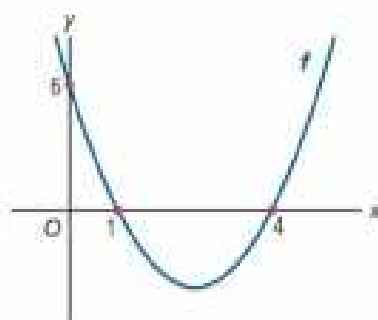
Oplossing

Van de parabool zijn de coördinaten van de snijpunten met de x -as bekend.

- 1 Gebruik de vorm $f(x) = a(x - s)(x - t)$.
- 2 Uit de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as volgt $s = -4$ en $t = 6$. Invullen geeft $f(x) = a(x + 4)(x - 6)$.
- 3 De coördinaten van het punt $(2, 4)$ invullen geeft $a(2 + 4)(2 - 6) = 4$, oftewel $-24a = 4$, dus $a = -\frac{1}{6}$. Het functievoorschrift bij de parabool is $f(x) = -\frac{1}{6}(x + 4)(x - 6)$.



Ondersteunende route → maak opdracht 031

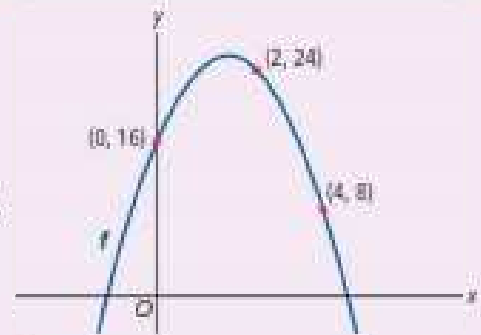


- 31 Stel de functievoorschriften bij de parabolen op.
- 32 De parabool bij de functie f gaat door de punten $(1, 1)$, $(3, 3)$ en $(5, 1)$.
 - a Waarom is het punt $(3, 3)$ de top van de parabool?
 - b Schets de parabool.
 - c Stel het functievoorschrift bij de parabool op.
- 33 De parabool bij de functie g heeft als top het punt $(-2, 0)$. De parabool snijdt de y -as in het punt $(0, 7)$.
 - a Maak een schets van de parabool.
 - b Stel het functievoorschrift bij de parabool op.

Uitdagende route → maak opdracht U9

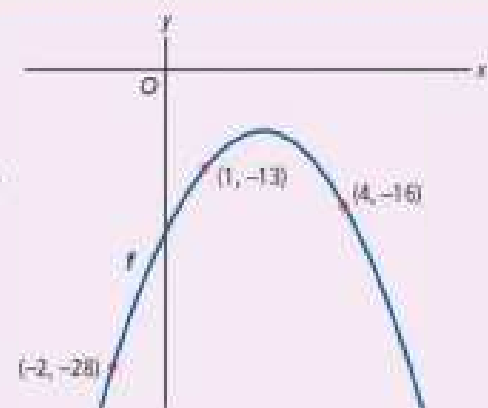
Ondersteunende opdrachten

- 031** De parabool bij de functie f gaat door de punten $(0, 16)$, $(2, 24)$ en $(4, 8)$. Je gaat het functievoorschrift bij de parabool opstellen.
- Waarom gebruik je hier de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$?
 - Waarom weet je dat $c = 16$?
 - Vul de coördinaten van de twee andere punten in en laat zien dat je het stelsel vergelijkingen
$$\begin{cases} 4a + 2b + 16 = 24 \\ 16a + 4b + 16 = 8 \end{cases}$$
 krijgt.
 - Na herleiden wordt de eerste vergelijking $b = -2a + 4$. Herleid de tweede vergelijking tot de vorm $b = \dots a - \dots$
 - Stel de twee formules uit opdracht d aan elkaar gelijk en los de ontstane vergelijking op.
 - Vul de gevonden waarde van a in de eerste vergelijking in en bereken de waarde van b .
 - Stel het functievoorschrift bij de parabool op.

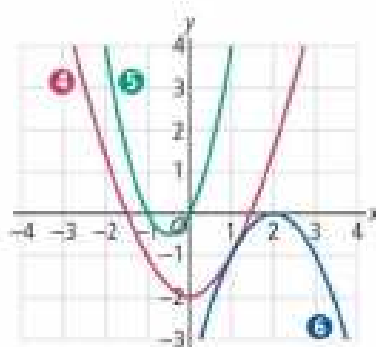
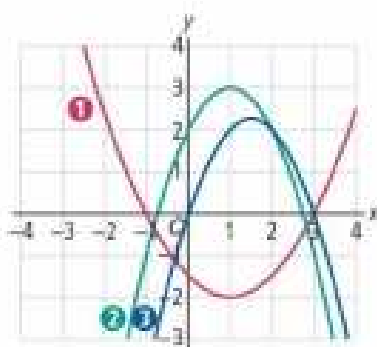


Uitdagende opdrachten

- U9** Van de parabool bij de functie f zijn de kenmerkende punten niet af te lezen. Bij het opstellen van het functievoorschrift van de parabool gebruik je de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Als je de coördinaten van de drie bekende punten invult, dan krijg je een stelsel van drie vergelijkingen. Geef het stelsel van drie vergelijkingen.
 - Laat zien dat je één van de vergelijkingen kunt herleiden tot de vorm $c = -a - b - 13$.
 - Substitueer de vergelijking $c = -a - b - 13$ in de andere twee vergelijkingen.
 - Je hebt nu een stelsel van twee vergelijkingen gekregen waarmee je de waarden van a en b kunt berekenen. Los dit stelsel vergelijkingen op.
 - Schrijf het functievoorschrift bij de parabool op.



Deze paragraaf bevat opdrachten die een indruk geven van wiskunde B.



34 Zoek bij iedere functie de juiste parabool.

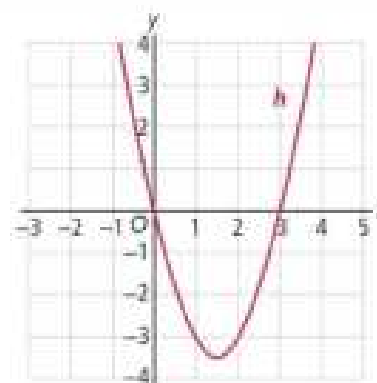
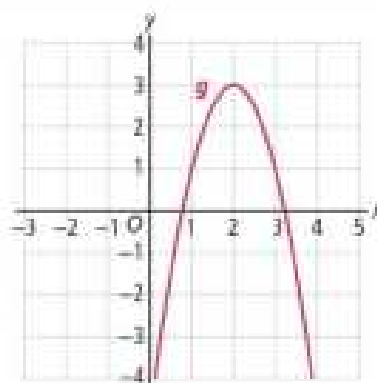
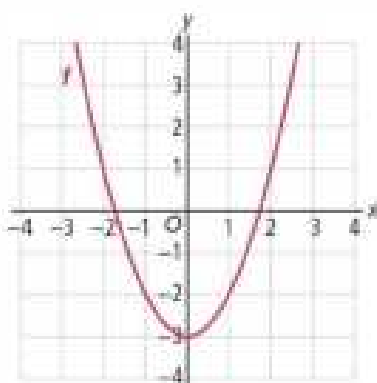
- a $f(x) = 2x(x + 1)$ d $h(x) = \frac{1}{2}(x - 3)(x + 1)$
 b $g(x) = -x^2 + 2x + 2$ e $f(x) = -x^2 + 3x$
 c $h(x) = x^2 - 2$ f $k(x) = -(x - 2)^2$

35 Gegeven zijn de functies $g(x) = (x + 5)^2 - 9$,
 $h(x) = -2(x + 3)(x - 4)$ en $i(x) = x^2 - 4x - 32$.

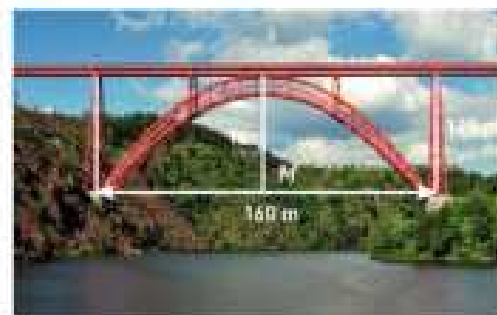
- a Herleid de functievoorschriften van g en h tot de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.
 b Herleid de functievoorschriften van g en i tot de vorm $f(x) = a(x - s)(x - t)$.
 c Herleid de functievoorschriften van h en i tot de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$.
 d Vul de ontbrekende waarden in het schema in voor de functies g , h en i .

	snijpunt met de y -as	snijpunten met de x -as	top
g	$(0, \dots)$	$(\dots, 0)$ en $(\dots, 0)$	$(-5, -9)$
h	$(0, \dots)$	$(-3, 0)$ en $(4, 0)$	$(\dots, \dots)$
i	$(0, -32)$	$(\dots, 0)$ en $(\dots, 0)$	$(\dots, \dots)$

36 Stel het functievoorschrift bij de parabolen op.



- 37** Le Viaduc de Garabit was een tijd de hoogste brug ter wereld. De boog van de brug heeft de vorm van een parabool en overspant een breedte van 160 meter. Op het hoogste punt ligt de boog van de brug 120 meter boven de basis.
- Stel een formule op waarmee je de hoogte h van de boog van deze brug kunt berekenen. Neem als oorsprong het punt M en neem a voor de horizontale afstand in meters ten opzichte van de oorsprong.



- 38** Schets de grafieken bij de functies.

a $f(x) = 3(x - 4)(x + 7)$ **c** $h(x) = 9(x + 1)^2 - 3$
b $g(x) = x^2 + 8x - 4$ **d** $k(x) = x^2 - 6x$

- B39** Milan schiet een kanonskogel vanaf een toren die 60 meter hoog is. De baan van de kogel wordt voor een groot gedeelte bepaald door de snelheid waarmee de kogel het kanon verlaat. De hoogte van de kogel boven de grond wordt weergegeven door de functie $h(t) = -5t^2 + vt + 60$. Hierin stelt h de hoogte van de kogel boven de grond in meters voor, t de tijd in seconden vanaf het moment dat de kogel wordt afgeschoten en v de snelheid in meters per seconde waarmee de kogel wordt afgeschoten.



- a** Neem voor v een snelheid van 20 meter per seconde. Na hoeveel seconden komt de kogel op de grond terecht?
b Na hoeveel seconden bereikt de kogel zijn maximale hoogte?
c Hoe hoog komt de kogel maximaal?
d Milan schiet een tweede kogel af met een snelheid van 5 meter per seconde. Hoe hoog komt deze kogel maximaal boven de grond?

- B40** De top van de grafiek van een kwadratische functie f is het punt $(4, 0)$. De grafiek snijdt de y -as in het punt $(0, 4)$.

- a** Maak een schets van de grafiek van f .
b Stel het functievoorschrift bij de grafiek van f op.

- B41** Gegeven is de functie $g(x) = -0,5(x - 2)^2 + 4$. De grafiek van h krijg je door de grafiek van g drie naar rechts en vier omhoog te schuiven. Stel het functievoorschrift bij de grafiek van h op.

Vaardigheid

Je kunt uit de vorm $f(x) = a(x - s)(x - t)$ opmaken in welke punten de grafiek van f de x -as snijdt.

De punten $(s, 0)$ en $(t, 0)$ zijn de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.

Voorbeeld

Geef bij de functie $f(x) = -3(x + 4)(x - 6)$ de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.

Oplossing

Uit het functievoorschrift van f kun je opmaken dat $s = -4$ en $t = 6$. De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(-4, 0)$ en $(6, 0)$.

- 51 Gegeven zijn de functies $g(x) = 7(x + 9)(x - 5)$ en $h(x) = -(x - 1\frac{1}{2})(x - 2)$.
- Geef de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as.
 - Geef ook de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de x -as.

Vaardigheid

Je kunt uit de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$ opmaken welk punt de top van de grafiek van f is.

Het punt (p, q) is de top van de grafiek van f .

Voorbeeld

Geef bij de functie $f(x) = \frac{1}{4}(x + 7)^2 - 2$ de coördinaten van de top van de grafiek van f .

Oplossing

Uit het functievoorschrift van f kun je opmaken dat $p = -7$ en $q = -2$. De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(-7, -2)$.

- S2**
- Geef de coördinaten van de top van de grafiek die hoort bij de functie $g(x) = -3(x+1)^2 - 6$.
 - Gegeven is de functie $h(x) = -(x-p)^2 + q$. De coördinaten van de top van de grafiek van h zijn $(4, -9)$. Stel het functievoorschrift bij de grafiek van h op.

Vaardigheid

Je kunt kwadratische vormen herleiden.

Door het functievoorschrift bij een parabool te herleiden, kun je het functievoorschrift in meer vormen schrijven.

Uit elke vorm kun je herkenbare punten van de parabool opmaken.

- > Bij de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ is het punt $(0, c)$ het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.
- > Bij de vorm $f(x) = a(x-s)(x-t)$ zijn de punten $(s, 0)$ en $(t, 0)$ de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
- > Bij de vorm $f(x) = a(x-p)^2 + q$ is het punt (p, q) de top van de grafiek van f .

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = (x-6)^2 - 4$.

- > Het punt $(6, -4)$ is de top van de grafiek van f .
- > Met haakjes wegwerken kun je het functievoorschrift van f herleiden tot $f(x) = x^2 - 12x + 32$.
Het punt $(0, 32)$ is het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.
- > Met ontbinden in factoren kun je het functievoorschrift van f herleiden tot $f(x) = (x-4)(x-8)$.
De punten $(4, 0)$ en $(8, 0)$ zijn de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.

- S3**
- Gegeven is de functie $g(x) = x^2 - 8x + 15$.
Geef de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as door het functievoorschrift te herleiden.
 - Geef ook de coördinaten van de top van de grafiek van g door het functievoorschrift te herleiden.

Vaardigheid

Je kunt bij een functie de parabool schetsen.

Bij het schetsen van een parabool maak je eerst uit het functievoorschrift enkele kenmerken van de parabool op.

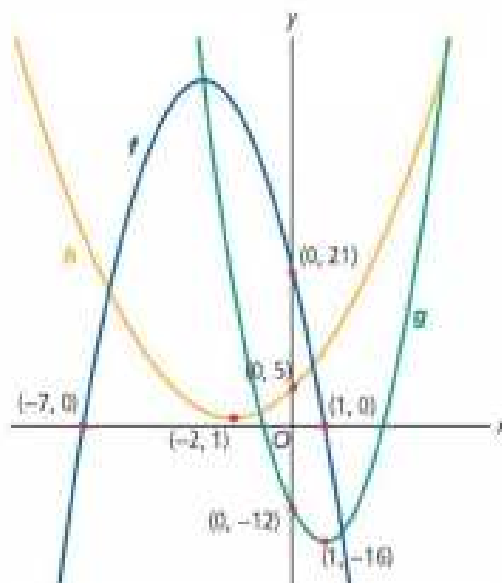
- > Uit de waarde van a kun je opmaken of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is.
- > Uit de vorm $f(x) = a(x - s)(x - t)$ kun je opmaken in welke punten de grafiek van f de x -as snijdt. Met deze snijpunten kun je opmaken of de top van de grafiek van f links of rechts van de y -as ligt.
- > Uit de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$ kun je opmaken welk punt de top van de grafiek van f is.
- > Uit de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ kun je opmaken welk punt het snijpunt van de grafiek van f met de y -as is.
- > Uit $f(0)$ kun je opmaken welke coördinaten het snijpunt van de grafiek van f met de y -as heeft.

Voorbeeld

Schets de grafieken bij de functies $f(x) = -3(x - 1)(x + 7)$, $g(x) = 4(x - 1)^2 - 16$ en $h(x) = x^2 + 4x + 5$.

Oplossing

- > De grafiek van f is een bergparabool, want $a = -3$.
- > De punten $(1, 0)$ en $(-7, 0)$ zijn de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
De top van de grafiek van f ligt links van de y -as.
- > Omdat $f(0) = 21$, zijn de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as $(0, 21)$.
- > De grafiek van g is een dalparabool, want $a = 4$.
Het punt $(1, -16)$ is de top van de grafiek van g .
- > Omdat $g(0) = -12$, zijn de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as $(0, -12)$.
- > De grafiek van h is een dalparabool, want $a = 1$.
- > Het punt $(0, 5)$ is het snijpunt van de grafiek van h met de y -as.
- > Met kwadraat afsplitsen kun je het functievoorschrift van h herleiden tot $h(x) = (x + 2)^2 + 1$.
Het punt $(-2, 1)$ is de top van de grafiek van h .



S4 Schets de grafieken bij de functies.

a $k(x) = -3(x + 2)(x - 5)$

b $m(x) = 4(x - 1)^2 - 6$

c $n(x) = x^2 - 6x - 8$

Vaardigheid

Je kunt het functievoorschrift bij een parabool opstellen.

> Zijn de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as bekend?

1 Gebruik de vorm $f(x) = a(x - s)(x - t)$.

2 Uit de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as volgen de waarden van s en t .

3 Bereken de waarde van a met behulp van de coördinaten van een derde punt.

> Zijn de coördinaten van de top van de parabool bekend?

1 Gebruik de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

2 Uit de coördinaten van de top van de parabool volgen de waarden van p en q .

3 Bereken de waarde van a met behulp van de coördinaten van een tweede punt.

> Zijn de coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y -as en twee willekeurige punten bekend?

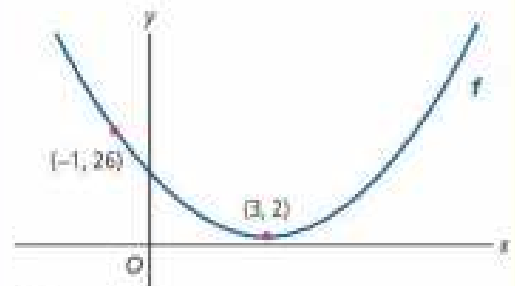
1 Gebruik de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.

2 Uit de coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y -as volgt de waarde van c .

3 Vul de coördinaten van de twee punten in om een stelsel vergelijkingen te maken. Bereken de waarden van a en b door het stelsel vergelijkingen op te lossen.

Voorbeeld

Stel het functievoorschrift bij de parabool op.



Oplossing

Van de parabool zijn de coördinaten van de top bekend.

1 Gebruik de vorm

$$f(x) = a(x - p)^2 + q.$$

2 Uit de coördinaten van de top van de grafiek van f volgt $p = 3$ en $q = 2$.

Invullen geeft $f(x) = a(x - 3)^2 + 2$.

3 De coördinaten van het punt $(-1, 26)$ invullen geeft $a(-1 - 3)^2 + 2 = 26$, oftewel $16a = 24$, dus $a = 1\frac{1}{2}$.

Het functievoorschrift bij de parabool is $f(x) = 1\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$.

S5 Stel het functievoorschrift bij de parabolen op.



T1 Geef bij elke functie de formule van de symmetrieas en de coördinaten van de top van de bijbehorende grafiek.

- a $f(x) = 4(x - 9)(x + 3)$
- b $g(x) = -(x + 4)(x + 10)$
- c $h(x) = -3(x - 7)(x + 13)$

T2 Met de functie $W(p) = -20(p - 10)(p - 50) + 4500$ kan de winst W in euro's worden berekend als een bedrijf p producten verkoopt.

- a Bereken de winst als er 20 producten verkocht worden.
- b Bereken de maximale winst die het bedrijf kan maken.
- c Bij welke aantallen verkochte producten maakt het bedrijf winst?
- d Schets de grafiek van W .

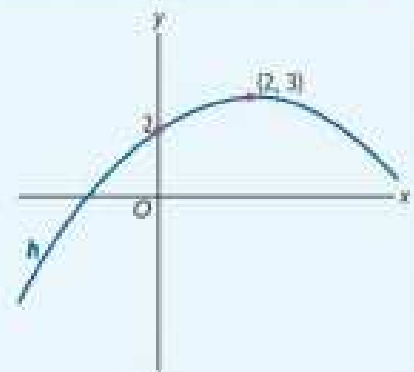
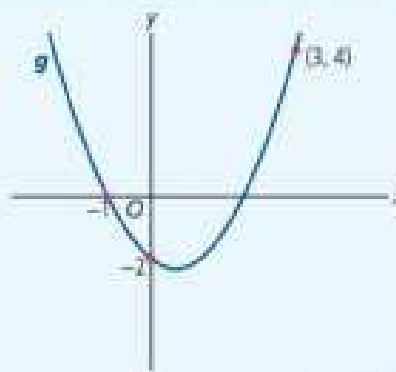
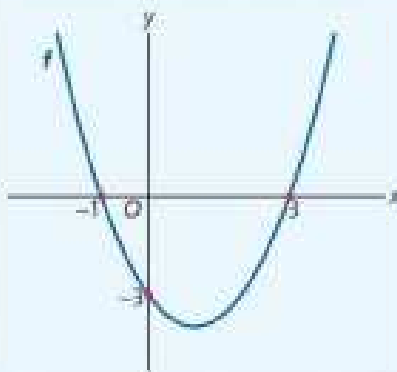


T3 Geef bij elke functie de coördinaten van de top van de grafiek. Vermeld ook of die grafiek een bergparabool of een dalparabool is.

- a $f(x) = 0,1(x - 5)^2 + 2$
- b $g(x) = -2x^2 + \frac{2}{3}$
- c $h(x) = -\frac{3}{7}(x + 7)^2 + 25$
- d $i(x) = 3(x - 2)^2 - 5$

T4 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 3x - 18$, $g(x) = 2(x + 1)(x - 11)$ en $h(x) = (x + 1)^2 - 9$.

- a Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.
- b Geef de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as door het functievoorschrift van f te herleiden.
- c Geef de coördinaten van de top van de grafiek van f door het functievoorschrift van f te herleiden.
- d Geef de coördinaten van de top van de grafiek van g .
- e Geef de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de x -as.



T5 Stel de functievoorschriften bij de parabolen op.

T6 Schets de grafieken bij de functies.

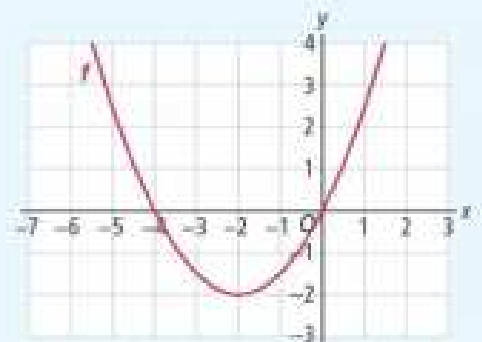
- a $f(x) = -(x + 5)^2$
- b $g(x) = x^2 + 8x$
- c $h(x) = 1,5(x + 1)(x - 11)$
- d $k(x) = x^2 + 10x + 12$

T7 Gegeven is de functie $g(x) = a(x + 3)(x - 1)$.

- a Schrijf voor $a = 2$ de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as op.
- b Schets de grafiek van g .
- c Ga na of het punt $(5, 60)$ op de grafiek van g ligt.
- d Zoek uit voor welke waarde van a de bijbehorende grafiek de y -as in het punt $(0, 9)$ snijdt.

T8 Bij de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$ hoort voor elke waarde van c een parabool.

- a Leg uit dat de getekende parabool bij $c = 0$ hoort.
- b Heeft de parabool bij $c = 3$ snijpunten met de x -as? Verklaar je antwoord.
- c Hoeveel snijpunten heeft de parabool bij $c = -4$ met de x -as?
- d Voor welke waarde van c heeft de bijbehorende parabool precies één punt gemeenschappelijk met de x -as?



Je kunt uit de vorm $f(x) = a(x - s)(x - t)$ opmaken in welke punten de grafiek van f de x -as snijdt.

- E1 Geef bij elke functie de coördinaten van de snijpunten van de bijbehorende grafiek met de x -as.

a $f(x) = (x - 1)(x - 6)$ c $h(x) = 1\frac{1}{2}(x + 2)(x + 3)$
 b $g(x) = -5(x + 3)(x - 8)$ d $i(x) = -1,4x(x + 1)$

- E2 Geef bij elke functie de formule van de symmetrieas en de coördinaten van de top van de bijbehorende grafiek.

a $f(x) = -2(x + 1)(x + 3)$ c $h(x) = -(x + 2)(x - 4)$
 b $g(x) = 4(x + 4)(x - 6)$ d $i(x) = 10(x + 2)(x - 5)$

Je kunt uit de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$ opmaken welk punt de top van de grafiek van f is.

- E3 Geef van elke functie de coördinaten van de top van de grafiek.

a $f(x) = \frac{1}{3}(x + 1)^2 + 3$ d $i(x) = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 + 3$
 b $g(x) = -2(x - 2)^2 + 4$ e $j(x) = (x - 2)^2 + 4$
 c $h(x) = 2(x + 1)^2$ f $k(x) = -2x^2 + 3$

- E4 Van de kwadratische functie $h(x) = 3(x - p)^2 + q$ is het punt $(1, 2)$ de top van de grafiek van h .
 Stel het functievoorschrift bij de grafiek van h op.

Je kunt kwadratische vormen herleiden.

- E5 Gegeven is de functie $f(x) = (x + 4)(x - 8)$.
- Geef de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
 - Schrijf het functievoorschrift van f zonder haakjes.
 - Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.
 - Herleid het functievoorschrift van f tot de vorm $f(x) = (x - \dots)^2 + \dots$.
 - Geef de coördinaten van de top van de grafiek van f .

- E6** Gegeven zijn de functies $g(x) = (x + 5)(x - 3)$,
 $h(x) = (x + 3)^2 - 81$ en $i(x) = x^2 - 10x - 24$.
- Herleid de functievoorschriften van g en h tot de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ en geef de coördinaten van de snijpunten van de grafieken met de y -as.
 - Herleid de functievoorschriften van h en i tot de vorm $f(x) = a(x - s)(x - t)$ en geef de coördinaten van de snijpunten van de grafieken met de x -as.
 - Geef de coördinaten van de top van de grafieken van de functies g , h en i .

Je kunt bij een functie de parabool schetsen.

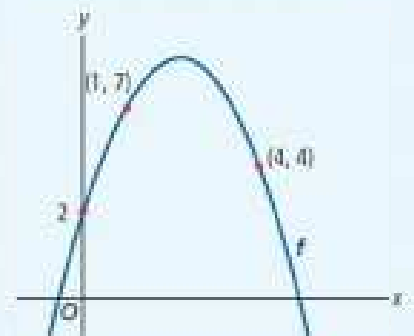
- E7** Schets de grafieken bij de functies.

- $f(x) = -7(x + 6)^2 + 1$
- $g(x) = 2,6(x + 2)(x - 3)$
- $h(x) = x^2 - 8x + 5$

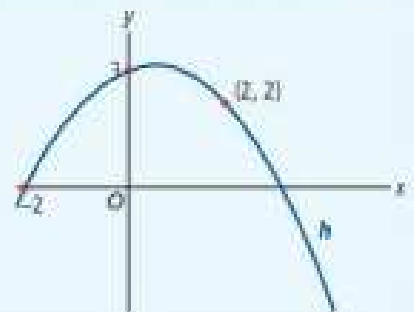
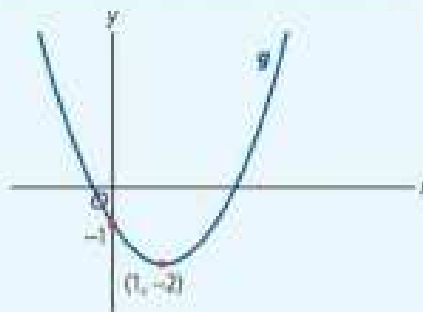
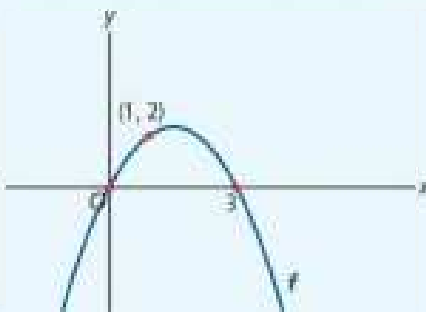
Je kunt het functievoorschrift bij een parabool opstellen.

- E8** Je gaat een functievoorschrift opstellen bij de grafiek van f .

- Leg uit waarom geldt $f(x) = ax^2 + bx + 2$.
- De grafiek van f gaat door het punt $(1, 7)$.
Laat door invullen zien dat geldt $a + b + 2 = 7$.
- De grafiek van f gaat ook door het punt $(4, 4)$.
Leg uit dat a en b moeten voldoen aan het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} a + b + 2 = 7 \\ 16a + 4b + 2 = 4 \end{cases}$
- Herleid beide vergelijkingen tot de vorm $b = \dots$ en los het stelsel vergelijkingen verder op.
- Schrijf het functievoorschrift bij de grafiek van f op.



- E9** Stel de functievoorschriften bij de parabolen op.



- A** $A \times B = 0$ 117
 abc-formule 126
 afhankelijke variabele 10
 amplitude 159
- B** beeldgrafiek 163
 beginhoeveelheid 22
 bergparabool 44
 bewijs 88
 bordjes 116
- C** constante functie 12
 cosinus 201
- D** dalparabool 44
 de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ 56, 235
 de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$ 241
 de vorm $f(x) = a(x - s)(x - t)$ 237
 discriminant 126
- E** evenwichtsstand 159
 exponentieel 9
 exponentiële functie 12, 22, 157
- F** F -hoeken 84
 functie 10
 functievoorschrift 10
 functievoorschrift bij een parabool
 opstellen 253
 functiewaarde 10
- G** gelijkbenig trapezium 94
 gelijkvormig 97, 191
 gelijkvormige figuren 83
 gelijkvormigheidsteken 97
 gestrekte hoek 82
 goniometrische verhoudingen 201
 groeifactor 9, 22
- H** hellingsgetal 8
 hellingshoek 192, 194
 hoek met drie letters 202
 hoek tussen twee lijnstukken in een
 ruimtefiguur 208
- K** kwadraat afsplitsen 124, 234
 kwadratische functie 12, 156
 kwadratische vergelijking 43, 131
 kwadratische vormen herleiden 245
- L** lengte van een zijde 100, 190, 198, 204
 lineaire formule 8
 lineaire functie 12, 156
 lineair verband 8
- M** merkwaardig product 120
- O** onafhankelijke variabele 10
 ontbinden in factoren 118
 ontbinden van een drieterm 42, 117
 overstaande hoeken 82
- P** parabool schetsen 249
 parabool tekenen 53
 periode 159
 periodieke grafiek 158
- R** rekenregels 27
 richtingscoëfficiënt 15
- S** sinus 201
 snijpunt van twee grafieken 16
 somfunctie 175
 spiegelen in een lijn 93
 spiegelen in een punt 93
 startgetal 8
 stelling 88
 stelsel vergelijkingen 20
 symmetrieas 44
- T** tangens 192
 top 44
 top van een parabool berekenen 49
- U** uitgedrukt in 8

- V**
 - vergelijking van een lijn 18
 - vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as 167
 - vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en verticaal verschuiven 171
 - vermoeden 88
 - verschilfunctie 175
 - verticaal verschuiven 163
 - volle hoek 82
- Z**
 - Z-hoeken 84

Ontwerp omslag G2K, Groningen/Amsterdam
Fotografie omslag Getty Fotosearch
Ontwerp binnenwerk Paul Kooi, G2K, Groningen/Amsterdam
Illustraties Peter Fitzverploegh, Utrecht
Technisch tekenwerk Integra Software Services, India
Beeldresearch Daliz, Den HaagFoto's:

Fotoverantwoording

Shutterstock, New York: p. 6/ 7, 18, 21, 22, 23, 24, 26, 30, 31, 37, 39, 48, 58, 70/ 71, 76, 80/ 81, 119, 121, 140, 141, 144/ 145, 158, 192b, 195, 220, 222/ 223, 230, 231, 240, 244, 257o
 Dave de Bruin/ Daliz, Den Haag: p. 10, 92, 118, 127, 193
 iStockphoto/ Getty Images, Londen: p. 25, 70, 79o,
 Anadolu Agency/ Getty Images, Londen: p. 40/ 41
 Alamy/ Image Select, Wassenaar: p. 44, 61, 67, 79b, 133, 151, 153, 185, 232/ 233, 257b
 AFP/ ANP photo, Den Haag: p. 55, 114/ 115,
 Stock Adobe, San Francisco: p. 122
 Daan Rhijnsburger, DEN Haag: p. 135
 Dolph Cantrijn/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 154/ 155
 Dennis Bouman/ Amsterdam Lookout, Amsterdam: p. 162
 Chris Nederland, Zutphen: p. 166
 123RF, San Francisco: p. 170
 Guus Schoonewille/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 174
 Ilya Naymushin/ Reuters, Londen: p. 188, 189
 Michiel Wijnbergh/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 192o
 Wikipedia/ West Vlinderen: p. 200
 Rijksmuseum, Amsterdam: p. 228l
 UvA Erfgoed/ Allard Pierson Museum, Amsterdam: p. 228r
 Image Select, Wassenaar: p. 236



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.

Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



Noordhoff Uitgevers



www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-88319-5



9 789001 883195

In dit hoofdstuk

In klas 2 heb je kennis gemaakt met begrippen in de statistiek zoals frequentietabel, staafdiagram, lijndiagram, steelbladdiagram en indeling in klassen.

Dit hoofdstuk gaat daar verder op in. Zo leer je bijvoorbeeld meer begrippen die bij een indeling in klassen een rol spelen.

Bij statistiek kun je met aantallen en met percentages werken. Daarbij horen de begrippen absolute frequentie en relatieve frequentie.

Je weet al hoe je verschillende waarnemingen kunt vergelijken door het gemiddelde, de modus en de mediaan te berekenen. Je leert nu enkele andere manieren om verschillende waarnemingen te vergelijken. Naast berekenen kan dat ook met grafische weergaven.

Als je in de bovenbouw doorgaat met wiskunde A of wiskunde C, dan wordt het onderdeel statistiek verder uitgebreid.



V1 De twee tabellen gaan over de verkoop van auto's.

Verkoop 2015		Verkoop Volkswagen Golf	
automerk	aantal auto's	jaar	aantal auto's
Volkswagen	56 666	2009	13 147
Peugeot	49 761	2010	13 379
Renault	35 287	2011	12 934
Opel	25 474	2012	9 757
Ford	25 451	2013	14 622
Volvo	25 136	2014	16 457
Toyota	23 755	2015	18 105
Citroën	20 553	2016	10 858

- Bij welke van de twee tabellen is het zinvol om een lijndiagram te maken? Verklaar je antwoord.
- Teken dat lijndiagram.
- Teken bij de andere tabel een staafdiagram.
- Hoeveel procent is de verkoop van de Volkswagen Golf gedaald tussen 2009 en 2016?
- In 2015 zijn er meer Volkswagens verkocht dan Opels. Hoeveel procent meer?



Theorie

Het aantal keren dat een **waarneming** voorkomt, is de **frequentie**. De waarneming met de grootste frequentie is de **modus**. Als geen van de waarnemingen de grootste frequentie heeft, dan is er geen modus. Van een rij waarnemingen die op volgorde van klein naar groot staan, heet de middelste waarneming de **mediaan**. Bij een even aantal waarnemingen is de mediaan het gemiddelde van de middelste twee waarnemingen.

Voorbeeld

Acht temperaturen in °C in oktober waren:

13 12 16 13 13 14 19 14

Geef de modus en de mediaan.

Oplossing

De modus is 13 °C.

De temperaturen van klein naar groot:

12 13 13 13 14 14 16 19

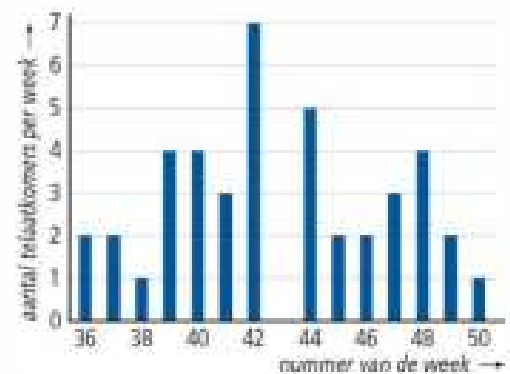
De mediaan is $(13 + 14) : 2 = 13,5$ °C.

V2 De leerlingen in klas 3A haalden voor een proefwerk scheikunde de cijfers die je hiernaast ziet.

7 7 3 6 5 6 5 4 5 9
8 8 9 7 5 3 7 8 6 5
6 5 7 7 6 6 6 7 7 10

- Hoeveel waarnemingen zijn er?
- Bereken het gemiddelde cijfer van de leerlingen in klas 3A voor dit proefwerk. Rond af op één decimaal.
- Hoe groot is de frequentie van het cijfer 8?
- Maak een frequentietabel van de cijfers.
- Bereken de modus en de mediaan van de cijfers.

- V3** De conciërge van een school heeft gedurende het eerste trimester van het schooljaar elke week bijgehouden hoeveel leerlingen van klas 3B er te laat kwamen. De resultaten zie je in het staafdiagram.
- Maak een frequentietabel van de aantallen telaarcomers.
 - Geef een mogelijke verklaring waarom er in week 43 geen telaarcomers waren.
 - In hoeveel weken waren er vier telaarcomers?
 - Welk aantal telaarcomers per week is de modus?
 - Bereken over de veertien lesweken het gemiddelde aantal telaarcomers per week.



- V4** Eieren worden ingedeeld in gewichtsklassen. In klasse 7 komen eieren vanaf 38 tot 43 gram, klasse 6 loopt vanaf 43 tot 48 gram, en dit gaat zo door tot klasse 1.
- Hoeveel weegt het lichtste ei dat nog in klasse 3 komt?
 - En het zwaarste ei dat nog in klasse 3 komt?
 - Hiernaast staan de gewichten van vijftig eieren die een pluimveehouder 's morgens heeft geraapt. Maak hierbij een frequentietabel waarbij je de eieren in de 7 klassen indeelt.
 - Hoeveel eieren komen in klasse 1?

41,2	42,8	43,7	45,2	45,2
46,8	47,9	48,4	49,1	49,2
49,8	51,3	52,7	52,8	53,1
53,4	53,9	54,2	54,3	54,8
55,6	55,7	56,3	57,1	57,2
57,6	58,2	59,5	59,7	59,8
60,3	60,9	61,2	61,4	62,0
62,1	62,2	62,7	62,8	64,0
64,1	64,3	64,7	65,2	65,2
67,9	68,2	68,7	69,0	70,2

Aanpak

Hoe bereken je het gemiddelde bij een indeling in klassen?

- Bereken van elke klasse het klassenmidden.
- Vermenigvuldig ieder klassenmidden met de bijbehorende frequentie en tel de uitkomsten op.
- Deel het totaal van de uitkomsten door het totaal van de frequenties.

Voorbeeld

Bereken het gemiddelde bij de indeling in klassen.

lengte in cm	frequentie
vanaf 160 tot 170	3
vanaf 170 tot 180	9
vanaf 180 tot 190	7
vanaf 190 tot 200	5

Oplossing

- De klassenmiddens zijn 165, 175, 185 en 195 cm.
- $165 \times 3 + 175 \times 9 + 185 \times 7 + 195 \times 5 = 4340$ cm.
- Het totaal van de frequenties is $3 + 9 + 7 + 5 = 24$.
Het gemiddelde is $4340 \text{ cm} : 24$ is ongeveer 181 cm.

- V5** Bereken bij de indeling in klassen van opdracht V4 het gemiddelde gewicht van de vijftig eieren.

Je leert • hoe je absolute frequenties en relatieve frequenties berekent

Leerroutes • ondersteunend: 1–2–03–4–5–6–7
• doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7
• uitdagend: 1–2–5–6–7–U1–U2

Bij vliegtuigen is sprake van een ongeval als er tijdens de vlucht iets gebeurt waardoor het vliegtuig ernstige schade oploopt of waarbij personen gewond raken.

In de periode 2000-2016 zijn er ruim 3000 ongevallen met vliegtuigen geweest. Lars vindt dat veel, maar Minouche vindt dat het aantal ongevallen enorm meevalt.

- Waarom hebben beiden gelijk?



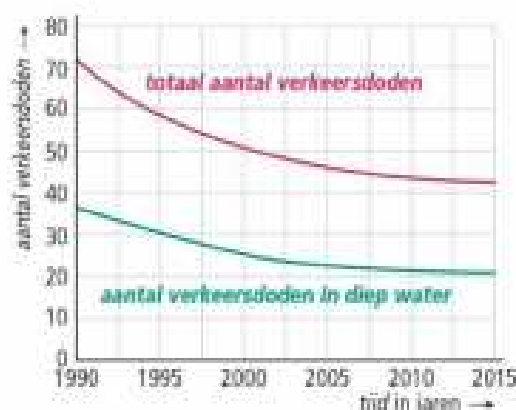
- 1 In het dubbele steelbladdiagram zijn de resultaten van klas 3A en klas 3B voor een gemeenschappelijk proefwerk verwerkt.

- Het laagste cijfer in klas 3A is een 4,6. Welk cijfer is het hoogste cijfer in klas 3B?
- Hoeveel voldoende (5,5 of hoger) zijn er in klas 3A behaald?
- En hoeveel voldoende zijn er in klas 3B behaald?
- Hoe groot is het percentage voldoende in klas 3A?
- En hoe groot is dat in klas 3B?
- Welke klas heeft volgens jou het proefwerk het best gemaakt? Licht je antwoord toe.

klas 3A		klas 3B
7 7 6	4	1 1 2
6 5 5 3	5	0 0 0 1 3 4
8 8 3 3 0 0	6	1 3 3 3 3 7 9
8 4 3 3 2	7	0 2 2 4 6 6
7 2 1 1 0	8	1 1 1 4 7 9
0	9	2 4

- 2 Het lijndiagram toont het aantal verkeersdoden in auto's die in diep water geraakten in de periode 1990-2015.

- Bereken voor de jaren 1990, 1995, 2000, 2005, 2010 en 2015 met behulp van het lijndiagram zo goed mogelijk welk percentage van het totaal aantal verkeersdoden in diep water gebeurde. Rond af op hele percentages.
- Teken een lijndiagram bij de percentages die je bij opdracht a vond.
- Geef commentaar op de uitspraak: 'Onder het totaal aantal verkeersdoden zaten naar verhouding steeds minder verkeersdoden in diep water.'



Theorie

Frequenties geven aan hoe vaak iets gebeurt of voorkomt.
 Frequenties kunnen absoluut of relatief zijn.
Absolute frequenties zijn de werkelijke aantallen.
Relatieve frequenties zijn verhoudingsgetallen.
 Voorbeelden van relatieve frequenties zijn procenten.

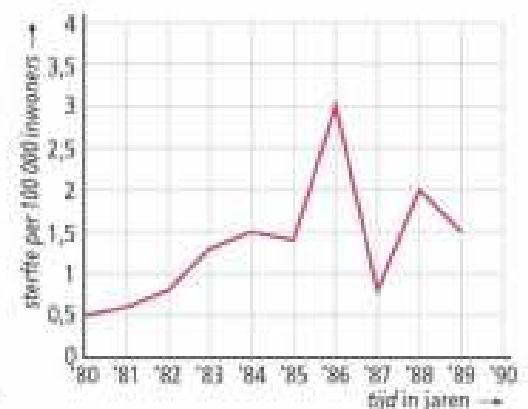
Voorbeeld:

	<i>absoluut</i>	<i>relatief</i>
<i>jongens</i>	18	60%
<i>meisjes</i>	12	40%
<i>totaal</i>	30	100%

Ondersteunende route → maak opdracht 03

- 3**
- Van de 80 cd's van Rik zijn er 18 met klassieke muziek. Geef de absolute frequentie en de relatieve frequentie van de klassieke cd's.
 - Van de 72 cd's van Marie is 12,5% met hiphopmuziek. Geef de absolute frequentie en de relatieve frequentie van de hiphop cd's.
- 4**
- In de tabel staat de verdeling van de leerlingen van twee middelbare scholen over de diverse afdelingen.
- Welke getallen in de tabel geven absolute frequenties weer?
 - En welke getallen geven relatieve frequenties weer?
 - Bereken voor beide scholen de absolute frequenties van de aantallen leerlingen van de diverse afdelingen.
 - In de bovenbouw havo is de relatieve frequentie van de leerlingen van school A hoger dan die van school B. Geldt dat ook voor de absolute frequentie?
 - Geef commentaar op de uitspraak:
 'Als de relatieve frequenties toenemen, dan nemen ook de absolute frequenties toe.'
- 5**
- Het lijndiagram heeft betrekking op de sterfte aan griep in Nederland in de vorige eeuw.
- Stellen de getallen bij de verticale as absolute frequenties of relatieve frequenties voor?
 - In 1980 had Nederland 14,1 miljoen inwoners. Bereken hoeveel Nederlanders in dat jaar aan griep gestorven zijn.
 - Hoeveel procent van de Nederlandse bevolking is in 1986 aan griep gestorven?
 - Geef commentaar op de uitspraak:
 'In Nederland was de sterfte aan griep in 1990 drie keer zo hoog als in 1980.'

	<i>school A</i>	<i>school B</i>
<i>onderbouw</i>	40%	47%
<i>bovenbouw vmbo</i>	18%	14%
<i>bovenbouw havo</i>	22%	20%
<i>bovenbouw vwo</i>	20%	19%
<i>totaal</i>	1565	1731

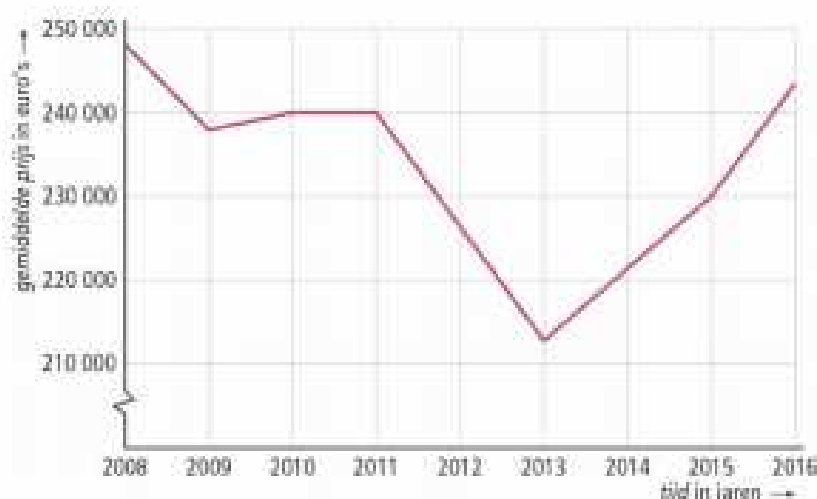


- 6 In de tabel kun je aflezen hoe groot het aantal mobiele telefoonaansluitingen in Nederland was in de jaren 2007 tot en met 2011. Het aantal aansluitingen in het jaar 2007 is op 100% gesteld.

<i>tijd in jaren</i>	2007	2008	2009	2010	2011
<i>aantal aansluitingen</i> $\times$ 1 miljoen	18,6	19,8	19,4	19,0	17,9
<i>percentage ten opzichte van 2007</i>	100	...	...	...	...

- a Laat met een berekening zien dat bij het jaar 2008 het percentage 106,5 hoort.
b Bereken de andere percentages en vul de tabel verder in.

De percentages vergeleken met een basisjaar worden indexcijfers genoemd. Je stelt het basisjaar op 100 en berekent voor de andere jaren het percentage ten opzichte van het basisjaar. In opdracht 6 is het jaar 2007 als basisjaar gekozen. In het jaar 2008 steeg het percentage met 6,5%. Het indexcijfer bij het jaar 2008 is 106,5.



- 7 In de grafiek zie je de ontwikkeling van de gemiddelde prijs van een huis. In 2011 was de gemiddelde prijs van een huis 240 000 euro.
- a Hoeveel procent is de gemiddelde prijs van een huis in het jaar daarna gedaald?
- b Neem 2011 als basisjaar en bereken de indexcijfers die horen bij de jaren 2008, 2010, 2012, 2014 en 2016.

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

- 03** Bij Albert Heijn kon je 160 wonderlijke wereldplaatjes sparen. Roan had 68 wonderlijke wereldplaatjes gespaard.
- Is 68 de absolute frequentie of de relatieve frequentie?
 - Bereken met de verhoudingstabel hoeveel procent van de wonderlijke wereldplaatjes Roan had gespaard.

<i>aantal wonderlijke wereldplaatjes</i>	160	1	68
<i>percentage</i>	100	...	...

- Geef de relatieve frequentie van de wonderlijke wereldplaatjes van Roan.
- Tirza spaarde 32,5% van de wonderlijke wereldplaatjes. Bereken hoeveel wonderlijke wereldplaatjes Tirza had.

<i>aantal wonderlijke wereldplaatjes</i>	160	...	...
<i>percentage</i>	100	1	32,5

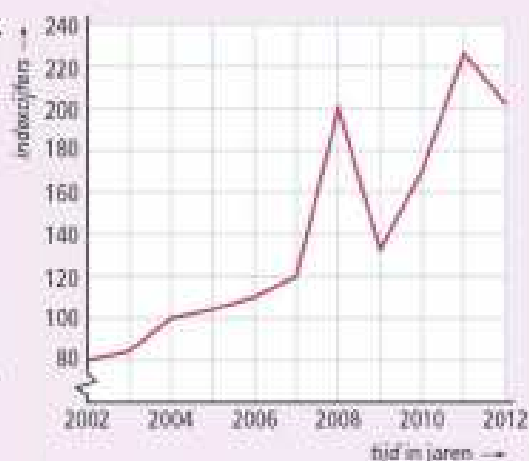
- Geef de absolute frequentie en de relatieve frequentie van de wonderlijke wereldplaatjes van Tirza.

Uitdagende opdrachten

- U1** Een groenteboer verkoopt vier soorten appels. In de tabel staan de percentages van de totale verkoop van de vier soorten in week 31 en in week 32. Voor welk soort appel is de toename van de verkoop in absolute getallen het grootst in deze periode?

	<i>week 31</i>	<i>week 32</i>
<i>Elstar</i>	40%	41%
<i>Jonagold</i>	23%	25%
<i>Golden Delicious</i>	25%	21%
<i>Granny Smith</i>	12%	13%
<i>totaal</i>	270 kg	350 kg

- U2** In de grafiek zie je de indexcijfers van de voedselprijzen.
- Welk jaar is als basisjaar gekozen? Verklaar je antwoord.
 - Bij 2002 hoort het indexcijfer 80 en bij 2012 hoort het indexcijfer 202. Leg uit wat deze indexcijfers betekenen.
 - In welke jaren zijn de voedselprijzen vergeleken met het jaar daarvoor gedaald?
 - Volgens Rob zijn de voedselprijzen van 2010 naar 2011 met 56 procent gestegen. Volgens Carel met 33 procent. Wie heeft gelijk? Waarom?



Je leert • hoe je bij een indeling in klassen de intervalnotatie gebruikt

Leerroutes • ondersteunend: 8—09—9—10—11—13
 • doorlopend: 8—9—10—11—12—13
 • uitdagend: 8—9—10—11—13—U3

Dolf helpt bij het op grootte sorteren van spruitjes. Hij rolt ze over een rooster waarin gaten zitten met een diameter van 15 mm. De kleinste vallen door die gaten in kistje 1. De overgebleven spruitjes rollen verder over roosters met gaten van 24 mm en 30 mm. Daardoor vallen ze in de kistjes 2, 3 en 4.

- Waarom sorteren ze spruitjes?
- Zullen in ieder kistje ongeveer evenveel spruitjes vallen? Licht je antwoord toe.



8 In een pretpark is op een dag van alle kinderen de lengte gemeten. Van deze lengten is een indeling in klassen gemaakt.

- Mark-Matthijs is 134,4 cm lang. In welke klasse komt zijn lengte?
- En hoe zit dat met Mieke van 104,6 cm?
- Welke lengte heeft het kleinste kind dat nog tot de eerste klasse kan behoren?
- En welke lengte heeft het grootste kind dat nog tot de eerste klasse kan behoren?
- Geef het klassenmidden van de eerste klasse.
- Geef de modale klasse van de lengte van de kinderen.
- Laat met een berekening zien dat de mediaan in de klasse vanaf 125 tot 135 cm ligt.
- Bij een attractie staat dat die alleen toegankelijk is voor kinderen met een lengte vanaf 105 tot 135 cm. Hoeveel kinderen mogen deze dag van die attractie gebruik maken?

<i>lengte in cm</i>	<i>aantal kinderen</i>
vanaf 85 tot 95	12
vanaf 95 tot 105	34
vanaf 105 tot 115	64
vanaf 115 tot 125	77
vanaf 125 tot 135	56
vanaf 135 tot 145	42
vanaf 145 tot 155	55
vanaf 155	35

Theorie

De klasse vanaf 65 tot 75 kun je als een **interval** op een getallenlijn aangeven. Een dicht rondje betekent dat de 65 er bij hoort, een open rondje dat de 75 er niet bij hoort. Met de **intervalnotatie** kun je dit noteren als $[65, 75)$. Een rechte haak betekent dat de 65 er bij hoort, een puntige haak dat de 75 er niet bij hoort.

De getallen 65 en 75 worden de **klassengrenzen** genoemd.

De **klassenbreedte** vind je door het verschil van de klassengrenzen te berekenen. Hier is dat $75 - 65 = 10$.

Voorbeeld
 $[65, 75)$

Ondersteunende route → maak opdracht 09

- 9 In de zomervakantie heeft Ryan gedurende zes weken de dagelijkse hoeveelheid regen in millimeters genoteerd.
- Maak een frequentietabel waarbij je de waarnemingen in even brede klassen indeelt. Neem als eerste klasse het interval $[0, 5)$.
 - Hoeveel millimeter is de klassenbreedte?
 - Schrijf de klassengrenzen van de vierde klasse op.
 - Bereken met behulp van de klassenmiddens de gemiddelde regenval per dag.
 - Reken uit hoeveel procent het antwoord bij opdracht d afwijkt van het werkelijke gemiddelde.
 - Noteer de modale klasse.
 - In welke klasse ligt de mediaan? Geef je antwoord in de intervalnotatie.

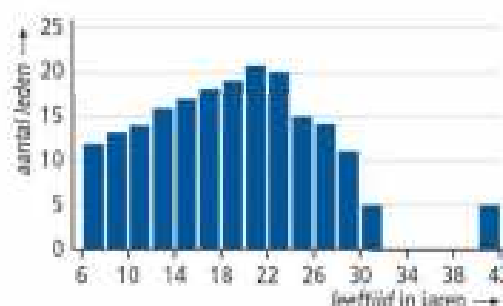
0	0	0	0	0	0	0
0	2	3	6	7	11	11
12	14	17	18	18	19	21
23	23	23	24	24	26	27
28	28	28	29	31	32	34
34	35	41	42	43	43	45

- 10 Bij de klassengrenzen en het klassenmidden is de betekenis van de waarnemingen belangrijk.
- Een gemeente deelt de inwoners in leeftijdsklassen in. Welke leeftijden zitten in de klasse $[40, 45)$? En welke leeftijd is het klassenmidden van deze klasse?
 - Op school gaan alle derdeklassers naar de schooldokter. Daar wordt onder andere het gewicht in kg genoteerd. Welke gewichten komen in de klasse $[40, 45)$ terecht? En welk gewicht is het klassenmidden van deze klasse?
 - De administratie van een bioscoop telt van een voorstelling het aantal verkochte kaartjes. Welke aantallen verkochte kaartjes zitten in de klasse $[40, 45)$? En welk aantal verkochte kaartjes is het klassenmidden van deze klasse?

- 11** De secretaris van een sportvereniging heeft een leeftijdsverdeling van de 200 leden gemaakt.
- Welke klasse is de modale klasse?
 - Waarom vullen leerlingen van 10 tot en met 13 jaar in de klasse $[10, 14)$?
 - Geef de intervalnotatie van de laatste klasse.
 - Leg uit dat de klassenbreedte 4 jaar is.
 - Leg uit dat van de klasse 10 tot en met 13 jaar het klassenmidden 12 jaar is.
 - Bereken met behulp van de klassenmiddens de gemiddelde leeftijd van de leden van de sportvereniging.
 - Laat met een berekening zien dat de mediaan in de klasse 18 tot en met 21 jaar ligt.

leeftijd in jaren	aantal leden
6 tot en met 9	25
10 tot en met 13	30
14 tot en met 17	35
18 tot en met 21	40
22 tot en met 25	35
26 tot en met 29	25
30 tot en met 33	5
34 tot en met 37	0
38 tot en met 41	5

- 12** De leeftijden van de leden van de sportvereniging zijn in een staafdiagram weergegeven.
- Welke klassenbreedte is hierbij gekozen?
 - Geef de klassengrenzen en het klassenmidden van de eerste klasse en de laatste klasse.
 - Hoeveel pupillen (tot en met 15 jaar), hoeveel junioren (16 tot en met 25 jaar) en hoeveel senioren (vanaf 26 jaar) zijn er lid van de sportvereniging?
 - Geef de tabel van opdracht 11 of het staafdiagram de beste informatie over de leeftijd van de leden? Waarom?



- 13** Van 200 peren is het gewicht in hele grammen gewogen. De gewichten zijn ingedeeld in klassen.

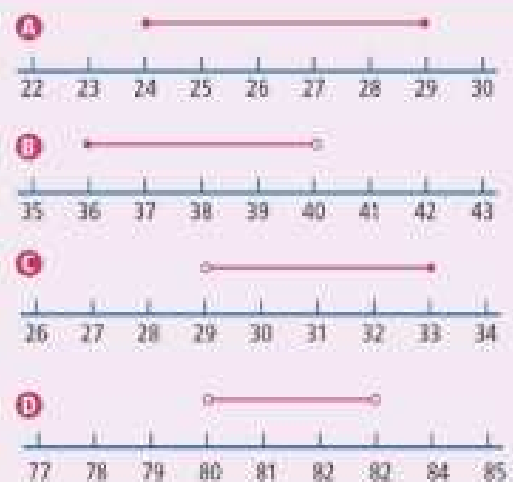
gewicht in grammen	$[170, 199]$	$[200, 219]$	$[220, 239]$	$[240, 259]$	$[260, 289]$
frequentie	14	36	60	48	42

- Welke bijzonderheden vallen je op als je de indeling in klassen $[170, 199]$ en $[200, 219]$ bekijkt?
- Geef van de klasse $[200, 219]$ de klassengrenzen en het klassenmidden.
- Bereken met behulp van de klassenmiddens het gemiddelde gewicht van de peren.
- Waar moet de verdeling binnen de klassen aan voldoen om het antwoord van opdracht c te kunnen gebruiken als een goede schatting?

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

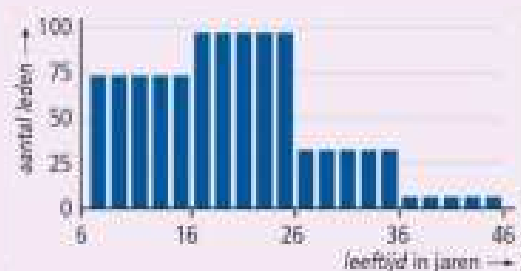
- 09 a Waarom hoort de 58 niet bij het interval $(58, 66]$?
En waarom hoort de 66 er wel bij?
- b Geef van de intervallen $[41, 47]$ en $(12, 19)$ van elk van de klassengrenzen aan of ze er bij horen.
- c Hiernaast staan vier intervallen op getallenlijnen aangegeven.
Hoor op getallenlijn A de 24 er bij? En de 29?
- d Noteer het interval dat op getallenlijn A aangegeven is met de intervalnotatie.
- e Noteer ook de andere intervallen die op de getallenlijnen aangegeven zijn met de intervalnotatie.



Uitdagende opdrachten



- U3 In de drie staafdiagrammen zijn de leeftijden van de leden van een sportvereniging weergegeven.
- a Welke klassenbreedte vind je de beste? Licht je antwoord toe.
- b Hoeveel pupillen (tot en met 15 jaar), hoeveel junioren (16 tot en met 25 jaar) en hoeveel senioren (vanaf 26 jaar) zijn er lid van de sportvereniging?
- c Rodrigo heeft het staafdiagram hiernaast getekend. Welke fout heeft Rodrigo gemaakt?
- d Hoeveel leden van 8 jaar en hoeveel leden van 9 jaar zal de sportvereniging waarschijnlijk hebben? Licht je antwoord toe.

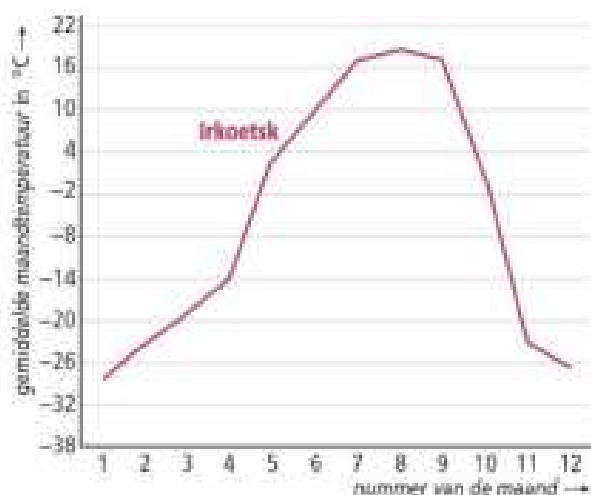
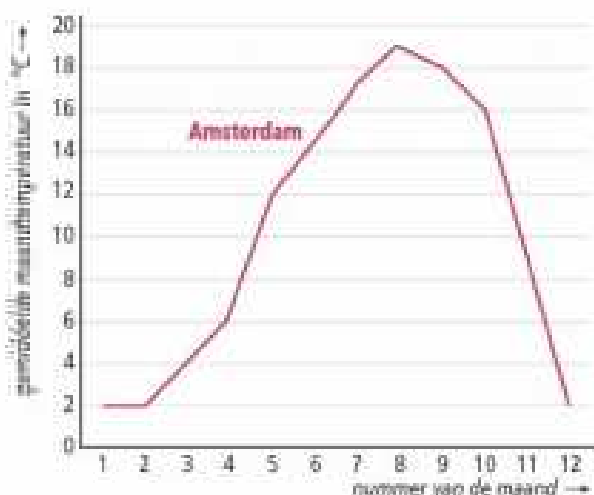


Je leert

- hoe je de gemiddelde afwijking van het gemiddelde berekent
- hoe je de kwartielen, de kwartielafstand en de spreidingsbreedte berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 14–15–16–017–18–019–20
- doorlopend: 14–15–16–17–18–19–20
- uitdagend: 14–16–17–18–19–U4–U5



In een tijdschrift stonden twee grafieken. Op het eerste gezicht lijkt het temperatuurverloop in Amsterdam erg op dat in Irkoetsk in Siberië.

- Is dat bij nader inzien ook echt zo?

- 14 In de tabel staan de gemiddelde maandtemperaturen in °C van de steden Brest in Frankrijk en Pueblo in de Verenigde Staten.

nummer van de maand	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Brest	6	6	7	10	12	15	17	16	15	12	10	6
Pueblo	0	1	5	10	15	20	24	23	18	11	5	0

- Laat met een berekening zien dat het jaargemiddelde in de steden Brest en Pueblo gelijk is.
- Toch is er een duidelijk klimaatverschil tussen de steden. Leg uit wat dat verschil is.

- 15 Op een school is de gemiddelde leeftijd van de docenten 43,1 jaar en van de brugklasleerlingen 12,4 jaar. Zullen de leeftijden dichter rondom de gemiddelde leeftijd liggen bij de brugklasleerlingen of bij docenten? Waarom?

Theorie

In de statistiek spreek je van een kleine spreiding als de waarnemingen dicht bij het gemiddelde liggen. Een maat voor de spreiding is de **gemiddelde afwijking van het gemiddelde**. Om deze maat voor de spreiding te vinden, bereken je eerst hoeveel elke waarneming van het gemiddelde afwijkt. Van die afwijkingen bereken je daarna het gemiddelde.

Voorbeeld

Bereken de gemiddelde afwijking van het gemiddelde van de getallen 3, 6, 7, 9 en 10.

Oplossing

Het gemiddelde is $35 : 5 = 7$.

De afwijkingen van het gemiddelde zijn 4, 1, 0, 2 en 3.

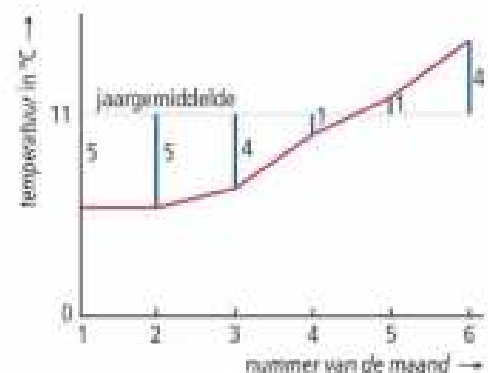
De gemiddelde afwijking van het gemiddelde is $10 : 5 = 2$.

- 16** In een deel van het lijndiagram bij de maandtemperaturen van Brest uit opdracht 14 is voor de eerste zes maanden de afwijking in °C van het jaargemiddelde aangegeven.

- a** Bereken de twaalf afwijkingen van het jaargemiddelde en zet die in een tabel.

<i>nummer van de maand</i>	1	2	3	4	...	11	12
<i>afwijking in °C</i>	5	5	...	...	...	...	...

- b** Bereken het gemiddelde van deze afwijkingen.
c Ga met een berekening na dat de gemiddelde afwijking van het jaargemiddelde in Brest kleiner is dan de gemiddelde afwijking van het jaargemiddelde in Pueblo.



Ondersteunende route → maak opdracht 017

- 17** In Nijmegen is een week lang elke middag om twaalf uur de temperatuur genoteerd. De genoteerde middagtemperaturen waren 18 °C, 20 °C, 24 °C, 27 °C, 25 °C, 23 °C en 17 °C.

- a** Bereken de gemiddelde middagtemperatuur.
b Bereken de gemiddelde afwijking van de gemiddelde middagtemperatuur.

- 18** Aan een hinderniswedstrijd doen twintig deelnemers mee. De tijden in seconden staan hieronder.

25, 30, 31, 34, 35, 37, 37, 38, 40, 40,

41, 41, 43, 43, 44, 45, 45, 45, 46, 46

- a** Hoeveel seconden is de mediaan?
b De leraar verdeelt de tijden van de deelnemers in tweeën. Geef de mediaan van de langzaamste helft van de tijden.
c Geef ook de mediaan van de snelste helft van de tijden.
d Hoeveel seconden is het verschil tussen de langzaamste tijd en de snelste tijd?

Theorie

De mediaan van de eerste helft van een rij van klein naar groot gerangschikte waarnemingen heet het **eerste kwartiel** (Q_1). Die van de tweede helft heet het **derde kwartiel** (Q_3). De mediaan en de kwartielen verdelen een rij waarnemingen in vier groepen.

Het verschil tussen het eerste kwartiel en het derde kwartiel is de **kwartielaafstand**. Het verschil tussen de grootste waarneming en de kleinste waarneming is de **spreidingsbreedte**. De kwartielaafstand en de spreidingsbreedte zijn ook maten voor de spreiding.

Voorbeeld

Bereken de kwartielaafstand en de spreidingsbreedte van de volgende rij met 16 waarnemingen.

1, 2, 2, 2, 4, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9

Oplossing

De eerste helft van de waarnemingen zijn 1, 2, 2, 2, 4, 6, 6, 6.

Het eerste kwartiel is $(2 + 4) : 2 = 3$.

De tweede helft van de waarnemingen zijn 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9.

Het derde kwartiel is $(8 + 8) : 2 = 8$.

De kwartielaafstand is $Q_3 - Q_1 = 8 - 3 = 5$.

De spreidingsbreedte is het grootste getal min het kleinste getal en dat is $9 - 1 = 8$.

Ondersteunende route → maak opdracht D19

- 19** Bereken van de rij waarnemingen het eerste kwartiel, het derde kwartiel, de kwartielaafstand en de spreidingsbreedte.
14, 14, 15, 15, 16, 16, 16, 17, 18, 19, 20, 20, 20,
22, 22, 22, 25, 25, 25, 26, 30, 32, 34, 34, 35, 40
- 20** Gegeven zijn drie rijen waarnemingen.
- A 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70
 - B 0, 1, 2, 3, 67, 68, 69, 70
 - C 0, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 70
- a Bereken voor elke rij de kwartielaafstand.
 - b Bij welke rij is de gemiddelde afwijking van het gemiddelde het kleinst? Verklaar je antwoord.
 - c Leg uit dat de spreidingsbreedte om deze drie rijen te vergelijken geen geschikte maat voor de spreiding is.

Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5

Ondersteunende opdrachten

- 017** Tamara heeft een week lang elke dag bijgehouden hoelang ze met haar hond gelopen heeft. Met haar hond heeft ze toen 15, 23, 31, 37, 19, 44 en 27 minuten gelopen.
- Ga met een berekening na dat ze gemiddeld 28 minuten per dag met haar hond gelopen heeft.
 - De afwijking van het gemiddelde op de eerste dag was $28 - 15 = 13$ minuten.
Bereken ook de afwijkingen op de andere dagen.
 - Bereken de gemiddelde afwijking van het gemiddelde.
- 019** Gegeven is de rij waarnemingen:
32, 36, 36, 38, 39, 41, 41, 41, 46, 48, 49, 50, 52,
52, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 63, 65, 66, 68, 75, 80
- Waarom zie je direct dat 52 de mediaan is?
 - Het eerste kwartiel is de mediaan van de eerste helft van de rij waarnemingen.
Schrijf het eerste kwartiel op.
 - Hoe groot is het derde kwartiel?
 - Gebruik het eerste kwartiel en het derde kwartiel om de kwartielfstand te berekenen.
 - Bereken de spreidingsbreedte.
 - Bereken van de volgende rij waarnemingen de kwartielfstand en de spreidingsbreedte.
17, 17, 18, 18, 19, 19, 20, 21, 22, 23, 23, 23,
25, 25, 28, 28, 28, 29, 33, 35, 37, 37, 38, 43

Uitdagende opdrachten

- U4** Van tien verschillende soorten pasta zijn de prijzen per 250 gram 19, 25, 38, 38, 54, 87, 93, 99, 101 en 111 cent.
- Schrijf op wat er aan de volgende maten verandert als de prijzen met 5 cent stijgen en wat er verandert als de prijzen met 5 procent stijgen.
- de spreidingsbreedte
 - de mediaan
 - het gemiddelde
 - de gemiddelde afwijking van het gemiddelde
 - de kwartielen
 - de kwartielfstand
- U5** Van zes gehele getallen is zowel het gemiddelde als de mediaan 10. De spreidingsbreedte van de zes getallen is 12 en de kwartielfstand is 4.
- Om welke zes getallen kan het gaan?



Je leert

- hoe je uit een boxplot gegevens afleest
- hoe je een boxplot tekent

Leerroutes

- ondersteunend: 21–22–023–24–25–26–027–27
- doorlopend: 21–22–23–24–25–26–27–28
- uitdagend: 21–23–24–25–26–27–28–U6

Bij een basketbaltoernooi wordt een indeling in vier lengteklassen gehanteerd: S, M, L en XL. Een groep van 20 kinderen gaat meedoen aan het basketbaltoernooi. De groep wordt in de vier lengteklassen ingedeeld. In iedere lengteklasse komen evenveel kinderen.

- Welke lengte zullen de kinderen hebben die in de lengteklasse M komen?
- En welke lengte zullen de kinderen hebben die in de lengteklasse XL komen?



- 21 Van de leerlingen van klas 3F zijn de Cito scores van de basisschool genoteerd.
- Hoe groot is de mediaan?
 - Bereken Q_1 , Q_3 en de kwartielafstand.
 - Hoeveel procent van de Cito scores ligt tussen Q_1 en Q_3 ?
 - Hoeveel procent van de Cito scores is kleiner dan Q_1 ?

532 534 534 535 535 535 536 536
537 537 537 537 537 538 538 538
538 538 538 539 539 539 540 540
541 541 541 541 542 542 544 545

Theorie

De mediaan en de kwartielen verdelen een rij waarnemingen in vier even grote groepen.

De kwartielafstand kan in beeld worden gebracht met een boxplot. De box (doos) is de getekende rechthoek in het voorbeeld.

In de box ligt ongeveer 50% van de waarnemingen.

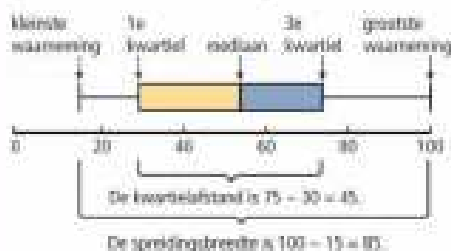
De breedte van de box is de kwartielafstand.

De breedte van de hele boxplot is de spreidingsbreedte.

Voorbeeld

Van een rij waarnemingen is $Q_1 = 30$, $Q_3 = 75$ en de mediaan is 55.

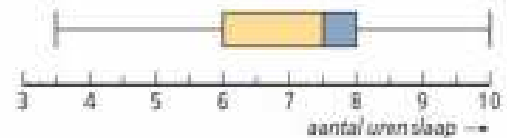
De kleinste waarneming is 15 en de grootste waarneming is 100.



- 22
- Hoeveel procent van de waarnemingen uit het voorbeeld zit tussen 30 en 55?
 - Hoeveel procent van de waarnemingen is groter dan 30?

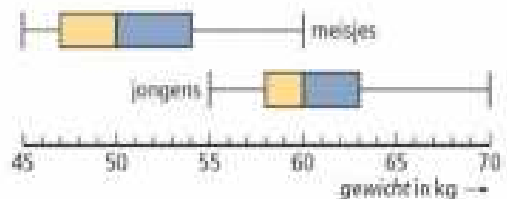
Ondersteunende route → maak opdracht 023

- 23** Onder 944 mensen is onderzoek gedaan naar de tijd die ze per etmaal slapen. De resultaten staan in de boxplot.



- Hoeveel procent van de ondervraagde mensen slaapt meer dan 6 uur per etmaal?
- Hoeveel mensen slapen tussen 6 uur en 8 uur per etmaal?
- Vergelijk het deel van de boxplot tussen 6 uur en 7,5 uur slaap en het deel tussen 7,5 uur en 8 uur slaap. Zitten in beide delen evenveel ondervraagde mensen? Zo ja, hoeveel? Zo nee, waarom niet?

- 24** Hiernaast zijn boxplots getekend van de gewichten van de meisjes en van de jongens van een turnvereniging.



- Geef de kwartielafstand van de gewichten van de meisjes.
- Doe hetzelfde voor de gewichten van de jongens.
- Ga na of de spreidingsbreedte van de gewichten bij de jongens of die bij de meisjes het grootst is.
- Is het waar dat driekwart van de meisjes minder weegt dan de lichtste jongen? Leg je antwoord uit.
- Hoeveel procent van de jongens weegt meer dan het zwaarste meisje?

- 25** Jo tekent bij de rij getallen 6, 4, 8, 6, 2, 9, 1, 8 een boxplot.



- Zet de getallen op volgorde en laat zien dat Jo de mediaan, Q_1 en Q_3 correct getekend heeft.
- Hoeveel procent van de rij getallen van Jo ligt tussen 3 en 6? En hoeveel procent ligt tussen 6 en 8?
- Hoeveel zijn die percentages volgens de boxplot van Jo?
- Waarom is het niet zinvol om bij zo'n klein aantal getallen een boxplot te tekenen?

- 26** a Geef het totaal van de frequenties van de cijfers in de tabel.

cijfer	3	4	5	6	7	8	9	10
frequentie	5	8	22	36	43	12	9	3

- Leg uit waarom de mediaan het gemiddelde is van het 69e cijfer en het 70e cijfer en bereken de mediaan.
- Bereken de beide kwartielen van de cijfers.
- Teken een getallenlijn en geef boven de getallenlijn het kleinste cijfer, het grootste cijfer, de mediaan en de kwartielen van de cijfers aan.
- Teken boven de getallenlijn de boxplot bij de cijfers.

Aanpak

Hoe teken je een boxplot?

- 1 Bereken het totaal van de frequenties.
- 2 Bereken de mediaan, Q_1 en Q_3 .
- 3 Teken een getallenlijn zó dat het kleinste getal en het grootste getal er op passen en teken boven de getallenlijn een rechthoek tussen Q_1 en Q_3 . Geef daarin de mediaan met een verticale streep aan.
- 4 Teken lijnstukken van Q_1 naar het kleinste getal en van Q_3 naar het grootste getal.

Voorbeeld

Teken een boxplot bij de frequentietabel.

<i>cijfer</i>	3	4	5	6	7	8
<i>frequentie</i>	5	14	13	9	14	7

Oplossing

- 1 Het totaal van de frequenties is $5 + 14 + 13 + 9 + 14 + 7 = 62$.

- 2 De mediaan ligt tussen het 31e cijfer en het 32e cijfer en dat is 5, Q_1 is het 16e cijfer en dat is 4 en Q_3 is het 47e cijfer en dat is 7.



Ondersteunende route → maak opdracht 027

- 27 Van een school zijn de schoenmaten van de jongens bekend.

<i>schoenmaat</i>	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
<i>frequentie</i>	12	19	31	44	58	89	116	77	65	21

Teken de bijbehorende boxplot.

- 28 In een conservenfabriek worden glazen potten gevuld met zilveruitjes en wat grotere potten met Amsterdamse uitjes. Van elke soort uitjes wordt van 250 potten de inhoud geteld.

<i>aantal uitjes per pot</i>	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162
<i>aantal potten zilveruitjes</i>	8	16	25	28	28	30	38	32	25	14	6
<i>aantal potten Amsterdamse uitjes</i>	11	22	43	48	40	32	24	20	10	0	0

- Teken in één figuur de boxplots bij de verschillende soorten uitjes.
- Bij welke soort uitje is de spreidingsbreedte het grootst?
- Bereken bij welke soort uitje de kwartielf afstand het grootst is. Hoe had je dat aan de boxplot kunnen zien?

Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

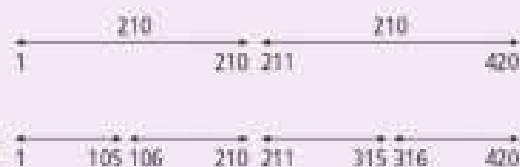
- 023** Tijdens een proef werden 560 spaarlampen getest. Na elke 100 branduren telde men hoeveel spaarlampen er al kapot waren. Bij de resultaten is een boxplot gemaakt.
- Leg uit dat 25% van de spaarlampen tussen de 2000 en 2700 branduren kapot ging.
 - Hoeveel procent van de spaarlampen ging meer dan 2000 branduren mee?
 - Bereken hoeveel van de 560 spaarlampen meer dan 2000 branduren mee ging.
 - Het deel van de boxplot tussen 400 en 2000 branduren is langer dan het deel tussen 3200 en 3900 branduren. Waarom zijn de aantallen spaarlampen in die twee delen toch even groot?



- 027** Van een school zijn de schoenmaten van de meisjes bekend.

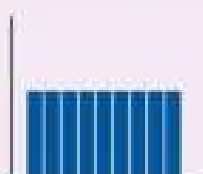
<i>schoenmaat</i>	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
<i>frequentie</i>	11	16	25	40	52	73	96	58	37	12

- Ga na dat de totale frequentie 420 is.
- Leg uit hoe het schema hiernaast kan helpen om de mediaan en de beide kwartielen te vinden.
- Zoek met behulp van het schema en de frequentietabel de mediaan en de beide kwartielen op.
- Teken de bijbehorende boxplot.

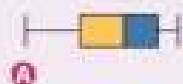


Uitdagende opdrachten

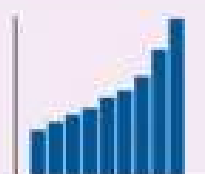
- U6** Zoek bij elk staafdiagram de bijbehorende boxplot.



1



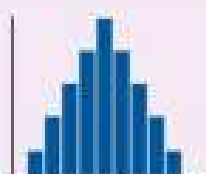
A



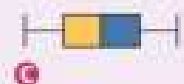
2



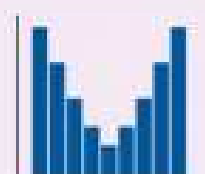
B



3



C



4



D

Je leert • hoe je omgaat met data die op verschillende manieren verwerkt zijn

Leerroutes • ondersteunend: 29—30—31—032—32
• doorlopend: 29—30—31—32—33
• uitdagend: 29—30—32—33—U7

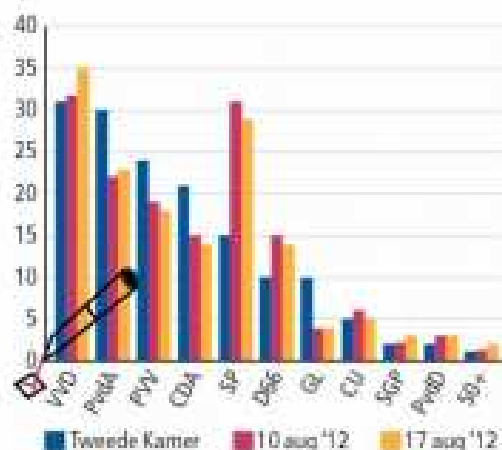


Je ziet waar een tennisser 50 keer serveerde, waar een dartspeeler 50 keer het dartbord raakte en waar bij voetbal 50 penalty's geschoten werden.

• Herken je verbanden in de drie patronen? Zo ja, welke?

29 In de aanloop naar de verkiezingen voor de Tweede Kamer zijn er wekelijks peilingen. Zo ook voor de verkiezingen op 12 september 2012. Het diagram stond op 18 augustus 2012 in een krant. Je ziet het aantal zetels dat elke partij bij de verkiezingen in 2010 haalde en bij de laatste twee peilingen.

- Welke partijen boekten volgens de peiling in de laatste week winst ten opzichte van 2010?
- Bij de verkiezingen in 2010 haalden VVD, CDA en PVV samen net een meerderheid van de 150 zetels. Zouden ze die ook volgens de laatste peiling halen?
- Geef een schatting van het percentage van de kiezers dat in 2010 op de PvdA stemde.
- Bij de verkiezingen in 2010 mochten 12,5 miljoen mensen stemmen. Daarvan ging 75,4% stemmen. Geef een schatting van het aantal mensen dat in 2010 op de SP stemde.
- Mark zag het diagram en zei: 'Ze hebben nog vier weken tot de verkiezingen. De VVD gaat zeker op 45 zetels uitkomen.' Hoe komt Mark tot deze uitspraak? Lever commentaar.



Theorie

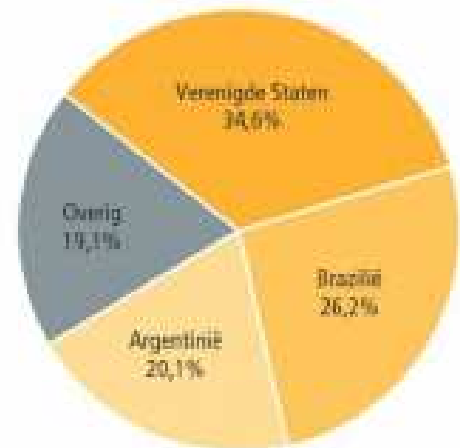
De verzamelde waarnemingen bij statistisch onderzoek heten **data**. Data kunnen op verschillende manieren verwerkt zijn, bijvoorbeeld in een staafdiagram, een boxplot, een cirkeldiagram of een indeling in klassen.

- 30** Sojabonen hebben een hoog gehalte aan eiwit. Ze worden verwerkt in ongeveer 70% van alle voedingsproducten die je in de supermarkt kunt kopen.

De wereldproductie van sojabonen was in 2016 in totaal 270 miljoen ton. In het cirkeldiagram zijn de data over de herkomst van sojabonen verwerkt.

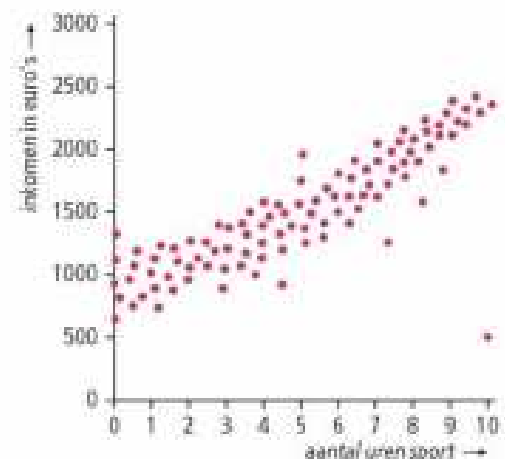
- Hoeveel miljoen ton van de sojabonen kwam uit Argentinië?
- Hoeveel procent sojabonen werd er in de Verenigde Staten meer verbouwd dan in Argentinië?
- In 2016 was de wereldproductie maïs 730 miljoen ton. Hiervan kwam 310 miljoen ton uit de Verenigde Staten, 50 miljoen ton uit Brazilië, 170 miljoen ton uit China, 63 miljoen ton uit Europa en de rest uit overige landen. Teken bij deze data een cirkeldiagram.

Sojabonen



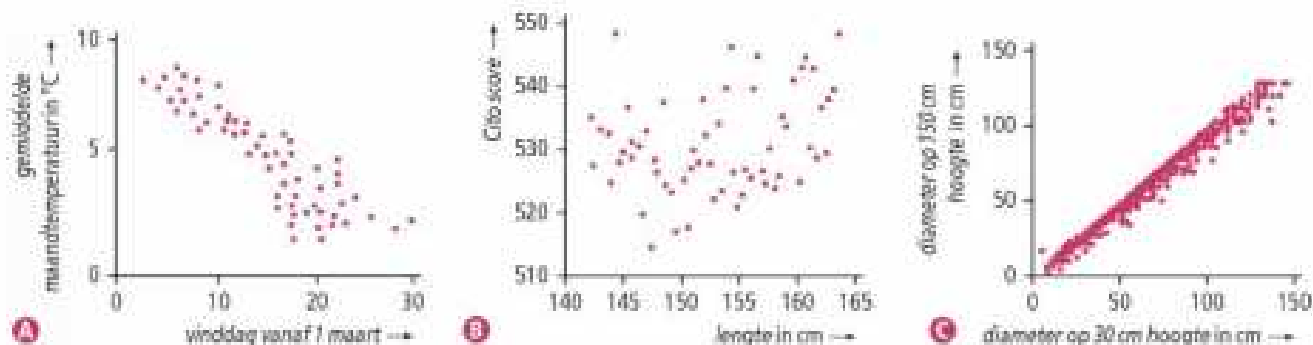
- 31** Een onderzoeksbureau heeft aan 100 willekeurige gekozen mannen gevraagd hoeveel uren ze per week aan sport doen en hoe hoog hun inkomen is. Bij elk van deze 100 data is een punt in het assenstelsel gezet.

- Is het mogelijk een grafiek te tekenen die in de buurt ligt van zoveel mogelijk van de 100 punten? Zo ja, hoe ziet deze grafiek er dan uit?
- Het bureau deed een uitspraak over het verband tussen het aantal uren sport per week en de hoogte van het inkomen.
Hoe zou die uitspraak geluid kunnen hebben?
- Geldt die uitspraak voor elke man die ondervraagd is?
- Wat kun je zeggen van het inkomen van de ondervraagde mannen die 6 uur per week aan sport doen?



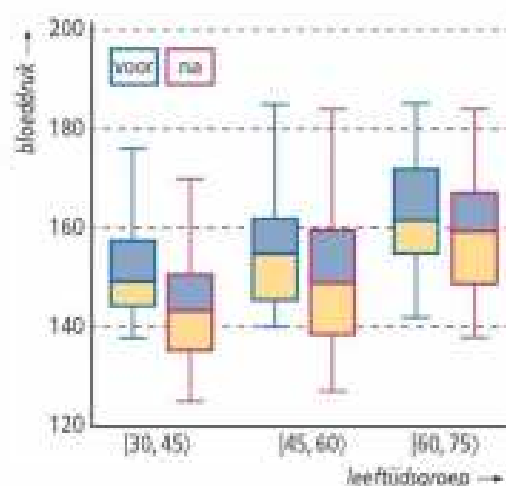
Data kun je weergeven in een puntenwolk. Zo'n puntenwolk geeft je een idee of er wel of niet een verband is tussen de gevonden data.

Ondersteunende route → maak opdracht 032



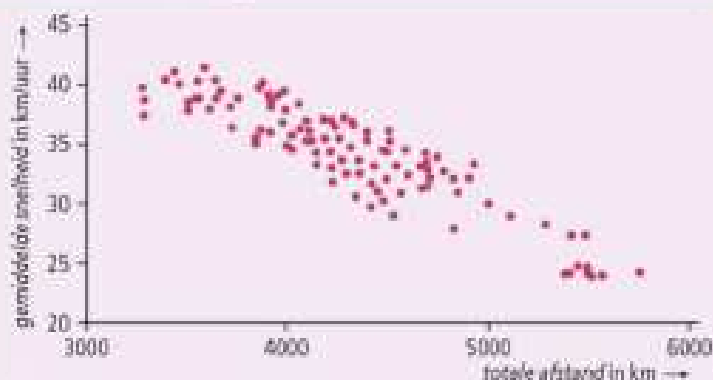
- 32** In grafiek A staat de gemiddelde maandtemperatuur in maart en de vinddag van het eerste kievietsei. Grafiek B toont de Cito-score en de lengte van de leerlingen. In grafiek C staan data van de diameter van een boom op 150 cm en op 30 cm hoogte.
- Geef van elke puntenwolk aan of er een verband bestaat tussen de twee grootheden. Zo ja, beschrijf dit verband.
 - Is de kans groot dat je met grafiek B de juiste Cito-score voorspelt als je de lengte van de leerling weet?
 - Voorspel de diameter van een boom op 150 cm hoogte als de diameter op 30 cm hoogte 100 cm is.
 - Schat de datum waarop het eerste kievietsei wordt gevonden als de gemiddelde maandtemperatuur 6 °C is.
 - Schat de gemiddelde maandtemperatuur als het eerste kievietsei op 4 maart wordt gevonden.
 - In grafiek C hoort een boom bij het punt (5, 20). Wat is er voor bijzonder aan de hand met de boom die daarbij hoort?

- 33** Bij een medicijn tegen hoge bloeddruk is nagegaan hoeveel de bloeddruk lager werd. Dit is voor drie leeftijdsgroepen gedaan en de data zijn in zes boxplots weergegeven.
- Hoe hoog is de laagste bloeddruk voor het gebruik van het medicijn? En na het gebruik?
 - In welke boxplot is de spreidingsbreedte het grootst? Bereken die spreidingsbreedte.
 - Is voor die boxplot de kwartielafstand ook het grootst? Bereken die kwartielafstand.
 - Voor welke leeftijdsgroep geeft het medicijn de minste verandering?



Uitdagende route → maak opdracht U7

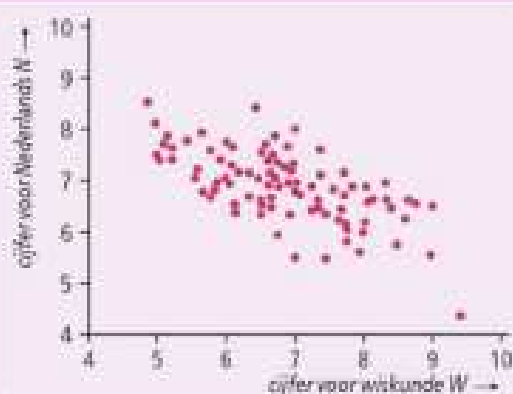
Ondersteunende opdrachten



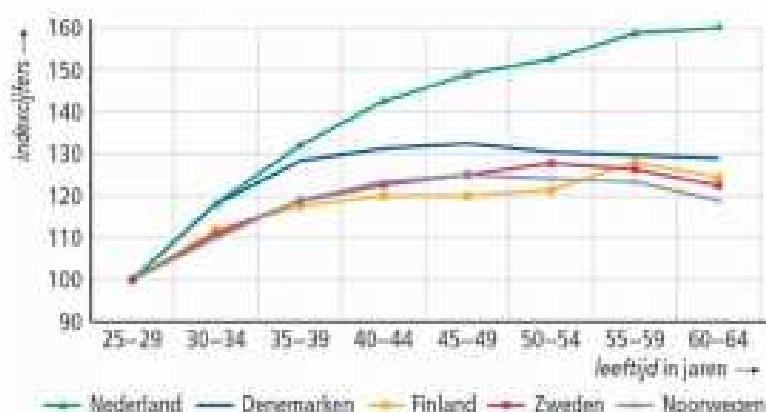
- 032** Tussen 1903 en 2017 is de Tour de France 104 keer gereden. Van die 104 keer zijn de data van de totale afstand en de gemiddelde snelheid in een puntenwolk weergegeven.
- Welke beschrijving past volgens de puntenwolk bij het verband tussen de totale afstand en de gemiddelde snelheid?
 - Als de totale afstand veel groter wordt, dan wordt de gemiddelde snelheid een klein beetje groter.
 - Als de totale afstand groter wordt, dan wordt de gemiddelde snelheid kleiner.
 - De totale afstand is ongeveer honderd keer zo groot als de gemiddelde snelheid.
 - Welke gemiddelde snelheid hoort volgens de puntenwolk bij een totale afstand van 5000 km?
 - Bij een gemiddelde snelheid van 35 km/uur hoort volgens de puntenwolk niet één waarde voor de totale afstand, maar kun je de totale afstand als een interval noteren. Tussen welke klassengrenzen ligt de totale afstand dan?

Uitdagende opdrachten

- U7** Een docent heeft op zijn school van alle leerlingen in 3 vwo de cijfers voor wiskunde en Nederlands verzameld en deze in een puntenwolk gezet. Hij heeft twee lineaire formules opgesteld die een mogelijk verband tussen de cijfers voor wiskunde en Nederlands aangeven. Alle punten van de puntenwolk liggen tussen de twee grafieken bij deze formules. De formules hebben de vorm $N = a \cdot W + b$. Hoe luiden deze twee formules?



Deze paragraaf bevat opdrachten die een indruk geven van wiskunde A/C.

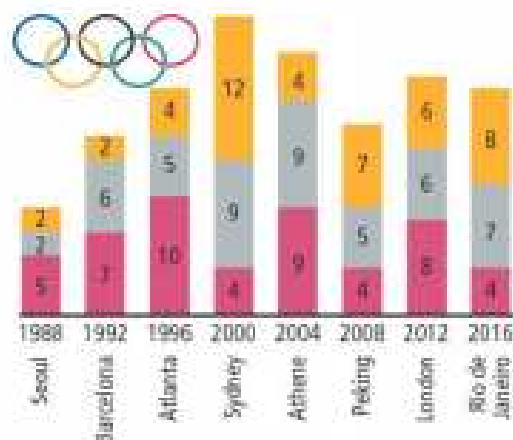


- 34** In het assenstelsel staan de indexcijfers van salarissen.
- Hoeveel procent verdient iemand uit de klasse 35-39 jaar in Nederland meer dan iemand uit de klasse 25-29 jaar?
 - In Finland is het gemiddelde salaris van mensen uit de klasse 30-34 jaar 2800 euro per maand. Hoeveel is in Finland het gemiddelde salaris van mensen uit de klasse 55-59 jaar?
 - Hoeveel procent verdient een Zweed van 40-44 jaar meer dan een Zweed van 35-39 jaar?

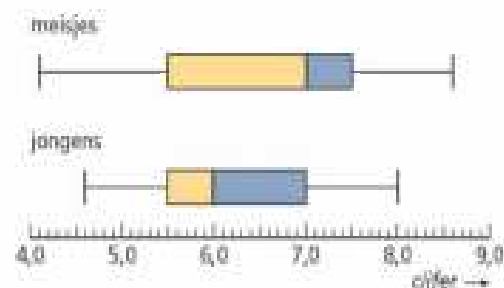
- 35** Van 36 wormen is de lengte in cm gemeten.
- Welke lengte van de wormen is de modus?
 - En welke lengte is de mediaan?
 - Bereken de spreidingsbreedte en de kwartielf afstand.
 - Maak een frequentietabel waarbij je de lengten van de wormen in even brede klassen indeelt met $[0, 5)$ als eerste klasse.
 - Welke klasse is de modale klasse?
 - Geef de klassengrenzen van de derde klasse.

4	4	5	5	5	6	7	7	8
8	9	9	10	11	12	14	14	15
16	17	19	20	20	20	20	21	22
24	24	25	25	26	27	28	28	32

- AC36**
- Bij de Olympische Spelen in 2016 behaalde Nederland 4 bronzen, 7 zilveren en 8 gouden medailles. Zijn 4, 7 en 8 absolute of relatieve frequenties?
 - Nam van 2008 naar 2012 de absolute frequentie van het aantal behaalde zilveren medailles af of toe? Hoeveel?
 - En nam de relatieve frequentie van het aantal behaalde zilveren medailles toen af of toe? Hoeveel?
 - Geef over de periode 1988-2016 het gemiddelde, de modus en de mediaan van het aantal gouden medailles.



AC37 Een groot aantal leerlingen heeft een proefwerk wiskunde gemaakt. De cijfers zijn afgerond op één decimaal. De resultaten zijn in de twee boxplots weergegeven.



- Schrijf het laagste cijfer bij de jongens op.
- Hoe groot was het percentage van de meisjes dat een cijfer hoger dan 7,5 haalde?
- Van alle leerlingen die meededen hadden 114 leerlingen een cijfer onder de 7. Onder hen waren precies evenveel jongens als meisjes.
Hoeveel leerlingen deden er in totaal mee aan het proefwerk? Leg je antwoord uit.
- Gerda beweert dat de meisjes het proefwerk beter hebben gemaakt dan de jongens.
Welk argument kan Gerda daarvoor uit de boxplots halen?
- Wessel beweert dat de jongens het proefwerk even goed hebben gemaakt als de meisjes.
Welk argument kan Wessel gebruiken voor zijn bewering?

AC38 Op een automarkt is geteld hoeveel auto's van verschillende leeftijden er verkocht werden. Het resultaat staat in de tabel.

leeftijd in jaren	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
aantal verkochte auto's	8	18	25	28	30	31	39	32	25	8	4	2

- Bereken de mediaan en de kwartielen van het aantal verkochte auto's.
- Teken de bijbehorende boxplot.
- Welke leeftijd van de verkochte auto's is de modus?
- Hoeveel procent van de verkochte auto's was jonger dan de modus?
- Maak een frequentietabel waarbij je de leeftijden in jaren in klassen indeelt. Neem als klassen $[1, 4)$, $[4, 7)$, $[7, 10)$ en $[10, 13)$.
- Breid de tabel uit met een rij waarin de verkochte auto's in percentages kunnen worden ingevuld en noteer de percentages in deze rij.

Vaardigheid

Je kunt absolute frequenties en relatieve frequenties berekenen.

Frequenties geven aan hoe vaak iets gebeurt of voorkomt. Absolute frequenties zijn de werkelijke aantallen. Relatieve frequenties zoals procenten en indexcijfers zijn verhoudingsgetallen.

Voorbeeld

	absoloot	relatief
getrouwd	11	44%
ongetrouwd	14	56%
totaal	25	100%

- S1 De tabel geeft een overzicht van de verkochte woningen de afgelopen jaren. Enkele getallen in de tabel zijn weggelaten.
- Welke van de getallen in de tabel geven absolute frequenties weer?
 - En welke getallen geven relatieve frequenties weer?
 - Bereken hoeveel procent van de verkochte woningen in 2013 zijn verkocht.
 - Bereken het aantal verkochte woningen in 2014.

tijd in jaren	aantal	percentage
2012	117 261	15,15
2013	110 044	
2014		19,84
2015		
2016	214 793	27,75
totaal	773 952	100

Vaardigheid

Je kunt bij een indeling in klassen de intervalnotatie gebruiken.

De klasse vanaf 82 tot 86 kun je als een interval op een getallenlijn aangeven. Een dicht rondje betekent dat de 82 er bij hoort, een open rondje dat de 86 er niet bij hoort. Met de intervalnotatie kun je dit noteren als $[82, 86)$. Een rechte haak betekent dat de 82 er bij hoort, een puntige haak dat de 86 er niet bij hoort.

De getallen 82 en 86 worden de klassengrenzen genoemd. De klassenbreedte vind je door het verschil van de klassengrenzen te berekenen. Hier is dat $86 - 82 = 4$.

Voorbeeld



- S2 De frequentietabel hoort bij de lengte van bananen.

lengte in cm	12 tot 15	15 tot 18	18 tot 21	21 tot 24
frequentie	52	96	148	73

- Geef de intervalnotatie van de tweede klasse.
- Schrijf de klassengrenzen van de derde klasse op.
- Hoeveel cm is de klassenbreedte?
- Schrijf de klasse vanaf 21 tot 24 cm in de intervalnotatie.

Vaardigheid

Je kunt de gemiddelde afwijking van het gemiddelde berekenen.

De gemiddelde afwijking van het gemiddelde vind je door eerst te berekenen hoeveel elke waarneming van het gemiddelde afwijkt. Van die afwijkingen bereken je daarna het gemiddelde.

De gemiddelde afwijking van het gemiddelde is een maat voor de spreiding. Je spreekt van een kleine spreiding als de waarnemingen dicht bij het gemiddelde liggen.

Voorbeeld

Bekijk de rij getallen 1, 4, 5, 6, 12 en 14.

Bereken de gemiddelde afwijking van het gemiddelde.

Oplossing

Het gemiddelde is $42 : 6 = 7$.

De afwijkingen van het gemiddelde zijn 6, 3, 2, 1, 5 en 7.

De gemiddelde afwijking van het gemiddelde is $24 : 6 = 4$.

- S3** Van een aantal kinderen is de armlengte in cm gemeten.
54, 57, 57, 63, 68, 70, 71, 73, 75, 82
Hoeveel cm is de gemiddelde afwijking van de gemiddelde armlengte?

Vaardigheid

Je kunt de kwartielen, de kwartielafstand en de spreidingsbreedte berekenen.

De mediaan van de eerste helft van een rij van klein naar groot gerangschikte waarnemingen heet het eerste kwartiel (Q_1). Die van de tweede helft heet het derde kwartiel (Q_3). De mediaan en de kwartielen verdelen een rij waarnemingen in vier groepen.

Het verschil tussen het eerste kwartiel en het derde kwartiel is de kwartielafstand. Het verschil tussen de grootste waarneming en de kleinste waarneming is de spreidingsbreedte.

Voorbeeld

Bereken de kwartielafstand en de spreidingsbreedte van de rij waarnemingen.

2, 3, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 9

Oplossing

Het eerste kwartiel is $(5 + 5) : 2 = 5$.

Het derde kwartiel is $(7 + 9) : 2 = 8$.

De kwartielafstand is

$$Q_3 - Q_1 = 8 - 5 = 3.$$

De spreidingsbreedte is het grootste getal min het kleinste getal en dat is $9 - 2 = 7$.

- S4** Van een aantal jongens is de beenlengte in cm gemeten.
64, 66, 69, 69, 72, 76, 79, 81, 82, 85, 89, 92, 96, 99
- Bereken van de beenlengten de mediaan, het eerste kwartiel en het derde kwartiel.
 - Hoeveel cm is de spreidingsbreedte?
 - En hoeveel cm is de kwartielafstand?

Vaardigheid

Je kunt uit een boxplot gegevens aflezen.

De mediaan en de kwartielen verdelen een rij waarnemingen in vier even grote groepen.

De kwartielaafstand kan in beeld worden gebracht met een boxplot. De box (doos) is de getekende rechthoek in het voorbeeld.

In de box ligt ongeveer 50% van de waarnemingen.

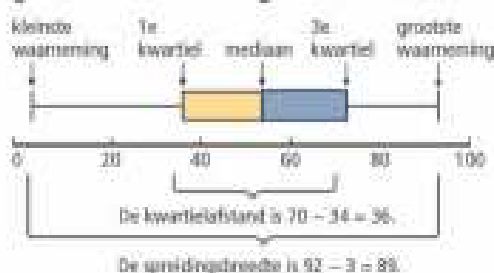
De breedte van de box is de kwartielaafstand.

De breedte van de hele boxplot is de spreidingsbreedte.

Voorbeeld

Van een rij waarnemingen is $Q_1 = 34$, $Q_3 = 70$ en de mediaan is 49.

De kleinste waarneming is 3 en de grootste waarneming is 92.



- S5** In 2016 zijn er in België 28 376 mensen voor het eerst getrouwd. Bij hun leeftijden is een boxplot gemaakt.
- Welk percentage van die mensen had een leeftijd tussen de 18 jaar en de 39 jaar?
 - Bereken hoeveel van die mensen een leeftijd hadden tussen de 26 jaar en de 31 jaar.
 - Kun je aflezen hoeveel mensen een leeftijd hadden tussen de 39 jaar en de 59 jaar? Licht je antwoord toe.



Vaardigheid

Je kunt een boxplot tekenen.

- Bereken het totaal van de frequenties.
- Bereken de mediaan, Q_1 en Q_3 .
- Teken een getallenlijn zo dat het kleinste getal en het grootste getal er op passen en teken boven de getallenlijn een rechthoek tussen Q_1 en Q_3 . Geef daarin de mediaan met een verticale streep aan.
- Teken lijnstukken van Q_1 naar het kleinste getal en van Q_3 naar het grootste getal.

Voorbeeld

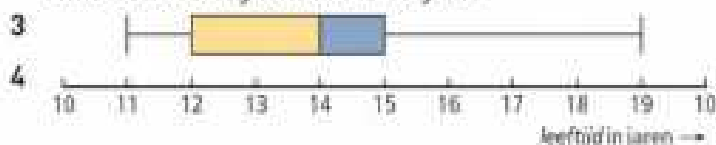
Teken een boxplot bij de frequentietabel.

leeftijd in jaren	11	12	14	15	17	19
frequentie	6	16	27	17	11	3

Oplossing

- Het totaal van de frequenties is $6 + 16 + 27 + 17 + 11 + 3 = 80$.

- De mediaan ligt tussen de 40e en de 41e leeftijd en dat is 14 jaar, Q_1 ligt tussen de 20e en de 21e leeftijd en dat is 12 jaar en Q_3 ligt tussen de 60e en de 61e leeftijd en dat is 15 jaar.



- S6** De leerlingen van de derde klassen is gevraagd zichzelf een cijfer te geven voor de werkhouding. De resultaten staan in de tabel.

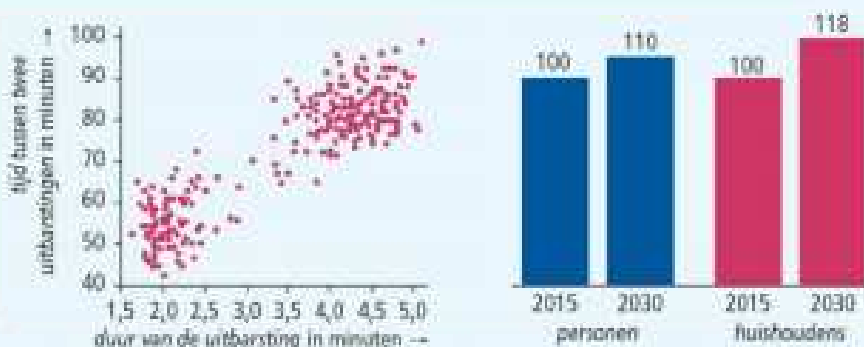
<i>cijfer</i>	3	4	5	6	7	8	9
<i>frequentie</i>	2	8	13	18	19	22	6

- Geef de modus en de mediaan van de gegeven cijfers.
- Teken een boxplot bij de gegeven cijfers.
- Leg uit of de modus, de mediaan of de boxplot het beste beeld van de werkhouding van de leerlingen geeft.

Vaardigheid

Je kunt omgaan met data die op verschillende manieren verwerkt zijn.

De verzamelde waarnemingen bij statistisch onderzoek heten data. Data kunnen op verschillende manieren verwerkt zijn, bijvoorbeeld in een staafdiagram, een boxplot, een cirkeldiagram, een indeling in klassen of een puntenwolk.



- S7** In de puntenwolk zie je van een groot aantal uitbarstingen van een geiser de data. Er is zeker sprake van een verband.
- Beschrijf dit verband.
 - Een uitbarsting van een geiser duurt 4,5 minuten. Hoeveel minuten zal er dan tussen twee uitbarstingen zitten? Schrijf je antwoord als interval.
 - In de rechter figuur zie je een prognose van het aantal personen en het aantal huishoudens in Nederland. Leg uit wat de getallen in de figuur betekenen.

- T1** In de tabel staan gegevens over het aantal auto's in Nederland gedurende de periode 2011-2017.
- Welke getallen in de tabel zijn absoluut en welke zijn relatief?
 - In welk jaar was de procentuele stijging van het aantal auto's per 1000 inwoners het grootst?
 - Bereken met behulp van de gegevens uit de tabel het aantal inwoners van Nederland in het jaar 2015.
 - Het aantal auto's in 2014 wordt op 100% gesteld. Bereken het indexcijfer voor 2011 en voor 2017.

<i>tijd in jaren</i>	<i>aantal auto's op 1 januari</i>	<i>aantal auto's per 1000 inwoners</i>
2011	7 735 547	464
2012	7 858 712	470
2013	7 915 613	472
2014	7 932 290	471
2015	7 979 083	472
2016	8 100 864	477
2017	8 222 974	481

- T2** In een onderzoek naar de watervervuiling heeft men op drie verschillende locaties A, B en C tien proefvangsten gedaan en het aantal snoekbaarzen per vangst geteld.
- A 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52, 58, 64
 B 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28
 C 10, 11, 12, 13, 14, 60, 61, 62, 63, 64
- Bereken voor elke locatie het gemiddelde aantal snoekbaarzen per vangst.
 - Zet de drie locaties op volgorde van toenemende gemiddelde afwijking van het gemiddelde. Licht je antwoord toe.
 - Bereken de spreidingsbreedte op locatie A.
 - Bereken het eerste kwartiel en het derde kwartiel op locatie A.
 - Bereken de kwartielfstand op locatie A.
 - De kwartielfstand op locatie B is 10 en op locatie C 50. Ga na of de locatie met de kleinste gemiddelde afwijking van het gemiddelde ook de kleinste kwartielfstand heeft.

- T3** In het cirkeldiagram zie je de verdeling van de bevolking van een stad naar leeftijd.
- Tot welke klasse behoort iemand van 60 jaar? Noteer je antwoord als interval.
 - Geef van deze klasse de klassengrenzen en de klassenbreedte.
 - Waarom zouden de mensen van 100 jaar en ouder niet in het cirkeldiagram zijn verwerkt?
 - Maak een frequentietabel bij deze indeling.
 - Bereken met behulp van de klassenmiddens de gemiddelde leeftijd.
 - Geeft de gemiddelde leeftijd of de modale klasse een beter beeld van de verdeling? Waarom?



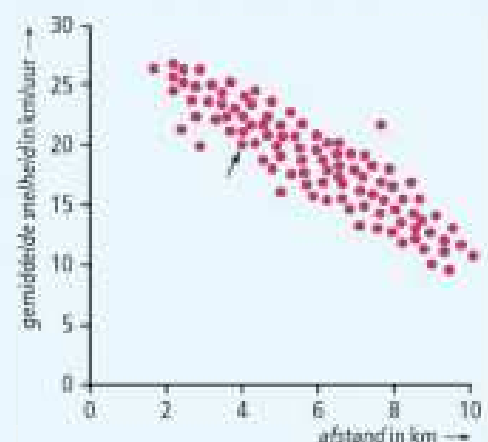
- T4** De gemeenteraad van Weidenisse heeft van alle gezinnen in de wijk Klaverdal laten onderzoeken uit hoeveel kinderen het gezin bestaat. In de frequentietabel vind je de uitkomst van dit onderzoek.

aantal kinderen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
frequentie	21	16	34	15	8	9	5	4	1	1

- Hoeveel gezinnen zijn bij dit onderzoek betrokken?
 - Hoeveel kinderen wonen er in Klaverdal?
 - Bereken het gemiddelde aantal kinderen per gezin.
 - Hoeveel procent van de gezinnen heeft meer dan het gemiddeld aantal kinderen?
 - Hoeveel procent van de kinderen woont in één van de grootste elf gezinnen?
 - Teken van deze data een boxplot.
- T5** Het CBS publiceerde een tabel over het aantal bezitters van een motorrijbewijs.
- Welke klasse is de modale klasse? Waarom?
 - In welke klassen liggen de mediaan, Q_1 en Q_3 ? Waarom?
 - Leg uit dat het klassenmidden van de eerste klasse 21 jaar is.
 - Bereken met behulp van de klassenmiddens de gemiddelde leeftijd van een bezitter van een motorrijbewijs.
 - Waarom mag je aannemen dat van de bezitters van een motorrijbewijs van $[25, 40)$ jaar ongeveer $\frac{1}{3}$ deel $[25, 30)$ jaar is?

leeftijd in jaren	aantal bezitters $\times 1000$
$[18, 25)$	68
$[25, 40)$	378
$[40, 50)$	199
$[50, 65)$	303
$[65, 99)$	106

- T6** De puntenwolk geeft van 100 hardlopers aan met welke gemiddelde snelheid ze een afstand aflegden. Erik deed 12 minuten over een loop van 4 km.
- Leg uit waarom de punt bij het pijltje bij Erik hoort.
 - Beschrijf het verband tussen de gemiddelde snelheid en de afstand die de hardlopers aflegden.
 - Schat met welke gemiddelde snelheid de hardlopers een afstand van 4 km aflegden.
 - Welke afstand legden de hardlopers af die de afstand met een gemiddelde snelheid van 13 km/uur aflegden?
 - Je kunt ook een puntenwolk maken van de afstand die de 100 hardlopers aflegden en de bijbehorende tijden. Hoe zal die puntenwolk er uit zien? Maak een schets.



Je kunt absolute frequenties en relatieve frequenties berekenen.

- E1 In de tabel staat de leeftijdsverdeling van de Nederlandse bevolking op 1-1-2016 en op 1-1-2017.

- Welke getallen in de tabel geven absolute frequenties weer?
- En welke getallen geven relatieve frequenties weer?
- Bereken voor de leeftijdsverdeling van de Nederlandse bevolking op 1-1-2016 en op 1-1-2017 de absolute frequenties van de eerste twee leeftijdscategorieën.
- In de leeftijdscategorie 0 tot en met 19 is de relatieve frequentie op 1-1-2016 hoger dan die op 1-1-2017. Geldt dat ook voor de absolute frequentie?

leeftijd	1-1-2016	1-1-2017
0 tot en met 19	24,13%	24,04%
20 tot en met 44	34,52%	34,25%
45 tot en met 64	26,17%	26,43%
65 tot en met 79	11,01%	11,07%
80 of ouder	4,17%	4,21%
<i>totaal</i> × 1000	17 011	17 082

- E2 Vul in de tabel in de laatste kolom de indexcijfers verder in. Rond af op één decimaal.

<i>tijd</i> in jaren	<i>aantal huishoudens</i> × 1 miljoen	<i>indexcijfer</i>
2012	31,3	...
2013	31,6	...
2014	33,4	100
2015	34,2	...
2016	33,9	...

Je kunt bij een indeling in klassen de intervalnotatie gebruiken.

- E3 Bij een viswedstrijd is bijgehouden hoeveel kg vis elke deelnemer heeft gevangen.

- In welke klasse zou 6 kg gevangen vis terecht komen bij een indeling in de klassen $[0, 2)$, $[2, 4)$, enzovoort?
- Maak bij de gegevens een indeling in klassen. Neem als klassen $[0, 2)$, $[2, 4)$, enzovoort.
- Hoe groot is dan de klassenbreedte?
- Bereken met behulp van de klassenmiddens het gemiddelde aantal kg gevangen vis per deelnemer.

6,5	7	12,5	8,5	6	12,4
5,1	9,3	8,7	9,9	5,6	11,1
5,5	9,2	8,4	10,3	11,6	10,9
6	4,4	12,2	10,1	10,2	1,5

Je kunt de gemiddelde afwijking van het gemiddelde berekenen.

- E4 In een bedrijf werken 26 mensen. In de tabel zie je hoeveel ze per maand verdienen. Bereken de gemiddelde afwijking van het gemiddelde maandsalaris. Rond af op tientallen euro's.

<i>maandsalaris</i> in euro's	<i>frequentie</i>
26 000	1
5 000	2
2 250	4
2 000	9
1 500	10

Je kunt de kwartielen, de kwartielafstand en de spreidingsbreedte berekenen.

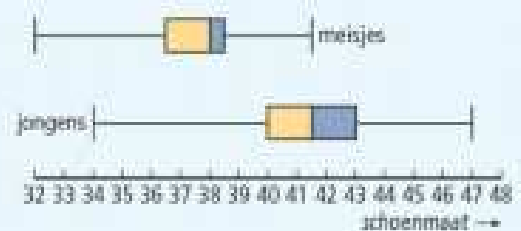
- E5**
- Bereken van de rij waarnemingen de mediaan, het eerste kwartiel en het derde kwartiel.
 - Bereken de kwartielafstand.
 - Bereken ook de spreidingsbreedte.

41	42	42	43	45	46	49	51
53	56	59	60	60	61	62	62
62	65	65	65	65	66	70	72
74	74	75	80				

- E6** Geef van de maandsalarissen uit opdracht E4 de kwartielafstand en de spreidingsbreedte.

Je kunt uit een boxplot gegevens aflezen.

- E7** Bij een onderzoek zijn van 78 jongens en 252 meisjes onder andere de schoenmaten gemeten. De resultaten zijn weergegeven in de boxplots.
- Geef de kleinste schoenmaat bij de jongens.
 - Welk percentage van de meisjes heeft een schoenmaat groter dan 38,5?
 - Hoeveel procent van de jongens heeft een schoenmaat die groter is dan de grootste schoenmaat bij de meisjes?



Je kunt een boxplot tekenen.

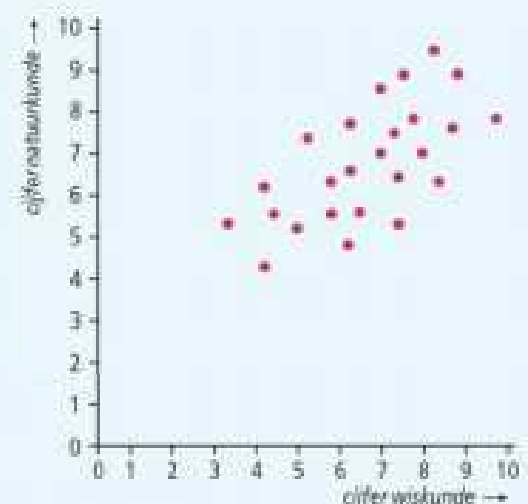
- E8** Van de jeugdafdeling van een voetbalclub staan de leeftijden in de tabel.

leeftijd in jaren	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
frequentie	13	20	32	45	57	88	110	115	95	91

Teken de bijbehorende boxplot.

Je kunt omgaan met data die op verschillende manieren verwerkt zijn.

- E9** Een leraar wil weten of er een verband bestaat tussen het cijfer voor natuurkunde en het cijfer voor wiskunde van zijn leerlingen. Hij heeft de data in een puntenwolk verwerkt.
- Van hoeveel leerlingen zijn de data verwerkt?
 - Bestaat er op grond van de puntenwolk een verband tussen de cijfers voor natuurkunde en de cijfers voor wiskunde? Licht je antwoord toe.
 - Vermoed jij dat er een verband bestaat tussen de cijfers voor geschiedenis en de cijfers voor wiskunde? Licht je antwoord toe.





Functies en algebra

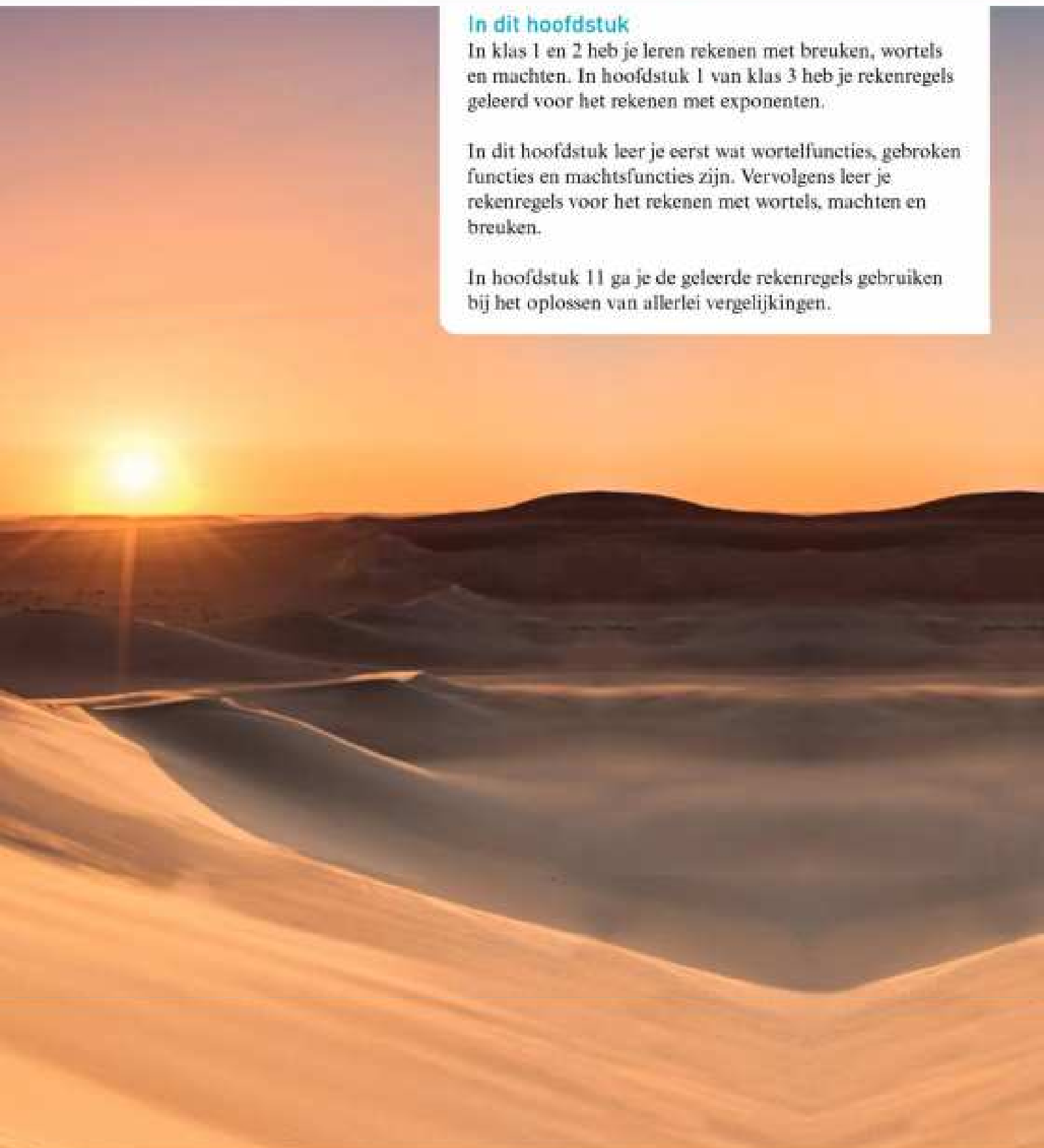
9

In dit hoofdstuk

In klas 1 en 2 heb je leren rekenen met breuken, wortels en machten. In hoofdstuk 1 van klas 3 heb je rekenregels geleerd voor het rekenen met exponenten.

In dit hoofdstuk leer je eerst wat wortelfuncties, gebroken functies en machtsfuncties zijn. Vervolgens leer je rekenregels voor het rekenen met wortels, machten en breuken.

In hoofdstuk 11 ga je de geleerde rekenregels gebruiken bij het oplossen van allerlei vergelijkingen.



Theorie

Twee variabelen x en y heten **recht evenredig** als bij een vermenigvuldiging van de waarde van x met bijvoorbeeld vijf, de waarde van y ook vijf keer zo groot wordt. De grafiek van een recht evenredig verband is een rechte lijn die door de oorsprong gaat. Een recht evenredig verband is een bijzonder lineair verband. De algemene formule bij een recht evenredig verband is $y = ax$. Dit is een lineaire formule met startgetal 0.

Voorbeeld

x	0	1	2	3	4	5
y	0	3	6	9	12	15

Voor deze tabel geldt: als x bijvoorbeeld 2 keer zo groot wordt, dan wordt y ook 2 keer zo groot. x en y zijn recht evenredig. Een formule bij de tabel is $y = 3x$. De grafiek is een rechte lijn door $(0, 0)$.

- V1 a Zoek uit in welke van de volgende tabellen x en y recht evenredig zijn.

A

x	0	2	4	6
y	0	7	14	21

C

x	5	10	15	20
y	12	22	32	42

B

x	1	2	3	4
y	4	8	12	16

D

x	5	10	20	40
y	7,5	15	30	60

- b Stel bij elke tabel een formule op.

Theorie

Bij het rekenen met exponenten kun je gebruik maken van de volgende rekenregels.

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b}$$

$$(g^a)^b = g^{a \cdot b}$$

$$\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$$

Voorbeeld

Schrijf als één macht.

$$5^3 \times 5^4 = 5^7$$

$$a^2 \times a^9 = a^{11}$$

$$(2^3)^4 = 2^{12}$$

$$(m^6)^4 = m^{24}$$

$$\frac{6^7}{6^2} = 6^5$$

$$\frac{p^8}{p^5} = p^3$$

- V2 Schrijf als één macht.

a $6^3 \times 6^5 =$

e $p^4 \times p^9 =$

b $4^3 \times 4^5 \times 4 =$

f $t^2 \times t^2 \times t^2 =$

c $(7^6)^2 =$

g $a^3 \times (a^3)^5 =$

d $\frac{5^{16}}{5^4} =$

h $\frac{(u^3)^2}{u^4} \times u^8 =$

Theorie

Wortels kun je bij elkaar **optellen** of van elkaar **afrekken** als er onder het wortelteken hetzelfde getal staat. Je kunt de wortels dan zien als gelijksoortige termen.

Wortels kun je met elkaar **vermenigvuldigen** door de getallen die onder de worteltekens staan met elkaar te vermenigvuldigen. Als je $2\sqrt{3}$ vermenigvuldigt met $4\sqrt{5}$, dan vermenigvuldig je eerst 2 met 4 en dan $\sqrt{3}$ met $\sqrt{5}$. Je krijgt dan $8\sqrt{15}$.

Voorbeeld

Schrijf zo kort mogelijk.

$$7\sqrt{6} + 9\sqrt{6} = 16\sqrt{6}$$

$$3\sqrt{2} + 9\sqrt{7} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2} + 9\sqrt{7}$$

$$7\sqrt{13} + \sqrt{11} \text{ kan niet korter}$$

$$\sqrt{7} \times \sqrt{2} = \sqrt{14}$$

$$3\sqrt{14} \times -2\sqrt{5} = -6\sqrt{70}$$

$$(4\sqrt{5})^2 = 4\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = 16 \times 5 = 80$$

V3 Schrijf zo kort mogelijk.

a $10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} =$

b $2\sqrt{5} - 7\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \sqrt{5} =$

c $6 + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 7 + 9\sqrt{5} =$

d $-3\sqrt{4} + 8\sqrt{15} + 7 - 2\sqrt{3} - \sqrt{3} =$

V4 Schrijf zo kort mogelijk.

a $\sqrt{2} \times \sqrt{3} =$

d $8\sqrt{5} \times -2\sqrt{6} \times -4 =$

b $\sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7} =$

e $(3\sqrt{14})^2 =$

c $3\sqrt{2} \times 5\sqrt{18} =$

f $(2\sqrt{38})^2 =$

V5 Bereken en vereenvoudig zo mogelijk je antwoord.

a $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$

e $\frac{14}{25} - \frac{7}{5} =$

b $\frac{3}{8} + \frac{3}{4} =$

f $\frac{18}{21} - \frac{3}{14} =$

c $\frac{6}{13} + \frac{2}{13} + \frac{5}{13} =$

g $\frac{27}{100} - \frac{3}{20} =$

d $\frac{5}{12} + \frac{7}{15} =$

h $\frac{45}{81} - \frac{3}{27} =$

V6 Bereken en vereenvoudig zo mogelijk je antwoord.

a $\frac{5}{6} \times \frac{2}{9} =$

d $\frac{9}{13} \times \frac{7}{8} =$

b $\frac{14}{15} \times \frac{3}{7} =$

e $1\frac{1}{2} \times \frac{3}{8} =$

c $\frac{12}{5} \times \frac{1}{3} =$

f $\frac{5}{13} \times 2 =$

Je leert

- wat een wortelfunctie is
- hoe je de coördinaten van een randpunt berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–3–4–5–06–7–8–9
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8–9
- uitdagend: 1–2–3–5–6–8–9–U1–U2

Hoe ver je de horizon ziet, hangt af van hoe hoog je staat. Voor het verband tussen de kijkhoogte h in meters en de afstand tot de horizon d in km geldt de formule $d = 3,6\sqrt{h}$.

- Hoe ver zie jij de horizon?



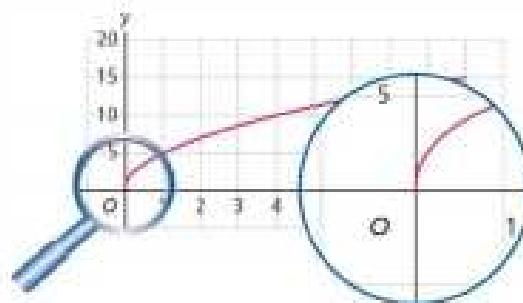
- 1 a Vul de tabel verder in en teken een grafiek bij de tabel:

oppervlakte vierkant A	0	1	4	9	16	25	36
zijde vierkant z	...	...	...	...	...	...	...

- b Leg uit dat de formule $z = \sqrt{A}$ bij de tabel hoort.
c Waarom kun je voor A alleen getallen groter dan of gelijk aan 0 invullen?

- 2 Bij de functie $f(x) = 5\sqrt{x}$ is een grafiek getekend.

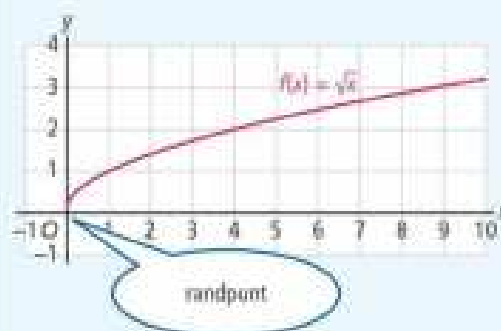
- a Links van de verticale as bestaat de grafiek niet. Leg uit waarom niet.
b Vul in: $f(0,25) = 5 \times \sqrt{0,25} = 5 \times \dots = \dots$
c De grafiek lijkt in $(0, 0)$ vrijwel verticaal te lopen. Teken een uitvergroete grafiek tussen $x = 0$ en $x = 0,5$. Neem daarbij stappen van 0,05.
d Beschrijf de vorm van de grafiek rond het punt waar de grafiek begint.



Theorie

Een functie waarin de variabele onder het wortelteken staat noem je een **wortelfunctie**. De wortel uit een negatief getal bestaat niet. De functie $f(x) = \sqrt{x}$ geeft dus alleen uitkomsten als x groter dan of gelijk aan nul is. Je noteert dit als $x \geq 0$.

De grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ begint in het punt $(0, 0)$. Je noemt dit het **randpunt** van de grafiek.

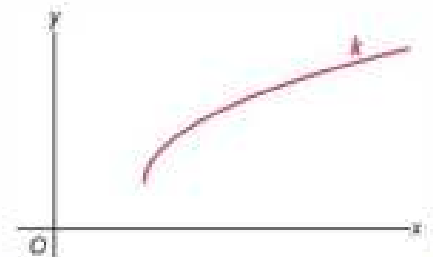


- 3 Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \sqrt{x}$.
- Geef de kleinste waarde van x waarbij de functie f nog een uitkomst heeft.
 - Teken de grafiek van f . Neem voor x waarden van -1 tot en met 9 en voor y waarden van -3 tot en met 7.
 - Geef de coördinaten van het randpunt van de grafiek van f .
 - Teken in hetzelfde assenstelsel de grafiek van $h(x) = 2\sqrt{x}$.
 - Geef de coördinaten van het randpunt van de grafiek van h .

- 4 Hannah wil een grafiek tekenen van de functie $f(x) = \sqrt{x-3}$. Ze heeft al een tabel gemaakt.
- Waarom is het niet handig om de tabel bij $x = 0$ te laten beginnen?
 - Geef de kleinste waarde van x waarbij de functie f nog een uitkomst heeft.
 - Welke uitkomst hoort daarbij?
 - Maak een betere tabel en teken een grafiek.
 - Geef de coördinaten van het randpunt van de grafiek.

							Hannah
x	0	1	2	3	4	5	
$f(x)$	...	-	...	...	-	...	

- 5 Gegeven is de grafiek van de functie $k(x) = 2 + \sqrt{3x-12}$. Om de kleinste waarde uit te rekenen waarbij k nog uitkomsten heeft, stel je $3x-12$ gelijk aan 0.
- Los op: $3x-12=0$.
 - Vul de oplossing die je bij opdracht a gevonden hebt in bij $k(x) = 2 + \sqrt{3x-12}$.
 - Geef de coördinaten van het randpunt.



Aanpak

Hoe bereken je de coördinaten van een randpunt?

- Stel de uitdrukking onder het wortelteken gelijk aan 0.
- Bereken de x -coördinaat van het randpunt door de ontstane vergelijking op te lossen.
- Bereken de y -coördinaat van het randpunt door de gevonden x -coördinaat in de functie in te vullen.
- Schrijf de coördinaten van het randpunt op.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van het randpunt van de grafiek van de functie $f(x) = -4 + \sqrt{2x+10}$.

Oplossing

- $2x+10=0$
- $2x=-10$
 $x=-5$
- $f(-5) = -4 + \sqrt{0} = -4$
- Het randpunt is $(-5, -4)$.

Ondersteunende route → maak opdracht O6

6 Bereken de coördinaten van het randpunt.

a $f(x) = 8 + \sqrt{x - 7}$ c $h(x) = \sqrt{10 - 2x} + 13$

b $g(x) = \sqrt{4x - 12}$ d $k(x) = 5 - \sqrt{6x + 42}$

7 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 3 + \sqrt{x + 4}$ met randpunt $(-4, 3)$.

W

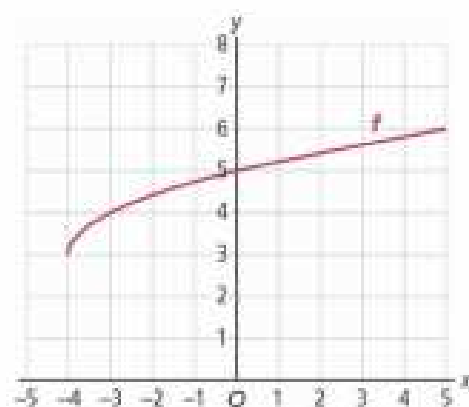
Verder is gegeven de functie $g(x) = 8 - \sqrt{x + 1}$.

a Bereken de coördinaten van het randpunt van de grafiek van g .

b Maak een geschikte tabel bij de functie g en teken de grafiek van g in hetzelfde assenstelsel.

c Vergelijk de grafiek van g met die van f . Behalve een ander randpunt is er nog een verschil tussen deze twee grafieken.

Welk verschil?



8 Gegeven is de functie $h(x) = \sqrt{6 - x}$.

a Bereken de coördinaten van het randpunt.

b Waarom heeft de functie geen uitkomsten als $x > 6$?

c Maak een geschikte tabel bij deze functie en teken de grafiek van h .

9 Bij een verkeersongeval wil de politie weten hoe hard een auto heeft gereden. Ze gebruikt daarvoor de lengte van de remsporen van de auto.

Met de formule $v = 14\sqrt{s}$ kan de politie dan de snelheid van de auto berekenen. In deze formule is v de snelheid in km/uur en s de lengte van het remspoor in meters.

a Een remspoor van een auto is 62 meter.

Bereken de snelheid die deze auto had.

b Teken een grafiek bij deze formule. Neem voor s waarden van 0 tot en met 70.

c Lees uit de grafiek de lengte van het remspoor af dat hoort bij een snelheid van 50 km per uur.

d Ga na of de snelheid van de auto ook verdubbelt als de lengte van een remspoor verdubbelt.



Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

06 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 7 + \sqrt{3x - 6}$.

- Om de x -coördinaat van het randpunt te vinden, stel je de uitdrukking onder het wortelteken gelijk aan 0. Los op: $3x - 6 = 0$.
- Om de y -coördinaat van het randpunt te vinden, vul je de gevonden x -coördinaat in bij $f(x) = 7 + \sqrt{3x - 6}$. Bereken de y -coördinaat van het randpunt.
- Vul in: het randpunt is $(\dots, \dots)$.

Bereken de coördinaten van het randpunt.

d $g(x) = 2 + \sqrt{x - 9}$ f $h(x) = \sqrt{18 - 6x} - 14$

e $h(x) = \sqrt{3x + 15}$ g $k(x) = 17 - \sqrt{8x + 56}$

**Uitdagende opdrachten**

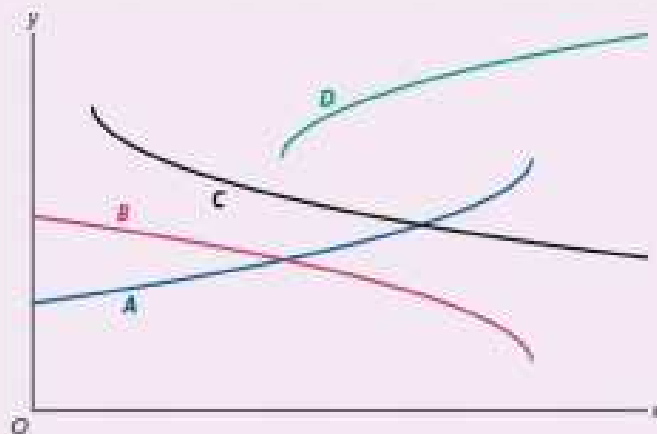
U1 Gegeven is de functie $m(x) = 3 + \sqrt{25 - x^2}$.

- De grafiek van m heeft twee randpunten. Bereken de coördinaten van de randpunten.
- Leg uit waarom $m(6)$ en $m(-6)$ niet bestaan.
- Bij welke waarden van x heeft de functie een uitkomst?
- Teken de grafiek van m .

U2 Van de vier gegeven grafieken hoort er één bij de functie

$$h(x) = 10 - 2\sqrt{8 - x}.$$

Beredeneer welke grafiek dat is.

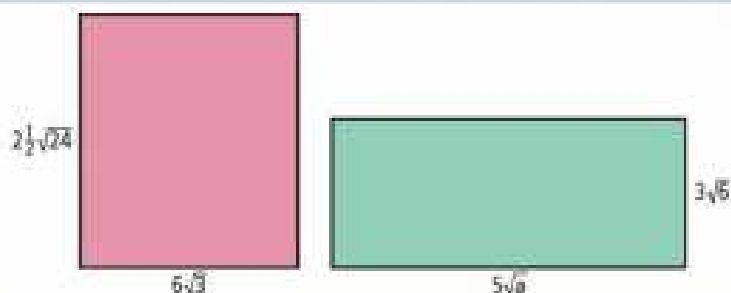


Je leert • hoe je rekt met wortels waarin variabelen voorkomen

Leerroutes • ondersteunend: 10—11—12—13—014—14—15—016—17
 • doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16—17—18
 • uitdagend: 10—12—13—14—15—16—18—U3—U4

De twee rechthoeken hebben dezelfde oppervlakte.

• Onderzoek welke waarde a heeft.



10 Schrijf zo kort mogelijk.

- | | |
|---|-------------------------------------|
| a $2\sqrt{5} + 8\sqrt{5} =$ | e $\sqrt{5} \times \sqrt{3} =$ |
| b $\sqrt{6} + 9\sqrt{3} - 4\sqrt{6} =$ | f $\sqrt{13} \times \sqrt{a} =$ |
| c $8\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 7\sqrt{5} =$ | g $5\sqrt{2} \times 9\sqrt{8} =$ |
| d $\sqrt{7} + \sqrt{9} =$ | h $2\sqrt{3p} \times 3\sqrt{11q} =$ |

11 Op het blaadje wordt $\sqrt{60}$ steeds als vermenigvuldiging van twee wortels geschreven. Daarbij worden onder het wortelteken alleen gehele getallen gebruikt die groter zijn dan 1.

- a Vul het blaadje verder in.
 b Bij welke vermenigvuldiging is één van de wortels gelijk aan een geheel getal?
 c Leg uit dat je $\sqrt{60}$ kunt schrijven als $2\sqrt{15}$.

☐	$\sqrt{60} = \sqrt{2} \times \sqrt{30}$	
☐	$\sqrt{60} = \sqrt{3} \times \sqrt{20}$	
☐	$\sqrt{60} = \sqrt{4} \times \sqrt{15}$	
☐	$\sqrt{60} = \sqrt{5} \times \sqrt{\quad}$	
☐	$\sqrt{60} = \sqrt{\quad} \times \sqrt{\quad}$	

12 Vereenvoudig de wortels.

- | | |
|---|--|
| a $\sqrt{600} = \sqrt{100} \times \sqrt{\quad} = \dots\sqrt{\quad}$ | f $\sqrt{8a} = \sqrt{4} \times \sqrt{\quad} = \dots\sqrt{\quad}$ |
| b $\sqrt{45} =$ | g $\sqrt{75p} =$ |
| c $\sqrt{12} =$ | h $3\sqrt{49p} =$ |
| d $\sqrt{98} =$ | i $5\sqrt{200m} =$ |
| e $\sqrt{25x} =$ | j $2\sqrt{18q} =$ |

Theorie

Eerder heb je geleerd hoe je wortels kunt vermenigvuldigen en hoe je wortels kunt vereenvoudigen. Wortels kun je ook delen. Zo is het quotiënt van $\sqrt{6}$ en $\sqrt{3}$ gelijk aan

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \text{ omdat } \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

Voorbeeld

$$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{2}} = \sqrt{14}, \text{ want } \sqrt{2} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{28}.$$

$$\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = \sqrt{9} = 3, \text{ want } \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{54}.$$

13 Bereken de quotiënten.

a $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{8}} =$

d $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} =$

b $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} =$

e $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{15}} =$

c $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}} =$

f $\frac{\sqrt{44}}{\sqrt{11}} =$

Theorie

Voor het rekenen met wortels kun je gebruik maken van de volgende rekenregels (voor $a \geq 0$ en $b \geq 0$):

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (\text{met } b \neq 0)$$

Voorbeeld

Schrijf als één wortel.

$$\sqrt{7x} \cdot \sqrt{3y} = \sqrt{7x \cdot 3y} = \sqrt{21xy}$$

$$\sqrt{13p^2q} \cdot \sqrt{5pq} = \sqrt{13p^2q \cdot 5pq} = \sqrt{65p^3q^2}$$

$$\frac{\sqrt{14a^2b}}{\sqrt{2ab}} = \sqrt{\frac{14a^2b}{2ab}} = \sqrt{\frac{7a}{1}} = \sqrt{7a}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 014

14 Schrijf als één wortel.

a $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{6b} =$

e $2\sqrt{5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} =$

b $\sqrt{7x} \cdot \sqrt{2y} =$

f $7\sqrt{3} =$

c $\frac{\sqrt{25pq}}{\sqrt{5p}} =$

g $\frac{10\sqrt{3p}}{5\sqrt{p}} =$

d $\frac{\sqrt{18a^2b^3}}{\sqrt{3ab^2}} =$

h $\frac{\sqrt{65p^3q^2}}{\sqrt{13p^2q^2}} =$

- 15** Kim schrijft op: $\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{8}$.
- Welke fout maakt Kim?
 - Hiernaast staan nog meer antwoorden van Kim. Ga na welke ervan goed zijn.

	Kim
1	$\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{3+5}$
2	$\sqrt{5p} \cdot \sqrt{2q} = \sqrt{10pq}$
3	$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$
4	$\sqrt{7a} + \sqrt{7a} = 2\sqrt{7a}$

Wortels kun je altijd met elkaar vermenigvuldigen of door elkaar delen. Wortels bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken kan alleen als onder de worteltekens precies hetzelfde staat.

Ondersteunende route → maak opdracht 016

- 16** Schrijf zo kort mogelijk. Schrijf anders 'kan niet korter'.
- $2\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{5} =$
 - $2\sqrt{7} + 3\sqrt{5} =$
 - $9\sqrt{6} - \sqrt{6} =$
 - $9\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} =$
 - $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{3b} =$
 - $\sqrt{5a} + \sqrt{3b} =$
 - $3\sqrt{2p} \cdot 7\sqrt{2q} =$
 - $3\sqrt{2p} + 7\sqrt{2p} =$
- 17** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3\sqrt{x}$ en $g(x) = \sqrt{9x}$.
- Maak bij functie f een tabel. Neem voor x waarden van 0 tot en met 6.
 - Maak bij functie g net zo'n tabel en vergelijk die met de tabel van f . Wat valt je op?
 - Leg met behulp van de rekenregels voor wortels uit waarom de functievoorschriften van f en g gelijk zijn.
- 18** Schrijf de functie voorschriften korter.
- $f(x) = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x}$
 - $g(x) = 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{x}$
 - $h(x) = \sqrt{4x} + 6\sqrt{x}$
 - $k(x) = 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2x} - 5\sqrt{6x}$

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

- 014** a Volgens de rekenregel $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ is $\sqrt{7p} \cdot \sqrt{3q}$ te schrijven als $\sqrt{7p \cdot 3q}$ dus als $\sqrt{21pq}$.
Schrijf op dezelfde manier $\sqrt{15m} \cdot \sqrt{2n}$ als één wortel.
- b Volgens de rekenregel $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ is $\frac{\sqrt{21p^2q}}{\sqrt{7pq}}$ te schrijven als $\sqrt{\frac{21p^2q}{7pq}}$. Op het blaadje is $\sqrt{\frac{21p^2q}{7pq}}$ vereenvoudigd tot $\sqrt{3p}$.
Schrijf op dezelfde manier $\frac{\sqrt{42m^2n^2}}{\sqrt{7mn}}$ als één wortel.

$$\frac{\sqrt{21p^2q}}{\sqrt{7p \cdot q}} = \sqrt{\frac{3 \cdot p^2 \cdot q}{p \cdot q}}$$

$$\sqrt{\frac{3 \cdot p \cdot q}{q}} = \sqrt{\frac{3 \cdot p}{1}} = \sqrt{3p}$$

- 016** Op het blaadje staan vier berekeningen.
- a Leg uit waarom berekening 1 wel korter geschreven kan worden en berekening 2 niet.
- b Leg uit waarom berekening 3 korter geschreven kan worden.
- c Bij berekening 4 zie je dat $\sqrt{9pq}$ gelijk is aan $3\sqrt{pq}$. Leg uit waarom.

Schrijf zo kort mogelijk. Schrijf anders 'kan niet korter'.

- d $6\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{5} =$ h $\sqrt{13a} \cdot \sqrt{2b} =$
 e $6\sqrt{6} + 2\sqrt{5} =$ i $\sqrt{13a} + \sqrt{2b} =$
 f $8\sqrt{10} - \sqrt{10} =$ j $8\sqrt{5m} \cdot 3\sqrt{5n} =$
 g $8\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} =$ k $8\sqrt{5m} + 3\sqrt{5m} =$

-
- 1 $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{5b} = \sqrt{15b}$
- 2 $\sqrt{3a} + \sqrt{5b}$ kan niet korter
- 3 $6\sqrt{3p} - 2\sqrt{3p} = 4\sqrt{3p}$
- 4 $6\sqrt{3p} \cdot 2\sqrt{3q} = 12\sqrt{9pq} = 12 \cdot 3 \cdot \sqrt{pq} = 36\sqrt{pq}$

Uitdagende opdrachten

- U3** Welke van de functies zijn hetzelfde?

$f(x) = \sqrt{12x + 16}$	$j(x) = 27\sqrt{2x}$
$g(x) = 4\sqrt{3x + 4}$	$k(x) = 3\sqrt{4x}$
$h(x) = 9\sqrt{18x}$	$l(x) = \sqrt{48x + 64}$
$i(x) = 6\sqrt{x}$	$m(x) = 2\sqrt{3x + 4}$

- U4** Schrijf $\frac{2\sqrt{24a^3b^2}}{\sqrt{3a^2b}} + 5\sqrt{6a} \cdot \sqrt{3b}$ als één wortel.

- Je leert**
- hoe je een omgekeerd evenredig verband herkent
 - wat een gebroken functie is
 - wat asymptoten zijn
- Leerroutes**
- ondersteunend: 19—020—20—21—22—023
 - doorlopend: 19—20—21—22—23—24
 - uitdagend: 19—20—22—23—U5—U6

De leerlingen van klas 3B krijgen de opdracht een rechthoek te knippen met een oppervlakte van 24 cm^2 .

- De rechthoek van Rik is twee keer zo breed als die van Janice. Wat weet je over de lengten van hun rechthoeken?
- Kan een rechthoek breedte $0,01 \text{ cm}$ hebben? En 0 cm ?



- 19
- Lia fietst met een snelheid van 15 km per uur een afstand van 30 km .
Hoelang doet ze er over?
 - Een volgende keer wil ze over dezelfde afstand twee keer zo kort doen.
Met welke snelheid moet ze dan rijden?
 - Vul de tabel in.

snelheid in km per uur	5	10	15	30
tijd in uren	...	...	...	...

- Bereken voor alle waarden in de tabel $\text{snelheid} \times \text{tijd}$.
Wat valt je op?

Theorie

Twee variabelen x en y heten **omgekeerd evenredig** als bij een vermenigvuldiging van de waarde van x met bijvoorbeeld drie, de waarde van y drie keer zo klein wordt. Je herkent een omgekeerd evenredig verband als het product van de variabelen x en y steeds hetzelfde is.

De formule heeft de vorm $x \times y = c$, waarbij c een constant getal is. De formule kun je ook in andere vormen schrijven, namelijk $y = \frac{c}{x}$, waarbij y is uitgedrukt in x , of als $x = \frac{c}{y}$, waarbij x is uitgedrukt in y .

Voorbeeld

x	1	2	4	5	10
y	50	25	12,5	10	5

$1 \times 50 = 50$; $2 \times 25 = 50$; $4 \times 12,5 = 50$;
 $5 \times 10 = 50$ en $10 \times 5 = 50$

Het product van de variabelen x en y in deze tabel is steeds 50 .

De bijbehorende formule is

$$x \times y = 50 \text{ of } y = \frac{50}{x} \text{ of } x = \frac{50}{y}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 020

- 20 a** Zoek uit in welke van de tabellen de variabelen x en y omgekeerd evenredig zijn.

A

x	5	10	15	20
y	24	12	8	6

C

x	5	10	15	20
y	12	9	6	3

B

x	2	3	4	5
y	7,5	5	3,75	3

D

x	5	10	20	40
y	20	10	5	2,5

- b** Geef bij elke tabel een bijbehorende formule.

- 21** Van een rechthoek is gegeven dat de oppervlakte 12 cm^2 is.

- a** Vul de tabel in en teken de bijbehorende grafiek.

lengte l in cm	1	2	3	4	6	12
breedte b in cm	12	...	...	...	...	...

- b** Leg uit waarom de lengte en de breedte van deze rechthoek omgekeerd evenredig zijn.
- c** Vul in: omdat $l \times b = 12$, geldt $b = \frac{12}{\dots}$
- d** Behalve met een formule kun je het verband ook met een functievoorschrift aangeven.
Schrijf het functievoorschrift in de vorm $b(l) = \dots$
- e** Bereken $b(100)$, $b(10)$, $b(1)$, $b(0,1)$ en $b(0,01)$.

- 22** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4}{x}$

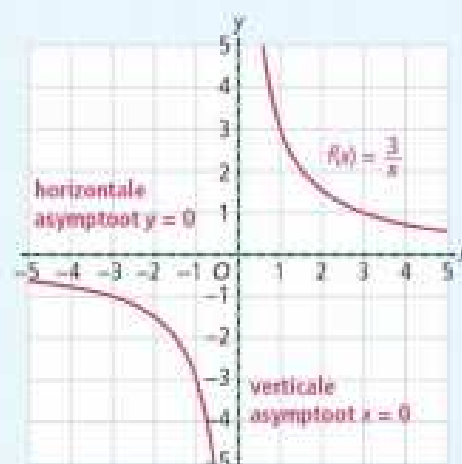
- a** Hoe groot is de functiewaarde bij $x = 10$?
- b** Los op $f(x) = \frac{1}{2}$ en $f(x) = -\frac{1}{2}$.
- c** Leg uit waarom er geen functiewaarde bestaat bij $x = 0$.
- d** Vul de tabel in.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	...	...	...	...	...	-	...	...	...	...	...

- e** Leg uit waarom x en y omgekeerd evenredig zijn.
- f** Teken een grafiek bij de tabel.

Theorie

Een functie waarbij de variabele in de noemer staat, heet een **gebroken functie**. Bij de gebroken functie $f(x) = \frac{3}{x}$ bestaat er geen functiewaarde bij $x = 0$. Er bestaan alleen functiewaarden als $x \neq 0$. De grafiek van $f(x) = \frac{3}{x}$ wordt een **hyperbool** genoemd. Hij bestaat uit twee takken. Op den duur komt de grafiek van $f(x) = \frac{3}{x}$ heel dicht bij de x -as, maar bereikt die nooit. De lijn $y = 0$ is een **horizontale asymptoot**. De grafiek van f heeft ook een **verticale asymptoot**. Bij die lijn hoort de formule $x = 0$.



Ondersteunende route → maak opdracht 023

- 23** Gegeven is de functie $f(x) = 4 + \frac{6}{x}$
- Bij welke waarde van x bestaat er geen functiewaarde?
 - Vul de tabel in.
 - Wat gebeurt er met de functiewaarde als je x steeds verder van 0 neemt?
 - Teken een grafiek van f . Neem voor x de waarden -10 tot en met 10 . Stippel de asymptoten.
 - Geef een formule van de horizontale asymptoot van de grafiek van f .
 - Geef ook een formule van de verticale asymptoot.

x	1	10	100	1000
$f(x)$	...	...	...	...

- 24** Als een elektrische stroom door een metalen draad gaat, dan hangt de weerstand af van de dikte van die draad. In de tabel is A de oppervlakte van de doorsnede van de draad in mm^2 en is R de weerstand in Ohm.
- Wat voor soort verband bestaat er tussen de variabelen A en R ?
 - Je kunt het verband ook met een functie beschrijven. Geef het bijbehorende functievoorschrift $R(A) = \dots$
 - Bereken $R(0,0001)$. Geef de praktische betekenis van je antwoord.
 - Bereken de weerstand van een draad waarvan de oppervlakte van de doorsnede 8 mm^2 is.

A in mm^2	0,02	0,04	0,05	0,10
R in Ohm	10	5	4	2

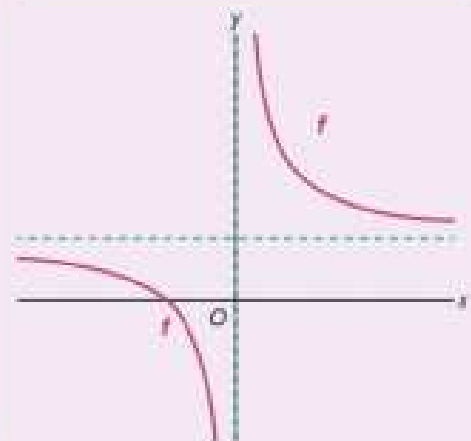
Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

Ondersteunende opdrachten

- 020** Je gaat in deze opdracht bij de gegeven tabel een formule maken.
- Bereken 2×180 , 3×120 , 15×24 en 6×60 .
Is het product van de variabelen x en y steeds hetzelfde?
Is er dus sprake van een omgekeerd evenredig verband?
 - Vul in: bij de tabel hoort de formule $x \times y = \dots$
 - Vul in: de formule uit opdracht b kun je ook schrijven als $y = \frac{\dots}{x}$ of $x = \frac{\dots}{y}$

x	2	3	15	6
y	180	120	24	60

- 023** Gegeven is de functie $f(x) = 3 + \frac{5}{x}$
- Bij welke waarde van x bestaat er geen functiewaarde?
 - Bereken $f(10)$, $f(20)$, $f(50)$ en $f(100)$.
 - Welke waarde naderen de functiewaarden als x steeds groter wordt?
 - In de grafiek van functie f zijn de verticale en de horizontale asymptoot gestippeld.
Geef voor beide asymptoten een formule.



- Gegeven is verder de functie $g(x) = -2 + \frac{4}{x}$
- Bij welke waarde van x bestaat er geen functiewaarde?
 - Teken een grafiek van g . Neem voor x de waarden -5 tot en met 5 . Stippel de asymptoten.
 - Geef voor beide asymptoten een formule.

Uitdagende opdrachten

- U5** Gegeven is functie $g(x) = \frac{a}{x}$
- Leg uit welk verschil het voor de grafiek maakt of a een positief getal of een negatief getal is.
 - Bereken a in het geval de grafiek van g door het punt $(2, 3)$ gaat.

- U6**
 - Gegeven is de functie $f(x) = 8 + \frac{4}{x-2}$. De grafiek van f heeft een horizontale en een verticale asymptoot.
Geef voor beide asymptoten een formule.
 - Er zijn gebroken functies waarvan de grafiek geen verticale asymptoot heeft.
Geef een voorbeeld van een dergelijke gebroken functie.

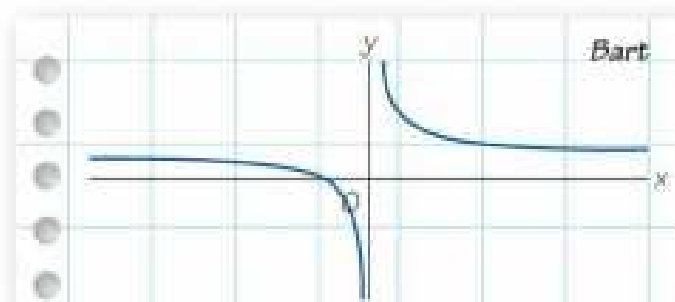
Je leert • hoe je rekt met breuken waarin variabelen voorkomen

Leerroutes • ondersteunend: 25—026—26—27—28—29—30—31—032
 • doorlopend: 25—26—27—28—29—30—31—32—33
 • uitdagend: 25—26—27—29—30—31—33—U7—U8

Bart tekent de grafiek van $f(x) = 3 + \frac{5}{2x}$ in zijn schrift. Jolinde tekent de grafiek van de functie $g(x) = \frac{6x + 5}{2x}$ in haar schrift.

Ze tekenen beiden dezelfde grafiek.

- Tekent een van beiden de grafiek verkeerd of zijn de functies eigenlijk hetzelfde?



25 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{7}$

a Vul de tabel in.

x	0	2	4	6	8	10	12	14
$f(x)$	0	$1\frac{2}{7}$	...	...	...	...	...	...

b Leg uit dat f een lineaire functie is.

c Je kunt het functievoorschrift als één breuk schrijven door de noemers gelijk te maken.

Vul in: $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{7}$ geeft $f(x) = \frac{7x}{14} + \frac{2x}{14}$ dus $f(x) = \frac{\dots}{14}$

Theorie

Om **breuken** te kunnen **optellen of aftrekken**, moeten de noemers gelijk zijn. Als dat nog niet het geval is, moet je ze eerst gelijknamig maken. Als er variabelen in de breuk staan, gaat dat op dezelfde manier.

Voorbeeld

Schrijf korter.

$$\frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{8}{28} - \frac{7}{28} = \frac{1}{28}$$

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{5} = \frac{5x}{40} + \frac{8x}{40} = \frac{13x}{40}$$

$$\frac{7}{x} + \frac{12}{5x} = \frac{35}{5x} + \frac{12}{5x} = \frac{47}{5x}$$

$$\frac{2}{3x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6x} + \frac{3x}{6x} = \frac{4+3x}{6x}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 026

26 Schrijf de functievoorschriften korter.

a $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{3x}{5}$

d $k(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x}$

b $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x$

e $l(x) = \frac{2}{3} + \frac{5}{x}$

c $h(x) = \frac{2x}{5} + \frac{3}{7}$

f $m(x) = \frac{4}{5x} + \frac{3}{2x}$

27 a Vereenvoudig de breuk $\frac{14}{35}$. Door welk getal heb je teller en noemer gedeeld?b Op het blaadje is de breuk $\frac{6x}{30x^2}$ vereenvoudigd.

Leg uit waarom er in derde stap een 1 in de teller staat.

c Cor gaat de breuk ook vereenvoudigen en begint met $\frac{6x}{30x^2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot x}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x}$ en deelt de teller en noemer telkens door dezelfde factor.

Laat zien dat hij uiteindelijk hetzelfde antwoord vindt.

$\frac{6x}{30x^2}$	$= \frac{6 \cdot x}{6 \cdot 5 \cdot x \cdot x}$	
	$= \frac{x}{5 \cdot x \cdot x}$	(teller en noemer door 6 gedeeld.)
	$= \frac{1}{5x}$	(teller en noemer door x gedeeld.)
Dus $\frac{6x}{30x^2} = \frac{1}{5x}$		

28 a Door welke factoren kun je $15x^2$ en $20x^3$ beide delen?

b Vereenvoudig: $\frac{15x^2}{20x^3} = \frac{3 \cdot 5 \cdot x \cdot x}{4 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{\dots}{\dots}$

c Vereenvoudig: $\frac{28p^3}{21p^5} =$

TheorieBij het **vermenigvuldigen van breuken** vermenigvuldig je de teller met de teller en de noemer met de noemer.Breuken kun je **vereenvoudigen** door de teller en de noemer door hetzelfde getal te delen. Als er variabelen in de breuk staan, gaat dat op dezelfde manier.**Voorbeeld**

vermenigvuldigen vereenvoudigen

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{35}$$

$$\frac{9}{15} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{3}{5}$$

$$5 \cdot \frac{2}{x} = \frac{10}{x}$$

$$\frac{2x}{6x^2} = \frac{2 \cdot x}{2 \cdot 3 \cdot x \cdot x} = \frac{1}{3x}$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8x}$$

$$\frac{3x^3}{5} \cdot \frac{5}{x^2} = \frac{15x^3}{5x^2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x}{5 \cdot x \cdot x} = \frac{3 \cdot x}{1} = 3x$$

29 Vereenvoudig de breuken.

a $\frac{36a^2}{28a} =$

c $\frac{4x}{8x^3} =$

b $\frac{45x^4}{60x^2} =$

d $\frac{26x^2}{65x^5} =$

30 Bereken en vereenvoudig indien mogelijk je antwoord.

a $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} =$

d $\frac{1}{3x^2} \cdot \frac{6x^3}{x^2} =$

b $5 \cdot \frac{1}{12} =$

e $3x \cdot \frac{2x^2}{15x^3} =$

c $\frac{2}{x} \cdot \frac{5}{7} =$

f $\frac{2x}{9} \cdot \frac{3}{10x^2} =$

31 Edwin heeft de functie $f(x) = \frac{2x+4}{4}$ vereenvoudigd.

- a Leg uit wat Edwin bij stap 1 gedaan heeft.
- b Leg uit wat Edwin bij stap 2 gedaan heeft.
- c Wat voor soort functie is f ?
- d Vereenvoudig op dezelfde manier $g(x) = \frac{30x-45}{5}$

		Edwin
$f(x) = \frac{2x+4}{4}$		
$f(x) = \frac{2x}{4} + \frac{4}{4}$	stap 1	
$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$	stap 2	

Als in een breuk de teller uit meerdere termen bestaat, kun je de breuk splitsen in meerdere breuken met dezelfde noemer.

Ondersteunende route → maak opdracht 032

32 Vereenvoudig de functievoorschriften.

a $g(x) = \frac{6-8x}{4}$

c $n(x) = \frac{10x+36}{100}$

b $m(x) = \frac{14-35x}{7}$

d $k(x) = \frac{12(2x+3)}{6}$

33 Vereenvoudig de functievoorschriften.

a $a(x) = \frac{x^2-8x}{x}$

c $c(x) = \frac{20x^2+16x}{4x}$

b $b(x) = \frac{3x^2-12x}{x}$

d $d(x) = \frac{6x^3+8x^2}{2x^2}$

Uitdagende route → maak opdracht U7 en U8

Ondersteunende opdrachten

- 026** a De breuken $\frac{8x}{17}$ en $\frac{3x}{17}$ zijn gelijknamig, dus kun je ze optellen door de tellers bij elkaar op te tellen.
 Vul in: $f(x) = \frac{8x}{17} + \frac{3x}{17}$ geeft $f(x) = \frac{\dots + \dots}{17}$ dus $f(x) = \frac{\dots}{17}$
- b $\frac{2x}{9}$ en $\frac{5x}{8}$ zijn niet gelijknamig. Op het blaadje worden deze breuken gelijknamig gemaakt en opgeteld.
 Vul het blaadje verder in.
- c De breuken $\frac{11}{3x}$ en $\frac{5}{4x}$ maak je gelijknamig door van de noemers $12x$ te maken.
 Schrijf korter: $h(x) = \frac{11}{3x} + \frac{5}{4x}$

$g(x) = \frac{2x}{9} + \frac{5x}{8}$				
$g(x) = \frac{2x \cdot 8}{9 \cdot 8} + \frac{5x \cdot 9}{8 \cdot 9}$				
$g(x) = \frac{\dots}{72} + \frac{\dots}{72}$ dus $g(x) = \frac{\dots}{72}$				

- 032** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{18x + 12}{3}$
 De breuk $\frac{18x + 12}{3}$ kun je splitsen in $\frac{18x}{3}$ en $\frac{12}{3}$
- a Vereenvoudig deze twee breuken.
- b Vul in: $f(x) = \dots x + \dots$
 Vereenvoudig de functievoorschriften.
- c $g(x) = \frac{14x + 42}{7}$ e $n(x) = \frac{65 - 26x}{13}$
- d $m(x) = \frac{27x + 9}{3}$ f $k(x) = \frac{8(4x + 2)}{16}$

Uitdagende opdrachten

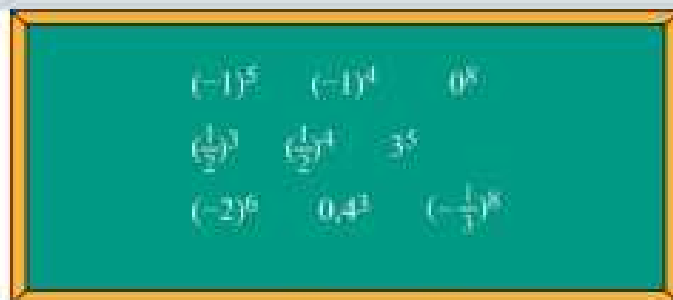
- U7** Bereken en vereenvoudig je antwoord.
- a $\frac{2x^2}{7x^3} \cdot \frac{5x^3}{8x} =$ c $\frac{12p}{15} \cdot \frac{6p^4}{4p^2} \cdot 3p =$
- b $9x^3 \cdot \frac{7x}{54x^2} =$ d $2p \cdot \frac{14}{3p^3} \cdot 9p^2 =$
- U8** $f(x) = \frac{3x^6}{x^2}$ kun je vereenvoudigen tot $g(x) = 3x^4$.
 De functies f en g zijn echter niet precies gelijk.
 Bij welke waarde van x zijn $f(x)$ en $g(x)$ niet gelijk?

Je leert • wat een machtsfunctie is en hoe de grafiek van een machtsfunctie eruit ziet

Leerroutes • ondersteunend: 34—35—36—37—38—D39—39—O40
 • doorlopend: 34—35—36—37—38—39—40—41
 • uitdagend: 34—36—37—38—39—41—U9—U10

Op het bord staat een aantal machten.

- Zet, zonder je rekenmachine te gebruiken, de machten op volgorde van klein naar groot.



- 34** Er wordt een raket gelanceerd. Met het functievoorschrift $h(t) = 0,4t^5$ kun je de hoogte van de raket uitrekenen. Hierin is t de tijd in seconden en h de hoogte in meters.
- Hoe hoog is de raket na drie seconden?
 - En hoe hoog na tien seconden?
 - Zoek uit na hoeveel seconden de raket tien km hoog is. Geef je antwoord in één decimaal.

Theorie

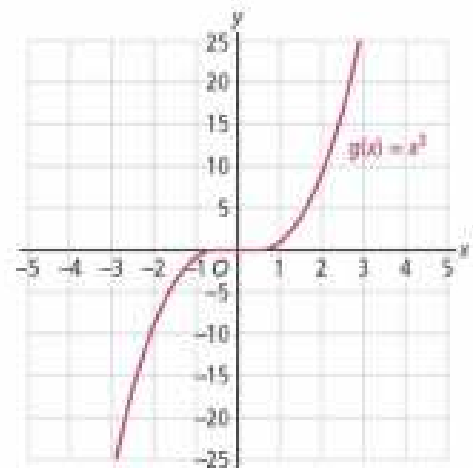
Een functie van de vorm $f(x) = a \cdot x^a$ noem je een **machtsfunctie**. Bij een machtsfunctie is het grondtal van de macht een variabele.

Voorbeeld

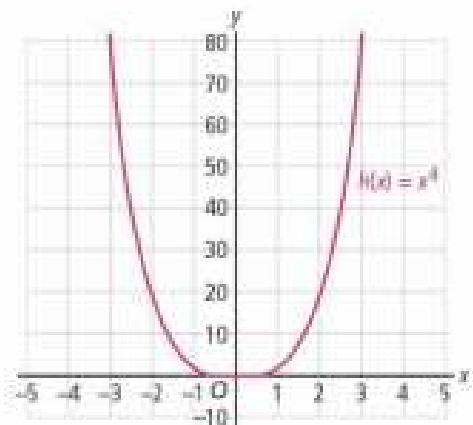
De functies $h(x) = 6x^3$, $s(t) = -10t^5$, $f(x) = 5x^2$ en $k(p) = 6p^4$ zijn voorbeelden van machtsfuncties.

- 35** De functie $f(x) = x^2$ is behalve een kwadratische functie ook een machtsfunctie.
- Teken een grafiek van f . Neem voor x de waarden van -3 tot en met 3 .
 - Bij welke waarde van x is de functiewaarde gelijk aan 0 ?
 - Bij welke waarden van x is de functiewaarde groter dan 0 ?
 - Geef de coördinaten van de top van de grafiek.
 - Leg uit hoe je aan de grafiek kunt zien dat de lijn $y = 7$ twee snijpunten heeft met de grafiek en de lijn $y = -4$ geen.

- 36** Gegeven is de grafiek van de functie $g(x) = x^3$.
- Vul in: $g(-2) = (-2)^3 = \dots$
 - Bereken $g(-4)$ en $g(4)$.
 - Bij welke waarde van x is $g(x)$ gelijk aan 0?
 - Bij welke waarden van x is $g(x)$ groter dan 0?
 - De grafiek van $f(x) = x^2$ is een parabool met een top. Heeft de grafiek van $g(x) = x^3$ ook een top?
 - Hoeveel snijpunten heeft de grafiek van g met de lijn $y = 7$? En hoeveel snijpunten met de lijn $y = -4$?



- 37** Gegeven is de grafiek van de functie $h(x) = x^4$.
- Vul in: $h(-2) = (-2)^4 = \dots$
 - Bereken $h(-5)$ en $h(5)$.
 - Bij welke waarde van x is $h(x)$ gelijk aan 0?
 - Bij welke waarden van x is $h(x)$ groter dan 0?
 - De grafiek van h heeft een top. Geef de coördinaten van de top.
 - Hoeveel snijpunten heeft de grafiek met de lijn $y = 7$? En hoeveel snijpunten met de lijn $y = -4$?

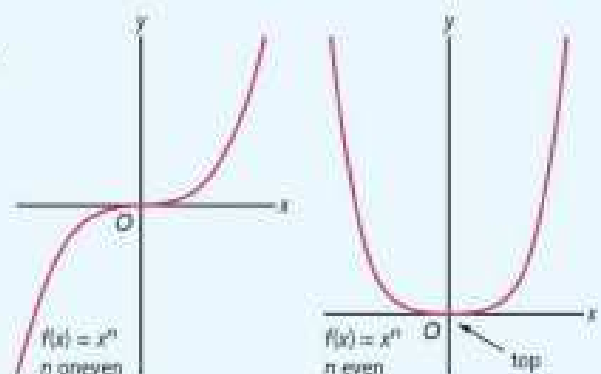


- 38** Gegeven is de functie $k(x) = x^5$.
- Heeft de grafiek van k een top heeft zoals de grafiek van $f(x) = x^2$, of geen top zoals de grafiek van $g(x) = x^3$? Leg je antwoord uit zonder de grafiek van k te tekenen.
 - Leg uit, zonder je rekenmachine te gebruiken, of de functiewaarde $k(-2)$ negatief of positief is.
 - En hoe zit dat met $k(-1)$ en $k(4)$?

Theorie

Van machtsfuncties met een even exponent zoals $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$ en $h(x) = x^6$ heeft de grafiek een top, net als een parabool.

Van machtsfuncties met een oneven exponent zoals $k(x) = x^3$, $l(x) = x^5$ en $m(x) = x^7$ heeft de grafiek geen top.

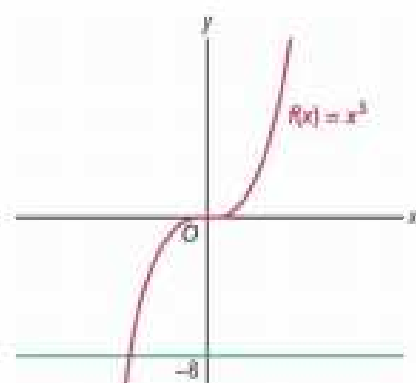


Ondersteunende route → maak opdracht 039

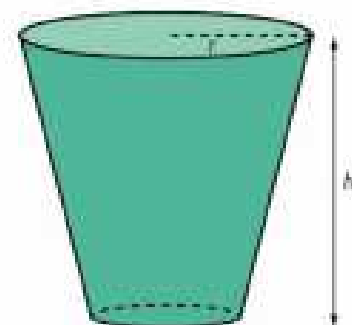
- 39** a Gegeven is de functie $g(x) = x^4$.
De functiewaarde bij $x = 3$ is $g(3) = 3^4 = 81$. Er is nog een waarde van x waarbij de functiewaarde 81 is.
Welke waarde is dat?
- b Gegeven is de functie $k(x) = x^3$. Er geldt $k(5) = 125$.
Is er nog een andere waarde van x waarbij de functiewaarde 125 is? Waarom wel of waarom niet?

Ondersteunende route → maak opdracht 040

- 40** a Hoeveel snijpunten heeft de grafiek van $f(x) = x^3$ met de lijn $y = -8$? Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = -8$ dus?
- b Los de vergelijking $x^3 = -8$ op.
- c Schets de grafiek van $g(x) = x^4$.
- d Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^4 = 81$?
- e Waarom heeft de vergelijking $x^4 = -1$ geen oplossingen?
- f Van de vergelijking $x^n = c$ is bekend dat deze geen oplossingen heeft.
Wat kun je zeggen over de waarde van n en van c ?



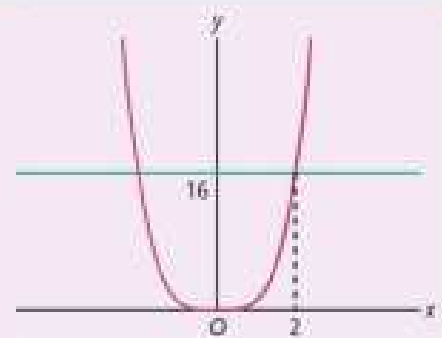
- 41** Van een vaas is de hoogte gelijk aan de diameter van de bovenkant.
De inhoud I in cm^3 van de vaas kun je berekenen met de formule $I = 3,67r^3$ met r de straal van het bovenkant in cm.
- a Bereken de inhoud in cm^3 van een vaas met een hoogte van 24 cm.
- b Ga na of de inhoud van een vaas met een hoogte van 13 cm meer of minder dan 1 liter bedraagt.
- c Voor de inhoud geldt ook de formule $I = 0,46h^3$ met h de hoogte in cm.
Controleer met deze formule je antwoord bij opdracht b.



Uitdagende route → maak opdracht U9 en U10

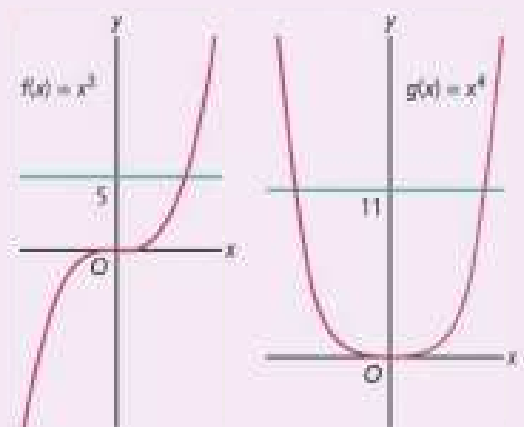
Ondersteunende opdrachten

- 039** a Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = x^4$.
Je ziet dat er twee waarden van x zijn waarbij de functiewaarde 16 is. Een daarvan is $x = 2$.
Welke is de andere x -waarde waarbij $f(x) = 16$?
- b Schets de grafiek van de functie $g(x) = x^5$.
- c Er geldt $g(3) = 3^5 = 243$.
Leg met behulp van je schets uit dat er geen andere waarde van x is waarbij de functiewaarde 243 is.



- 040** Gegeven is de grafiek van $f(x) = x^3$ met de lijn $y = 5$.
De grafiek snijdt de lijn één keer.

- a Bij het snijpunt hoort de vergelijking $x^3 = 5$.
Hoeveel oplossingen heeft deze vergelijking?
- b Je ziet ook de grafiek van $g(x) = x^4$ met de lijn $y = 11$.
Hoeveel snijpunten heeft de grafiek van g met de lijn?
- c Hoeveel oplossingen heeft dus de vergelijking $x^4 = 11$?
- d Waarom heeft de vergelijking $x^4 = -11$ geen oplossingen?
- e Van de vergelijking $x^n = c$ is bekend dat deze geen oplossingen heeft.
Leg uit dat n een even getal moet zijn.
- f Wat kan je zeggen over de waarde van c ?



Uitdagende opdrachten

- U9** Gegeven is de functie $f(x) = (-2x)^3 \cdot 4x \cdot x^4 \cdot (3x)^5 \cdot (-x)^6$.
Beredeneer, zonder de uitkomst te berekenen, of de uitkomst van $f(-6)$ positief of negatief is.
- U10** a Los de vergelijkingen op.
A $x^4 = \frac{1}{16}$ B $x^3 = -27$
- b Maak een overzicht voor welke waarden van n en c de vergelijking $x^n = c$ geen, één of twee oplossingen heeft.

Je leert • hoe je rekt met machten waarin variabelen voorkomen

Leerroutes • ondersteunend: 42—43—044—045—45—47—48
 • doorlopend: 42—43—44—45—46—47—48
 • uitdagend: 42—43—44—45—47—48—U11

Als je een steen laat vallen vanaf een hoog gebouw, neemt de snelheid steeds toe. Voor het verband tussen de valafstand en de tijd gelden de formules $s = 4,9t^2$ en $S = 17,64T^2$, met t in seconden, s in meters, T in minuten en S in km.

- Laat zien dat de twee formules hetzelfde resultaat opleveren.



- 42** Carl vraagt zich af of hij de functie $k(x) = (4x)^3$ in de vorm $k(x) = a \cdot x^n$ kan schrijven, dus in een vorm zonder haakjes. Hiernaast zie je een deel van zijn aantekeningen.

- a** Vul het blaadje verder in en schrijf $k(x)$ zonder haakjes.
b Schrijf op dezelfde manier de functies $f(x) = (6x)^4$ en $m(x) = (-3x)^2$ zonder haakjes.

				Carl
•	$k(x) = (4x)^3$			
•	$k(x) = 4x \cdot 4x \cdot 4x$			
•	$= 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot x$			
•	$= 4^3 \cdot \dots$			
•	$= \dots$			

- 43** **a** Maak de berekening af.

$$\left(\frac{2}{x}\right)^4 = \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x} = \frac{2^{\dots}}{x^{\dots}}$$

- b** Maak ook deze berekening af.

$$\left(\frac{-3}{p}\right)^5 = \frac{-3 \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots}{p \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots} = \frac{(-3)^{\dots}}{p^{\dots}}$$

Theorie

Voor het rekenen met machten kun je gebruik maken van de volgende rekenregels:

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

$$(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3$$

Of meer algemeen: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Ook geldt de regel: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (Hierin is $b \neq 0$.)

Voorbeeld 1

Schrijf zonder haakjes.

Gebruik de regel $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

$$(5a)^4 = 5^4 \cdot a^4 = 625a^4$$

$$(-3x)^5 = (-3)^5 \cdot x^5 = -243x^5$$

$$(pq)^5 = p^5 \cdot q^5 \text{ (ofwel } p^5 q^5 \text{)}$$

$$(3a^2 b^3)^4 = 3^4 \cdot (a^2)^4 \cdot (b^3)^4 = 81a^8 b^{12}$$

Voorbeeld 2

Schrijf zonder haakjes.

Gebruik de regel $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\left(\frac{-5}{a^4}\right)^2 = \frac{(-5)^2}{(a^4)^2} = \frac{25}{a^8}$$

$$\left(\frac{p}{q^3}\right)^4 = \frac{p^4}{(q^3)^4} = \frac{p^4}{q^{12}}$$

$$\left(\frac{a}{2b^5}\right)^3 = \frac{a^3}{(2b^5)^3} = \frac{a^3}{2^3 \cdot (b^5)^3} = \frac{a^3}{8b^{15}}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 044**44** Schrijf zonder haakjes.

a $(7p)^2 =$

e $(m^2 n^3)^4 =$

b $(4x)^3 =$

f $(3a^2 b)^3 =$

c $(-2ab)^5 =$

g $(-9xy^4)^2 =$

d $(-5x^2 y)^4 =$

h $(-10p^{12} q^3)^5 =$

Ondersteunende route → maak opdracht 045**45** Schrijf zonder haakjes.

a $\left(\frac{3}{x}\right)^2 =$

d $\left(\frac{-2}{a^2}\right)^4 =$

b $\left(\frac{-4}{m}\right)^3 =$

e $\left(\frac{3p^2}{q^5}\right)^3 =$

c $\left(\frac{q}{4p^3}\right)^5 =$

f $\left(\frac{3}{4x}\right)^3 =$

46 Schrijf in de vorm $y = a \cdot x^n$. Gebruik de rekenregels.

a $y = (2x^2)^4 \cdot 5x^3$

c $y = 6x^6 + (3x^2)^3$

b $y = \frac{8x^3 \cdot (5x)^2 \cdot x^2}{(2x^2)^2}$

d $y = \frac{8x^5 + 2x \cdot (x^2)^2}{5x^3}$

- 47** Jim wil de formules $y = (3x)^2$ en $y = (3 + x)^2$ zonder haakjes schrijven.
 Voor $y = (3x)^2$ schrijft hij $y = 3^2 \cdot x^2$ dus $y = 9x^2$.
 Voor $y = (3 + x)^2$ schrijft hij $y = 3^2 + x^2$ dus $y = 9 + x^2$.
 Welke fout maakt Jim?

Theorie

De rekenregel $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ geldt voor de macht van een product van twee factoren. Een vergelijkbare rekenregel geldt niet voor de macht van de som van twee termen. Voor het zonder haakjes schrijven van $(a + b)^2$ kun je gebruik maken van een vermenigvuldigtabel.

Voorbeeld

Schrijf de formules $y = (5x)^2$ en $y = (5 + x)^2$ zonder haakjes.

Oplossing

$$y = (5x)^2$$

rekenregel gebruiken

$$y = 5^2 \cdot x^2$$

$$y = 25x^2$$

$$y = (5 + x)^2$$

$\times$	5	$+x$
5	25	$+5x$
$+x$	$+5x$	$+x^2$

$$y = x^2 + 10x + 25$$

- 48** Schrijf zonder haakjes

a $y = 3(3x)^2$

e $y = (8 - 3x)^2$

b $y = (x + 6)^2$

f $y = (8x)^2$

c $y = (2x + 8)^2$

g $y = (-5 + 4x)^2$

d $y = (x^2 + 5)^2$

h $y = (5x^2)^2$

Uitdagende route → maak opdracht U11

Ondersteunende opdrachten

- 044** a Om $(5p)^3$ zonder haakjes te schrijven, gebruik je de rekenregel die je op het blaadje ziet.
Vul in: $(5p)^3 = 5^3 \cdot p^3 = \dots p^3$
- b Om $(-3pq)^4$ zonder haakjes te schrijven, zet je eerst nog haakjes om de negatieve factor -3 .
Vul in: $(-3pq)^4 = (-3)^4 \cdot p^4 \cdot q^4 = \dots p^4 q^4$
- c Om $(2x^3y^2)^5$ zonder haakjes te schrijven, zet je eerst nog haakjes om de machten x^3 en y^2 .
Vul in: $(2x^3y^2)^5 = 2^5 \cdot (x^3)^5 \cdot (y^2)^5 = \dots x^{15} y^{10}$

Schrijf zonder haakjes.

- d $(4a)^3 =$ h $(a^3b^2)^5 =$
e $(6x)^2 =$ i $(5a^4b)^2 =$
f $(-4pq)^4 =$ j $(-2p^4q)^6 =$
g $(-3x^3y^2)^3 =$ k $(-2p^{10}q^4)^{10} =$

rekenregel

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

- 045** a Om $\left(\frac{-6}{a}\right)^2$ zonder haakjes te schrijven, gebruik je de rekenregel die je op het blaadje ziet. Je zet dan eerst nog haakjes om -6 .

$$\text{Vul in: } \left(\frac{-6}{a}\right)^2 = \frac{(-6)^2}{a^2} = \frac{\dots}{a^2}$$

- b Om $\left(\frac{4x^2}{y^3}\right)^3$ zonder haakjes te schrijven, zet je eerst nog haakjes om $4x^2$ en y^3 .

$$\text{Vul in: } \left(\frac{4x^2}{y^3}\right)^3 = \frac{(4x^2)^3}{(y^3)^3} = \frac{4^3 \cdot (x^2)^3}{y^9} = \frac{\dots x^{\dots}}{y^9}$$

rekenregel

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Uitdagende opdrachten

- U11** Leon heeft een tabel gemaakt bij de functie

$$f(x) = \frac{(x^2 \cdot (2x + 3) - 3x^2)^4}{(x \cdot \sqrt{2x})^4 \cdot x^6} \text{ voor } x > 0.$$

Laat met de rekenregels zien dat de functie constant 4 is.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	4	4	4	4	4	4	4	4

Deze paragraaf bevat opdrachten die een indruk geven van wiskunde A/C en wiskunde B.

- 49** Vereenvoudig de functievoorschriften. Werk zo mogelijk haakjes weg, schrijf als één wortel, macht of breuk, of vereenvoudig een breuk.

a $a(x) = \frac{5x^3 + 7x^2}{x^2}$

e $e(x) = \frac{\sqrt{6x^3}}{\sqrt{2x^2}}$

b $b(x) = (6x - 3)^2$

f $f(x) = x^3 \cdot (-4x^4)^3$

c $c(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^3)^2 \cdot 4x}{2x^2}$

g $g(x) = \frac{9x \cdot x^5}{3x^8}$

d $d(x) = 3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{5x}$

h $h(x) = 10x^3 + 4x \cdot x^2$

- 50** Op het blaadje zie je vijf functies.

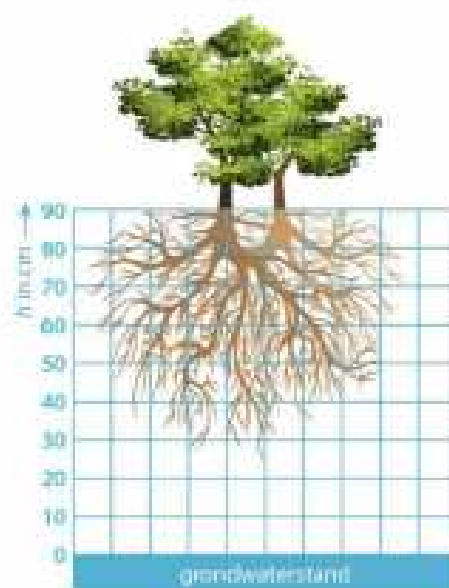
- Schrijf bij elke functie op wat voor soort functie het is.
- Teken de grafieken van g en k in één assenstelsel.
- Er is één punt waar alle grafieken doorheen gaan. Geef de coördinaten van dat punt.
- Laat met behulp van de functievoorschriften zien dat het punt van opdracht c op alle vijf de grafieken ligt.
- Geef de coördinaten van het randpunt van de grafiek van h .

☐	$f(x) = 2x + 1$			
☐	$g(x) = -2x^2 + 5$			
☐	$h(x) = \sqrt{2x + 7}$			
☐	$k(x) = \frac{3}{x}$			
☐	$l(x) = 3$			

- AC51** In een natuurgebied staat het grondwater op een diepte van 90 cm. Hoe dichterbij de oppervlakte komt, hoe lager het vochtgehalte van de grond wordt. De tabel geeft het verband tussen de hoogte h boven de grondwaterstand in cm en het vochtgehalte p van de grond in procenten.

h in cm	10	20	40	80
p in procenten	32	16	8	4

- Teken een grafiek bij de tabel.
- Het verband tussen de hoogte h en het vochtgehalte p kun je met een functievoorschrift aangeven. Schrijf dat functievoorschrift op in de vorm $p(h) = \dots$
- Men brengt beplanting aan, waarvan de wortels een vochtgehalte tussen 5% en 10% nodig hebben. Hoe diep moeten de wortels van deze planten in de grond gestopt worden?



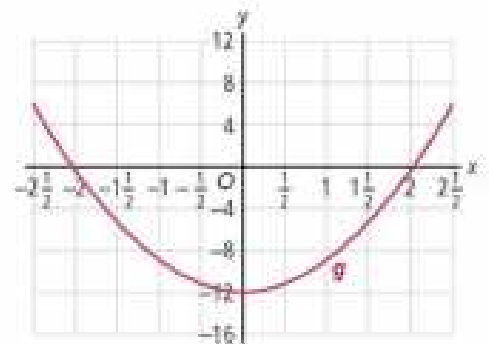
- AC52** Peter gebruikt de formule $T = 4 + \frac{75}{t + 5}$ om de temperatuur van een blikje sinas in zijn koelkast te berekenen. Hierin is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en t de tijd in minuten dat het blikje sinas in de koelkast staat.
- Hoeveel graden is volgens deze formule de temperatuur van het blikje op het moment dat Peter het in de koelkast zet?
 - Na hoeveel minuten heeft het blikje sinas volgens deze formule een temperatuur van 5°C ?
 - Welke temperatuur krijgt het blikje volgens de formule op den duur? En wat betekent dat voor de grafiek van T ?

- B53** Gegeven zijn vier functies.

$$f(x) = ax + b \qquad h(x) = b + \frac{a}{x}$$

$$g(x) = ax^2 + b \qquad i(x) = a \cdot \sqrt{b \cdot x}$$

- Neem $a = 2$ en $b = -6$ en teken de grafiek van f . Neem voor x de waarden -5 tot en met 5 .
- Hiernaast staat een grafiek van de functie g . Zoek uit welke waarden voor a en b gekozen zijn.
- Zoek bij de functie f waarden voor a en b zodat het punt $(1, 1)$ op de grafiek ligt. Hoeveel mogelijkheden zijn er?
- Zoek ook bij de functies h en i waarden voor a en b zodat het punt $(1, 1)$ op de grafiek ligt.



- B54** Gegeven is de functie $h(x) = \sqrt{(x-2)^2}$.
- Maak een tabel bij de functie. Neem voor x de waarden -3 tot en met 8 .
 - Teken een grafiek bij de tabel.
 - Omschrijf de vorm die de grafiek heeft.
 - Janneke zegt: 'Omdat bijvoorbeeld $\sqrt{7^2} = 7$ is $\sqrt{(x-2)^2} = x-2$ en dus is de functie h gewoon een lineaire functie $h(x) = x-2$. Leg aan de hand van de grafiek uit in hoeverre Janneke gelijk heeft.

Theorie

Wortelfunctie, gebroken functie en machtsfunctie

Een functie waarin de variabele onder het wortelteken staat, noem je een wortelfunctie. De wortel uit een negatief getal bestaat niet. De functie $f(x) = \sqrt{x}$ geeft dus alleen uitkomsten als x groter dan of gelijk aan nul is. Je noteert dit als $x \geq 0$.

Een functie waarbij de variabele in de noemer staat, heet een gebroken functie. Bij de gebroken functie $f(x) = \frac{2}{x}$ bestaan er alleen functiewaarden als $x \neq 0$.

Een functie van de vorm $f(x) = a \cdot x^a$ noem je een machtsfunctie. Bij een machtsfunctie is het grondtal van de macht een variabele.

Voorbeeld

$f(x) = \sqrt{x-3}$ is een wortelfunctie.

De functie heeft alleen uitkomsten als $x \geq 3$.

$g(x) = 2 + \frac{7}{x}$ is een gebroken functie.

De functie heeft alleen uitkomsten als $x \neq 0$.

$h(x) = 4 \cdot x^3$ is een machtsfunctie.

De functie heeft bij elke waarde van x een uitkomst.

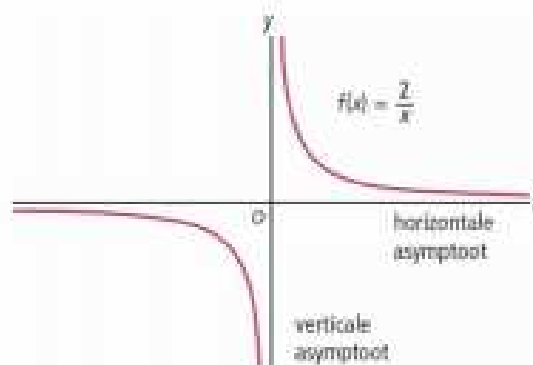
- S1** Geef bij elke functie aan wat voor soort functie het is en bij welke waarden van x er uitkomsten zijn.

$$k(x) = -2 + \frac{15}{x}, l(x) = -15 \cdot x^6 \text{ en } m(x) = \sqrt{4x-18}$$

Theorie

Hyperbool, horizontale en verticale asymptoot

De grafiek van de gebroken functie $f(x) = \frac{2}{x}$ wordt een hyperbool genoemd. Op den duur komt de grafiek van f heel dicht bij de x -as, maar bereikt die nooit. De lijn $y = 0$ is een horizontale asymptoot. De grafiek van f heeft ook een verticale asymptoot. Bij die lijn hoort de formule $x = 0$.

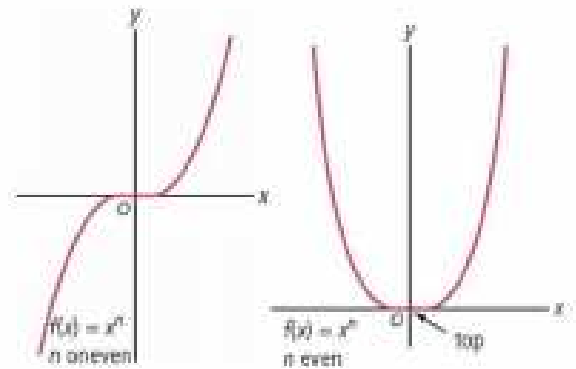


- S2** Gegeven is de functie $g(x) = -3 + \frac{12}{x}$
- Teken een grafiek van g . Neem voor x de waarden van -10 tot en met 10 .
 - Stippel de asymptoten van de grafiek.
 - Geef een formule voor de horizontale asymptoot.
 - Geef een formule voor de verticale asymptoot.

Theorie**Machtsfunctie met even of oneven exponent**

Van machtsfuncties met een even exponent zoals $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$ en $h(x) = x^6$ heeft de grafiek een top, net als een parabool.

Van machtsfuncties met een oneven exponent zoals $k(x) = x^3$, $l(x) = x^5$ en $m(x) = x^7$ heeft de grafiek geen top.



- S3** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^5$, $g(x) = x^9$, $h(x) = x^{10}$ en $l(x) = x^{11}$.
- Van welke van deze functies heeft de grafiek een top?
 - Hoeveel snijpunten heeft de grafiek van f met de lijn $y = 18$? En met de lijn $y = -4$?

Vaardigheid**Je kunt de coördinaten van een randpunt berekenen.**

- Stel de uitdrukking onder het wortelteken gelijk aan 0.
- Bereken de x -coördinaat van het randpunt door de ontstane vergelijking op te lossen.
- Bereken de y -coördinaat van het randpunt door de gevonden x -coördinaat in de functie in te vullen.
- Schrijf de coördinaten van het randpunt op.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = 2 - \sqrt{18 - 6x}$.

Bereken de coördinaten van het randpunt.

Oplossing

- | | |
|------------------------|------------------------------|
| 1 $18 - 6x = 0$ | 3 $f(3) = 2 - \sqrt{0} = 2$ |
| 2 $6x = 18$
$x = 3$ | 4 Het randpunt is $(3, 2)$. |

- S4** Gegeven is de functie $h(x) = 5 + \sqrt{10 - 5x}$.
Bereken de coördinaten van het randpunt.

Vaardigheid

Je kunt rekenen met wortels waarin variabelen voorkomen.

Voor het rekenen met wortels kun je gebruik maken van de volgende rekenregels (voor $a \geq 0$ en $b \geq 0$):

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (\text{met } b \neq 0)$$

Wortels kun je altijd met elkaar vermenigvuldigen of door elkaar delen. Wortels bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken kan alleen als onder de worteltekens precies hetzelfde staat.

Voorbeeld

Schrijf zo kort mogelijk.

$$6\sqrt{3a} + 2\sqrt{3a} = 8\sqrt{3a}$$

$$\sqrt{5x} \cdot \sqrt{3y} = \sqrt{15xy}$$

$$3\sqrt{5b} + 2\sqrt{7a} \text{ kan niet korter}$$

$$3\sqrt{5b} \cdot 2\sqrt{7a} = 6\sqrt{35ab}$$

Schrijf als één wortel.

$$7\sqrt{5} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{245}$$

$$\frac{\sqrt{65a^2b}}{\sqrt{5ab}} = \sqrt{\frac{65a^2b}{5ab}} = \sqrt{13a}$$

S5 Schrijf zo kort mogelijk.

a $\sqrt{6m} \cdot \sqrt{11n} =$

c $3\sqrt{7a} + 5\sqrt{7a} - 2\sqrt{7a} =$

b $5\sqrt{a} \cdot 6\sqrt{5b} =$

d $7\sqrt{5x} + 3\sqrt{5x} + \sqrt{2x} =$

S6 Schrijf als één wortel.

a $4\sqrt{15} =$

b $\frac{\sqrt{36k^2}}{\sqrt{24k}} =$

Vaardigheid

Je kunt rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen.

Om breuken te kunnen optellen of aftrekken, moeten de noemers gelijk zijn. Als dat niet nog het geval is, moet je ze eerst gelijknamig maken.

Bij het vermenigvuldigen van breuken vermenigvuldig je de teller met de teller en de noemer met de noemer.

Breuken kun je vereenvoudigen door de teller en de noemer door hetzelfde getal te delen. Als er variabelen in de breuk staan, gaat dat op dezelfde manier.

Voorbeeld

Optellen:

$$\frac{1}{3a} + \frac{7}{11a} = \frac{11}{33a} + \frac{21}{33a} = \frac{32}{33a}$$

Vermenigvuldigen:

$$\frac{2a}{3b} \cdot \frac{5a}{7} = \frac{10a^2}{21b}$$

Vereenvoudigen:

$$\frac{45a^3}{81a^5} = \frac{5}{9a^2}$$

S7 a Schrijf als één breuk: $\frac{5}{4x} + \frac{2}{3x} =$

b Schrijf als één breuk en vereenvoudig: $\frac{8x^2}{9y} \cdot \frac{6y^2}{2xy} =$

Vaardigheid

Je kunt een omgekeerd evenredig verband herkennen.

Bij een omgekeerd evenredig verband tussen de variabelen x en y is het product van x en y telkens hetzelfde.

Bijpassende formules zijn $x \times y = c$, $y = \frac{c}{x}$ en $x = \frac{c}{y}$.

Voorbeeld

Van een rechthoek met lengte l en breedte b is de oppervlakte 48.

Voor het verband tussen l en b geldt $l \times b = 48$, dus l en b zijn omgekeerd evenredig. Voor het verband tussen l en b

gelden ook de formules $b = \frac{48}{l}$ en $l = \frac{48}{b}$.

- S8 a** Bij welke van de tabellen hoort een omgekeerd evenredig verband?

A

p	5	10	15	20
q	36	30	24	18

B

p	3	6	24	54
q	36	18	4,5	2

- b** Geef bij de tabel met een omgekeerd evenredig verband drie passende formules.

Vaardigheid

Je kunt rekenen met machten waarin variabelen voorkomen.

Voor het rekenen met machten kun je gebruik maken van de volgende rekenregels:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (\text{Hierin is } b \neq 0.)$$

Voor het zonder haakjes schrijven van $(a + b)^2$ kun je gebruik maken van een vermenigvuldigtabel.

Voorbeeld

Schrijf zonder haakjes.

$$(2p^2 q)^4 = 2^4 \cdot (p^2)^4 \cdot q^4 \\ = 16p^8 q^4$$

$$(4p + 3)^2 = 16p^2 + 12p + 12p + 9 \\ = 16p^2 + 24p + 9$$

$$\left(\frac{4a}{7b^2}\right)^3 = \frac{(4a)^3}{(7b^2)^3} = \frac{4^3 \cdot a^3}{7^3 \cdot (b^2)^3} = \frac{64a^3}{343b^6}$$

- S9** Schrijf zonder haakjes.

a $(3a^2 b^4)^3 =$

c $(3a + 5)^2 =$

b $\left(\frac{2a}{3b}\right)^4 =$

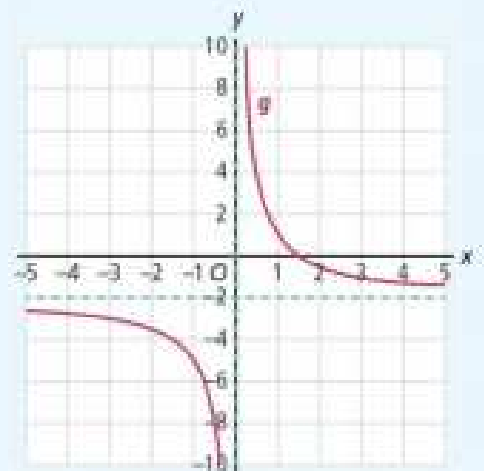
d $\left(\frac{2m^3}{5n^2}\right)^4 =$

- T1** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2\sqrt{x-1}$ en $g(x) = \sqrt{28-4x}$.
- Schrijf van beide functies op voor welke waarden van x er een functiewaarde bestaat.
 - Bereken van beide functies de coördinaten van het randpunt van de bijbehorende grafieken.
 - Teken in één figuur de grafieken bij deze functies. Neem voor x de waarden -2 tot en met 8 .
 - De grafieken snijden elkaar in punt S .
Lees af welke coördinaten punt S heeft.
 - Gegeven is verder de functie $k(x) = a\sqrt{2x-1}$.
De grafiek van k gaat door het punt $(41, 27)$.
Bereken de waarde van a .

- T2** Schrijf de functievoorschriften korter.

- | | |
|--|---|
| a $f(x) = 2\sqrt{x} + 5\sqrt{x} + \sqrt{x}$ | d $l(x) = 4\sqrt{2x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{2x}$ |
| b $g(x) = \frac{2x}{5} + \frac{3x}{10}$ | e $f(x) = \frac{8}{3x} + \frac{x}{2}$ |
| c $h(x) = \frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x$ | f $k(x) = \frac{3}{5x} + \frac{1}{4x}$ |

- T3** Gegeven is de functie $f(x) = 4 + \frac{2}{x}$.
- Teken een grafiek van f . Neem voor x waarden van -5 tot en met 5 . Stippel de asymptoten.
 - Geef de formule van de horizontale asymptoot van de grafiek van f .
 - Geef ook de formule van de verticale asymptoot.
 - De grafiek hiernaast hoort bij de functie $g(x) = a + \frac{b}{x}$.
De grafiek gaat onder andere door het punt $(1, 1)$.
Onderzoek welke waarden a en b hebben.



- T4** Vereenvoudig de functievoorschriften.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a $f(x) = \frac{16x+8}{4}$ | c $l(x) = \frac{-2(9x+14)}{4}$ |
| b $h(x) = \frac{120-45x}{15}$ | d $m(x) = \frac{10(2,5-4,5x)}{5}$ |

- T5** Ga na dat in de tabellen hieronder x en y omgekeerd evenredig zijn. Geef bij elke tabel drie formules.

a

x	0,3	0,5	2	4
y	20	12	3	1,5

b

x	2	3	4	5
y	60	40	30	24

- T6** Schrijf zonder haakjes.

a $(6x)^2 =$

d $(-6p^2q)^4 =$

b $(9 + 2x)^2 =$

e $(3p^5q^6)^4 =$

c $\left(\frac{5p}{13}\right)^2 =$

f $\left(\frac{1}{5p^3}\right)^4 =$

- T7** Schrijf als één wortel.

a $2\sqrt{6} \cdot \sqrt{5} =$

e $\sqrt{5p^2q} \cdot \sqrt{3pq^2} =$

b $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3x} \cdot \sqrt{5y} =$

f $3\sqrt{2ab} =$

c $7\sqrt{3p} =$

g $3\sqrt{7w} \cdot \sqrt{z} =$

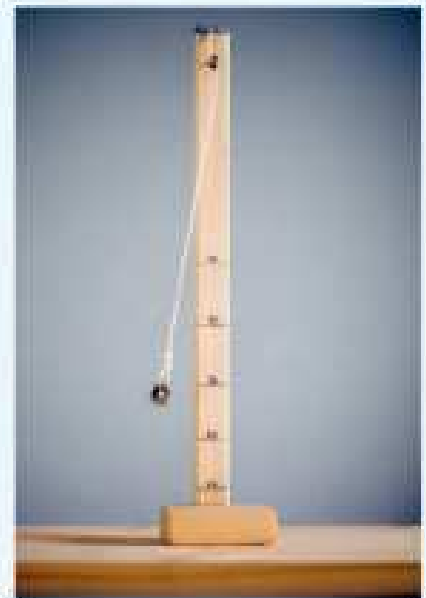
d $\frac{\sqrt{12ab}}{\sqrt{6b}} =$

h $\frac{8\sqrt{pqr}}{4\sqrt{pr}} =$

- T8** Op de foto zie je een verticale slinger. De slingertijd van een verticale slinger is de tijdsduur die verloopt tussen twee momenten waarop een punt van een slinger zich weer op hetzelfde uiteinde bevindt.

Voor het verband tussen de slingertijd en de lengte van de slinger geldt de formule $T = 2,01\sqrt{l}$. Hierin is T de slingertijd in seconden en is l de lengte in meters.

- Bereken de slingertijd van een slinger met een lengte van 85 cm.
- Teken de grafiek bij de formule. Neem voor l de waarden van 0 tot en met 8.
- Lees uit de grafiek af bij welke lengte de slingertijd 5 seconden is. Controleer je antwoord met de formule.
- De formule $T = 2,01\sqrt{l}$ kun je ook schrijven als $T = \sqrt{p \cdot l}$, waarbij p een constante is. Bereken de waarde van p in twee decimalen.



Je kunt de coördinaten van een randpunt berekenen.

- E1** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \sqrt{x-4}$.
- Waarom bestaat de functie f voor $x = 0$ niet?
 - Bereken de coördinaten van het randpunt van de grafiek van f .
 - Teken de grafiek van f .

- E2** Bereken de coördinaten van het randpunt.

- $g(x) = -2 + \sqrt{x-5}$
- $h(x) = \sqrt{x} - 15$
- $k(x) = \sqrt{4x+20} + 9$
- $m(x) = 16 - \sqrt{3-2x}$

Je kunt rekenen met wortels waarin variabelen voorkomen.

- E3** Schrijf als één wortel.

- | | |
|---|---|
| a $\sqrt{19} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{\dots}$ | e $\sqrt{5a^2b} \cdot \sqrt{7ab^2} = \sqrt{\dots}$ |
| b $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{3x} = \sqrt{\dots}$ | f $3\sqrt{a} = \sqrt{\dots}$ |
| c $6\sqrt{7} = \sqrt{\dots}$ | g $2\sqrt{5x} = \sqrt{\dots}$ |
| d $\frac{\sqrt{111}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dots}$ | h $\frac{\sqrt{85a^3b^7}}{\sqrt{17a^2b^6}} = \sqrt{\dots}$ |

Je kunt rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen.

- E4** Bereken. Vereenvoudig zo mogelijk je antwoord.

- | | |
|---|---|
| a $\frac{2x}{3} \cdot \frac{6}{8} =$ | e $\frac{5}{x} + \frac{2}{x} =$ |
| b $7 \cdot \frac{1}{5x} =$ | f $\frac{13}{4x} - \frac{2}{x} =$ |
| c $\frac{x}{6} \cdot \frac{3}{4x^2} =$ | g $\frac{7}{8x} - \frac{1}{4} =$ |
| d $\frac{5x}{11} \cdot \frac{3}{7x} =$ | h $\frac{-3x}{12x^2} + \frac{1}{4x} =$ |

Je kunt een omgekeerd evenredig verband herkennen.

- E5 a** Zoek uit in welke van de onderstaande tabellen de variabelen x en y omgekeerd evenredig zijn.

A

x	2	5	7	14
y	35	14	10	5

C

x	-20	-16	-12	-8
y	12	9	6	3

B

x	0	2	4	6
y	0	5	10	15

D

x	-2	-1	1	2
y	4	8	-8	-4

- b** Stel bij elke tabel een formule op. Bij een omgekeerd evenredig verband stel je drie verschillende formules op.

- E6** Vereenvoudig de functievoorschriften.

a $f(x) = \frac{-8x + 12}{4}$

c $h(x) = \frac{2\frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2}}{5}$

b $g(x) = \frac{180 - 15x}{-30}$

d $k(x) = \frac{-14(1 - 3x)}{21}$

Je kunt rekenen met machten waarin variabelen voorkomen.

- E7** Schrijf als één macht.

a $2^3 \cdot (2^3)^2 =$

e $y = x^4 \cdot x^2 \cdot x$

b $5^4 \cdot 5^8 \cdot 5 =$

f $y = (t^3)^2 \cdot (t^2)^2$

c $7^2 \cdot 7^5 \cdot (7^3)^2 =$

g $y = a \cdot a^2 \cdot a^3$

d $\frac{3^4 \cdot 3 \cdot 3^2}{3^3} =$

h $y = \frac{x^2 \cdot x^5}{(x^3)^2}$

- E8** Schrijf zonder haakjes.

a $(-3 + x)^2 =$

d $(3a^2b^3)^4 =$

b $(-3x)^2 =$

e $(-5pq^2)^3 =$

c $\left(\frac{6a}{7}\right)^2 =$

f $\left(\frac{-2}{5x^4}\right)^4 =$



Redeneren in driehoeken 10



In dit hoofdstuk

In klas 2 heb je gezien wat de hoogte van een driehoek is en hoe je de hoogte gebruikt bij het berekenen van de oppervlakte van een driehoek.

In hoofdstuk 3 heb je geoefend met het bewijzen van eigenschappen in vlakke figuren.

In dit hoofdstuk leer je dat er bijzondere lijnen in een driehoek bestaan zoals de hoogtelijn, de middelloodlijn, de deellijn en de zwaartelijn.

Je gaat de eigenschappen van deze lijnen bewijzen en je leert ze te tekenen en te construeren.

Tot slot leer je hoe je van een driehoek de ingeschreven cirkel en de omgeschreven cirkel tekent.

In de bovenbouw ga je bij wiskunde B verder met redeneren in de meetkunde waarbij je gebruik maakt van de eigenschappen van deze bijzondere lijnen en cirkels.

- V1**
- W**
- Meet hoeveel mm de afstand van punt P tot lijn l is.
 - Teken alle punten die op afstand 2 cm van lijn l liggen.
 - Teken ook alle punten die op afstand 4 cm van punt P liggen.
 - Geef de punten aan die op 2 cm van lijn l én op 4 cm van punt P liggen.



- V2**
- W**
- Meet hoeveel mm de afstand tussen lijn m en lijn n is.
 - Teken twee punten die even ver van lijn m als van lijn n liggen.
 - Waar liggen alle punten die op gelijke afstand van lijn m en lijn n liggen?
 - Arceer het gebied waarvan de punten dichterbij lijn m dan bij lijn n liggen.



Aanpak

Hoe construeer je een driehoek waarvan de zijden gegeven zijn?

- Teken een zijde van de driehoek en zet de letters bij de hoekpunten.
- Neem de lengte van de volgende zijde tussen de punten van een passer en teken een cirkelboog.
- Neem de lengte van de laatste zijde tussen de punten van een passer en teken een cirkelboog.
- Zet bij het snijpunt van de cirkelbogen de letter van het hoekpunt en verbind de hoekpunten met lijnstukken.

Voorbeeld

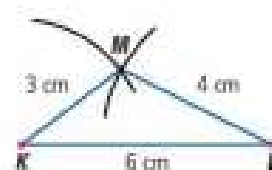
Construeer driehoek KLM met $KL = 6$ cm, $KM = 3$ cm en $LM = 4$ cm.



1



2 3

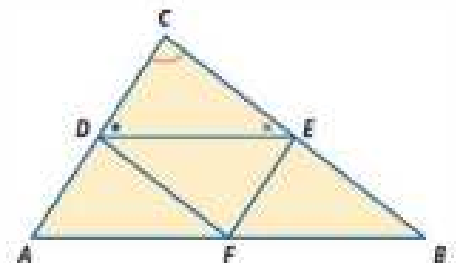


4

- V3 a Construeer $\triangle KLM$ met $KL = 7$ cm, $LM = 4$ cm en $KM = 5$ cm.
 b Is $\triangle KLM$ een scherphoekige driehoek, een rechthoekige driehoek of een stomphoekige driehoek?
 c Construeer $\triangle PQR$ met $PQ = 6$ cm, $QR = 7$ cm en $PR = 6$ cm.
 d Wat voor bijzondere driehoek is $\triangle PQR$?

- V4 **W** Vier dezelfde driehoeken worden zo tegen elkaar gelegd dat ze één grote driehoek ABC vormen.

- a Waar ligt punt D op zijde AC ? En waar ligt punt E op zijde BC ? En waar ligt punt F op zijde AB ? Waarom?
 b Zet in de hoeken die gelijk aan elkaar zijn dezelfde tekentjes.
 c Welke zijden van driehoek ABC lopen evenwijdig aan de zijden van driehoek DEF ? Waarom?



Theorie

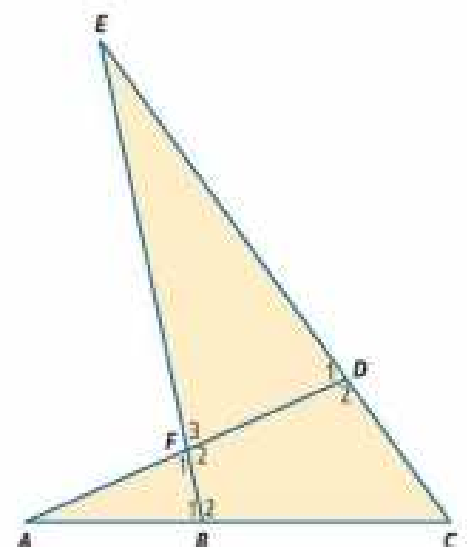
Op basis van een tekening of van een aantal voorbeelden kun je een **vermoeden** krijgen. Met behulp van eigenschappen en een sluitende redenering kun je proberen om de juistheid van dit vermoeden aan te tonen. Het aantonen van de juistheid van een vermoeden noem je een **bewijs**. Daarna kun je dit vermoeden een **stelling** noemen.

Voorbeelden van stellingen zijn:
 - De som van de hoeken van een driehoek is 180° .
 - Overstaande hoeken zijn gelijk.

- V5 In de figuur is $\angle B_2 = \angle D_2$.
 a Meet $\angle A$ en $\angle E$.
 b Welk vermoeden heb je over $\angle A$ en $\angle E$?
 c Vul het blaadje verder in.

- | | | |
|---|---|--|
| • | $\angle A + \angle C + \angle D_2 = \dots^\circ$ | , dus |
| • | $\angle A = \dots - \dots - \dots (1)$ | |
| • | $\angle B_2 + \angle C + \angle E = \dots^\circ$ | , dus |
| • | $\angle E = \dots - \dots - \dots$ | |
| • | $\angle B_2 = \angle D_2$ gegeven | $\angle E = \dots - \dots - \dots (2)$ |
| • | Uit (1) en (2) volgt dat $\angle A = \dots^\circ$ | |

- d Welke stelling heb je in de eerste regel gebruikt?
 e Volgens welke stelling is $\angle F_1$ gelijk aan $\angle F_3$?



Je leert

- wat een loodlijn is
- hoe je een middelloodlijn construeert en deze gebruikt

Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–03–04–5–6–7
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7
- uitdagend: 1–2–3–5–6–7–U1

Robin heeft een katapult gemaakt waarmee hij propjes kan wegschieten.
Robin wil het propje precies tussen de twee houders door en recht vooruit laten wegschieten.
• Hoe moet Robin het elastiek dan naar achteren trekken?



1

W

- Hoeveel kilometer is de afstand van Stromboli tot Napels?
- En van Stromboli tot Palermo?
- Ga na dat de afstand van Catanzaro tot Napels even groot is als de afstand van Catanzaro tot Palermo.
- In de Tyrreense Zee bevinden zich zes schepen. Welke van deze schepen liggen even ver van Napels als van Palermo?
- Laat in het kaartje zien dat alle plaatsen en schepen die even ver van Napels als van Palermo liggen zich op een rechte lijn bevinden.
- Hoe groot is de hoek die deze rechte lijn maakt met de lijn die gaat door Napels en Palermo?



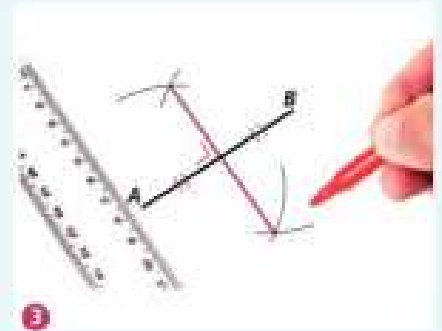
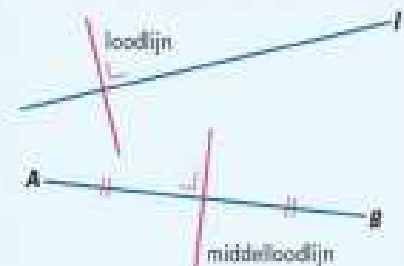
2

- Teken de punten A en B op een afstand 7 cm van elkaar, teken een cirkel met middelpunt A en straal 4 cm en teken een cirkel met middelpunt B en straal 4 cm.
- De cirkels snijden elkaar in de punten P en Q .
Vul in: $AP = BP = \dots$ cm en $AQ = BQ = \dots$ cm
- Teken vierhoek $APBQ$ en geef de symmetrieassen aan.
- Waar en hoe snijden de symmetrieassen elkaar?
- Teken een punt R op de lijn door de punten P en Q .
Waarom volgt uit opdracht d dat vierhoek $APBR$ een vlieger is?
- Waarom ligt elk punt R op de lijn door de punten P en Q even ver van punt A als van punt B ?

Theorie

Een lijn die loodrecht op een lijn l staat noem je een **loodlijn** op l . De lijn die door het midden van een lijnstuk AB gaat en er loodrecht op staat, noem je de **middelloodlijn** van lijnstuk AB . Alle punten op de middelloodlijn van lijnstuk AB liggen even ver van punt A als van punt B .

Hieronder zie je hoe je de middelloodlijn construeert.



Ondersteunende route → maak opdracht 03

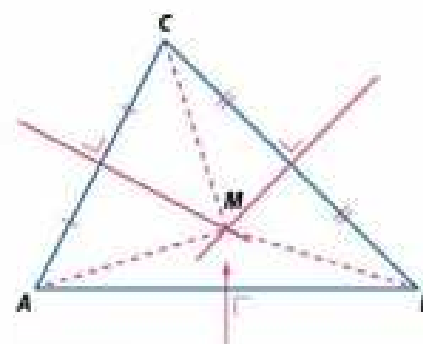
- 3
- Teken in een assenstelsel de punten $P(1, 2)$, $Q(8, 5)$ en $R(2, 8)$.
 - Waarom is het bij het construeren van de middelloodlijn van belang dat de straal van de cirkelbogen gelijk blijft?
 - Construeer de middelloodlijn van lijnstuk PQ . Laat de cirkelbogen staan.
 - Ligt punt R op deze middelloodlijn?
 - Teken de loodlijn uit Q op de lijn door de punten P en R .

Ondersteunende route → maak opdracht 04

- 4
- W**
- Teken in het kaartje de lijn waarop alle schepen zich bevinden die even ver van Palermo als van Messina liggen.
 - Arceer het gebied blauw waar de schepen zich bevinden die verder van Palermo dan van Messina liggen.
 - Arceer het gebied rood waar de schepen zich bevinden die verder van Messina dan van Napels liggen.
 - Geef het gebied aan waar de schepen zich bevinden die dichterbij Palermo dan bij Messina en ook dichterbij Palermo dan bij Napels liggen.



- 5 Je gaat nu het vermoeden bewijzen dat de drie middelloodlijnen in een driehoek door één punt gaan. Van $\triangle ABC$ zijn de middelloodlijnen van de zijden AC en BC getekend. Deze middelloodlijnen snijden elkaar in punt M . Vul het onderstaande bewijs verder in.



- | | | |
|---|--|----------------|
| • | Punt M ligt op de middelloodlijn van zijde AC , dus $AM = CM$ | } $AM = \dots$ |
| • | Punt M ligt op de middelloodlijn van zijde BC , dus $\dots = CM$ | |
| • | Dus punt M ligt ook op de middelloodlijn van zijde $\dots$ | |

Theorie

In iedere driehoek snijden de drie middelloodlijnen elkaar in één punt.

- 6
- Teken $\triangle XYZ$ met $XY = 6$ cm, $\angle X = 40^\circ$ en $\angle Y = 30^\circ$.
 - Is $\triangle XYZ$ een scherphoekige driehoek, een rechthoekige driehoek of een stomphoekige driehoek? Waarom?
 - Construeer de drie middelloodlijnen.
 - Wat valt je op aan het snijpunt van de drie middelloodlijnen?
 - Teken $\triangle ABC$ met $\angle A = 90^\circ$. Je mag zelf kiezen hoe lang de zijden worden. Construeer ook de drie middelloodlijnen.
 - Wat valt je op aan het snijpunt van de drie middelloodlijnen in $\triangle ABC$?
- 7 Het snijpunt van de drie middelloodlijnen kan binnen de driehoek, op de driehoek of buiten de driehoek liggen.
- Bij welke driehoeken ligt het snijpunt buiten de driehoek?
 - Bij welke driehoeken ligt het snijpunt binnen de driehoek?
 - Bij welke driehoeken ligt het snijpunt op de driehoek en waar ligt dit snijpunt dan op de driehoek?

Uitdagende route → maak opdracht U1

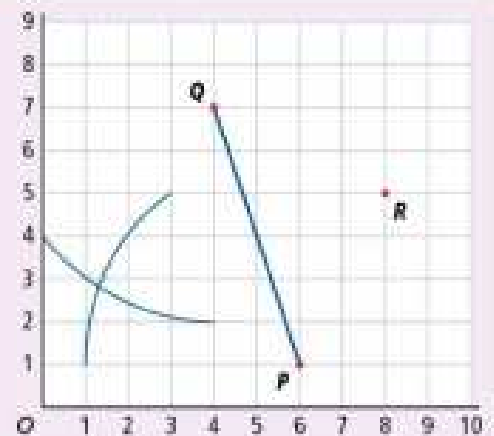
Ondersteunende opdrachten

03

W

Je gaat in deze opdracht de middelloodlijn van lijnstuk PQ construeren. In het assenstelsel is daarmee een begin gemaakt.

- Ga na dat de stralen van de getekende cirkelbogen gelijk zijn.
- Waarom moeten die twee stralen gelijk zijn?
- Wat weet je van het snijpunt van deze cirkelbogen?
- Teken op dezelfde manier aan de andere kant van lijnstuk PQ twee cirkelbogen met dezelfde straal.
- Teken nu de middelloodlijn van lijnstuk PQ door een lijn te trekken door de twee snijpunten van de cirkelbogen.
- Ligt punt $R(8, 5)$ op de middelloodlijn van lijnstuk PQ ?
- Wat weet je nu van de afstand van punt R tot de punten Q en P ?



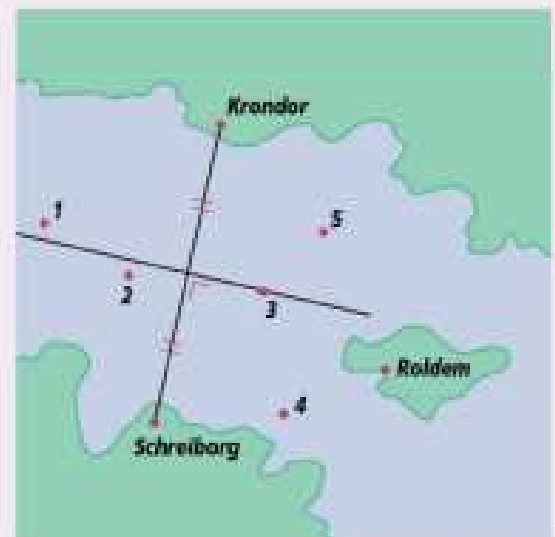
04

W

- In het kaartje is de middelloodlijn getekend van het lijnstuk tussen de plaatsen Krondor en Schreiborg.

Leg uit dat schip 3 even ver van Krondor als van Schreiborg ligt.

- Welke schepen liggen dichterbij Krondor dan bij Schreiborg?
- Arceer het gebied rood waar de schepen zich bevinden die dichterbij Schreiborg dan bij Krondor liggen.
- Teken de middelloodlijn van het lijnstuk tussen Roldem en Schreiborg.
- Welke schepen liggen dichterbij Schreiborg dan bij Roldem?
- Geef het gebied aan waar de schepen zich bevinden die dichterbij Schreiborg dan bij Krondor en ook dichterbij Roldem dan bij Schreiborg liggen.



Uitdagerende opdrachten

U1

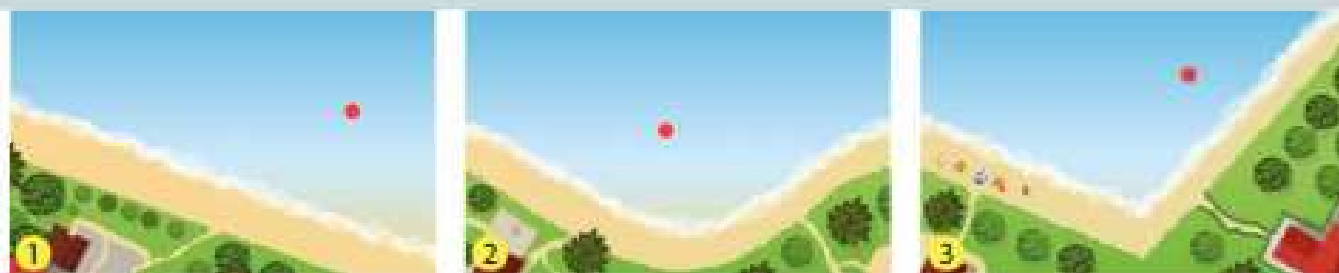
W

Vier goudzoekers hebben een gebied bezet waar ze mogelijk goud kunnen winnen. In de punten A , B , C en D hebben ze hun vlag geplaatst. Het gebied is zo verdeeld dat iedere plaats wordt toebedeeld aan de goudzoeker wiens vlag er het dichtst bij staat.

Teken de gebieden waar elke goudzoeker recht op heeft.



- Je leert**
- hoe je een hoogtelijn tekent en deze gebruikt
- Leerroutes**
- ondersteunend: 8—09—10—11—12—013—13
 - doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14
 - uitdagend: 8—9—10—11—12—14—U2



W In de drie tekeningen zie je steeds een zwemmer die langs de kortste route de kust probeert te bereiken.

- Teken in elke situatie de kortste route.

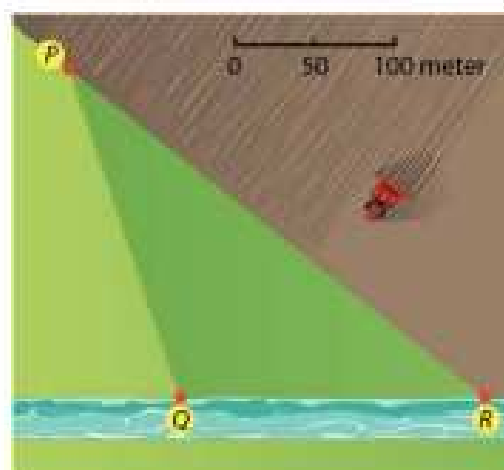
8 Boer Bart heeft een driehoekig stuk land. Er komt een hek van punt Q naar zijde PR . Het hek wordt zo kort mogelijk.

- Teken de lijn waar het hek langs komt.
- Wat voor een bijzondere lijn is de lijn waar het hek langs komt?
- Gebruik de schaal in de tekening om uit te rekenen hoeveel meter de lengte van het hek wordt.
- Bart wil een afvoerpijp voor het water vanuit punt P naar de sloot aanleggen. Hoeveel meter wordt de afvoerpijp minstens als hij deze over zijn eigen land aan zou leggen?

- Om kosten te besparen besluit Bart de afvoerpijp niet over zijn eigen land, maar zo kort mogelijk te maken.

Teken de lijn waarlangs hij de afvoerpijp moet aanleggen.

- Hoe lang wordt de afvoerpijp?



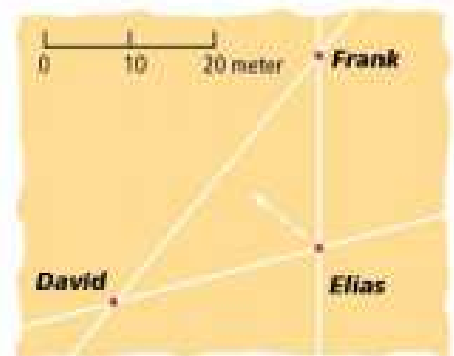
Theorie

De loodlijn uit een hoekpunt van een driehoek op de zijde er tegenover noemt je de **hoogtelijn** uit dat hoekpunt. Een hoogtelijn kan ook buiten de driehoek liggen. Bij het berekenen of meten van de afstand tussen een hoekpunt en de zijde er tegenover gebruik je de hoogtelijn.



Ondersteunende route → maak opdracht 09

- 9 Voor een gymoefening zijn drie lijnen op het schoolplein getekend. Er zijn pionnen neergezet bij de snijpunten van de lijnen. David, Elias en Frank staan elk bij een pion en moeten tot de tegenoverliggende lijn en weer terug rennen.

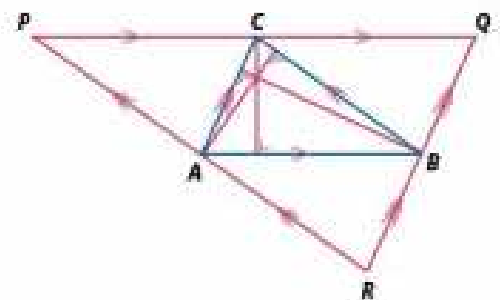


- Teken vanuit elke pion de hoogtelijn op de tegenoverliggende zijde.
- Welke praktische betekenis heeft de hoogtelijn nu?
- Wie legt de grootste afstand af? Hoeveel meter is die afstand?

- 10
- Teken in een assenstelsel de punten $K(4, 1)$, $L(8, 6)$ en $M(1, 4)$ en teken $\triangle KLM$.
 - Teken de hoogtelijn uit punt K op zijde LM en de hoogtelijn uit punt L op zijde KM . Noem het snijpunt S .
 - Vermoed je dat de hoogtelijn uit punt M op zijde KL ook door punt S zal gaan? Controleer je vermoeden door die hoogtelijn te tekenen.

- 11 Je gaat nu het vermoeden bewijzen dat de drie hoogtelijnen in een driehoek door één punt gaan.

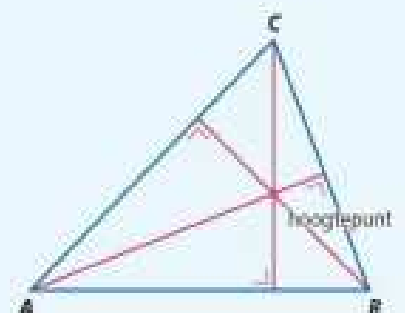
Door de hoekpunten van $\triangle ABC$ zijn lijnen getrokken evenwijdig aan de zijden. Zo ontstaat $\triangle PQR$.



- Waarom zijn $ABQC$ en $ABCP$ parallelogrammen?
- Leg uit dat $AB = CQ$ en dat $CQ = CP$.
- Leg ook uit dat $PQ = 2 \times AB$.
- Waarom is in $\triangle ABC$ de hoogtelijn uit punt C hetzelfde als in $\triangle PQR$ de middelloodlijn van zijde PQ ?
- Leg uit dat ook de andere twee hoogtelijnen in $\triangle ABC$ middelloodlijnen zijn in $\triangle PQR$.
- Op grond van welke stelling weet je nu zeker dat de hoogtelijnen van $\triangle ABC$ elkaar in één punt snijden?

Theorie

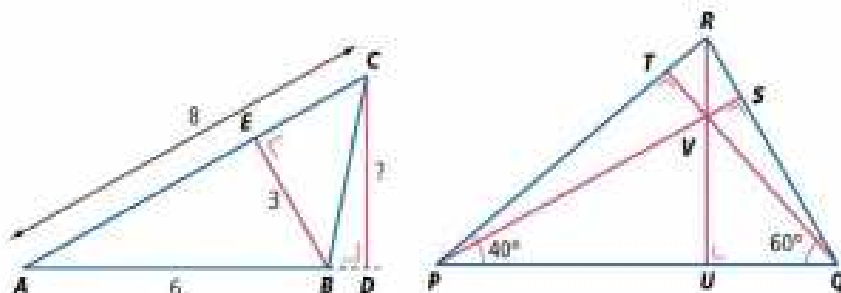
In iedere driehoek snijden de drie hoogtelijnen elkaar in één punt. Dit snijpunt noem je het **hoogtepunt**.



- 12**
- Teken $\triangle KLM$ met $\angle K = 40^\circ$, $KL = 6$ cm en $KM = 4$ cm.
 - Is $\triangle KLM$ een scherphoekige driehoek, een rechthoekige driehoek of een stomphoekige driehoek?
 - Teken de hoogtelijn uit punt M .
 - Verleng de zijden KM en LM en teken de hoogtelijnen uit punt L en punt K .
 - Wat valt je op aan het hoogtepunt?
 - Teken $\triangle XYZ$ met $\angle X = 90^\circ$. Je mag zelf kiezen hoe lang de zijden worden. Teken ook de drie hoogtelijnen.
 - Waar ligt nu het hoogtepunt?

Ondersteunende route → maak opdracht 013

- 13**
- Van $\triangle ABC$ is $AB = 6$ en $AC = 8$. De hoogtelijn uit punt B snijdt zijde AC in punt E . De hoogte $BE = 3$.
- Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.
 - Bereken met behulp van de oppervlakte van $\triangle ABC$ de hoogte CD .



- 14**
- Van $\triangle PQR$ is $\angle P = 40^\circ$ en $\angle Q = 60^\circ$. De drie hoogtelijnen snijden elkaar in punt V .
- Bereken $\angle RVT$.
 - Bereken $\angle TRV$.
 - Bereken de grootte van de zes hoeken bij punt V .

Uitdagende route → maak opdracht U2

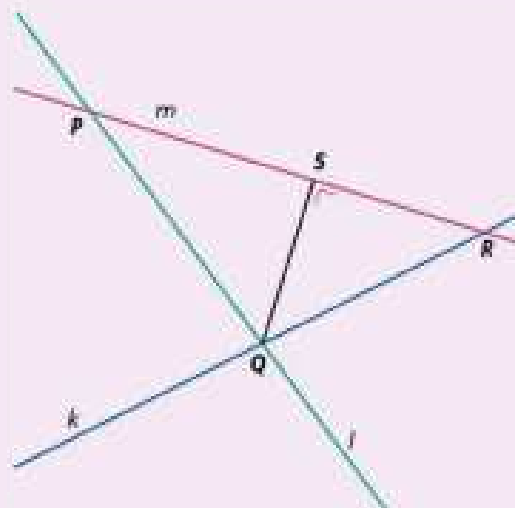
Ondersteunende opdrachten

09

W

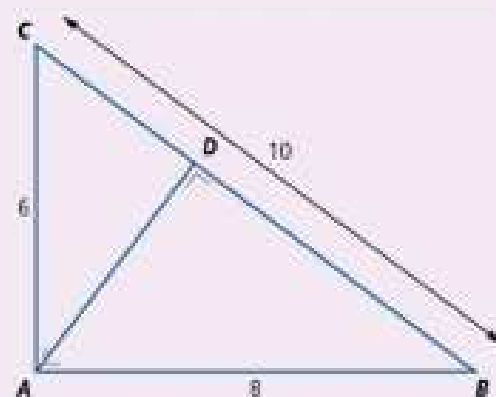
De lijnen k , l en m snijden elkaar in de punten P , Q en R .

- Wat voor bijzondere lijn is QS in $\triangle PQR$?
- Meet de lengte in mm van lijnstuk QS .
- Wat kun je zeggen over de afstand van punt Q tot lijn m ?
- Teken de lijn door punt P loodrecht op lijn k .
- Met de lijn die je bij opdracht d getekend hebt, kun de afstand van punt P tot lijn k meten. Hoeveel mm is deze afstand?
- Geef de afstand in mm van punt R tot lijn l .



013

- Bereken de oppervlakte van driehoek ABC .
- Licht toe dat voor driehoek ABC geldt $\text{oppervlakte driehoek } ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AD$.
- Gebruik de antwoorden van de opdrachten a en b om de hoogte AD te berekenen.



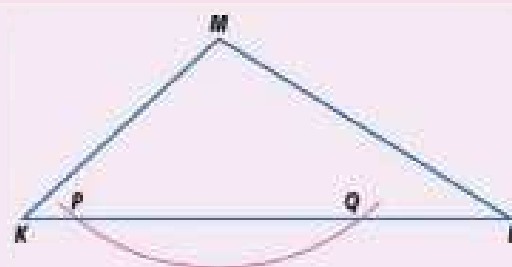
Uitdagende opdrachten

U2

W

Een hoogtelijn kun je ook construeren. In $\triangle KLM$ is een cirkelboog getekend met punt M als middelpunt. Deze cirkelboog snijdt zijde KL in de punten P en Q .

- Leg uit waarom de middelloodlijn van lijnstuk PQ ook de hoogtelijn uit punt M op zijde KL is.
- Construeer deze hoogtelijn.
- Construeer ook de hoogtelijn uit punt K op zijde LM .
- Het is ook mogelijk de zwaartelijn uit punt L te construeren. Beschrijf die constructie en voer hem uit.



Je leert • hoe je een deelijn construeert en deze gebruikt

Leerroutes • ondersteunend: 15—16—17—018—19—20—21
 • doorlopend: 15—16—17—18—19—20—21
 • uitdagend: 16—18—19—20—21—U3—U4

Charlotte heeft van haar verjaardag nog een stuk taart over. Ze gaat deze verdelen tussen haar twee kinderen.

- Hoe kan ze ervoor zorgen dat haar twee kinderen een precies even grote taartpunt krijgen?



- 15** Op de kaart zie je dat de kusten van Argentinië en Uruguay een hoek met elkaar maken. De schaal van de kaart is 1 : 2 000 000. Op zee bevinden zich vier schepen.

W

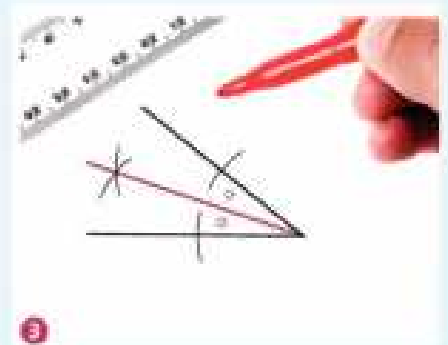
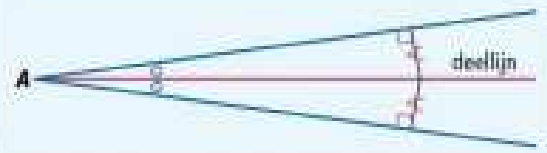
- Hoeveel kilometer is de afstand van het schip Pluto tot Uruguay? En tot Argentinië?
- Welke schepen liggen even ver van de kust van Uruguay als van Argentinië?
- Teken een lijn door de punten die even ver van beide kusten liggen.
- De lijn uit opdracht c verdeelt de hoek die de kusten maken in twee hoeken. Meet die twee hoeken. Wat valt je op?



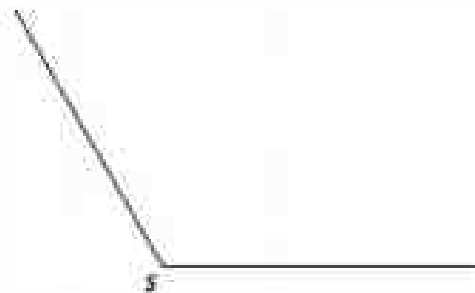
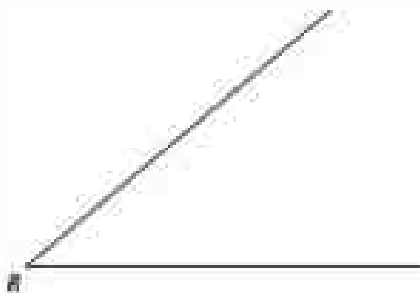
- 16**
- Teken een hoek P van 76° .
 - Teken een cirkelboog met middelpunt P en straal 5 cm. Noem de snijpunten van de benen van hoek P met de cirkelboog Q en R .
 - Teken twee cirkelbogen met gelijke straal en met middelpunten Q en R . Kies de straal zo dat de twee cirkelbogen elkaar snijden. Noem het snijpunt S .
 - Teken vierhoek $PQSR$ en geef de symmetrieas aan.
 - Waarom zijn $\angle QPS$ en $\angle RPS$ even groot? Hoe groot zijn deze hoeken?
 - Teken de twee loodlijnen uit punt S op de benen van hoek P . Noem de snijpunten met de benen X en Y .
 - Leg uit dat $SX = SY$.

Theorie

De lijn die een hoek in twee gelijke hoeken verdeelt, noemt men de **deellijn** van die hoek. Alle punten op de deellijn van een hoek liggen even ver van de benen van die hoek. Hieronder zie je hoe je de deellijn van een hoek construeert.



- 17** **a** Construeer de deellijn van hoek *R* en van hoek *S*. Laat de cirkelbogen staan.



- b** Controleer met je geodriehoek of de hoeken ook echt in twee gelijke hoeken zijn verdeeld.

Ondersteunende route → maak opdracht 018

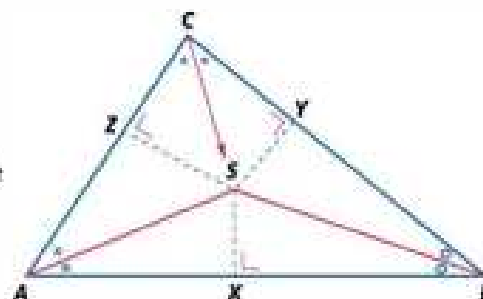
- 18** Onder de zeebodem van de Ruwzee zit olie. Aan de Ruwzee grenzen drie landen. Afgesproken is dat een deel zeebodem hoort bij het land dat het dichtst bij dat deel ligt.

- Teken de punten op zee die even ver liggen van Westland als van Midland.
- Teken ook de punten op zee die even ver liggen van Midland als van Oostland.
- Geef nu met verschillende kleuren aan welk deel van de zee bij elk land hoort.



- 19 a Teken $\triangle KLM$ met $KL = 8$ cm, $\angle L = 78^\circ$ en $LM = 7$ cm en knip de driehoek uit.
 b Probeer door elke hoek te vouwen de drie deellijnen te vinden.
 c Wat vermoed je over de snijpunten van de drie deellijnen?

- 20 Je gaat nu het vermoeden bewijzen dat de drie deellijnen in een driehoek door één punt gaan.
 Van $\triangle ABC$ zijn de deellijnen van hoek A en van hoek B getekend. Deze deellijnen snijden elkaar in punt S .
 Daarna zijn uit punt S de loodlijnen SX , SY en SZ op de drie zijden van $\triangle ABC$ getekend.
 Vul het onderstaande bewijs verder in.



- | | | |
|---|--|----------------|
| • | Punt S ligt op de deellijn van hoek A , dus $SX = SZ$ | } $SZ = \dots$ |
| • | Punt S ligt op de deellijn van hoek B , dus $SX = \dots$ | |
| • | Dus punt S ligt op de deellijn van hoek $\dots$ | |

Theorie

In iedere driehoek snijden de drie deellijnen elkaar in één punt.

- 21 a Teken een stomphoekige driehoek XYZ en ga na dat ook in die driehoek de drie deellijnen elkaar in één punt snijden.
 b Arceer het gedeelte van de driehoek waarvan de punten dichter bij zijde XZ liggen dan bij elk van de andere zijden.
 c Teken nu een rechthoekige driehoek met de drie deellijnen.
 d Is het mogelijk dat de drie deellijnen elkaar buiten de driehoek snijden? Verklaar je antwoord.

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

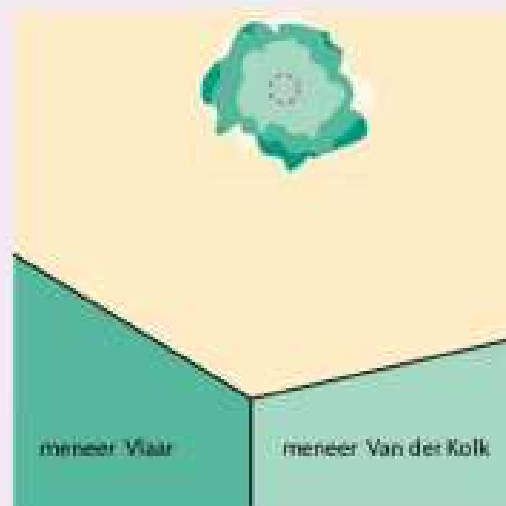
18

W

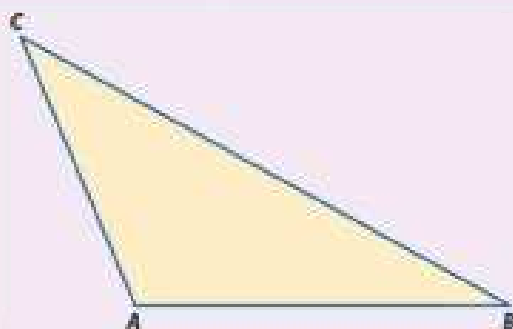
De tuinen van meneer Vlaar en meneer Van der Kolk liggen vlak naast elkaar. Beiden willen ze het stuk grond dat achter hun tuin ligt kopen. In overleg met de eigenaar van het stuk grond besluiten ze de grond zo te verdelen dat ieder het stuk krijgt dat het dichtst bij de eigen tuin ligt.

- Op welke lijn liggen de punten die even ver liggen van de tuin van meneer Vlaar als van de tuin van meneer Van der Kolk?
- Teken deze lijn.
- Op het stuk grond staat een grote kastanjeboom. Bij wie komt deze boom op het stuk grond te staan?
- Op het stuk grond bevindt zich ook een elektriciteitsmast. Deze bevindt zich even ver van de tuin van meneer Vlaar als van meneer Van der Kolk.

Wat weet je van de plaats van deze elektriciteitsmast?



Uitdagende opdrachten



U3

W

Binnen $\triangle ABC$ ligt een punt P waarvoor het volgende geldt.

- > Punt P ligt dichterbij zijde AB dan bij zijde BC .
- > Punt P ligt dichterbij punt C dan bij punt B .
- > Punt P ligt op de hoogtelijn uit punt A .

Teken in de driehoek alle mogelijke plaatsen van punt P .

U4

W

Lijnstuk KL is een zijde van $\triangle KLM$. Punt S is het snijpunt van de drie deellijnen van $\triangle KLM$.

Teken punt M en teken $\triangle KLM$.

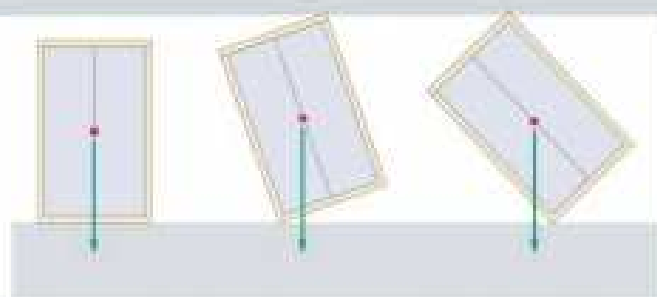


Je leert • hoe je een zwaartelijne tekent en deze gebruikt

Leerroutes • ondersteunend: 22—023—24—25—26—27—028—28—29
 • doorlopend: 22—23—24—25—26—27—28—29—30
 • uitdagend: 22—23—24—25—26—27—28—30—U5

In de tekening wordt een natuurkundig verschijnsel verklaard.

- In welke situatie valt de kast om en hoe zou je de kast op één hoekpunt kunnen laten balanceren?

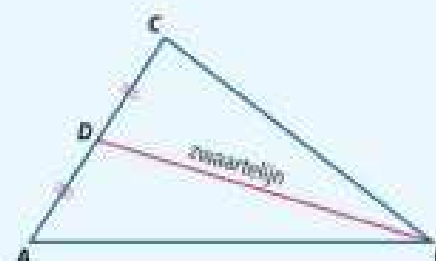


- 22**
- Neem je geodriehoek en probeer deze zo op de rand van een liniaal te leggen dat hij in evenwicht blijft. Zorg er voor dat één van de hoekpunten van de geodriehoek op de rand van de liniaal ligt.
 - Als de geodriehoek in evenwicht is, zie je de rand van de liniaal als een lijn door de geodriehoek lopen. Die lijn loopt door een hoekpunt en een punt op de zijde er tegenover. Controleer door te meten dat dit punt in het midden van die zijde ligt.
 - Ga na of dit ook zo is als je de geodriehoek met een ander hoekpunt op de rand van de liniaal legt.



Theorie

Het lijnstuk in een driehoek dat een hoekpunt verbindt met het midden van de zijde er tegenover, noem je de **zwaartelijne** uit dat hoekpunt.



Ondersteunende route → maak opdracht 023

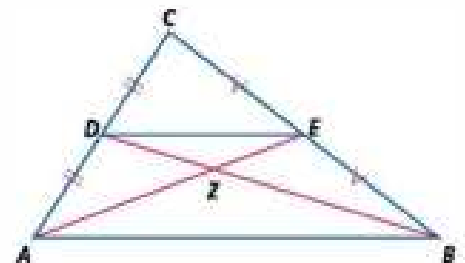
- 23**
- Teken in een assenstelsel de punten $P(1, 1)$, $Q(9, 1)$ en $R(3, 5)$ en teken $\triangle PQR$.
 - Teken de zwaartelijn uit punt R . Noem het snijpunt van de zwaartelijn met de zijde er tegenover S .
 - Teken ook de zwaartelijn PT .
 - Bereken de oppervlakte van $\triangle PQR$.
 - Bereken de oppervlakte van $\triangle PRS$ en van $\triangle QRS$. Wat valt je op?
 - Hoe groot zal de oppervlakte van $\triangle PRT$ zijn? Waarom?

- 24** Lia en Rob moeten een stuk kaas kopen van 500 gram. De winkelier pakt een driehoekig stuk kaas, weegt het en zegt: 'Met een beetje geluk snij ik het in twee stukken van elk 500 gram.' Rob: 'Ik weet hoe je moet snijden zodat de stukken precies even zwaar zijn.' Lia: 'Ik weet wel vier manieren.'
Welke vier manieren zal Lia bedoelen?

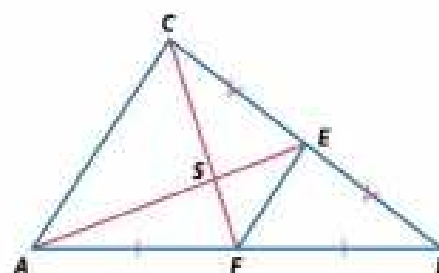


- 25**
- Teken $\triangle KLM$ met $KL = 7$ cm, $\angle K = 60^\circ$ en $KM = 10$ cm.
 - Teken de drie zwaartelijnen in de driehoek.
 - Welk vermoeden heb je over de snijpunten van de drie zwaartelijnen?

- 26** In $\triangle ABC$ snijden de zwaartelijnen AE en BD elkaar in punt Z . Er geldt dat $\triangle DEC$ en $\triangle ABC$ gelijkvormig zijn.
- Leg uit dat $\triangle ABC$ een vergroting is van $\triangle DEC$ met factor 2.
 - Leg uit dat $\triangle DEZ$ en $\triangle BAZ$ gelijkvormig zijn.
 - Met welke factor moet je de lengte van de zijden van $\triangle DEZ$ vermenigvuldigen om de lengte van de zijden van $\triangle BAZ$ te krijgen?
 - Waarom geldt $AZ : EZ = 2 : 1$?
 - En hoe zit dat met $BZ : DZ$?

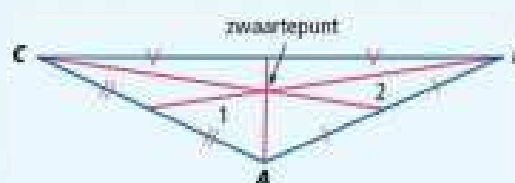


- 27** Hiernaast zie je $\triangle ABC$ uit opdracht 26 nogmaals, nu met de zwaartelijnen AE en CF . Deze zwaartelijnen snijden elkaar in punt S . Er geldt dat $\triangle FBE$ en $\triangle ABC$ gelijkvormig zijn.
- Leg op eenzelfde manier als in opdracht 26 uit waarom geldt dat $AS : ES = 2 : 1$.
 - En hoe zit dat met $CS : FS$?
 - In opdracht 26d vond je dat voor punt Z op zwaartelijns AE geldt $AZ : EZ = 2 : 1$. Welke betekenis heeft dit voor punt Z en punt S ? En voor de zwaartelijnen?
 - Welk vermoeden heb je nu bewezen?



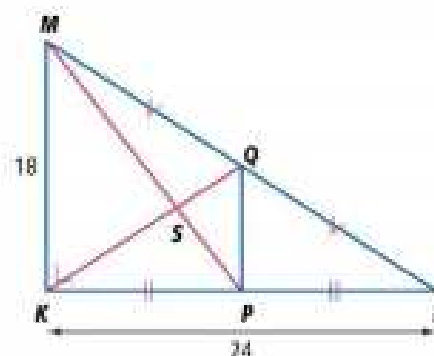
Theorie

In iedere driehoek snijden de drie zwaartelijnen elkaar in één punt. Dit snijpunt noem je het **zwaartepunt**. Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijnen in stukken die zich verhouden als $2 : 1$.

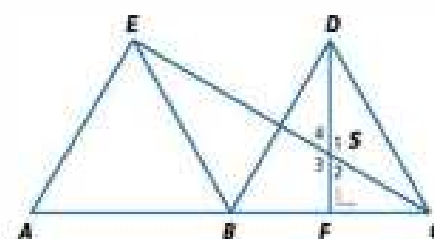


Ondersteunende route → maak opdracht 028

- 28** Van $\triangle KLM$ is $\angle K = 90^\circ$, $KL = 24$ en $KM = 18$. De zwaartelijnen KQ en MP snijden elkaar in punt S .
- Uit de gelijkvormigheid van welke twee driehoeken volgt dat de lijn PQ loodrecht staat op zijde KL ?
 - Waarom is de lijn PQ de middelloodlijn van zijde KL ?
 - Bereken KS en QS .
 - Toon aan dat $MP = 6\sqrt{13}$.
 - Bereken MS en PS .

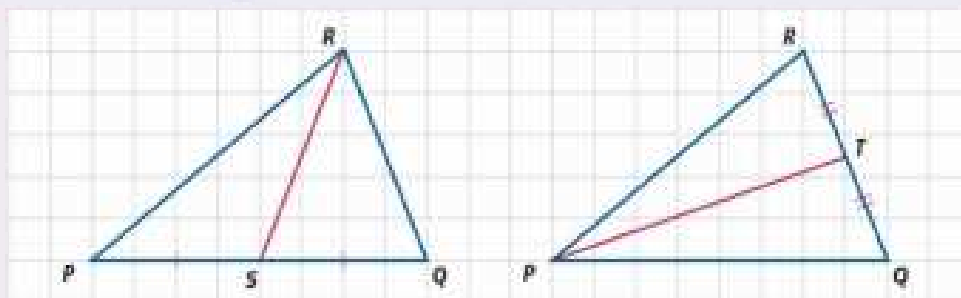


- 29**
- Teken $\triangle VWX$ met $\angle V = 80^\circ$, $VW = 6$ cm en $VX = 6$ cm.
 - Teken de zwaartelijns VY met punt Y op zijde WX .
 - Bewijs dat deze zwaartelijns ook deellijns en middelloodlijns is.
- 30** De driehoeken ABE en BCD zijn gelijkzijdig. In $\triangle ACE$ is lijnstuk BE een zwaartelijns. In $\triangle BCD$ is lijn DF een hoogtelijns.
- Bewijs dat $\angle S_1 = 120^\circ$.



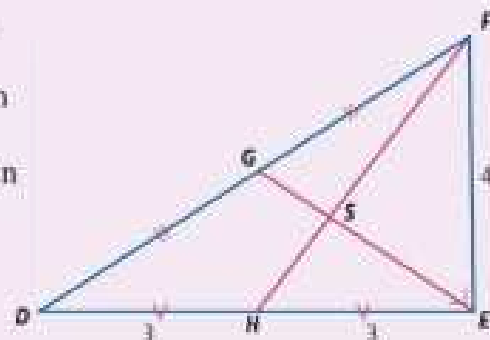
Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten



- 023** $\triangle PQR$ is twee keer getekend.
- W**
- Welke bijzondere lijn is er in de twee situaties getekend?
 - Bereken hoeveel roostervierkantjes de oppervlakte van $\triangle PQR$ is.
 - Toon met een berekening aan dat de oppervlakte van $\triangle PRS$ en de oppervlakte van $\triangle QRS$ gelijk zijn.
 - Hoeveel roostervierkantjes is de oppervlakte van $\triangle PRT$? Waarom?
 - Er is nog een derde lijn die de oppervlakte van $\triangle PQR$ in twee driehoeken met gelijke oppervlakte verdeelt. Teken deze lijn.

- 028** In $\triangle DEF$ snijden twee zwaartelijnen elkaar in het punt S .
- Wat voor bijzonder punt is punt S ?
 - Volgens welke verhouding deelt punt S de zwaartelijnen in twee stukken?
 - Tijn zegt: 'Door de verhouding weet ik dat de lengte van lijnstuk SF $\frac{2}{3}$ deel is van de lengte van lijnstuk FH .' Toon aan dat Tijn gelijk heeft.
 - Bereken FH en FS .



Uitdagende opdrachten

- U5** In $\triangle ABC$ snijden de zwaartelijnen uit de punten A , B en C de zijden er tegenover respectievelijk in de punten P , Q en R . Het punt S is het zwaartepunt.
- Van $\triangle ARS$ is $AR = 4$ cm, $AS = 2$ cm en $RS = 3$ cm.
- Maak een schets met alle gegevens erin.
 - Construeer eerst $\triangle ARS$ en teken daarna $\triangle ABC$. Licht je werkwijze toe.

Je leert

- hoe je een omgeschreven cirkel tekent
- hoe je een ingeschreven cirkel tekent

Leerroutes

- ondersteunend: 31—032—32—33—34—35—036—37
- doorlopend: 31—32—33—34—35—36—37—38
- uitdagend: 31—32—33—34—35—37—38—U6

In een graanveld is een graancirkel gemaakt die is opgebouwd uit drie cirkels en twee gelijkzijdige driehoeken.

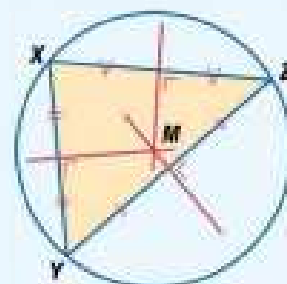
- Probeer de afbeelding van de graancirkel na te tekenen.



- 31**
- Teken een stomphoekige driehoek ABC .
 - Teken de drie middelloodlijnen. Noem het snijpunt van de drie middelloodlijnen M .
 - Waarom gaat de cirkel met middelpunt M en straal AM ook door de punten B en C ?
 - Teken die cirkel.

Theorie

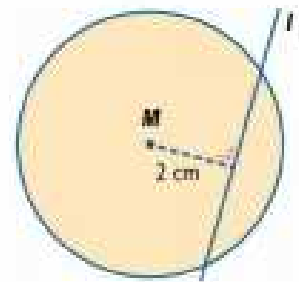
De cirkel door de hoekpunten van een driehoek heet de **omgeschreven cirkel** van de driehoek. Het middelpunt M van de omgeschreven cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen van de driehoek.



Ondersteunende route → maak opdracht 032

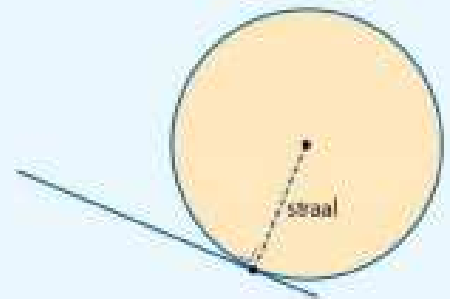
- 32**
- Teken een scherphoekige driehoek PQR en teken de omgeschreven cirkel van de driehoek.
 - Doe hetzelfde met een rechthoekige driehoek STU .
 - Waar ligt het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een rechthoekige driehoek?

- 33**
- Teken een cirkel met middelpunt M en straal 3 cm en een lijn l die op afstand 2 cm van punt M ligt.
 - In hoeveel punten snijdt lijn l de cirkel?
 - Lijn m loopt rechts van lijn l en is evenwijdig aan lijn l . Teken lijn m op afstand 4 cm van punt M .
 - Hoeveel punten heeft lijn m met de cirkel gemeenschappelijk?
 - Teken op dezelfde manier rechts van lijn l een evenwijdige lijn n op afstand 3 cm van punt M .
 - Hoeveel punten heeft lijn n met de cirkel gemeenschappelijk?
 - Ook lijn k is evenwijdig aan lijn l en heeft precies één punt gemeenschappelijk met de cirkel. Teken lijn k .



Theorie

Een lijn die één punt gemeenschappelijk heeft met een cirkel, raakt aan de cirkel. Zo'n lijn staat loodrecht op de straal van de cirkel.



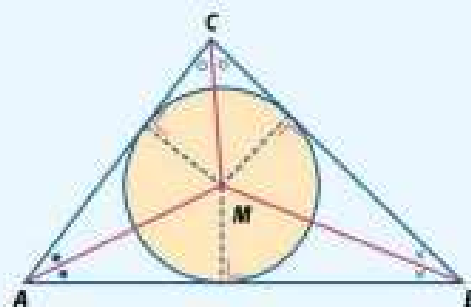
- 34**
- Teken een cirkel met middelpunt M en straal 3 cm en een punt P op 5 cm afstand van punt M .
 - Teken uit punt P de beide lijnen die aan de cirkel raken. Noem de punten waar de lijnen de cirkel raken Q en R .
 - Teken de lijnstukken MQ en MR .
 - Leg uit waarom geldt $\angle MQP = 90^\circ$ en $\angle MRP = 90^\circ$.
 - Bereken PQ .
 - Leg uit dat $PQ = PR$.
 - Waarom is lijn MP de deellijn van hoek P ?

- 35**
- Teken een scherphoekige driehoek UVW .
 - Teken de drie deellijnen. Noem het snijpunt M .
 - Teken de drie loodlijnen uit M op de zijden UV , VW en UW . Noem de snijpunten met de zijden respectievelijk X , Y en Z .
 - Vul het blaadje verder in.
 - Waarom gaat de cirkel met middelpunt M en straal MX ook door de punten Y en Z ?
 - Teken de cirkel met middelpunt M en straal MX .

☐	Punt M ligt op de deellijn van hoek U , dus $MX = \dots$
☐	Punt M ligt op de deellijn van hoek V , dus $MX = \dots$
☐	Hieruit volgt $MX = \dots = \dots$

Theorie

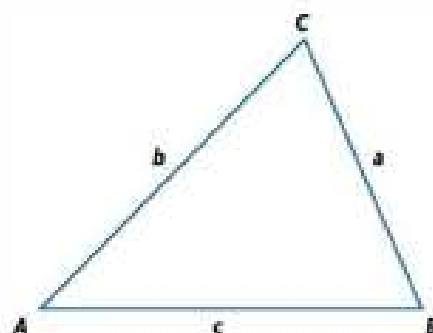
De cirkel die raakt aan de zijden van een driehoek heet de **ingeschreven cirkel** van de driehoek. Het middelpunt M van de ingeschreven cirkel is het snijpunt van de deellijnen van de driehoek. De straal van de ingeschreven cirkel is gelijk aan de afstand van punt M tot de zijden.



Ondersteunende route → maak opdracht 036

- 36 a Teken een stomphoekige driehoek PQR en construeer in driehoek PQR de ingeschreven cirkel van de driehoek.
b Doe hetzelfde met een rechthoekige driehoek XYZ .

- 37 **W** a Construeer de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Noem het middelpunt M en de straal r .
b Teken de loodlijnen uit M op de drie zijden.
c Leg uit dat voor de oppervlakte van $\triangle ABM$ geldt $\text{oppervlakte } \triangle ABM = \frac{1}{2} \times r \times c$.
d Geef een formule voor de oppervlakte van $\triangle ABC$ uitgedrukt in a , b , c en r .



- 38 a Teken een cirkel met middelpunt M en straal r .
b Teken een willekeurige vierhoek $ABCD$ waarvan de zijden raken aan de cirkel.
c Teken de loodlijnen uit M op de zijden AB en AD . Noem de snijpunten met de zijden respectievelijk X en Y .
d Leg uit waarom de lijnstukken AX en AY even lang zijn.
e De lengte van lijnstuk AB plus de lengte van lijnstuk CD kun je aangeven als $AB + CD$.
Laat zien waarom $AB + CD = AD + BC$.
f Teken de lijnstukken AM , BM , CM en DM .
g Teken de loodlijnen uit M op de twee andere zijden.
h Leg uit waarom geldt $\text{oppervlakte } \triangle ABM = \frac{1}{2} \times r \times AB$.
i Leg uit dat voor de oppervlakte van vierhoek $ABCD$ geldt $\text{oppervlakte vierhoek } ABCD = r \times (AB + CD)$.

Uitdagende route → maak opdracht U6

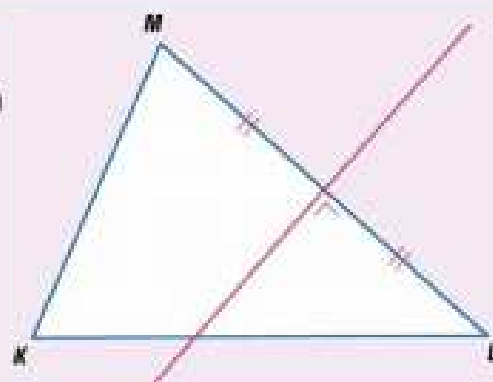
Ondersteunende opdrachten

032

W

In $\triangle KLM$ is een begin gemaakt met het tekenen van de omgeschreven cirkel.

- Is $\triangle KLM$ een scherphoekige, een stomphoekige of een rechthoekige driehoek?
- Wat voor bijzondere lijn is er in $\triangle KLM$ getekend?
- Teken ook bij de andere twee zijden zo'n lijn en vind daarmee het middelpunt van de omgeschreven cirkel.

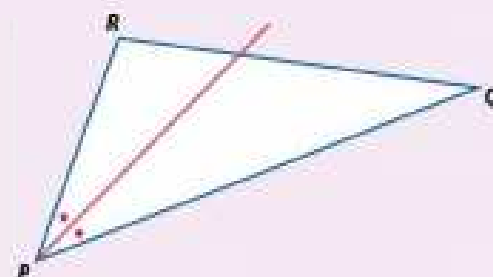


036

W

In $\triangle PQR$ is een begin gemaakt met het tekenen van de ingeschreven cirkel.

- Is $\triangle PQR$ een scherphoekige, een rechthoekige of een stomphoekige driehoek?
- Wat voor bijzondere lijn is er in $\triangle PQR$ getekend?
- Teken zo'n lijn ook bij de andere twee hoeken en vind daarmee het middelpunt van de ingeschreven cirkel.
- Teken zelf een rechthoekige driehoek VWX en teken de ingeschreven cirkel.



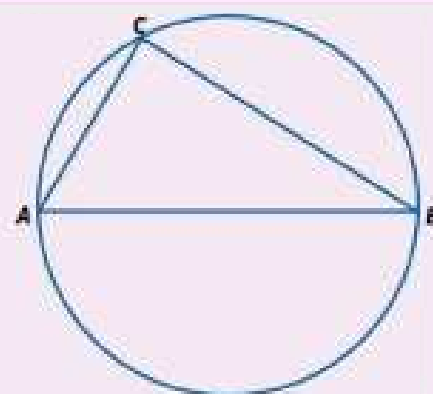
Uitdagende opdrachten

U6

W

In een cirkel is $\triangle ABC$ getekend met zijde AB als middellijn en punt C op de cirkel. De driehoek lijkt rechthoekig. Je gaat nu aantonen dat $\angle C = 90^\circ$.

- Waarom ligt het middelpunt M van de cirkel op lijnstuk AB ?
- Lijnstuk CM verdeelt $\angle ACB$ in $\angle C_1 = \angle ACM$ en $\angle C_2 = \angle MCB$.
Teken lijnstuk CM .
- Leg uit waarom $\angle A = \angle C_1$.
- Vul het blaadje verder in.



☐	$\angle A + \angle B + \angle C_{\text{uit}} = \dots^\circ$	}	$\dots + \dots + \angle C_{\text{uit}} = \dots^\circ$
☐	$\angle A = \angle C_1$		
☐	$\angle B = \angle C_2$		
☐	Dus $\angle C_{\text{uit}} = \dots^\circ$		

- Heb je nu bewezen dat $\angle C = 90^\circ$?

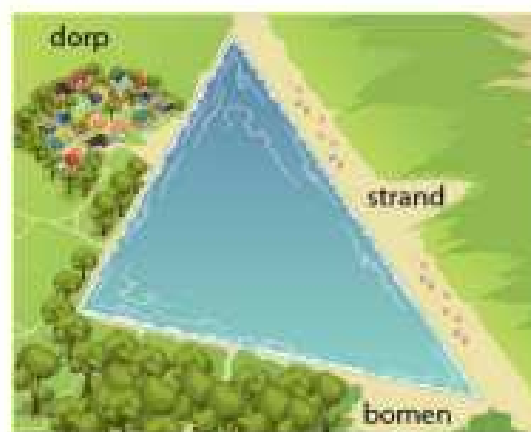
Deze paragraaf bevat opdrachten die een indruk geven van wiskunde B.

- 39** Leon en Erik zijn aan het zwemmen in een kunstmatig aangelegd meertje dat de vorm van een driehoek heeft. Leon wordt moe en wil naar de dichtstbijzijnde oever zwemmen. Volgens Erik moeten ze naar de oever met de bomen zwemmen.

W

Ga ervan uit dat Erik gelijk heeft.

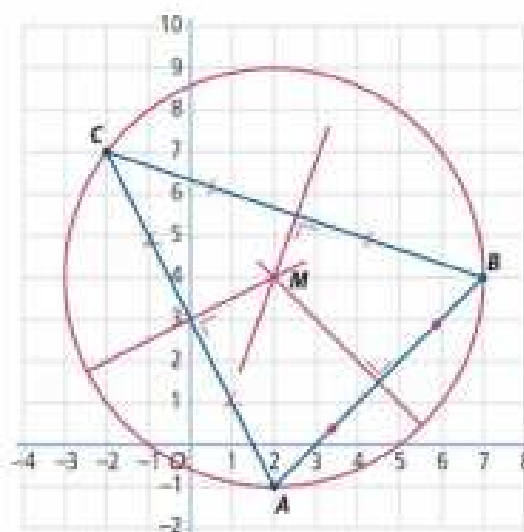
- Geef aan in welk deel van het meertje Leon en Erik zich bevinden.
- Welke bijzondere lijnen heb je gebruikt om je tekening te maken? Leg uit waarom je deze lijnen gebruikt hebt.



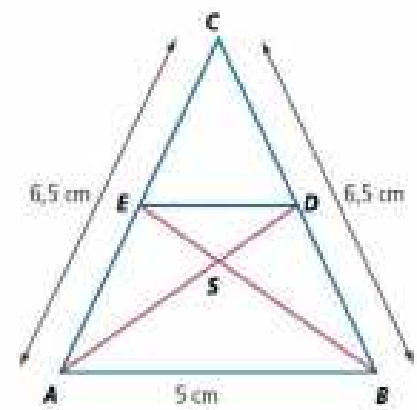
- 40**
- Teken $\triangle ABC$ met $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm en $\angle B = 90^\circ$.
 - Teken alle punten die even ver van zijde AB als van zijde AC af liggen.
 - Teken de zwaartelijns uit punt C .
 - Waar ligt het hoogtepunt van $\triangle ABC$?
 - Leg uit waar het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ ligt.
 - Arceer het gebied binnen de driehoek waar de punten liggen die dicht bij punt C dan bij punt A liggen.

- 41** In een assenstelsel is $\triangle ABC$ met $A(2, -1)$, $B(7, 4)$ en $C(-2, 7)$ getekend. Punt M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

- Hoe groot is de straal van de omgeschreven cirkel? Licht je antwoord met berekeningen toe.
- De omgeschreven cirkel snijdt de horizontale as in de punten D en E . Geef de coördinaten van D en van E .
- De omgeschreven cirkel snijdt de verticale as in de punten F en G . Bereken de coördinaten van F en van G .
- Een cirkel met middelpunt M raakt aan zijde BC . Is de straal van deze cirkel groter dan, kleiner dan of even groot als de straal van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$? Licht je antwoord toe.

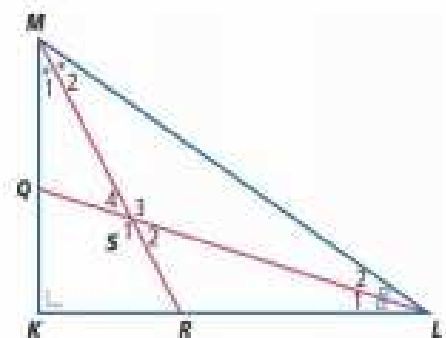


- 42** Van $\triangle ABC$ is $AB = 5$ cm, $AC = 6,5$ cm en $BC = 6,5$ cm. De zwaartelijnen AD en BE snijden elkaar in punt S .
- Wat voor een bijzondere driehoek is $\triangle ABC$?
 - Leg uit dat $\triangle ABC$ en $\triangle EDC$ gelijkvormig zijn.
 - Bereken met de stelling van Pythagoras de afstand van punt C tot zijde AB .
 - Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.
 - Met welk getal moet je de oppervlakte van $\triangle ABC$ vermenigvuldigen om de oppervlakte van $\triangle EDC$ te krijgen?
 - Bereken CS .



- B43**
- Van $\triangle VWX$ is $\angle W = 80^\circ$ en $WX = 5$ cm. De zwaartelijns uit punt X snijdt zijde VW in punt Y zó dat $XY = 6$ cm. Construeer eerst $\triangle WXY$ en dan $\triangle VWX$.
 - Van $\triangle DEF$ is $\angle D = 50^\circ$ en $DF = 6$ cm. De zwaartelijns uit punt F snijdt zijde DE in punt G zó dat $FG = 5$ cm. Construeer $\triangle DEF$. Er zijn twee driehoeken mogelijk!
 - Van $\triangle RST$ is $\angle R = 70^\circ$ en $RS = 6$ cm. De deellijn uit punt R snijdt zijde ST in punt U zó dat $RU = 5$ cm. Construeer $\triangle DEF$.

- B44** In $\triangle KLM$ is $\angle K = 90^\circ$. De deellijnen van hoek L en hoek M snijden elkaar in punt S .
- Neem $\angle L_2 = 50^\circ$ en bereken $\angle M_2$ en $\angle S_3$.
 - Neem nu $\angle L_2 = 72^\circ$ en bereken $\angle S_3$.
 - Welk vermoeden heb je voor de grootte van $\angle S_3$ als je de grootte van $\angle L_2$ willekeurig kiest?
 - Stel nu dat $\angle L_2 = x^\circ$. Hoe groot is $\angle L_2 + \angle M_2$ dan?
 - En hoe groot is $\angle S_3$ dus?



Theorie

Loodlijn

Een loodlijn op een lijn l is een lijn die loodrecht staat op lijn l .



- S1 a Teken in een assenstelsel de punten $P(1, 1)$, $Q(8, 4)$, $R(1, 5)$ en $S(7, 2)$ en de lijn l door de punten P en Q .
b Teken de loodlijnen uit punt R en punt S op lijn l .

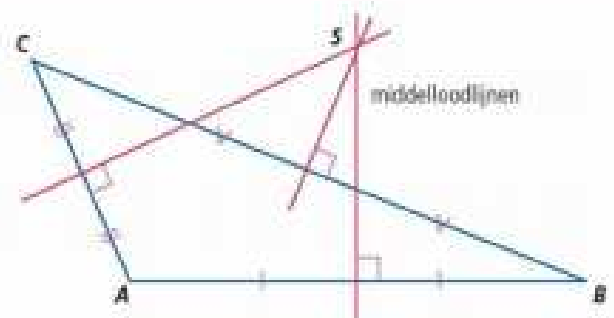
Vaardigheid

Je kunt een middelloodlijn construeren en deze gebruiken.

De middelloodlijn van een lijnstuk AB is de lijn die door het midden van lijnstuk AB gaat en er loodrecht op staat. Alle punten op de middelloodlijn van lijnstuk AB liggen even ver van punt A als van punt B .

De drie middelloodlijnen in een driehoek snijden elkaar in één punt.

Hieronder zie je hoe je de middelloodlijn construeert.



- S2 **W** Dave, Ertan, Femke en Shanti spelen tikkertje. Shanti is de tikker. Samen vormen Dave, Ertan en Femke een driehoek.

- a Construeer de drie middelloodlijnen van deze driehoek. Laat de cirkelbogen staan.
b Maak gebruik van de eigenschappen van de middelloodlijnen om aan te tonen bij welke persoon Shanti het dichtst staat.



Vaardigheid

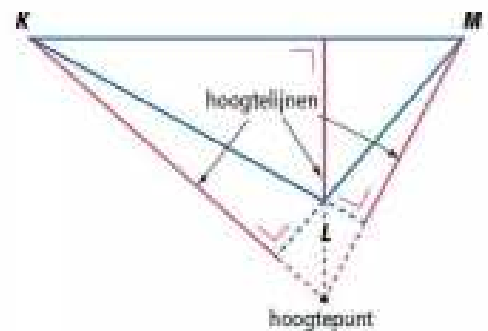
Je kunt een hoogtelijn tekenen en deze gebruiken.

De hoogtelijn vanuit een hoekpunt in een driehoek is de loodlijn vanuit dat hoekpunt op de zijde er tegenover.

Een hoogtelijn kan ook buiten de driehoek liggen.

Bij het berekenen of meten van de afstand tussen een hoekpunt en de zijde er tegenover gebruik je de hoogtelijn.

De drie hoogtelijnen in een driehoek snijden elkaar in één punt. Dit snijpunt noem je het hoogtepunt.



- S3**
- a Teken $\triangle DEF$ met $DE = 5$ cm, $\angle D = 120^\circ$ en $\angle E = 30^\circ$.
 - b Teken het hoogtepunt van deze driehoek.
 - c Eén van de hoogtelijnen is een middelloodlijn van een zijde van de driehoek.
Door welk hoekpunt gaat deze hoogtelijn?

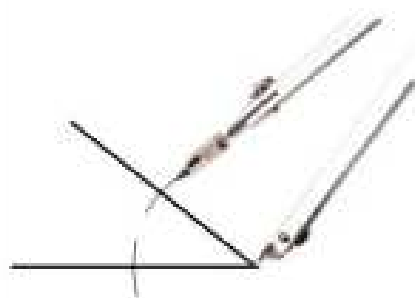
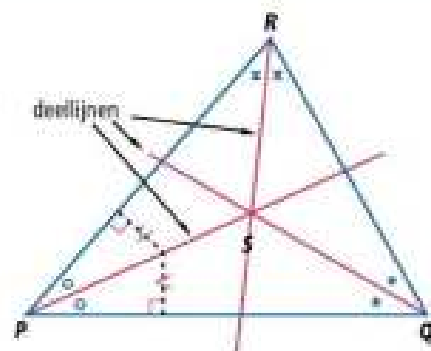
Vaardigheid

Je kunt een deellijn construeren en deze gebruiken.

De deellijn van een hoek is de lijn die de hoek in twee gelijke delen verdeelt. Alle punten op de deellijn van een hoek liggen even ver van de benen van die hoek.

De drie deellijnen in een driehoek snijden elkaar in één punt.

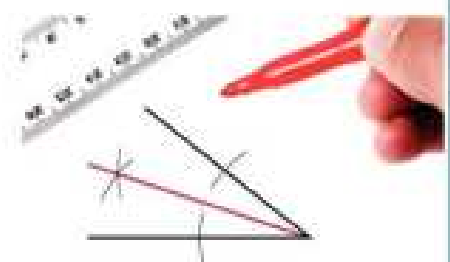
Hieronder zie je hoe je de deellijn van een hoek construeert.



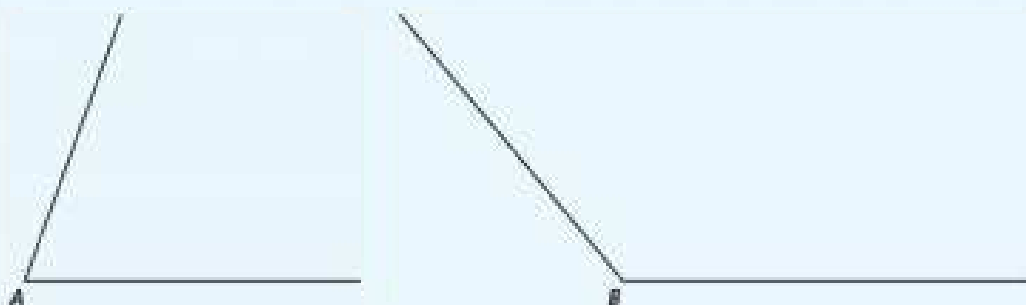
1



2



3



S4 Construeer de deellijn van hoek A en van hoek B . Laat de cirkelbogen staan.

S5 Drie landen grenzen aan de Binnensee. Omdat er gas gevonden wordt onder de zeebodem besluiten de regeringen de Binnensee te verdelen tussen de drie landen. Het deel van de Binnensee gaat horen bij het land waar dat deel van de Binnensee het dichtst bij ligt.

- Teken de lijnen die de Binnensee tussen de drie landen verdelen.
- Zijn er nul, één, twee of meer punten die even ver van de drie landen af liggen? Licht je antwoord toe.



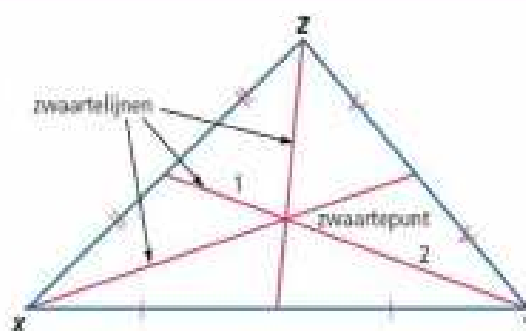
Vaardigheid

Je kunt een zwaartelijnen tekenen en deze gebruiken.

De zwaartelijnen vanuit een hoekpunt in een driehoek is het lijnstuk dat het hoekpunt verbindt met het midden van de zijde er tegenover.

De drie zwaartelijnen in een driehoek snijden elkaar in één punt. Dit snijpunt noem je het zwaartepunt.

Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijnen in stukken die zich verhouden als 2 : 1.



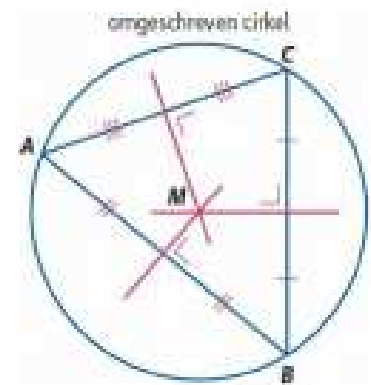
S6 Van $\triangle ABC$ is $AB = 5$ cm, $BC = 5$ cm en $AC = 6$ cm.

- Construeer $\triangle ABC$.
- Teken de zwaartelijnen CD en BE met de punten D en E op de zijden tegenover de hoekpunten. Noem het snijpunt S .
- Hoe noem je punt S ook wel?
- Beredeneer dat $\angle AEB = 90^\circ$.
- Bereken BE .
- Hoe lang is lijnstuk BS ?

Vaardigheid

Je kunt een omgeschreven cirkel tekenen.

De omgeschreven cirkel van een driehoek is de cirkel door de hoekpunten van de driehoek. Het middelpunt M van de omgeschreven cirkel vind je door de drie middelloodlijnen van de driehoek te tekenen.



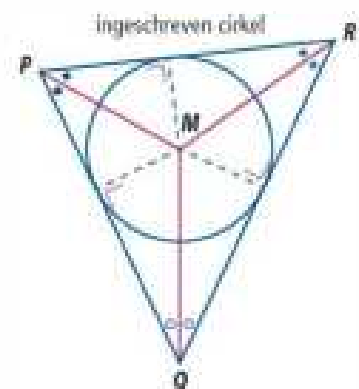
- S7**
- Teken een assenstelsel. Neem de horizontale as vanaf 0 tot en met 12 en de verticale as vanaf -5 tot en met 6. Teken de punten $P(1, 0)$, $Q(10, 4)$ en $R(3, 5)$ en teken $\triangle PQR$.
 - Teken de omgeschreven cirkel van $\triangle PQR$.
 - Is $\triangle PQR$ een scherphoekige, een rechthoekige of een stomphoekige driehoek?
 - Ligt het middelpunt binnen, op of buiten de driehoek?

Vaardigheid

Je kunt een ingeschreven cirkel tekenen.

Een lijn die één punt gemeenschappelijk heeft met een cirkel, raakt aan de cirkel. Zo'n lijn staat loodrecht op de straal van de cirkel.

De ingeschreven cirkel van een driehoek is de cirkel die raakt aan de zijden van de driehoek. Het middelpunt M van de ingeschreven cirkel vind je door de drie deellijnen van de driehoek te tekenen. De straal van de cirkel is gelijk aan de afstand van punt M tot de zijden.



- S8**
- Teken een stomphoekige driehoek KLM en teken in driehoek KLM de ingeschreven cirkel van de driehoek.
 - Doe hetzelfde met een rechthoekige driehoek STU .
 - Kan het middelpunt van de ingeschreven cirkel buiten de driehoek liggen? Licht je antwoord toe.

T1 In de Grote Oceaan liggen de eilandjes Flint, Caroline en St. Elisabeth. Er is olie aangeboord, dus de zee moet verdeeld worden.

W

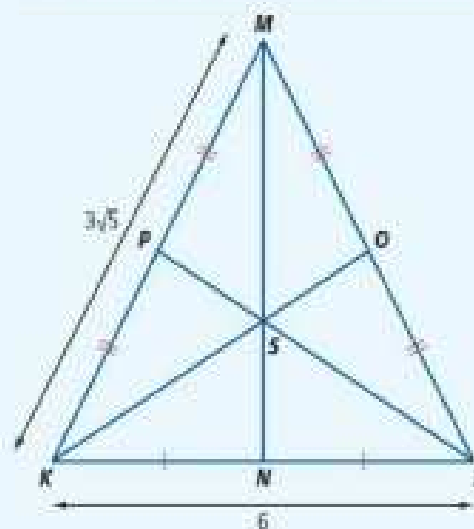
- Ligt de boortoren het dichtst bij het eiland Flint, Caroline of St. Elisabeth?
- Verdeel de zee tussen de drie eilanden. Licht je werkwijze toe.
- Wat voor soort driehoek wordt gevormd door de drie eilandjes? En door Flint, Caroline en de boortoren?
- Je kunt de drie eilandjes met rechte lijnen met elkaar verbinden.

Hoe noem je de kortste lijnen van de boortoren naar die verbindingslijnen? En van welke verbindingslijn ligt de boortoren het verst af?



- T2**
- Teken in een assenstelsel de punten $K(6, 2)$ en $L(2, 6)$. Teken vervolgens $\triangle KLO$ waarbij het punt O de oorsprong is.
 - Toon met een berekening aan dat twee zijden van $\triangle KLO$ even lang zijn. Welke zijden zijn dat?
 - Teken de drie hoogtelijnen van $\triangle KLO$.
 - Een van de hoogtelijnen is tevens een deellijn van een hoek van $\triangle KLO$. Welke hoogtelijn is dat?
 - Bewijs dat de hoogtelijn tevens een deellijn is.
 - Bewijs dat de afstand van O tot zijde KL gelijk is aan de lengte van KL .

- T3**
- In de gelijkbenige driehoek KLM is $KL = 6$ en $KM = ML = 3\sqrt{5}$.
- Welke bijzondere lijnen zijn de lijnen KO , LP en MN ?
 - Toon met een berekening aan dat $MN = 6$.
 - Bereken KS .
 - Bereken de oppervlakte van $\triangle LMP$.

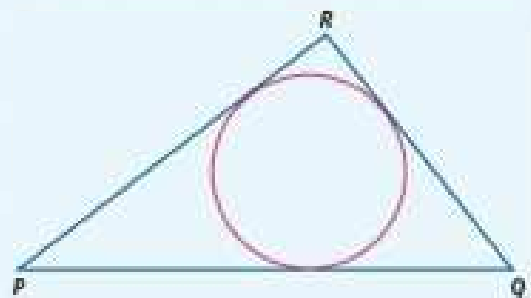


- T4**
- Teken $\triangle PQR$ met $PQ = 8$ cm, $\angle P = 60^\circ$ en $PR = 8$ cm.
 - Teken de zwaartelijn RS met punt S op zijde PQ .
 - Beredeneer dat van $\triangle PQR$ de zwaartelijn RS ook deellijn en middelloodlijn is.
 - Waarom is $\triangle PQR$ een gelijkzijdige driehoek?
 - Leg uit waarom in een gelijkzijdige driehoek iedere zwaartelijn altijd ook een deellijn en een middelloodlijn is.

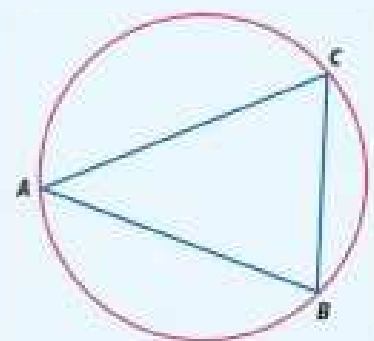
- T5**
- Teken in een assenstelsel $\triangle ABD$ met $A(1, 1)$, $B(8, 2)$ en $D(2, 4)$.
 - In $\triangle ABC$ ligt punt C op de lijn door de punten A en D zodat lijnstuk BD de zwaartelijn is vanuit punt B . Geef de coördinaten van punt C en teken $\triangle ABC$.
 - Wat voor soort driehoek is $\triangle ABC$?
 - Bewijs dat de lijn BD tevens de middelloodlijn is van zijde AC .
 - Het punt $E(x, 6)$ ligt op de lijn BD . Hoe groot is x ?

- T6** In $\triangle PQR$ past precies een cirkel.

- W**
- Hoe noem je zo'n cirkel?
 - Teken het middelpunt van deze cirkel.



- T7** Een cirkel gaat door de drie hoekpunten van $\triangle ABC$. Teken het middelpunt van deze cirkel.



Je kunt een middelloodlijn construeren en deze gebruiken.

- E1** **W**
- Construeer de middelloodlijn van zijde AB en van zijde BC . Laat de cirkelbogen staan. Noem het snijpunt S .
 - Ligt punt S binnen, op of buiten $\triangle ABC$? Verklaar dat.

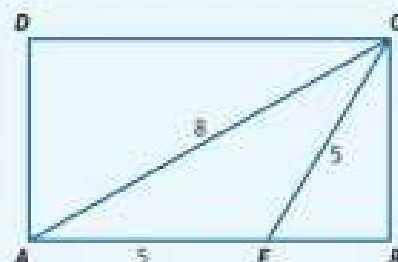


- E2**
- Teken $\triangle XYZ$ met $\angle X = 70^\circ$, $XY = 6$ cm, en $\angle Y = 50^\circ$.
 - Is $\triangle XYZ$ een scherphoekige, een rechthoekige of een stomphoekige driehoek?
 - Teken de middelloodlijnen van de zijden XZ en YZ .
 - Binnen $\triangle XYZ$ ligt een punt P dat dichterbij X ligt dan bij Z , maar ook dichterbij Y ligt dan bij Z . Kleur het gebied waar punt P kan liggen.

Je kunt een hoogtelijn tekenen en deze gebruiken.

- E3**
- Teken $\triangle KLM$ met $\angle K = 50^\circ$, $KL = 6$ cm en $\angle L = 30^\circ$.
 - Teken de hoogtelijnen KS , LT en MU met de punten S , T en U achtereenvolgens op de lijnen door L en M , door K en M en door K en L . Noem het hoogtepunt H .
 - Leg uit dat in $\triangle KLS$ geldt dat $\angle K = 60^\circ$.
 - Bereken de zes hoeken bij punt H .

- E4**
- Wat voor bijzondere driehoek is $\triangle AEC$?
 - Maak een schets van de figuur en teken de hoogtelijn vanuit punt E op diagonaal AC .
 - Toon aan dat de oppervlakte van $\triangle AEC$ gelijk is aan 12.
 - Lijn BC is ook een hoogtelijn van $\triangle AEC$. Bereken de lengte van zijde BC .
 - Bereken de oppervlakte van rechthoek $ABCD$.



Je kunt een deellijn construeren en deze gebruiken.

- E5**
- Teken een hoek van 138° en construeer de deellijn van die hoek.

- E6** Paquita zwemt al een poosje in zee en voelt dat ze kramp krijgt. Ze wil zo snel mogelijk naar het strand.
- W**
- Teken hoe Paquita moet zwemmen zodat de afstand tot het strand zo kort mogelijk is.
 - Meet hoeveel meter die afstand is.
 - Teken de punten die even ver van het strand als van de pier liggen.
 - Kan Paquita beter naar het strand of naar de pier toe zwemmen? Waarom?

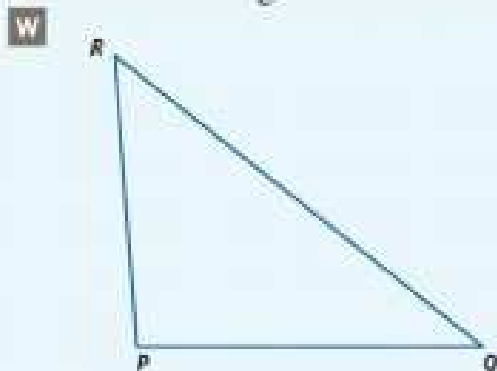


Je kunt een zwaartelijntekenen en deze gebruiken.

- E7**
- Teken in een assenstelsel de punten $A(5, 2)$, $B(11, 4)$ en $C(1, 6)$ en teken $\triangle ABC$.
 - Teken de zwaartelijnt uit punt A . Noem het snijpunt van de zwaartelijnt met de zijde er tegenover D .
 - Is in $\triangle ABC$ de zwaartelijnt AD ook de deellijnt van hoek A ? Waarom (niet)?
 - Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$ en van $\triangle ABD$.
 - Teken de zwaartelijnt BE . Het snijpunt met AD is punt S .
 - Bereken AD en AS .

Je kunt een omgeschreven cirkel tekenen.

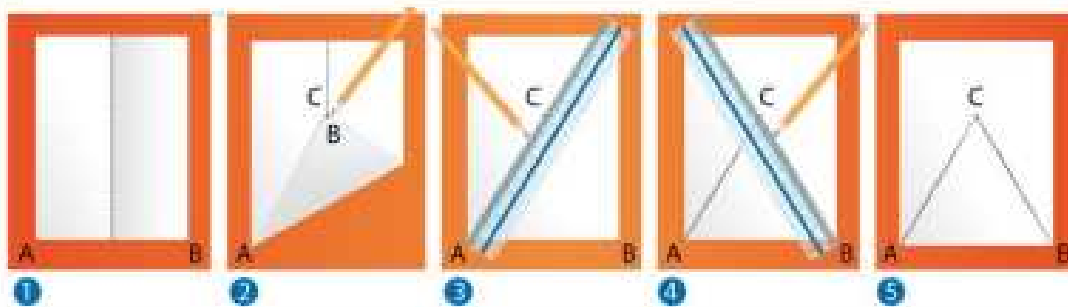
- E8** Teken de omgeschreven cirkel van $\triangle PQR$.



Je kunt een ingeschreven cirkel cirkel tekenen.

- E9**
- Teken $\triangle XYZ$ met $\angle X = 50^\circ$, $XY = 6$ cm en $XZ = 8$ cm.
 - Teken de ingeschreven cirkel van $\triangle XYZ$.

Tussendoortje | Driehoeken vouwen



Een gelijkzijdige driehoek

Je kunt een gelijkzijdige driehoek maken door een rechthoekig stuk papier te vouwen.

1. Neem een rechthoekig stuk papier, vouw het in de lengterichting precies in twee gelijke stukken en vouw het weer open.
2. Vouw het papier door punt A zodat punt B precies op die vouwlijn komt. Zet een stip waar punt B op die vouwlijn komt.
3. Verbind de punten A en C .
4. Verbind de punten B en C .
5. Driehoek ABC is een gelijkzijdige driehoek.

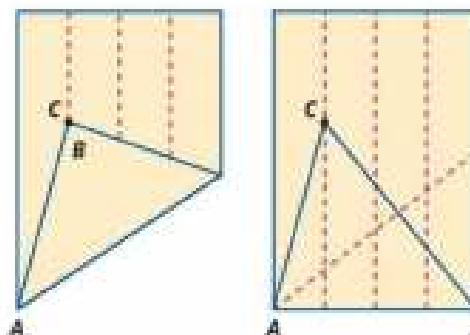
De berekening

- Laat met de cosinus zien dat driehoek ABC inderdaad een gelijkzijdige driehoek is.

Een andere driehoek

Wanneer je het stuk papier in de lengterichting niet in twee, maar in vier gelijke stukken verdeelt, kun je door te vouwen een andere driehoek maken.

- Probeer eens uit te rekenen hoe groot de hoeken van die driehoek zijn.





Vergelijkingen en ongelijkheden 11A

In dit hoofdstuk

In klas 2 heb je lineaire en kwadratische vergelijkingen opgelost. In hoofdstuk 4 heb je bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen de *abc*-formule leren gebruiken.

In dit hoofdstuk ga je ook leren hoe je andere soorten vergelijkingen oplost.

Verder leer je in dit hoofdstuk hoe je de coördinaten van de snijpunten van een parabool en een lijn berekent.

Ongelijkheden kun je oplossen met behulp van grafieken. De intervalnotatie die je hebt leren kennen in hoofdstuk 8, wordt daarvoor uitgebreid.

Dit hoofdstuk is bedoeld voor leerlingen die in de bovenbouw verdergaan met wiskunde A of C.

V1 Bereken zonder rekenmachine.

a $\sqrt[3]{8}$

c $\sqrt[3]{-27}$

b $\sqrt[3]{-1}$

d $\sqrt[3]{1000}$

Het getal $\sqrt[3]{24}$ is geen geheel getal, want er is geen geheel getal waarvan de derde macht gelijk aan 24 is.

Met de rekenmachine vind je dat $\sqrt[3]{24} \approx 2,88$.

Je kunt ook de derdemachtswortel van een negatief getal uitrekenen. Zo is $\sqrt[3]{-216} = -6$, want $(-6)^3 = -216$.

V2 Geef een benadering in twee decimalen.

a $\sqrt[3]{18}$

c $\sqrt[3]{-8,5}$

b $\sqrt[3]{-100}$

d $\sqrt[3]{0,8}$

V3 Op de getallenlijnen zijn intervallen aangegeven. Bij elke getallenlijn hoort een intervalnotatie.

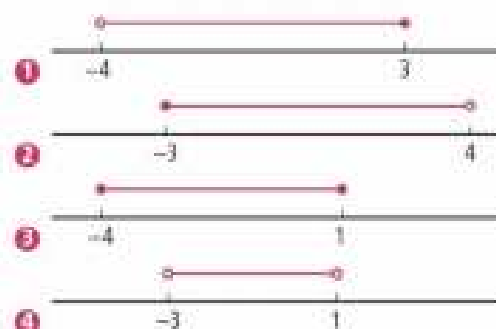
Koppel ze aan elkaar en vul de intervalnotatie verder in.

A $[-4, \dots$

C $\langle -3, \dots$

B $\langle -4, \dots$

D $[-3, \dots$



V4 Los de ongelijkheden op. Schrijf je antwoord zo nodig als breuk.

a $5x - 6 > 3x + 9$

c $4x > x - 30$

b $-7x + 8 < -7 - 2x$

d $4 - x < 18 + 2x$

V5 a De grafiek van $f(x) = 2x^2 + x - \frac{1}{2}$ is een parabool.

Leg uit dat de parabool de y -as snijdt in het punt $(0, -\frac{1}{2})$.

b Om de andere x -waarde te vinden die ook $-\frac{1}{2}$ als uitkomst heeft, gebruik je de vergelijking

$$2x^2 + x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Los deze vergelijking op.

c Bereken met de abc -formule de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as.

De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft als oplossing(en):

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Daarbij is $D = b^2 - 4ac$.

	Nienke
☐	$3x^2 + 4x = 18 + x$
☐	$3x^2 + 3x - 18 = 0$
☐	$x^2 + x - 6 = 0$
☐	$(x-2)(x+3) = 0$
☐	$x-2 = 0$ of $x+3 = 0$
☐	$x = 2$ of $x = -3$

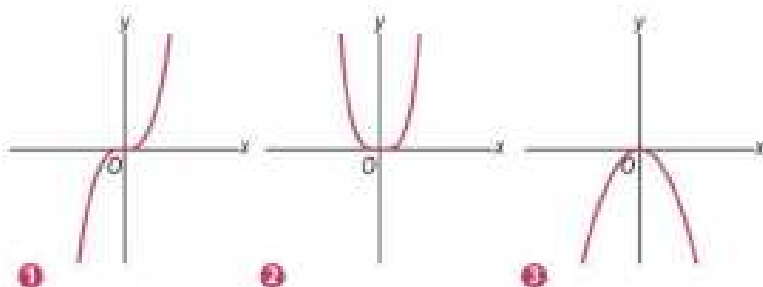
	Rien
☐	$x^2 + 4x - 8 = 0$
☐	$(x+2)^2 - 4 - 8 = 0$
☐	$(x+2)^2 = 12$
☐	$x+2 = -\sqrt{12}$ of $x+2 = \sqrt{12}$
☐	$x = -2 - \sqrt{12}$ of $x = -2 + \sqrt{12}$

	Daan
☐	$(x+2)^2 + 3 = 28$
☐	$(x+2)^2 = 25$
☐	$(-5)^2 = 25$ en $5^2 = 25$ dus
☐	$x+2 = -5$ of $x+2 = 5$
☐	$x = -7$ of $x = 3$

- V6** In opdracht V5 heb je een kwadratische vergelijking met de *abc*-formule opgelost. Nienke, Rien en Daan hebben ook kwadratische vergelijkingen opgelost. De een met ontbinden in factoren, de ander met bordje leggen en de derde met kwadraat afsplitsen. Geef voor elk aan welke oplosmethode is gebruikt.

- V7** Los de vergelijkingen op.

- a** $x^2 - 11x + 24 = 0$ **d** $-x^2 + 6x + 3 = 11$
b $(x-3)^2 - 2 = 14$ **e** $x^2 + x = 12 + 2x$
c $x^2 + 7x = 8$ **f** $3x^2 - 8x - 3 = 0$



- V8** In de figuur zijn de grafieken van de functies $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^3$ en $h(x) = x^4$ geschetst.
- Zoek bij iedere functie de juiste grafiek.
 - Geef bij elke grafiek aan hoeveel snijpunten deze heeft met de lijn $y = -10$.
 - Welke grafiek heeft geen snijpunt met de lijn $y = 10$?

11A.1 Gebroken vergelijkingen

Je leert

- wat een gebroken vergelijking is
- hoe je een gebroken vergelijking oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 1-2-3-04-4-5-06-7
- basis: 1-2-3-4-5-6-7-8
- uitdagend: 1-2-4-5-6-7-U1-U2

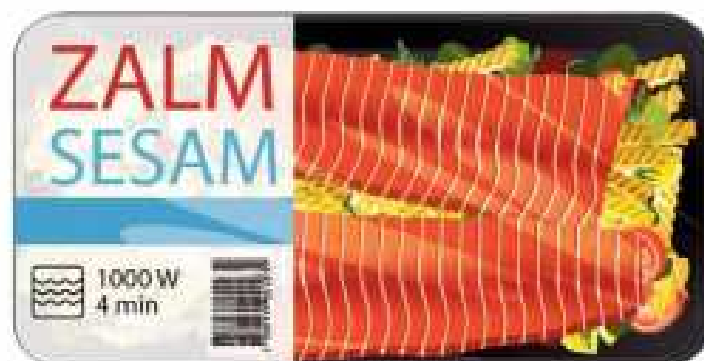
Op de maaltijd staat hoelang je het product in de magnetron moet verwarmen.

De bereidingstijd in minuten bereken je met

$$\text{bereidingstijd} = \frac{4000}{\text{vermogen}}$$

Hierin is het vermogen in watt (W). In de magnetron van Halina heeft deze maaltijd vijf minuten bereidingstijd nodig.

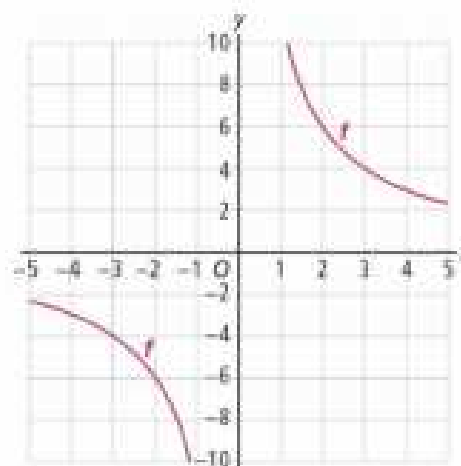
- Hoe groot is het vermogen van deze magnetron?



- 1 In het assenstelsel is de grafiek van de gebroken functie

$$f(x) = \frac{12}{x} \text{ getekend.}$$

- Wat gebeurt er met de waarde van $f(x)$ als je x steeds verder van 0 kiest?
- Bereken $f(1000)$ en $f(-1000)$.
- Leg uit waarom $f(0)$ niet bestaat.
- Wat gebeurt er met de waarde van $f(x)$ als je x steeds dichterbij 0 kiest?
- Los de vergelijking $\frac{12}{x} = 12\,000$ op.



- 2 Gegeven is de gebroken functie $f(x) = \frac{72}{x-5}$

- Jordy wil de vergelijking $\frac{72}{x-5} = 6$ oplossen.
Hij legt een bordje op $x = 5$.
Leg uit waarom het getal 12 op de plaats van het bordje komt.
Welke waarde voor x vindt hij vervolgens?
- Los op dezelfde manier $\frac{72}{x-5} = 8$ en $\frac{72}{x-5} = 144$ op.

Denk aan:

$$\frac{6}{3} = 2 \text{ en } \frac{6}{2} = 3$$

Theorie

Een vergelijking als $\frac{36}{3-4a} = 12$ of als $\frac{45}{2p-7} + 2 = 7$, met de variabele in de noemer van de breuk, noem je een **gebroken vergelijking**. Een gebroken vergelijking los je meestal op met bordjes. Het bordje leg je dan op de noemer van de breuk. Soms moet je de vergelijking eerst vereenvoudigen door de breuk te isoleren.

Voorbeeld

Los op: $\frac{45}{2p-7} + 2 = 7$

Oplossing

$$\frac{45}{2p-7} = 5$$

breuk geïsoleerd

$$\frac{45}{9} = 5$$

bordje gelegd

$$2p - 7 = 9$$

$$2p = 16$$

$$p = 8$$

- 3 a Leg uit hoe in het voorbeeld de breuk geïsoleerd wordt.
 b Hoe weet je dat het getal 9 op het bordje moet staan?
 c Los op dezelfde manier $\frac{45}{2p-7} + 5 = 8$ op.

Ondersteunende route → maak opdracht 04

- 4 Los de vergelijkingen op.

a $\frac{18}{2x+1} = 2$

d $\frac{45}{11-4x} + 7 = 12$

b $\frac{-16}{6a-10} = -8$

e $18 + \frac{70}{3m+1} = 4$

c $\frac{100}{-7+2p} = -4$

f $1 - \frac{20}{4a} = 5$

- 5 Gegeven zijn $f(x) = \frac{8}{x}$ en $g(x) = x + 2$.

- a Teken de grafieken van f en g in één assenstelsel. Neem voor x de waarden -4 tot en met 4 .
 b Lees de coördinaten van de snijpunten af en controleer of deze coördinaten inderdaad bij de snijpunten horen.
 c Salih wil de coördinaten van de snijpunten van de grafieken gaan berekenen. Hij stelt daarom de functievoorschriften aan elkaar gelijk. Op het blaadje zie je welke vergelijking hij dan krijgt. Om de breuk weg te werken, vermenigvuldigt Salih eerst links en rechts van het gelijkteken met x .
 Waarom blijft aan de linkerkant alleen 8 over?
 d Los de vergelijking op.
 e Heb je voor x dezelfde waarden gevonden als bij opdracht b?

					Salih
•	$\frac{8}{x} = x + 2$				
•	$x \cdot \frac{8}{x} = x(x + 2)$				
•	$8 = \dots$				

Aanpak**Hoe los je een gebroken vergelijking op?**

- 1 Isoleer indien nodig de breuk zodat deze alleen komt te staan.
- 2 Als de variabele alleen in de noemer van de breuk staat, gebruik dan bordjes.
Staan er aan beide kanten van het gelijkteken variabelen, vermenigvuldig dan links en rechts van het gelijkteken met de noemer van de breuk. Gebruik daarbij haakjes.
- 3 Los de vergelijking verder op.

Voorbeeld

Los op: $x = \frac{6}{x+2} - 1$

Oplossing

1 $x + 1 = \frac{6}{x+2}$

2 $(x+2)(x+1) = \frac{6}{x+2} \cdot (x+2)$

3 $x^2 + 3x + 2 = 6$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x+4)(x-1) = 0$$

$$x+4=0 \text{ of } x-1=0$$

$$x=-4 \text{ of } x=1$$

Ondersteunende route → maak opdracht 06

- 6 Los de vergelijkingen op.

a $x - 2 = \frac{3}{x}$

c $x + 7 = \frac{-9}{x-3}$

b $\frac{-40}{x-12} = x + 2$

d $\frac{10}{x+3} - 3 = -1$

- 7 Een maaltijd is op kamertemperatuur en wordt in de diepvries gelegd. De temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ van de maaltijd

kun je berekenen met de functie $T(u) = \frac{35}{0,5u+1} - 20$.

Hierin is u het aantal uren nadat de maaltijd in de diepvries is gelegd.

- Bereken hoeveel graden de kamertemperatuur is.
 - Na hoeveel uur is de temperatuur van de maaltijd -10°C ?
- 8 In Afrika hebben boeren een waterreservoir om tijdens een periode waarin geen regen valt het land te kunnen voorzien van water. De watervoorraad W van boer Siep in duizenden

liters kun je berekenen met de formule $W = \frac{1380}{t+8}$

Hierin is t het aantal dagen na het begin van de droge periode. De watervoorraad in het reservoir van boer John kun je berekenen met de formule $W = 220 - 5t$.

Na hoeveel dagen is de watervoorraad van beide boeren gelijk?

**Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2**

Ondersteunende opdrachten

- 04 Elvi gaat de vergelijking $\frac{120}{2k-4} = 20$ oplossen.
- Waar legt ze het bordje op?
 - Leg uit dat op het bordje het getal 6 moet staan.
 - Vul het blaadje verder in.

$\frac{120}{2k-4} = 20$	Elvi
$\frac{120}{\boxed{6}} = 20$	
$2k-4 = \dots$	
$2k = \dots$	
$k = \dots$	

- 06 Je gaat de vergelijking $x + 5 = \frac{16}{x-1}$ oplossen.

Op het blaadje is een begin gemaakt.

- Leg uit wat er in stap 1 gebeurt.
- Leg uit waarom er in stap 2 aan de rechterkant van het gelijkteken alleen het getal 16 overblijft.
- Los de vergelijking verder op.

$x + 5 = \frac{16}{x-1}$	
$(x-1)(x+5) = \frac{16}{x-1} \cdot (x-1) \cdot (1)$	
$x^2 + \dots x - \dots = 16$	(2)

Los op dezelfde manier de vergelijkingen op.

- d $x = \frac{10}{x+3}$ f $\frac{-10}{x-1} = x-12$
- e $10 = \frac{27}{x+7} + 1$ g $x+7 = \frac{-60}{x-9}$

Uitdagende opdrachten

- U1 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{10}{x}$ en $g(x) = -2x$.

Ga na dat de vergelijking $f(x) = g(x)$ geen oplossingen heeft en maak in één figuur een schets van de grafieken.

- U2 Anne koopt in 2018 een nieuwe auto. Nu zoekt ze een verzekering voor deze auto. Verzekeringsmaatschappij All Sure berekent de dagwaarde in duizenden euro's

met de formule $W = \frac{480}{t+6}$

Hierin is t het aantal jaren na 2018. Verzekeringsbedrijf No Risk berekent de dagwaarde van dezelfde auto met de formule $W = 68 - 4t$.

In welk jaren is de dagwaarde van de auto bij beide verzekeringsbedrijven even hoog?



11A.2 Exponentiële en wortelvergelijkingen

Je leert

- wat een exponentiële en een wortelvergelijking is
- hoe je een exponentiële en een wortelvergelijking oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 9–10–11–012–13–014–14
- basis: 9–10–11–12–13–14–15
- uitdagend: 9–10–12–14–15–U3–U4

Een wiskundeleraar heeft een vergelijking op het bord geschreven.

- Welke oplossing heeft deze vergelijking?

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}} = 2$$

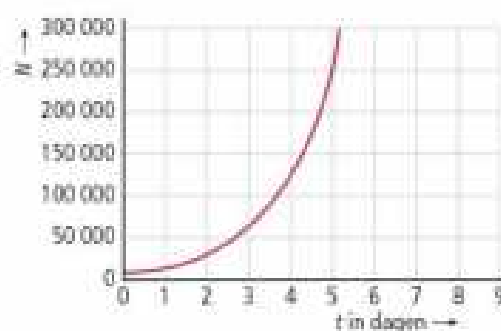
- 9 In een sloot verdubbelt het aantal algen zich per dag. Neem aan dat op een gegeven moment 1 m^3 water 8000 algen bevat. Van het aantal algen is de grafiek getekend. Bij de grafiek hoort de functie $N(t) = 8000 \cdot 2^t$.

Hierin is N het aantal algen per m^3 water en t de tijd in dagen.

- Hoeveel algen per m^3 water zijn er na tien dagen?
- Om uit te rekenen na hoeveel dagen het aantal algen per m^3 water is gegroeid tot 64 000, moet je de vergelijking $8000 \cdot 2^t = 64\,000$ oplossen.

Leg uit dat je deze vergelijking kunt vereenvoudigen tot $2^t = 8$.

- Schrijf 8 als macht van 2.
- Na hoeveel dagen is het aantal algen gegroeid tot 64 000?
- Los op $N(t) = 256\,000$.



- 10 Hugo gaat de vergelijking $20 \cdot 3^x = 1620$ oplossen.

- Leg uit dat deze vergelijking te schrijven is als $3^x = 81$.
- Hugo maakt een tabel van machten met grondtal 3. Vul de tabel verder in.
- Welke oplossing krijgt hij?
- Los de vergelijkingen op.

macht	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
uitkomst	3	9	...	...	...	...

A $3^x = 729$

C $5 + 3^x = 248$

B $12 \cdot 3^x = 108$

D $8 \cdot 3^{x-1} = 648$

Theorie

Een vergelijking als $7 \cdot 3^x = 567$ of als $3^{x-5} + 4 = 85$ met de variabele in de exponent van de macht, noem je een **exponentiële vergelijking**. Bij het oplossen van een exponentiële vergelijking schrijf je beide kanten van het gelijkteken als een macht met hetzelfde grondtal en leg je een bordje op de exponent van de macht. Maak zo nodig een tabel met machten van dat grondtal. Soms moet je de vergelijking eerst vereenvoudigen door de macht te isoleren.

Voorbeeld

Los op: $3^{x-5} + 4 = 85$

Oplossing

$3^{x-5} = 81$ macht geïsoleerd
 $3^{x-5} = 3^4$ 81 als macht van 3
 geschreven
 $x - 5 = 4$ bordje gelegd op $x - 5$
 $x = 9$

- 11** Om $2^{4t+1} - 1 = 7$ op te kunnen lossen, vereenvoudig je eerst de vergelijking.
- Isoleer de macht door aan beide kanten van het gelijkteken 1 bij op te tellen.
 - Vul de tabel met machten van 2 verder in en schrijf de vergelijking als $2^{4t+1} = 2^{\dots}$.
 - Leg een bordje op $4t + 1$ en los de vergelijking op.
 - Los de vergelijkingen op.
- A $2^{8-t} = 32$ C $5 \cdot 2^b = 20$
 B $2^{2x} = 16$ D $2^{0,5t} - 6 = 58$

macht	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
uitkomst	2	4	...	...	...	...

Ondersteunende route → maak opdracht 012

- 12** a Vul de tabel met machten van 4 verder in.
 b Los de vergelijkingen op.
- A $4^{x-5} - 4 = 60$ C $25 \cdot 4^{m+1} = 400$
 B $4^{10a-25} = 1024$ D $2000 - 4^{2x} = -2096$

macht	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6
uitkomst	4	16	...	...	...	...

- 13** In het assenstelsel is de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x-4}$ getekend.
- Bij welke waarden van x kun je een functiewaarde berekenen?
 - Bereken $f(85)$.
 - Om $f(x) = 6$ op te lossen, moet je de vergelijking $\sqrt{x-4} = 6$ oplossen.
 Leg een bordje op $x - 4$ en los de vergelijking op.



Theorie

Een vergelijking als $42 - 3\sqrt{x} = 24$ of als $\sqrt{125 - 4x} + 1 = 8$ met de variabele onder het wortelteken, noem je een **wortelvergelijking**. Oplossen van wortelvergelijkingen doe je meestal met bordjes. Soms moet je de vergelijking eerst vereenvoudigen door de wortel te isoleren.

Voorbeeld 1

Los op: $2\sqrt{k-7} = 22$

Oplossing

$$\sqrt{k-7} = 11$$

$$\sqrt{121} = 11 \quad \text{bordje gelegd}$$

$$k-7 = 121$$

$$k = 128$$

Voorbeeld 2

Los op: $\sqrt{125 - 4x} + 1 = 8$

Oplossing

$$\sqrt{125 - 4x} = 7 \quad \text{wortel geïsoleerd}$$

$$\sqrt{49} = 7 \quad \text{bordje gelegd}$$

$$125 - 4x = 49$$

$$4x = 76$$

$$x = 19$$

Ondersteunende route → maak opdracht 014

14 Los de vergelijkingen op.

a $\sqrt{5x+9} = 13$

d $\sqrt{4-4m} = 3$

b $\sqrt{4a-12} + 2 = 4$

e $100 - \sqrt{\frac{1}{2}d+8} = 78$

c $\sqrt{-2x+9} = 6$

f $8\sqrt{3p+2} = 40$

15 Hoe hoger je staat, hoe verder je kunt kijken. Met de formule $a = \sqrt{13h}$ kun je de kijkafstand a in kilometers bepalen bij een hoogte h in meters.

- Bovenop de Eiffeltoren kun je 63 kilometer ver kijken. Bereken hoeveel meter hoog je dan staat.
- Kun je, als je twee keer zo hoog staat, ook twee keer zo ver kijken? Leg je antwoord uit.

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4



Ondersteunende opdrachten

- 012** a Om de vergelijking $4^{t-1} - 7 = 57$ op te lossen, moet je eerst de macht isoleren.
Ga na dat je dan de vergelijking $4^{t-1} = 64$ krijgt.
- b Vul de tabel met machten van 4 verder in en gebruik deze om de vergelijking als $4^{t-1} = 4^{...}$ te schrijven.
- c Leg een bordje op $t = 1$ en vul in.
 $t - 1 = \dots$ dus de oplossing is $t = \dots$.

macht	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6
uitkomst	4	16	...	...	1024	...

Los op dezelfde manier de vergelijkingen op.

- d $4^{8-2t} = 1024$ f $10 \cdot 4^{4b} = 160$
- e $4^{t+2} + 100 = 356$ g $4000 - 4^{3t} = -96$

- 014** Bart lost de vergelijking $\sqrt{3q + 100} = 11$ op.
Op het blaadje is een begin gemaakt.
- a Waar legt Bart het bordje op?
- b Waarom moet er 121 op het bordje staan?
- c Los de vergelijking verder op.

☐	$\sqrt{3q + 100} = 11$		Bart
☐	$\sqrt{121} = 11$	bordje gelegd	
☐	$3q + 100 = \dots$		
☐			

Uitdagende opdrachten

- U3** Los de vergelijkingen op.
- a $\frac{12}{\sqrt{x+9}} = 6$ b $\frac{\sqrt{4-4m}}{2} + 3 = 8$

- U4** De rij figuren zijn Sierpinski driehoeken. Je kunt de rij uitbreiden door in elke blauwe driehoek weer een kleinere witte driehoek te tekenen. Door dit oneindig vaak te herhalen, ontstaat een figuur die een fractal wordt genoemd. Met de formule $A = 3^{n-1}$ kun je het aantal blauwe driehoekjes A van figuur n te berekenen.
- a Hoeveel blauwe driehoekjes heeft figuur nummer 5?
- b Welk nummer hoort bij de figuur met 729 blauwe driehoekjes?



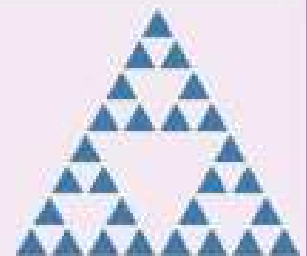
$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$



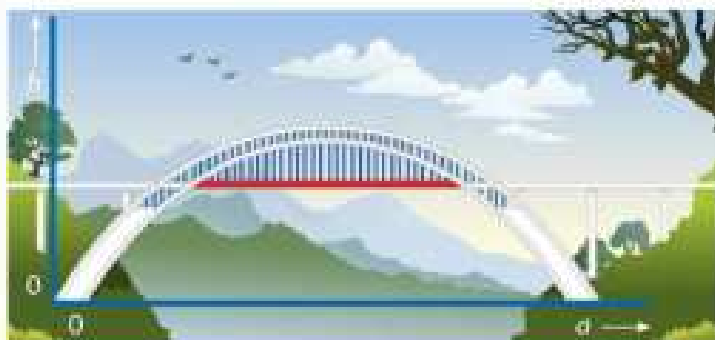
$n = 4$

- Je leert** • hoe je de coördinaten van de snijpunten van een parabool en een lijn berekent
- Leerroutes** • ondersteunend: 16—17—018—19—020—21
 • basis: 16—17—18—19—20—21
 • uitdagend: 17—19—20—21—U5—U6

De hoogte h in meters van de boog van de brug kun je berekenen met functievoorschrift $h(a) = -0,0075a^2 + 1,35a$. Hierin is a de horizontale afstand in meters.

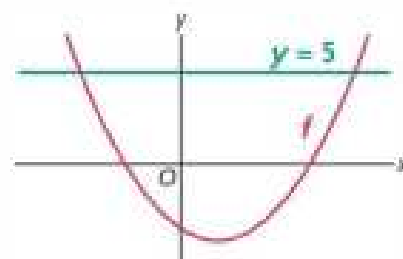
- Met welke vergelijking kun je de lengte van het rode gedeelte van het wegdek berekenen?

- A $h(a) = 0$ C $h(a) = 40$
 B $h(a) = 25$ D $h(a) = 60$



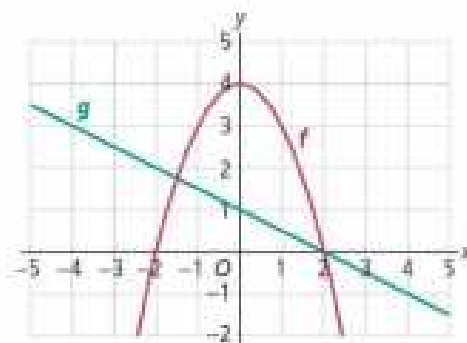
- 16** In de figuur is de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en de lijn $y = 5$ geschetst.

- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de horizontale as.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de lijn $y = 5$.
- Ga na dat de vergelijking $x^2 - 2x - 3 = -5$ geen oplossingen heeft en verklaar dit met behulp van de schets.



- 17** In het assenstelsel zijn de grafieken van de functies $f(x) = 4 - x^2$ en $g(x) = 1 - 0,5x$ getekend. Je kunt de x -coördinaten van de snijpunten berekenen door de functievoorschriften aan elkaar gelijk te stellen.

- Los de vergelijking $4 - x^2 = 1 - 0,5x$ op en bereken de x -coördinaten van de snijpunten.
- Bereken de y -coördinaten van de snijpunten door de gevonden x -coördinaten in het functievoorschrift van f in te vullen.
- Controleer je antwoorden door de gevonden x -coördinaten in het functievoorschrift van g in te vullen.
- Schrijf de coördinaten van de snijpunten op.



Aanpak

Hoe bereken je de coördinaten van de snijpunten van een parabool en een lijn?

- 1 Stel de bijbehorende functievoorschriften aan elkaar gelijk.
- 2 Bereken de x -coördinaten van de snijpunten door de verkregen vergelijking op te lossen.
- 3 Bereken de y -coördinaten van de snijpunten door de gevonden x -coördinaten in te vullen in één van de functievoorschriften.
- 4 Controleer de coördinaten van de gevonden punten door de x -coördinaten ook in het andere functievoorschrift in te vullen.

Voorbeeld 1

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken bij $f(x) = x^2 - 4x$ en $g(x) = 12 - 3x$.

Oplossing

- 1 $x^2 - 4x = 12 - 3x$
- 2 $x^2 - x - 12 = 0$
 $(x - 4)(x + 3) = 0$
 $x - 4 = 0$ of $x + 3 = 0$
 $x = 4$ of $x = -3$
- 3 $f(4) = 0$ en $f(-3) = 21$
- 4 Controle $g(4) = 0$ en $g(-3) = 21$
 De coördinaten zijn $(4, 0)$ en $(-3, 21)$.

Voorbeeld 2

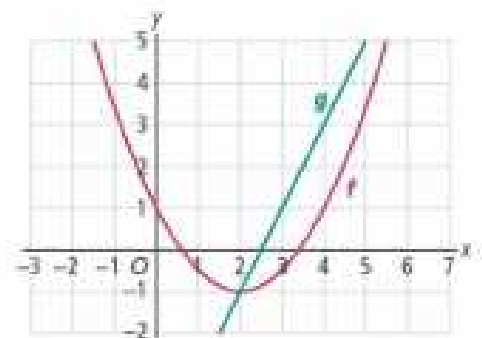
Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken bij $f(x) = 2x^2 - 3x$ en $g(x) = 2x - 2$.

Oplossing

- 1 $2x^2 - 3x = 2x - 2$
- 2 $2x^2 - 5x + 2 = 0$
 $D = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9$
 $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = 2$ of $x = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$
- 3 $f(2) = 2$ en $f(\frac{1}{2}) = -1$
- 4 Controle $g(2) = 2$ en $g(\frac{1}{2}) = -1$
 De coördinaten zijn $(2, 2)$ en $(\frac{1}{2}, -1)$.

Ondersteunende route → maak opdracht 018

- 18** In het assenstelsel zijn de grafieken van de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ en $g(x) = 2x - 5$ getekend.
- a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
 - b Bereken ook de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de lijn $y = 5\frac{1}{2} - 2x$.



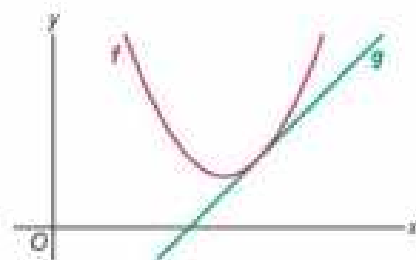
- 19** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van de functies f en g .

- a $f(x) = x^2 - 2x$ en $g(x) = 24 - 4x$
- b $f(x) = x(x + 2)$ en $g(x) = 2x + 9$
- c $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$ en $g(x) = x - 3$

Ondersteunende route → maak opdracht O20

- 20** In de figuur zijn de grafieken van de functies $f(x) = 4x^2 - 10x + 7$ en $g(x) = 2x - 2$ getekend.

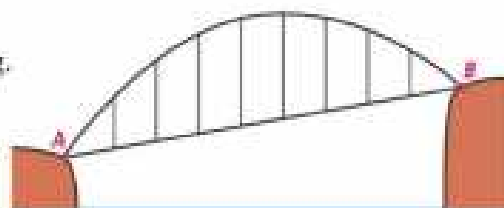
- a Stel de functievoorschriften aan elkaar gelijk en los de verkregen vergelijking op.
- b Hoe kun je aan het antwoord van opdracht a zien dat de grafieken van de functies maar één punt gemeenschappelijk hebben?
- c Bereken de coördinaten van dit punt.



- 21** De brug is gebouwd op twee oevers die niet even hoog zijn. Hierdoor loopt het wegdek van punt A naar punt B omhoog. De hoogte van de boog van de brug in meters ten opzichte van het water kun je berekenen met de formule $h = -0,01a^2 + 0,75a + 10$.

Hierin is a de horizontale afstand in meters ten opzichte van de linker oever. Bij de hoogte van het wegdek ten opzichte van het water hoort de formule $h = 10 + 0,05a$.

- a Hoeveel meter is het wegdek boven het water als $a = 20$?
- b Hoeveel meter zit er op die plaats tussen de boog van de brug en het wegdek?
- c Ga na dat punt A op een hoogte van 10 meter ligt.
- d Hoeveel meter hoogteverschil zit er tussen de punten A en B ?

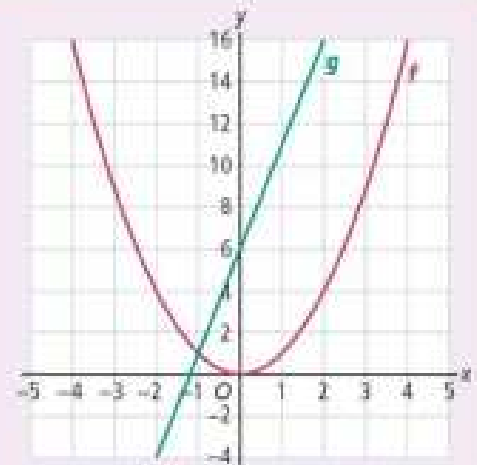


Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

Ondersteunende opdrachten

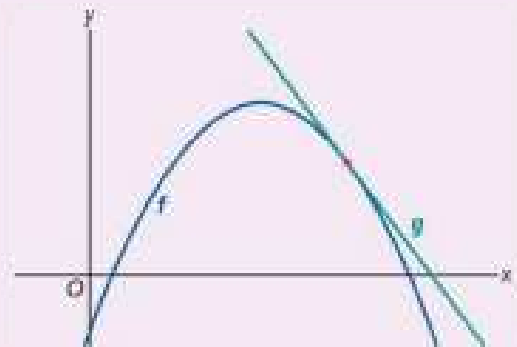
018 In het assenstelsel zijn de grafieken van de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 5x + 6$ getekend.

- Om de coördinaten van de snijpunten te berekenen, stel je de functievoorschriften aan elkaar gelijk. Je krijgt dan de vergelijking $x^2 = 5x + 6$. Los deze vergelijking op.
- Vul in: $f(-1) = \dots$ en $f(6) = \dots$
- Controleer de gevonden punten door de x -coördinaat ook in het functievoorschrift van g in te vullen.
- Bereken ook de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de lijn $y = -8x$.



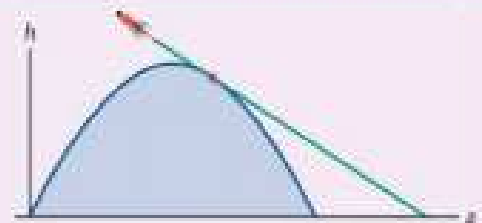
020 In de figuur zijn de grafieken van de functies $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ en $g(x) = -2x + 8$ geschetst.

- Stel de functievoorschriften aan elkaar gelijk.
- Los deze vergelijking op. Hoeveel oplossingen krijg je?
- Hoe kun je aan het antwoord van opdracht b zien dat de grafieken van de functies maar één punt gemeenschappelijk hebben?
- Bereken de y -coördinaat van dit punt door de x -coördinaat in één van de twee functievoorschriften in te vullen.
- Schrijf de coördinaten van het punt op.



Uitdagende opdrachten

- U5** De hoogte h in meters van het dak van een opblaashal kun je berekenen met de formule $h = -0,025a^2 + a$. Hierin is a de horizontale afstand in meters. Naast de hal wordt een vuurpijl afgeschoten. Bij de hoogte van de vuurpijl hoort de formule $h = -0,25a + 15,625$. Ga na of de vuurpijl het dak van de hal raakt.

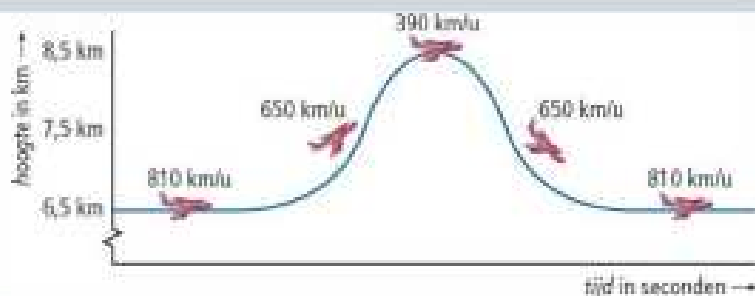


- U6** Wim verkoopt loempia's. De totale opbrengst TO in euro's hangt af van het aantal verkochte loempia's a volgens de formule $TO = 1,5a$. Voor de totale kosten TK in euro's geldt $TK = 0,025a^2 + 0,25a + 10$. Bereken bij welke aantallen loempia's Wim winst maakt.

Je leert • hoe je intervallen in de ongelijkheidsnotatie en intervalnotatie schrijft

Leerroutes • ondersteunend: 22—23—024—25—26—27—28—029—29
 • basis: 22—23—24—25—26—27—28—29—30
 • uitdagend: 22—24—25—26—28—29—30—U7—U8

- W** Tijdens een paraboolvlucht kun je gedurende een korte tijd gewichtloosheid simuleren. Dat is het geval wanneer het vliegtuig boven de 7600 meter komt.
- Geef op de horizontale as aan hoelang deze periode duurt.



22 In de figuur zijn de grafieken bij $f(x) = 2x + 1$ en $g(x) = 8 - x$ geschetst.

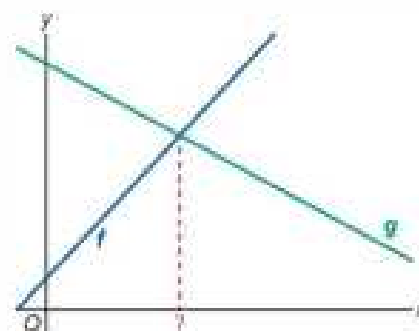
- Los de ongelijkheid $2x + 1 \geq 8 - x$ op.
- De oplossing van deze ongelijkheid kun je op een getallenlijn weergeven.



Welk getal moet op de puntjes staan?

- Wat betekent een dicht rondje bij deze getallenlijn?
- Vul in.

De oplossing schrijf je in de intervalnotatie als $[\dots , \rightarrow)$.



Theorie

Een interval kun je in de **ongelijkheidsnotatie** als ook in de **intervalnotatie** schrijven.

De rechte haak betekent: het getal telt wel mee.

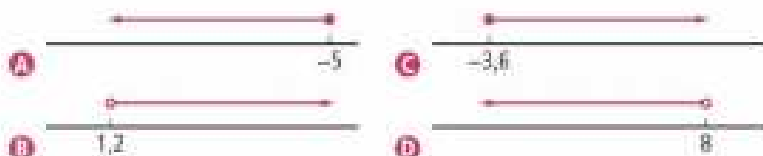
De punthaak betekent: het getal telt niet mee.

Bij de pijl gebruik je een punthaak.

Voorbeeld

ongelijkheidsnotatie	intervalnotatie
$x > -1,8$	$(-1,8; \rightarrow)$
$x < 9$	$(\leftarrow, 9)$
$x \geq 1$	$[1, \rightarrow)$
$x \leq -3,5$	$(\leftarrow, -3,5]$

23 Op de getallenlijnen zijn intervallen aangegeven. Schrijf deze intervallen in zowel de ongelijkheidsnotatie als in de intervalnotatie.



24 Schrijf in de intervalnotatie.

- a $x > 13$ c $x < -2,5$
b $x \geq -5$ d $x \leq 20$

25 Het interval op de getallenlijn stelt alle getallen x voor waarbij x groter is dan 2 én kleiner dan of gelijk aan 6.

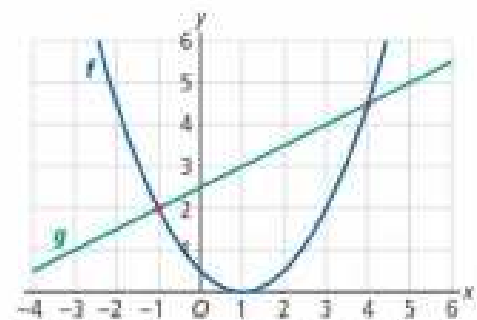
- a Schrijf het interval in de intervalnotatie $\langle \dots, \dots \rangle$.
b Geef twee waarden voor x die op dit interval liggen.
c Leg uit dat je voor deze getallen kunt schrijven $2 < x$.
d Vul in.

Omdat op het interval geldt dat $2 < x$ en $x \leq 6$, kun je het interval in de ongelijkheidsnotatie schrijven als $\dots < x \leq \dots$.



26 In het assenstelsel zijn de grafieken van f en g getekend.

- a Lees af bij welke twee waarden van x geldt $f(x) = g(x)$.
b Voor welke waarden van x geldt $f(x) \leq g(x)$? Schrijf de oplossing in de intervalnotatie.
c Leg uit waarom de oplossing van $f(x) > g(x)$ uit twee losse intervallen bestaat.
d Vul in: je kunt de oplossing $x < \dots$ of $x > \dots$ ook in de intervalnotatie schrijven als $\langle \leftarrow, \dots \rangle$ en $\langle \dots, \rightarrow \rangle$.



Theorie

De volgende afspraken gelden voor de intervalnotatie.

Voor een interval tussen twee getallen:

$-2 < x < 2$, dit noteer je als $\langle -2, 2 \rangle$.

$-2 \leq x \leq 2$, dit noteer je als $[-2, 2]$.

Voor twee losse intervallen:

$x < -2$ of $x > 2$, dit noteer je als $\langle \leftarrow, -2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$.

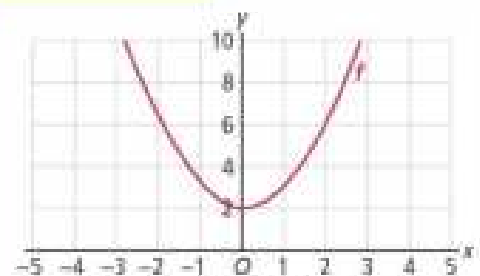
$x \leq -2$ of $x \geq 2$, dit noteer je als $\langle \leftarrow, -2] \cup [2, \rightarrow \rangle$.

Als x elke waarde mag aannemen, noteer je dit als $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$.

Je zegt ook wel dat x dan tot de verzameling $\mathbb{R}$ behoort.

In de verzameling $\mathbb{R}$ zitten alle **reële getallen**, dit zijn alle getallen die als breuk te schrijven zijn en getallen die niet als breuk te schrijven zijn, zoals π en $\sqrt{2}$.

Voorbeeld



De oplossing van $x^2 + 2 \geq 0$ zijn alle getallen voor x . Je kunt dit schrijven als $\mathbb{R}$.

De ongelijkheid $x^2 + 2 < 0$ heeft geen oplossing.

Ondersteunende route → maak opdracht 027

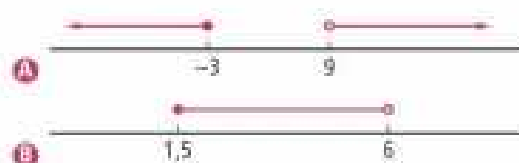
- 27 a Schrijf bij de getallenlijnen het interval in zowel de ongelijkheidsnotatie als in de intervalnotatie.
b Schrijf in de intervalnotatie.

A $2 < x < 14$

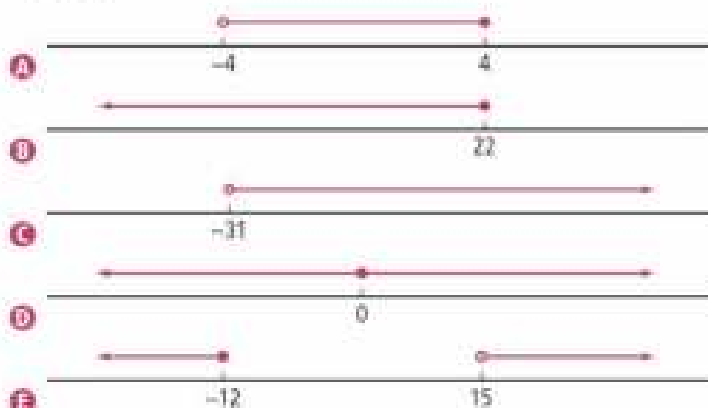
C $x < -5$ of $x \geq 10$

B $x \leq 0$ of $x \geq 3$

D $-3 \leq x < 2,5$



- 28 Schrijf bij elke getallenlijn het interval in zowel de ongelijkheidsnotatie als in de intervalnotatie.



Ondersteunende route → maak opdracht 029

- 29 De parabool hoort bij de kwadratische functie f en de lijn hoort bij de lineaire functie g .
Schrijf de oplossing van elke ongelijkheid in zowel de ongelijkheidsnotatie als in de intervalnotatie.

a $f(x) < g(x)$

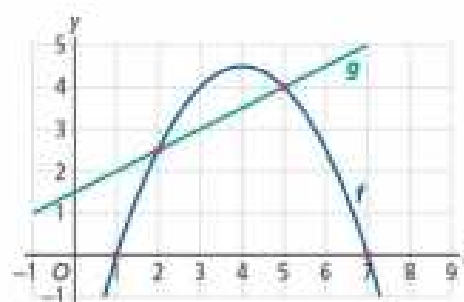
d $f(x) > 0$

b $f(x) \geq g(x)$

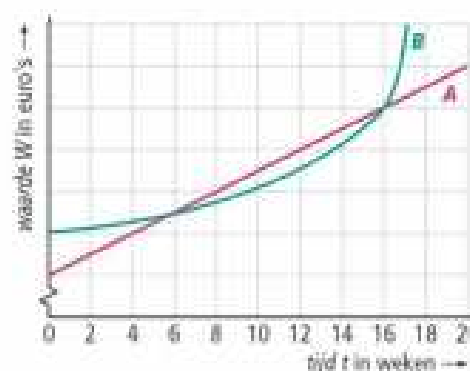
e $g(x) \geq 4$

c $f(x) < 0$

f $g(x) < 2\frac{1}{2}$



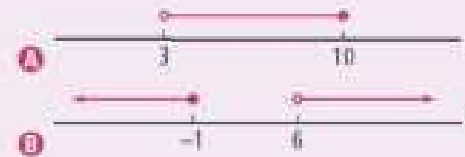
- 30 In de grafiek kun je de waarde W in euro's van twee aandelen aflezen. Hierin is t de tijd in weken.
a In welke periode is aandeel A meer waard dan aandeel B?
b En na ongeveer hoeveel weken is dit verschil maximaal?



Uitdagende route → maak opdracht U7 en U8

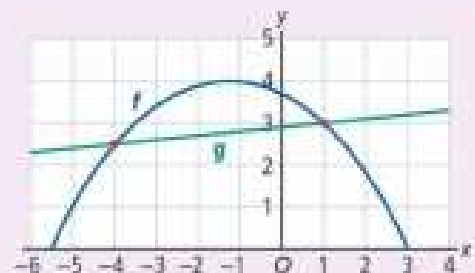
Ondersteunende opdrachten

- 027 a Teken bij de ongelijkheidsnotaties het interval op een getallenlijn.
- A $2 < x \leq 7$ C $x \leq -5$ of $x \geq 1$
 B $x < 0$ of $x \geq 4$ D $-2 < x < 5$
- b Schrijf de intervallen van opdracht a in de intervalnotatie.
- c Vul in: bij interval A hiernaast horen de getallen tussen ... en ..., waarbij ... niet mee telt en ... wel mee telt.
- d Je kunt interval A in de ongelijkheidsnotatie schrijven als $\dots < x \leq \dots$.
- e Vul in: voor interval B geldt $x \dots -1$ of $x \dots 6$.
- f Schrijf de intervallen A en B in de intervalnotatie.



- 029 Je gaat de oplossing van de ongelijkheid $f(x) \geq g(x)$ aflezen.

- a Lees de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken af.
- b Kies het juiste antwoord:
 In de ongelijkheid staat het teken $\geq$, dus de x -coördinaten van de snijpunten tellen *wel / niet* mee bij de oplossing.
- c Kies het juiste antwoord:
 De ongelijkheid is $f(x) \geq g(x)$, dus je kijkt waar de grafiek van f *hoger / lager* dan de grafiek van g ligt.
- d Vul in.
 De oplossing van $f(x) \geq g(x)$ is $\dots \leq x \leq \dots$ en geschreven in de intervalnotatie $[\dots, \dots]$.

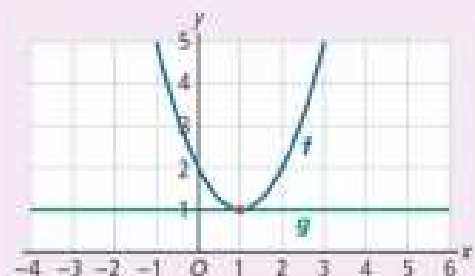


Uitdagende opdrachten

- U7 Gegeven zijn twee lineaire functies f en g .
- a Geef met een schets aan in welke gevallen de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ geen oplossing heeft.
- b Wat kun je in die situatie zeggen over de oplossing van $f(x) > g(x)$?

- U8 De grafieken van de functies f en g hebben één punt gemeenschappelijk met elkaar.
 Geef van elke ongelijkheid de oplossing.

- a $f(x) > g(x)$ c $f(x) < g(x)$
 b $f(x) \geq g(x)$ d $f(x) \leq g(x)$



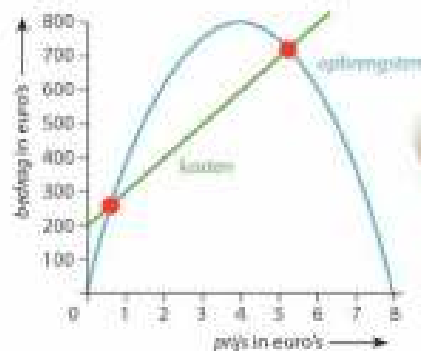
11A.5 Kwadratische ongelijkheden

Je leert • hoe je een kwadratische ongelijkheid met grafieken oplost

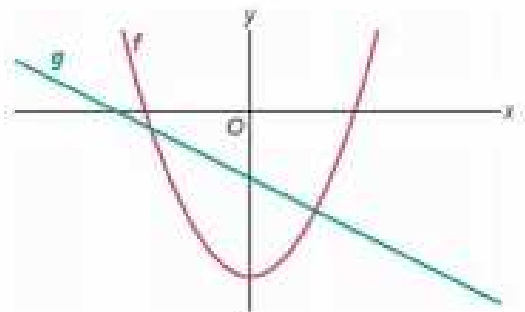
Leerroutes • ondersteunend: 31—032—33—34—035—35—36—37
 • basis: 31—32—33—34—35—36—37—38
 • uitdagend: 31—32—34—35—36—37—38—U9

Brenda verkoopt koppen soep op de jaarmarkt. In de grafieken kun je de totale opbrengsten en totale kosten bij een bepaalde prijs per kop soep af lezen.

- Hoe kun je in de grafiek zien bij welke prijs per kop soep Brenda winst of verlies maakt?



- 31** Susan gaat de ongelijkheid $x^2 - 10 < -x - 4$ oplossen. Ze heeft een schets van de grafieken gemaakt.
- Los de vergelijking $x^2 - 10 = -x - 4$ op.
 - Vul in: de grafieken in de schets horen bij de functies $f(x) = x^2 - 10$ en $g(x) = \dots$
 - Vul in: de grafiek van f ligt lager dan die van g bij waarden van x die liggen tussen $\dots$ en $\dots$
 - Schrijf de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.



Ondersteunende route → maak opdracht 032

- 32** Je gaat de ongelijkheid $x^2 - 3x > x - 3$ met de grafieken van $f(x) = x^2 - 3x$ en $g(x) = x - 3$ oplossen.
- Schrijf de vergelijking op die bij de ongelijkheid past.
 - Los de vergelijking op en berekenen de coördinaten van de snijpunten van de grafieken.
 - Is de grafiek van f een berg of dalparabool?
 - Schets in één figuur de grafieken. Maak daarbij gebruik van de antwoorden van de opdrachten b en c.
 - Lees in de schets af bij welke waarden van x geldt $x^2 - 3x > x - 3$ en schrijf de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.

Aanpak**Hoe los je een ongelijkheid op met grafieken?**

- 1 Stel de vergelijking op die bij de ongelijkheid past.
- 2 Los de vergelijking op en bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken.
- 3 Schets in één figuur de bijbehorende grafieken.
- 4 Lees uit de bijbehorende grafieken de oplossing van de ongelijkheid af.

Voorbeeld

Los op: $x^2 + 2x - 3 > x - 1$

Oplossing

1 $x^2 + 2x - 3 = x - 1$

2 $x^2 + x - 2 = 0$

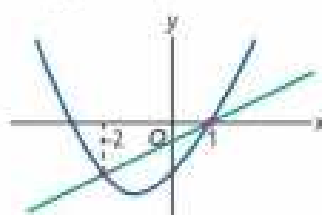
$(x + 2)(x - 1) = 0$

$x + 2 = 0$ of $x - 1 = 0$

$x = -2$ of $x = 1$

Snijpunten $(-2, -3)$ en $(1, 0)$.

- 3 De grafieken zijn een dalparabool en een stijgende lijn.



- 4 In de schets zie je dat de parabool links van -2 en rechts van 1 hoger dan de lijn ligt.

De oplossing van de ongelijkheid is $x < -2$ of $x > 1$.

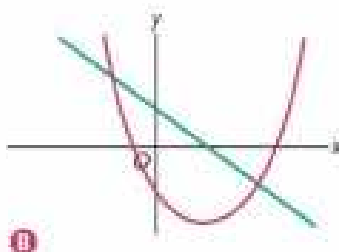
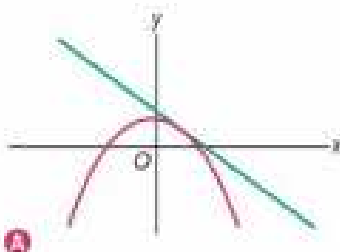
In de intervalnotatie geschreven $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$.

- 33 Los met de schets in het voorbeeld de ongelijkheid $x^2 + 2x - 3 < x - 1$ op. Schrijf de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.

- 34 Je ziet twee schetsen van grafieken die horen bij de ongelijkheden.

A $-x^2 + 3 \leq 4 - 2x$

B $x^2 - 6x - 8 \geq 4 - 2x$



Los de ongelijkheden op en schrijf de oplossing van de ongelijkheden in de intervalnotatie.

Ondersteunende route → maak opdracht 035

- 35** Los de ongelijkheden op en schrijf de oplossingen van de ongelijkheden in de intervalnotatie.

a $2x^2 > 4x + 6$

c $-x^2 - 2 \leq x - 8$

b $x^2 - 28 \geq -3x$

d $2x^2 - 6x < -10x + 16$

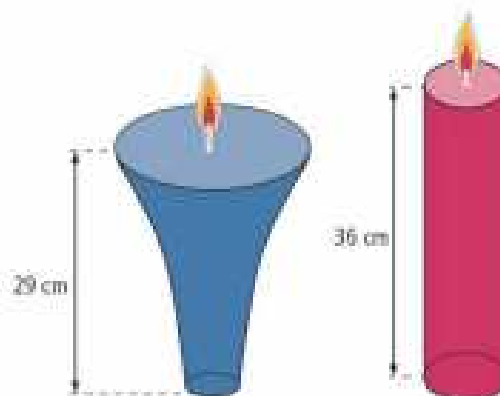
- 36** In een kas worden tomaten geteeld. De totale opbrengst TO in euro's hangt af van het aantal planten volgens de formule $TO = -0,04a^2 + 5a$. Hierin is a het aantal planten in tientallen. Voor de totale kosten TK in euro's geldt $TK = 0,6a + 40$.

- a** Bereken bij welke aantallen tomatenplanten de totale opbrengst gelijk is aan de totale kosten.
b Bij welke aantallen tomatenplanten is er winst?



- 37** Twee kaarsen worden tegelijkertijd om 12.00 uur aangestoken. De hoogte h in cm van de blauwe kaars kun je berekenen met de formule $h = 29 - 0,5t^2$. Hierin is t de tijd in uren na het aansteken van de kaars. De rode kaars is een rechte kaars met een hoogte van 36 cm die precies om 20.00 uur opgebrand is.

- a** Stel voor de rode kaars een formule op waarmee je de hoogte h in cm na t uur branden kunt berekenen.
b Hoe laat zijn beide kaarsen even hoog?
c In welke periode van de dag is de blauwe kaars hoger dan de rode kaars?



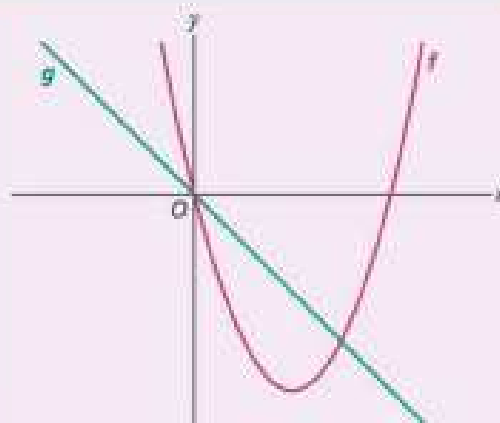
- 38** **a** Los de ongelijkheid $x^2 - 7x - 8 \geq 0$ op en schrijf de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.
b Los ook de ongelijkheid $x^2 - 7x - 8 < x - 20$ op en schrijf de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.

Uitdagende route → maak opdracht U9

Ondersteunende opdrachten

- 032** Met de schets van de grafieken van de functies $f(x) = x^2 - 4x$ en $g(x) = -x$ ga je de ongelijkheid $x^2 - 4x > -x$ oplossen.

- In de schets zie je dat de oorsprong een snijpunt is. Los de vergelijking $x^2 - 4x = -x$ op om de x -coördinaat van het andere snijpunt te vinden.
- Om de ongelijkheid $x^2 - 4x > -x$ op te lossen, kijk je in de schets voor welke waarden van x de parabool hoger ligt dan de lijn.
Vul in.
De oplossing van de ongelijkheid is $x < \dots$ of $x > \dots$ of in de intervalnotatie geschreven $(\leftarrow, \dots) \cup (\dots, \rightarrow)$.



- 035** Je gaat de ongelijkheid $x^2 - 5 \leq x + 1$ oplossen.
- Bij de ongelijkheid hoort de vergelijking $x^2 - 5 = x + 1$. Los de vergelijking op en bereken de coördinaten van de snijpunten van de bijbehorende grafieken.
 - Is de grafiek van $f(x) = x^2 - 5$ een bergparabool of een dalparabool? En in welk punt snijdt de grafiek de y -as?
 - Is de grafiek van $g(x) = x + 1$ een stijgende of dalende lijn en waar snijdt deze lijn de y -as?
 - Schets de grafieken van f en g in één figuur en geef de x -coördinaten van beide snijpunten aan.
 - Bij welke waarden van x ligt de grafiek van f lager dan of even hoog als de grafiek van g ?
 - Vul in: de oplossing van de ongelijkheid geschreven in de intervalnotatie is $[\dots, \dots]$.

Uitdagende opdrachten

- U9** Soms kun je een ongelijkheid oplossen zonder een schets te maken van de grafiek.

- Leg uit waarom de ongelijkheid $x^2 < -4$ geen oplossingen heeft.
- Koppel elke ongelijkheid aan de juiste oplossing.

A $x^2 > 4$	E $(-4, 4)$
B $x^2 > 0$	F $(\leftarrow, -2) \cup (2, \rightarrow)$
C $x^2 < 16$	G $\mathbb{R}$
D $x^2 > -2$	H $(\leftarrow, 0) \cup (0, \rightarrow)$

11A.6 Machtsvergelijkingen

Je leert

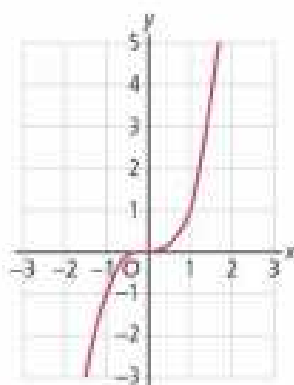
- wat een machtsvergelijking is
- hoe je een machtsvergelijking oplost

Leerroutes

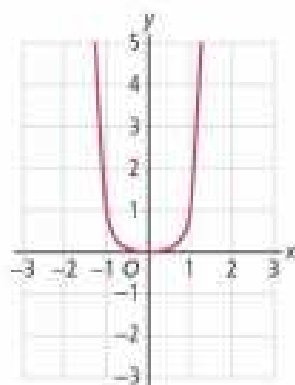
- ondersteunend: 39—40—041—42—043—43—44
- basis: 39—40—41—42—43—44—45
- uitdagend: 39—41—43—44—45—U10—U11

Een raket wordt gelanceerd. De hoogte h in kilometers die de raket na t seconden bereikt, kun je berekenen met de formule $h = 1,2t^3$.

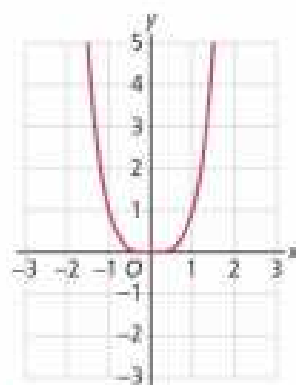
- Kies de juiste bewering.
 - A De raket bereikt een hoogste punt.
 - B De raket gaat steeds sneller.
 - C De raket gaat steeds langzamer.



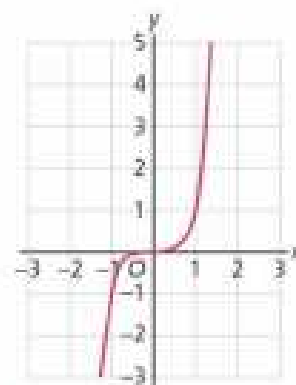
1



2



3



4

- 39 De grafieken horen bij de functies $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$, $h(x) = x^5$ en $i(x) = x^6$.
- Zoek bij iedere functie de juiste grafiek.
 - Geef van elke grafiek aan hoeveel snijpunten deze heeft met de lijn $y = 4$.
- 40
- Hoeveel snijpunten heeft de grafiek van $f(x) = x^3$ met de lijn $y = -64$?
 - Los de vergelijking $x^3 = -64$ op.
 - Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^4 = 16$?
 - Geef de oplossingen van de vergelijking $x^4 = 16$.
 - Waarom heeft de vergelijking $x^4 = -10$ geen oplossingen?

Theorie

Een vergelijking als $2p^3 = 64$ of als $8a^3 - 120 = 392$ waar een macht van de variabele in voorkomt, noem je een **machtsvergelijking**. In eenvoudige gevallen kun je een machtsvergelijking met bordjes oplossen.

Vereenvoudig de vergelijking tot de vorm $x^n = c$ door de macht te isoleren.

- > Bij een oneven exponent n is er altijd één oplossing.
- > Bij een even exponent n is het mogelijk dat er geen, één of twee oplossingen zijn.

Voorbeeld 1

Los op: $6k^3 = 48$

Oplossing

$$k^3 = 8$$

De exponent 3 is oneven.

Er is één oplossing.

$$k = 2, \text{ want } 2^3 = 8.$$

Voorbeeld 2

Los op: $2x^4 = 162$

Oplossing

$$x^4 = 81$$

De exponent 4 is even.

Er zijn twee oplossingen.

$$x = -3 \text{ of } x = 3, \text{ want } (-3)^4 = 81 \text{ en } 3^4 = 81.$$

Ondersteunende route → maak opdracht 041

41 Los indien mogelijk de vergelijkingen op.

a $3x^6 = 192$

d $100 - x^4 = 181$

b $2p^3 = -64$

e $x^5 + 4 = 36$

c $120 - a^3 = 56$

f $300 - t^4 = 219$

42 a Waarom heeft $x^3 = 20$ maar één oplossing?

b De exacte oplossing van $x^3 = 20$ is $x = \sqrt[3]{20}$.

Geef een benadering in twee decimalen van $\sqrt[3]{20}$.

c De vergelijking $x^4 = 20$ heeft als exacte oplossingen

$$x = -\sqrt[4]{20} \text{ en } x = \sqrt[4]{20}.$$

Benader deze oplossingen in twee decimalen.

Op je rekenmachine zit een toets waarmee je een hogere machtswortel kunt benaderen.



Theorie

De wortel $x = \sqrt[n]{c}$ met $n > 2$ heet een **hogere machtswortel**.

De oplossing van $x^n = c$ met n oneven is $x = \sqrt[n]{c}$.

De oplossingen van $x^n = c$ met n even en $c > 0$ zijn $x = -\sqrt[n]{c}$ en $x = \sqrt[n]{c}$.

De oplossing van $x^n = 0$ is $x = 0$.

Voorbeeld

Los op: $p^4 - 3 = 6$

Oplossing

$$p^4 = 9$$

De exponent 4 is even.

Er zijn twee oplossingen.

$$p = -\sqrt[4]{9} \approx -1,73 \text{ of } p = \sqrt[4]{9} \approx 1,73$$

Ondersteunende route → maak opdracht 043

- 43** Los indien mogelijk de vergelijkingen op. Geef een benadering in twee decimalen.

a $2x^3 = 200$

d $0,5x^7 + 100 = 50$

b $1000x^4 = 0,1$

e $10x^8 + 650 = 350$

c $100 - 5x^6 = 100$

f $1000 - 2,5x^5 = 1250$

- 44** Een docent gaat een meerkeuze toets maken met acht vragen. Hij vraagt zich af uit hoeveel antwoorden de leerlingen bij elke vraag moeten kiezen zodat er genoeg verschillende manieren zijn om het antwoordblad in te vullen.

Met de formule $A = n^8$ kun je bereken hoeveel manieren er zijn om het antwoordblad in te vullen. De docent beweert dat er 65 536 verschillende manieren zijn.

Uit hoeveel verschillende antwoorden kunnen de leerlingen bij elke vraag kiezen?

- 45** Je kunt de inhoud van het balkvormig aquarium berekenen met de formule $I = 6b^3$. Hierin is I de inhoud in liters en b de breedte van het aquarium in dm.

- Bereken de inhoud van zo'n aquarium als $b = 3$.
- Bereken de afmetingen van een soortgelijk aquarium met een inhoud van 384 liter.
- Voor een dierenzaak zijn alleen soortgelijke aquaria met een inhoud van minstens 1000 liter bruikbaar. Bereken in hele cm de minimale maten van dit aquarium.



Uitdagende route → maak opdracht U10 en U11

Ondersteunende opdrachten

- 041** Je gaat de vergelijkingen op de blaadjes oplossen.
- Welk getal moet er op het bordje staan bij $2x^3 = 128$?
 - Omdat de exponent 3 oneven is, is er precies één oplossing.
Vul het bovenste blaadje verder in.
 - Bij de vergelijking $750 - x^4 = 125$ is de macht x^4 geïsoleerd.
Welk getal moet er op het bordje staan bij x^4 ?
 - Omdat de exponent 4 even is, zijn er twee oplossingen. Vul het onderste blaadje verder in.
- Los op dezelfde manier de vergelijkingen op.
- $1100 - x^3 = 100$
 - $2x^4 = 162$
 - $2x^3 = -64$
 - $8x^6 + 10 = 18$

$$2x^3 = 128$$

$$x^3 = \dots$$

$$x = \dots$$

$$\text{want } \dots^3 = \dots$$

$$750 - x^4 = 125$$

$$x^4 = \dots$$

$$x = \dots \text{ of } x = \dots$$

$$\text{want } (\dots)^4 = \dots \text{ en } \dots^4 = \dots$$

- 043** Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van twee vergelijkingen.
- Waarom heeft vergelijking A twee oplossingen?
 - Los vergelijking A op en geef een benadering in twee decimalen.
 - Waarom heeft vergelijking B geen oplossingen?

$$\text{A } 3x^6 = 12$$

$$x^6 = \dots$$

$$x = \sqrt[6]{\dots} \text{ of } x = -\sqrt[6]{\dots}$$

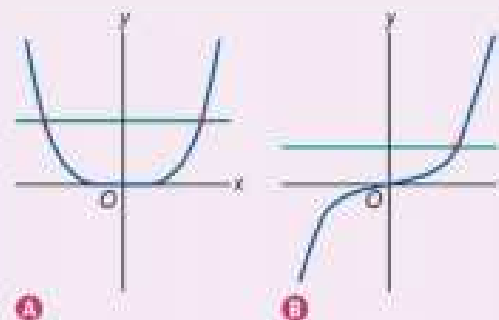
$$x = \dots \text{ of } x = \dots$$

$$\text{B } 2x^5 = -40$$

$$x^5 = -20$$

Uitdagende opdrachten

- U10** Voor de inhoud I in cm^3 van een bol met diameter van d cm geldt de formule $I = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3$. Een volleybal heeft een inhoud van 8 liter.
Bereken in hele cm de diameter van deze volleybal.
- U11** In de figuur zijn de grafieken bij de ongelijkheden $2x^3 \leq 250$ en $0,5x^4 > 648$ geschetst.
- Welke schets hoort bij welke ongelijkheid?
 - Los de vergelijking $2x^3 = 250$ op.
 - Schrijf de oplossing van de ongelijkheid $2x^3 \leq 250$ in de intervalnotatie.
 - Los de vergelijking $0,5x^4 = 648$ op.
 - Schrijf de oplossing van de ongelijkheid $0,5x^4 > 648$ in de intervalnotatie.



- 46** Tijdens een rattenplaag in een stad geldt voor het aantal ratten de formule $R = 120 + 90 \cdot 2^{0,5t}$. Hierin is R het aantal ratten en t de tijd in weken na het begin van de rattenplaag.
- Hoeveel ratten zijn er aan het begin van de rattenplaag?
 - Bereken wanneer het aantal ratten gelijk is aan 3000.
 - Bereken in hoeveel weken tijd het aantal ratten toeneemt van 5880 tot 23 160.



- 47** Los indien mogelijk de vergelijkingen op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $3\sqrt{4c-1} = 15$	e $d = \frac{15}{d-2}$
b $0,5 \cdot 2^{m-5} = 4$	f $2x^4 + 8 = 520$
c $36 = \frac{18}{2x-5}$	g $\frac{4}{4+w} = 2w+10$
d $-\sqrt{2p+3} = 6$	h $0,5x^5 - 18 = 3$

- 48** Los de ongelijkheden op en schrijf de oplossingen in de ongelijkheidsnotatie en de intervalnotatie.

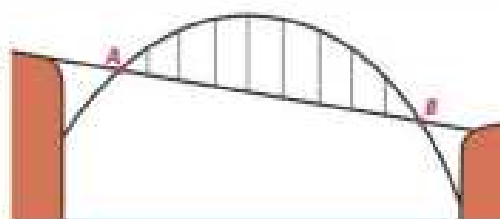
a $x^2 - 2 < -x + 4$	c $-\frac{1}{2}x^2 + 6 > -12$
b $-x^2 - 8 \leq 3 - 6x$	d $\frac{1}{2}x^2 + 3 < 4\frac{1}{2}x - 7$

- 49** De spoorlijn die op deze brug ligt, loopt iets omlaag. De hoogte van de boog van de brug in meters ten opzichte van het water kun je berekenen met de formule

$$h = -0,0002a^2 + 0,16a + 18.$$

Hierin is a de horizontale afstand ten opzichte van de linker oever. Bij de hoogte van de spoorlijn in meters ten opzichte van het water hoort de formule $h = 33 - 0,01a$.

- Hoeveel meter hoogteverschil zit er tussen punt A en punt B ?
- Hoeveel meter legt een trein over de spoorlijn van de brug tussen punt A en punt B af? Rond je antwoord af op hele centimeters.
- Hoeveel meter is de boog van de brug maximaal boven het water?





- 50** In een schaaktoernooi spelen alle deelnemers precies één maal tegen elkaar.

Met de functie $W(d) = \frac{d(d-1)}{2}$ kun je het aantal wedstrijden W met d deelnemers berekenen.

- a** Hoeveel wedstrijden zijn er bij zes deelnemers?
 - b** Hoeveel deelnemers zijn er bij 66 wedstrijden?
- 51** Simeon heeft een bak met rode en groene blokjes. Van elke kleur zitten er 20 blokjes in de bak.
- a** Simeon maakt een toren met vier blokjes. Hij kiest steeds voor een rood of een groen blokje.
Leg uit dat hij 16 verschillende torens kan maken.
 - b** Leg uit dat je het aantal torens A met n blokjes kunt berekenen met de formule $A = 2^n$.
 - c** Simeon maakt een hogere toren. Hij kan nu 256 verschillende torens maken.
Hoeveel blokjes hoog is zijn toren?
 - d** Alicia heeft een bak met heel veel verschillende kleuren blokjes. Van elke kleur zijn er ten minste vijf blokjes. Haar toren is vijf blokjes hoog.
Het aantal verschillende torens dat Alicia kan maken, kun je berekenen met de formule $A = k^5$.
Hierin is k het aantal verschillende kleuren dat Alicia kan gebruiken. Alicia kan 32 768 verschillende torens maken.
Hoeveel verschillende kleuren blokjes zitten er in haar bak?



Theorie

Gebroken vergelijking, exponentiële vergelijking, wortelvergelijking en machtsvergelijking

Bij een gebroken vergelijking zoals $\frac{45}{2p-7} + 2 = 7$ staat de variabele in de noemer van de breuk.

Bij een exponentiële vergelijking zoals $3 \cdot 2^x = 48$ staat de variabele in de exponent van de macht.

Bij een wortelvergelijking zoals $\sqrt{12-x} = 3$ staat de variabele onder het wortelteken.

Bij een machtsvergelijking zoals $2p^5 = 64$ komt een macht van de variabele voor.

Voorbeeld

gebroken vergelijking

$$\frac{4}{2x-3} = 2 + x$$

exponentiële vergelijking

$$5^x + 6 = 31$$

wortelvergelijking

$$\sqrt{3-2x} - 4 = 7$$

machtsvergelijking

$$6 - 2p^5 = -28$$

S1 Geef van de vier vergelijkingen aan welke soort vergelijking het is.

a $6 + 2^x = 38$

c $3p^4 + 8 = 42$

b $\sqrt{x+5} = 4$

d $\frac{150}{8-x} = 30$

Vaardigheid

Je kunt een gebroken vergelijking oplossen.

1 isoleer de breuk zodat deze alleen komt te staan.

2 Als de variabele alleen in de noemer van de breuk staat, gebruik dan bordjes.

Staan er aan beide kanten van het gelijkteken variabelen, vermenigvuldig dan links en rechts van het gelijkteken met de noemer van de breuk. Gebruik daarbij haakjes.

3 Los de vergelijking verder op.

Voorbeeld 1

Los op: $\frac{42}{x-2} - 5 = 9$

Oplossing

1 $\frac{42}{x-2} = 14$ breuk geïsoleerd

2 $\frac{42}{\boxed{3}} = 14$ bordje gelegd

3 $x - 2 = 3$
 $x = 5$

Voorbeeld 2

Los op: $x + 4 = \frac{-6}{x-3}$

Oplossing

2 $(x-3)(x+4) = \frac{-6}{x-3} \cdot (x-3)$

3 $x^2 + x - 12 = -6$ $x + 3 = 0$ of $x - 2 = 0$
 $x^2 + x - 6 = 0$ $x = -3$ of $x = 2$
 $(x+3)(x-2) = 0$

S2 Los de vergelijkingen op.

a $\frac{-24}{2x} + 3 = 9$

b $x + 11 = \frac{11}{x+1}$

Vaardigheid

Je kunt een exponentiële vergelijking oplossen.

Bij het oplossen van een exponentiële vergelijking schrijf je beide kanten van het gelijkteken als een macht met hetzelfde grondtal en leg je een bordje op de exponent van de macht. Maak zo nodig een tabel met machten van dat grondtal. Soms moet je de vergelijking eerst vereenvoudigen door de macht te isoleren.

Voorbeeld

Los op: $7 \cdot 2^{x+1} = 112$

Oplossing

$2^{x+1} = 16$	macht geïsoleerd
$2^{x+1} = 2^4$	16 als macht van 2 geschreven
$x + 1 = 4$	bordje gelegd
$x = 3$	

S3 Los de vergelijkingen op.

a $4^{2x-1} = 4096$

b $-3 \cdot 4^x = -192$

<i>macht</i>	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6
<i>uitkomst</i>	4	...	...	...	...	...

Vaardigheid

Je kunt een wortelvergelijking oplossen.

Wortelvergelijkingen los je meestal op met bordjes. Soms moet je de vergelijking eerst vereenvoudigen door de wortel te isoleren.

Voorbeeld 1

Los op: $\sqrt{p+9} - 1 = 14$

Oplossing

$\sqrt{p+9} = 15$	wortel geïsoleerd
$\sqrt{225} = 15$	bordje gelegd
$p + 9 = 225$	
$p = 216$	

Voorbeeld 2

Los op: $3\sqrt{m-4} = 18$

Oplossing

$\sqrt{m-4} = 6$	wortel geïsoleerd
$\sqrt{36} = 6$	bordje gelegd
$m - 4 = 36$	
$m = 40$	

S4 Los de vergelijkingen op.

a $\sqrt{6b+19} + 3 = 10$

b $5\sqrt{8-x} = 15$

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een parabool en een lijn berekenen.

- 1 Stel de bijbehorende functievoorschriften aan elkaar gelijk.
- 2 Bereken de x -coördinaten van de snijpunten door de verkregen vergelijking op te lossen.
- 3 Bereken de y -coördinaten van de snijpunten door de gevonden x -coördinaten in te vullen in één van de functievoorschriften.
- 4 Controleer de coördinaten van de gevonden punten door de x -coördinaten ook in het andere functievoorschrift in te vullen.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken bij $f(x) = x^2 + x$ en $g(x) = 2x + 6$.

Oplossing

- 1 $x^2 + x = 2x + 6$
- 2 $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x + 2)(x - 3) = 0$
 $x + 2 = 0$ of $x - 3 = 0$
 $x = -2$ of $x = 3$
- 3 $f(-2) = 2$ en $f(3) = 12$
- 4 Controle $g(-2) = 2$ en $g(3) = 12$
 De coördinaten van de snijpunten zijn $(-2, 2)$ en $(3, 12)$.

- S5 Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van de functies $f(x) = x^2 - 3x$ en $g(x) = 35 - x$.

Vaardigheid

Je kunt intervallen in de ongelijkheidsnotatie en intervalnotatie schrijven.

Een interval kun je in de ongelijkheidsnotatie als ook in de intervalnotatie schrijven.

De rechte haak betekent: het getal telt wel mee.

De punthaak betekent: het getal telt niet mee.

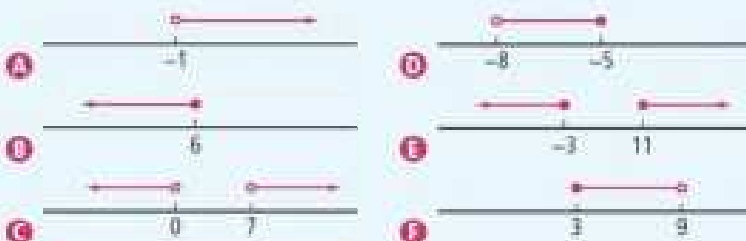
Bij de pijl gebruik je een punthaak.

Als x alle waarden mag zijn, noteer je dat als $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$ of als $\mathbb{R}$.

Voorbeeld

ongelijkheidsnotatie	intervalnotatie
$x > -5$	$\langle -5, \rightarrow \rangle$
$x < -2,8$	$\langle \leftarrow, -2,8 \rangle$
$x \geq 1,1$	$[1,1; \rightarrow \rangle$
$x \leq 7$	$\langle \leftarrow, 7]$
$-2 < x \leq 5$	$\langle -2, 5]$
$x \leq 4$ of $x > 8$	$\langle \leftarrow, 4] \cup \langle 8, \rightarrow \rangle$

- S6 Schrijf bij elke getallenlijn het interval in zowel de ongelijkheidsnotatie als in de intervalnotatie.



Vaardigheid

Je kunt een ongelijkheid oplossen met grafieken.

- 1 Stel de vergelijking op die bij de ongelijkheid past.
- 2 Los de vergelijking op en bereken de coördinaten van de snijpunten.
- 3 Schets in één figuur de bijbehorende grafieken.
- 4 Lees uit de bijbehorende grafieken de oplossing van de ongelijkheid af.

Voorbeeld

Los op: $0,5x^2 + 5 \geq 7$

Oplossing

1 $0,5x^2 + 5 = 7$

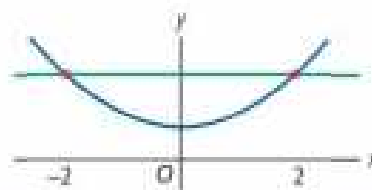
2 $0,5x^2 = 2$

$x^2 = 4$

$x = -2$ of $x = 2$

De coördinaten van de snijpunten zijn $(-2, 7)$ en $(2, 7)$.

- 3 De grafieken zijn een dalparabool en een horizontale lijn.



- 4 De oplossing van de ongelijkheid is $x \leq -2$ of $x \geq 2$.
In de intervalnotatie geschreven $\langle -\infty, -2 \rangle \cup [2, \infty \rangle$.

- S7 Los de ongelijkheden op en schrijf de oplossingen van de ongelijkheden in de intervalnotatie.

a $130 - 4x^2 \geq 30$

b $x^2 - 8x + 11 < x - 7$

Vaardigheid

Je kunt een machtsvergelijking oplossen.

Vereenvoudig de vergelijking tot de vorm $x^n = c$ door de macht te isoleren.

De oplossing van $x^n = c$ met n oneven is $x = \sqrt[n]{c}$.

De oplossingen van $x^n = c$ met n even en $c > 0$ zijn

$x = -\sqrt[n]{c}$ en $x = \sqrt[n]{c}$.

De oplossing van $x^n = 0$ is $x = 0$.

Voorbeeld

Los op: $-3x^4 + 92 = 62$

Oplossing

$-3x^4 = -30$

$x^4 = 10$ macht geïsoleerd

De exponent 4 van de macht is even.

Er zijn twee oplossingen.

$x = -\sqrt[4]{10} \approx -1,78$ of $x = \sqrt[4]{10} \approx 1,78$

- S8 Los indien mogelijk de vergelijkingen op.

a $0,04x^6 = 625$

c $1000 - x^3 = 757$

b $1000x^3 = -3375$

d $-80 - \frac{1}{2}x^4 = 62$

T1 Los de vergelijkingen op.

a $\frac{24}{5b-3} = 4$

c $\frac{12}{x-2} = x-6$

b $1 + \frac{30}{7h} = 6$

d $\frac{2}{x} = -2x + 4$

T2 Bij een proef koelt de temperatuur in een kweekbak af volgens het functievoorschrift $T(t) = 20 + \frac{24}{\frac{1}{2}t + 2}$

Hierin is T de temperatuur in graden C en t de verstreken tijd in minuten.

- a** Hoeveel graden is de temperatuur aan het begin van de proef?
- b** Bereken de temperatuur na 10 minuten.
- c** Hoe hoog zal uiteindelijk de temperatuur in de kweekbak worden, aangenomen dat de bak niet meer verwarmd wordt?
- d** Wanneer de temperatuur lager wordt dan 23°C moet de kweekbak opnieuw worden verwarmd. Bereken na hoeveel minuten je het verwarmingselement moet inschakelen.

T3 Los de vergelijkingen op.

a $7^{2x} = 343$

e $4\sqrt{t+1} = 12$

b $2 \cdot 7^p = 4802$

f $4\sqrt{2u+3} = 19$

c $7^{3k-1} - 1 = 2400$

g $27 - 3\sqrt{3a} = 0$

d $7^{-2+5a} = 49$

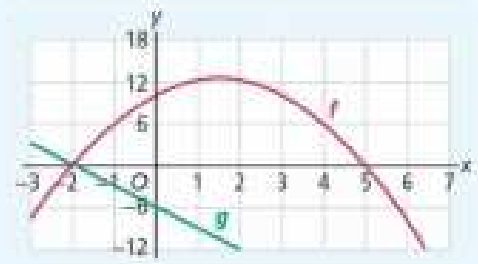
h $6\sqrt{6-c} - 2 = 4$

T4 Bij een klok bepaalt de lengte van de slinger de slingertijd, dat is de tijd waarin de slinger heen en weer gaat. Door deze lengte aan te passen, kun je de klok op tijd laten lopen. Met de functie $T(l) = 2\sqrt{l}$ bereken je de slingertijd T in seconden bij een lengte l in meters.

- a** Bereken de lengte van de slinger in cm bij een slingertijd van 1,4 seconden.
- b** Wordt bij een twee keer zo lange slinger, de slingertijd ook twee keer zo groot? Leg je antwoord uit.



- T5** Gegeven zijn de functies $f(x) = -x^2 + 3x + 10$, $g(x) = -3x - 6$ en $h(x) = -3x + 19$. In de figuur zijn de grafieken van de functies f en g getekend.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
 - Toon met een berekening aan dat de grafiek van f en h slechts één punt gemeenschappelijk hebben.
 - Bereken de coördinaten van dit punt.



- T6**
- Schrijf bij de getallenlijnen A en B het interval in zowel de ongelijkheidsnotatie als in de intervalnotatie.
 - Schrijf in de intervalnotatie.
- | | |
|--------------|-----------------------------|
| A $x \geq 3$ | C $x \leq 7$ of $x \geq 13$ |
| B $x < -9$ | D alle waarden van x |

- T7** Los de ongelijkheden op en schrijf de oplossingen van de ongelijkheden in de intervalnotatie.

a $5x^2 + 9 \geq 89$	c $-2x^2 + 12 \geq 4x - 18$
b $x^2 - 12 < -x + 18$	d $0,5x^2 + 4 < -7$

- T8** Los indien mogelijk de vergelijkingen op.

a $10x^3 = -640$	c $9 - x^5 = -234$
b $3x^8 = 768$	d $50 - x^4 = 66$

- T9** Met een windmolen kun je energie opwekken. De hoeveelheid energie per tijdseenheid heet het vermogen. Het vermogen dat een windmolen levert, hangt af van de windsnelheid. Bij een bepaalde windmolen geldt de formule $P = 3,7 \cdot w^3$. Hierin is P het vermogen in watt en w de windsnelheid in meters per seconde.
- Hoeveel watt levert de windmolen bij een windsnelheid van 12 meter per seconde?
 - Bij welke windsnelheid levert een windmolen 29 600 watt?



Je kunt een gebroken vergelijking oplossen.

E1 Los de vergelijkingen op.

a $\frac{20}{2x+1} = 5$

c $5 - \frac{4}{3x} = 4$

b $\frac{-24}{2x} = x - 7$

d $7x + 4 = \frac{20}{x}$

Je kunt een exponentiële vergelijking oplossen.

E2 Los de vergelijkingen op.

Gebruik de tabellen met machten van 3 en van 4.

a $4^x = 256$

d $3^{-x} = 729$

b $3^{2x} = 81$

e $0,2 \cdot 4^x = 3,2$

c $2 \cdot 3^{x+1} = 486$

f $4^{x-3} - 2 = 62$

<i>macht</i>	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
<i>uitkomst</i>	3	9	...	...	...	729
<i>macht</i>	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6
<i>uitkomst</i>	4	...	...	...	...	...

Je kunt een wortelvergelijking oplossen.

E3 Los de vergelijkingen op.

a $\sqrt{3a} = 9$

d $20 - \sqrt{3d - 5} = 16$

b $\sqrt{24 - 7b} = 5$

e $8 + 2\sqrt{e} = 22$

c $4\sqrt{c+9} = 8$

f $2\sqrt{2f-5} = 32$

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een parabool en een lijn berekenen.

E4 Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van de functies f en g .

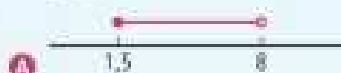
a $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ en $g(x) = 5x$

b $f(x) = x^2 - 5x$ en $g(x) = 4x - 14$

c $f(x) = x^2 - 3x + 4$ en $g(x) = -2x + 16$

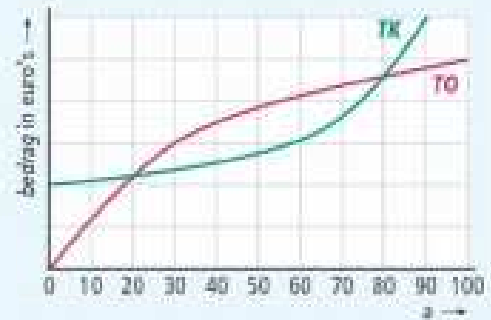
Je kunt intervallen in de ongelijkheidsnotatie en intervalnotatie schrijven.

E5 Schrijf bij elke getallenlijn het interval in zowel de ongelijkheidsnotatie als in de intervalnotatie.

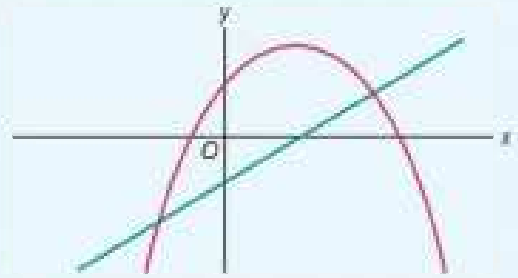


Je kunt een ongelijkheid oplossen met grafieken.

- E6** Wilma verkoopt ijsjes op de markt. In de figuur zijn de grafieken voor totale opbrengst TO en de totale kosten TK getekend.
Bij welke aantallen verkochte ijsjes a maakt Wilma winst?



- E7** Je ziet een schets van een parabool en een lijn die horen bij de ongelijkheid $-x^2 + 3x + 3 \leq 2x - 3$.
Los deze ongelijkheid op en schrijf de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.



- E8** Los de ongelijkheden op en schrijf de oplossingen van de ongelijkheden in de intervalnotatie.

- a $20 - 2x^2 < 20$ c $71 - x^2 > -10$
b $x^2 + 4x \geq 5$ d $-2x^2 + 2 > 4x - 14$

Je kunt een machtsvergelijking oplossen.

- E9** Los de vergelijkingen op.
- a $t^3 = 343$ c $3g^5 + 12 = -84$
b $3p^4 = 1875$ d $100 - 4c^4 = 200$
- E10** Bij een bepaalde rupsensoort geldt voor het verband tussen de lengte l in mm en het gewicht g in grammen de formule $g = 0,000 l^3$.
- a Een rups heeft een gewicht van 0,8 gram.
Bereken hoe lang deze rups is.
- b Bereken de lengte in hele mm van een rups met een gewicht van 3 gram.
- c Vlak voordat de rupsen gaan verpoppen ligt het gewicht tussen 3 gram en 4 gram.
Bereken de lengte in hele mm van een rups bij verpoppen.





Vergelijkingen en ongelijkheden 11B

In dit hoofdstuk

In klas 2 heb je lineaire en kwadratische vergelijkingen opgelost. In hoofdstuk 4 heb je bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen de *abc*-formule leren gebruiken.

In dit hoofdstuk ga je ook leren hoe je andere soorten vergelijkingen oplost.

Verder leer je in dit hoofdstuk hoe je de coördinaten van de snijpunten van een parabool en een lijn berekent. De discriminant van de vergelijking die ontstaat bij het berekenen van de snijpunten kun je gebruiken om vast te stellen hoe een parabool en lijn ten opzichte van elkaar liggen.

Ongelijkheden kun je oplossen met behulp van grafieken. De intervalnotatie die je hebt leren kennen in hoofdstuk 8, wordt daarvoor uitgebreid.

Dit hoofdstuk is bedoeld voor leerlingen die in de bovenbouw verdergaan met wiskunde B.

V1 Bereken zonder rekenmachine.

a $\sqrt[3]{8}$

c $\sqrt[3]{-27}$

b $\sqrt[3]{-1}$

d $\sqrt[3]{1000}$

Het getal $\sqrt[3]{24}$ is geen geheel getal, want er is geen geheel getal waarvan de derde macht gelijk aan 24 is.

Met de rekenmachine vind je dat $\sqrt[3]{24} \approx 2,88$.

Je kunt ook de derdemachtswortel van een negatief getal uitrekenen. Zo is $\sqrt[3]{-216} = -6$, want $(-6)^3 = -216$.

V2 Geef een benadering in twee decimalen.

a $\sqrt[3]{18}$

c $\sqrt[3]{-8,5}$

b $\sqrt[3]{-100}$

d $\sqrt[3]{0,8}$

V3 Op de getallenlijnen zijn intervallen aangegeven. Bij elke getallenlijn hoort een intervalnotatie.

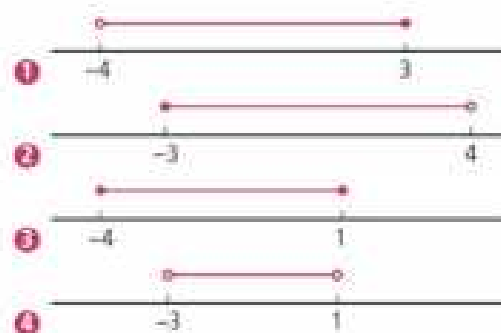
Koppel ze aan elkaar en vul de intervalnotatie verder in.

A $[-4, \dots$

C $\langle -3, \dots$

B $\langle -4, \dots$

D $[-3, \dots$



V4 Los de ongelijkheden op. Schrijf je antwoord zo nodig als breuk.

a $5x - 6 > 3x + 9$

c $4x > x - 30$

b $-7x + 8 < -7 - 2x$

d $4 - x < 18 + 2x$

V5 Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 + x - \frac{1}{2}$.

a Leg uit dat de parabool bij de functie f de y -as snijdt in het punt $(0, -\frac{1}{2})$.

b Om de andere x -waarde te vinden waarvan de functiewaarde ook $-\frac{1}{2}$ is, gebruik je de vergelijking $2x^2 + x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Los deze vergelijking op.

c Bereken met de abc -formule de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as.

De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft als oplossing(en):

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Daarbij is $D = b^2 - 4ac$.

	Nienke
☐	$3x^2 + 4x = 18 + x$
☐	$3x^2 + 3x - 18 = 0$
☐	$x^2 + x - 6 = 0$
☐	$(x-2)(x+3) = 0$
☐	$x-2 = 0$ of $x+3 = 0$
☐	$x = 2$ of $x = -3$

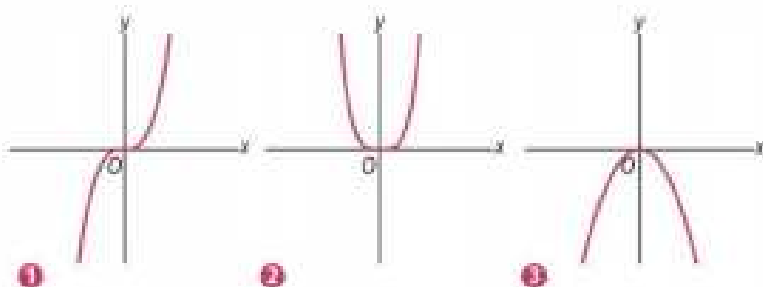
	Rien
☐	$x^2 + 4x - 8 = 0$
☐	$(x+2)^2 - 4 - 8 = 0$
☐	$(x+2)^2 = 12$
☐	$x+2 = -\sqrt{12}$ of $x+2 = \sqrt{12}$
☐	$x = -2 - \sqrt{12}$ of $x = -2 + \sqrt{12}$

	Daan
☐	$(x+2)^2 + 3 = 28$
☐	$(x+2)^2 = 25$
☐	$(-5)^2 = 25$ en $5^2 = 25$ dus
☐	$x+2 = -5$ of $x+2 = 5$
☐	$x = -7$ of $x = 3$

- V6** In opdracht V5 heb je een kwadratische vergelijking met de *abc*-formule opgelost. Nienke, Rien en Daan hebben ook kwadratische vergelijkingen op gelost. De een met ontbinden in factoren, de ander met bordje leggen en de derde met kwadraat afsplitsen. Geef voor elk aan welke oplosmethode is gebruikt.

- V7** Los de vergelijkingen op.

- a** $x^2 - 11x + 24 = 0$ **d** $-x^2 + 6x + 3 = 11$
b $(x-3)^2 - 2 = 14$ **e** $x^2 + x = 12 + 2x$
c $x^2 + 7x = 8$ **f** $3x^2 - 8x - 3 = 0$



- V8** In de figuur zijn de grafieken van de functies $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^3$ en $h(x) = x^4$ geschetst.
- Zoek bij iedere functie de juiste grafiek.
 - Geef bij elke grafiek aan hoeveel snijpunten deze heeft met de lijn $y = -10$.
 - Welke grafiek heeft geen snijpunt met de lijn $y = 10$?

Je leert

- wat een gebroken vergelijking is
- hoe je een gebroken vergelijking oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–3–04–4–5–06–7
- basis: 1–2–3–4–5–6–7–8
- uitdagend: 1–2–4–5–7–8–U1–U2

Op de maaltijd staat hoelang je het product in de magnetron moet verwarmen.

De bereidingstijd in minuten bereken je met

$$\text{bereidingstijd} = \frac{4000}{\text{vermogen}}$$

Hierin is het vermogen in watt (W). In de magnetron van Halina heeft deze maaltijd vijf minuten bereidingstijd nodig.

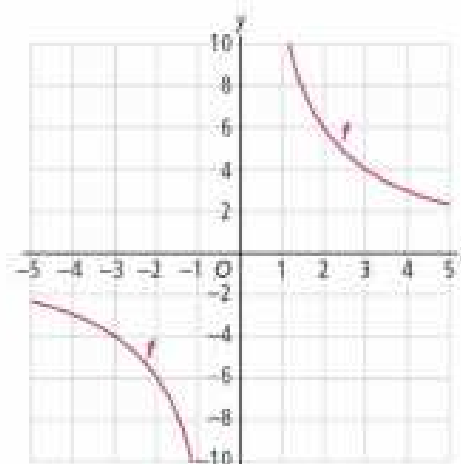
- Hoe groot is het vermogen van deze magnetron?



- 1 In het assenstelsel is de grafiek van de gebroken functie

$$f(x) = \frac{12}{x} \text{ getekend.}$$

- Wat gebeurt er met de waarde van $f(x)$ als je x steeds verder van 0 kiest?
- Bereken $f(1000)$ en $f(-1000)$.
- Leg uit waarom $f(0)$ niet bestaat.
- Wat gebeurt er met de waarde van $f(x)$ als je x steeds dichterbij 0 kiest?
- Los de vergelijking $\frac{12}{x} = 12000$ op.



- 2 Gegeven is de gebroken functie $f(x) = \frac{72}{x-5}$

- Jordy wil de vergelijking $\frac{72}{x-5} = 6$ oplossen.
Hij legt een bordje op $x = 5$.
Leg uit waarom het getal 12 op de plaats van het bordje komt.
Welke waarde voor x vindt hij vervolgens?
- Los op dezelfde manier $\frac{72}{x-5} = 8$ en $\frac{72}{x-5} = 144$ op.

Denk aan:

$$\frac{6}{3} = 2 \text{ en } \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

Theorie

Een vergelijking als $\frac{36}{3-4a} = 12$ of als $\frac{45}{2p-7} + 2 = 7$, met de variabele in de noemer van de breuk, noem je een **gebroken vergelijking**. Een gebroken vergelijking los je meestal op met bordjes. Het bordje leg je dan op de noemer van de breuk. Soms moet je de vergelijking eerst vereenvoudigen door de breuk te isoleren.

Voorbeeld

Los op: $\frac{45}{2p-7} + 2 = 7$

Oplossing

$$\frac{45}{2p-7} = 5 \quad \text{breuk geïsoleerd}$$

$$\frac{45}{9} = 5 \quad \text{bordje gelegd}$$

$$2p - 7 = 9$$

$$2p = 16$$

$$p = 8$$

- 3 a Leg uit hoe in het voorbeeld de breuk geïsoleerd wordt.
 b Hoe weet je dat het getal 9 op het bordje moet staan?
 c Los op dezelfde manier $\frac{45}{2p-7} + 5 = 8$ op.

Ondersteunende route → maak opdracht 04

- 4 Los de vergelijkingen op.

a $\frac{18}{2x+1} = 2$

d $\frac{45}{11-4x} + 7 = 12$

b $\frac{-16}{6a-10} = -8$

e $18 + \frac{70}{3m+1} = 4$

c $\frac{100}{-7+2p} = -4$

f $1 - \frac{20}{4a} = 5$

- 5 Gegeven zijn $f(x) = \frac{8}{x}$ en $g(x) = x + 2$.

- a Teken de grafieken van f en g in één assenstelsel. Neem voor x de waarden -4 tot en met 4 .
 b Lees de coördinaten van de snijpunten af en controleer of deze coördinaten inderdaad bij de snijpunten horen.
 c Salih wil de coördinaten van de snijpunten van de grafieken gaan berekenen. Hij stelt daarom de functievoorschriften aan elkaar gelijk. Op het blaadje zie je welke vergelijking hij dan krijgt. Om de breuk weg te werken, vermenigvuldigt Salih eerst links en rechts van het gelijkteken met x .
 Waarom blijft aan de linkerkant alleen 8 over?
 d Los de vergelijking op.
 e Heb je voor x dezelfde waarden gevonden als bij opdracht b?

				Salih
•	$\frac{8}{x} = x + 2$			
•	$x \cdot \frac{8}{x} = x(x + 2)$			
•	$8 = \dots$			

Aanpak**Hoe los je een gebroken vergelijking op?**

- 1 Isoleer indien nodig de breuk zodat deze alleen komt te staan.
- 2 Als de variabele alleen in de noemer van de breuk staat, gebruik dan bordjes.
Staan er aan beide kanten van het gelijkteken variabelen, vermenigvuldig dan links en rechts van het gelijkteken met de noemer van de breuk. Gebruik daarbij haakjes.
- 3 Los de vergelijking verder op.

Voorbeeld

Los op: $x = \frac{6}{x+2} - 1$

Oplossing

1 $x + 1 = \frac{6}{x+2}$

2 $(x+2)(x+1) = \frac{6}{x+2} \cdot (x+2)$

3 $x^2 + 3x + 2 = 6$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x+4)(x-1) = 0$$

$$x+4=0 \text{ of } x-1=0$$

$$x=-4 \text{ of } x=1$$

Ondersteunende route → maak opdracht D6

- 6 Los de vergelijkingen op.

a $x - 2 = \frac{3}{x}$

c $x + 7 = \frac{-9}{x-3}$

b $\frac{-40}{x-12} = x + 2$

d $\frac{10}{x+3} - 3 = -1$

- 7 Tjerk gaat de vergelijking $x - 2 = 4 - \frac{5}{x}$ oplossen.

- a Welke bewerking heeft hij in stap 1 gedaan?
- b Los de vergelijking verder op.
- c Los de vergelijkingen op.

A $x = 1 + \frac{30}{x}$

C $\frac{8}{x+3} - 10 = x - 14$

B $\frac{50}{x-1} + 2 = x - 4$

D $x + 10 = 20 - \frac{36}{x+2}$

- 8 Een maaltijd is op kamertemperatuur en wordt in de diepvries gelegd. De temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ van de maaltijd kun je berekenen met de functie $T(u) = \frac{35}{0,5u+1} - 20$

Hierin is u het aantal uren nadat de maaltijd in de diepvries is gelegd.

- a Bereken hoeveel graden de kamertemperatuur is.
- b Na hoeveel uur is de temperatuur van de maaltijd -10°C ?

				Tjerk
•	$x - 2 = 4 - \frac{5}{x}$			
•				
•	$x - 6 = -\frac{5}{x}$		(1)	



Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

- 04 Elvi gaat de vergelijking $\frac{120}{2k-4} = 20$ oplossen.
- Waar legt ze het bordje op?
 - Leg uit dat op het bordje het getal 6 moet staan.
 - Maak de berekening van Elvi verder af.

$\frac{120}{2k-4} = 20$	Elvi
$\frac{120}{\text{...}} = 20$	
$2k-4 = \dots$	
$2k = \dots$	
$k = \dots$	

- 06 Je gaat de vergelijking $x + 5 = \frac{16}{x-1}$ oplossen. Op het blaadje is een begin gemaakt.
- Leg uit wat er in stap 1 gebeurt.
 - Leg uit waarom er aan de rechterkant van het gelijktteken alleen het getal 16 overblijft.
 - Los de vergelijking verder op.
Los op dezelfde manier de vergelijkingen op.

$x + 5 = \frac{16}{x-1}$	
$(x-1)(x+5) = \frac{16}{x-1} \cdot (x-1) \quad (1)$	
$x^2 + \dots x + \dots = 16 \quad (2)$	

- d $x = \frac{10}{x+3}$ f $\frac{-10}{x-1} = x-12$
- e $10 = \frac{27}{x+7} + 1$ g $x+7 = \frac{-60}{x-9}$

Uitdagende opdrachten

- U1 Dré en Ed maken een fietstocht van 80 km. Dré rijdt met gemiddelde snelheid van v km/uur.
- Geef een formule waarmee je de tijd in uren kunt berekenen die hij nodig heeft voor de 80 km.
 - Ed rijdt 4 km/uur sneller en komt één uur eerder aan. Leg uit dat je de gemiddelde snelheid van Dré kunt berekenen met de vergelijking $\frac{80}{v} = \frac{80}{v+4} + 1$.
 - Bereken de gemiddelde snelheid van Dré en van Ed.

- U2 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + \frac{10}{x-1}$ en $g(x) = 2 - 2x$.
Ga na dat de vergelijking $f(x) = g(x)$ geen oplossingen heeft en schets de grafieken in één figuur.



11B.2 Exponentiële en wortelvergelijkingen

Je leert

- wat een exponentiële en een wortelvergelijking is
- hoe je een exponentiële en een wortelvergelijking oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 9—10—11—012—13—014—14
- basis: 9—10—11—12—13—14—15
- uitdagend: 9—10—12—14—15—U3—U4

Een wiskunde docent heeft een vergelijking op het bord geschreven.

- Welke oplossing heeft deze vergelijking?

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}}}} = 2$$

- 9 In een sloot verdubbelt het aantal algen zich per dag. Neem aan dat op een gegeven moment een m^3 water 8000 algen bevat. Van het aantal algen is de grafiek getekend. Bij de grafiek hoort de functie $N(t) = 8000 \cdot 2^t$.

Hierin is N het aantal algen per m^3 water en t de tijd in dagen.

- a Hoeveel algen per m^3 water zijn er na tien dagen?

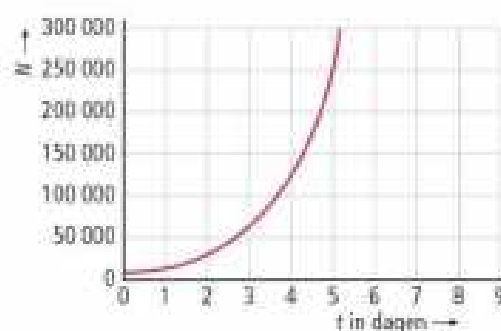
- b Om uit te rekenen na hoeveel dagen het aantal algen per m^3 water is gegroeid tot 64 000, moet je de vergelijking $8000 \cdot 2^t = 64\,000$ oplossen.

Leg uit dat je deze vergelijking kunt vereenvoudigen tot $2^t = 8$.

- c Schrijf 8 als macht van 2.

- d Na hoeveel dagen is het aantal algen gegroeid tot 64 000?

- e Los op $N(t) = 256\,000$.



- 10 Hugo gaat de vergelijking $20 \cdot 3^x = 1620$ oplossen.

- a Leg uit dat deze vergelijking te schrijven is als $3^x = 81$.

- b Hugo maakt een tabel van machten met grondtal 3. Vul de tabel verder in.

- c Welke oplossing krijgt hij?

- d Los de vergelijkingen op.

macht	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
uitkomst	3	9	...	...	...	...

A $3^x = 729$

C $5 + 3^x = 248$

B $12 \cdot 3^x = 108$

D $8 \cdot 3^{x-1} = 648$

Theorie

Een vergelijking als $7 \cdot 3^x = 567$ of als $3^{x-5} + 4 = 31$ met de variabele in de exponent van de macht, noem je een **exponentiële vergelijking**. Bij het oplossen van een exponentiële vergelijking schrijf je beide kanten van het gelijkteken als een macht met hetzelfde grondtal en leg je een bordje op de exponent van de macht. Maak zo nodig een tabel met machten van dat grondtal. Soms moet je de vergelijking eerst vereenvoudigen door de macht te isoleren.

Voorbeeld

Los op: $3^{x-5} + 4 = 85$

Oplossing

$3^{x-5} = 81$	macht geïsoleerd
$3^{x-5} = 3^4$	81 als macht van 3 geschreven
$x - 5 = 4$	bordje gelegd op $x - 5$
$x = 9$	

- 11** Om $2^{4t+1} - 1 = 7$ op te kunnen lossen, vereenvoudig je eerst de vergelijking.

- Isoleer de macht door aan beide kanten van het gelijkteken 1 bij op te tellen.
- Maak een tabel met machten van 2 en schrijf de vergelijking als $2^{4t+1} = 2^{\dots}$.
- Leg een bordje op $4t + 1$ en los de vergelijking op.
- Los de vergelijkingen op.

A $3 \cdot 2^{5-t} = 3072$ C $4 \cdot 2^b - 1000 = 1048$

B $2^{2x} = 256$ D $256 : 2^{0,5x} = 4$

Ondersteunende route → maak opdracht 012

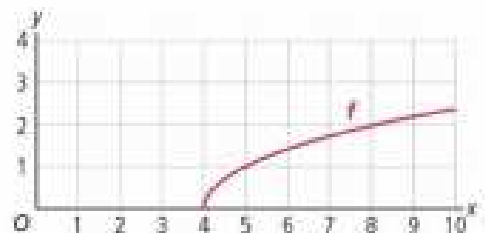
- 12** Los de vergelijkingen op.

- $4^{x-5} - 4 = 60$
- $4^{10a-25} = 1024$
- $25 \cdot 4^{m+1} = 400$
- $2000 - 4^{2r} = -2096$

- 13** In het assenstelsel is de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x-4}$ getekend.

- Bij welke waarden van x kun je een functiewaarde berekenen?
- Bereken $f(85)$.
- Om $f(x) = 6$ op te lossen, moet je de vergelijking $\sqrt{x-4} = 6$ oplossen.

Leg een bordje op $x - 4$ en los de vergelijking op.



Theorie

Een vergelijking als $42 - 3\sqrt{x} = 24$ of als $\sqrt{125 - 4x} + 1 = 8$ met de variabele onder het wortelteken, noem je een **wortelvergelijking**. Oplossen van wortelvergelijkingen doe je meestal met bordjes. Soms moet je de vergelijking eerst vereenvoudigen door de wortel te isoleren.

Voorbeeld 1

Los op: $\sqrt{125 - 4x} + 1 = 8$

Oplossing

$$\begin{array}{ll} \sqrt{125 - 4x} = 7 & \text{wortel geïsoleerd} \\ \sqrt{49} = 7 & \text{bordje gelegd} \\ 125 - 4x = 49 & \\ 4x = 76 & \\ x = 19 & \end{array}$$

Voorbeeld 2

Los op: $\frac{44}{\sqrt{k-7}} = 11$

Oplossing

$$\begin{array}{ll} \frac{44}{\sqrt{k-7}} = 11 & \\ \frac{4}{\sqrt{k-7}} = 1 & \\ \sqrt{k-7} = 4 & \text{wortel geïsoleerd} \\ \sqrt{16} = 4 & \text{bordje gelegd} \\ k - 7 = 16 & \\ k = 23 & \end{array}$$

Ondersteunende route → maak opdracht O14

14 Los de vergelijkingen op.

$$\begin{array}{ll} \text{a} \quad \sqrt{5x+9} = 13 & \text{d} \quad 8\sqrt{3p+2} = 40 \\ \text{b} \quad \sqrt{4a-12} + 2 = 4 & \text{e} \quad 100 - \sqrt{\frac{1}{2}d+8} = 78 \\ \text{c} \quad \frac{12}{\sqrt{x+9}} = 6 & \text{f} \quad \frac{\sqrt{4-4m}}{2} + 3 = 8 \end{array}$$

15 Hoe hoger je staat, hoe verder je kunt kijken. Met de formule $a = \sqrt{13h}$ kun je de kijkafstand a in kilometers berekenen bij een hoogte h in meters.

- Bovenop de Eiffeltoren kun je 63 kilometer ver kijken. Bereken hoeveel meter hoog je dan staat.
- Kun je, als je twee keer zo hoog staat, ook twee keer zo ver kijken? Leg je antwoord uit.

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4



Ondersteunende opdrachten

- U12** a Om de vergelijking $4^{t-1} - 7 = 57$ op te lossen, moet je eerst de macht isoleren.
Ga na dat je dan de vergelijking $4^{t-1} = 64$ krijgt.
- b Vul de tabel met machten van 4 verder in en gebruik deze om de vergelijking als $4^{t-1} = 4^{...}$ te schrijven.
- c Leg een bordje op $t = 1$ en vul in.
 $t - 1 = \dots$ dus de oplossing is $t = \dots$.
Los op dezelfde manier de vergelijkingen op.
- d $4^{8-2t} = 1024$ f $10 \cdot 4^{4b} = 160$
- e $4^{x+2} + 100 = 356$ g $4000 - 4^{3x} = -96$

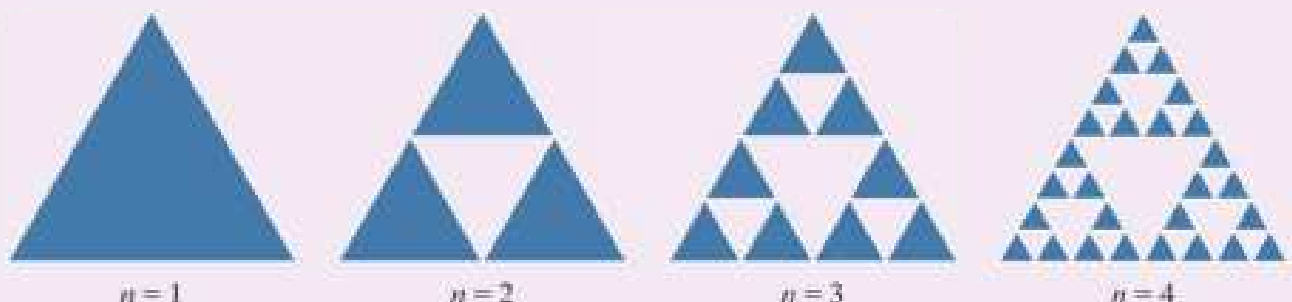
macht	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6
uitkomst	4	16	...	...	1024	...

- U14** Bart lost de vergelijking $\sqrt{3q + 100} = 11$ op.
Op het blaadje is een begin gemaakt.
- a Waar legt Bart het bordje op?
- b Waarom moet er 121 op het bordje staan?
- c Los de vergelijking verder op.

				Bart
☐	$\sqrt{3q + 100} = 11$			
☐	$\sqrt{121} = 11$	bordje gelegd		
☐	$3q + 100 = \dots$			
☐				

Uitdagende opdrachten

- U3** De grafiek van de functie $f(x) = \frac{9}{\sqrt{9-x}} - 9$ snijdt de verticale as in punt A en de horizontale as in punt B. Bereken de afstand AB.
- U4** De rij figuren zijn Sierpinski driehoeken. Je kunt de rij uitbreiden door in elke blauwe driehoek weer een kleinere witte driehoek te tekenen. Door dit oneindig vaak te herhalen, ontstaat een figuur die een fractal wordt genoemd.
- a Stel een formule op om het aantal blauwe driehoekjes A van figuur n te berekenen.
- b Welk nummer hoort bij de figuur met 729 blauwe driehoekjes?



Je leert

- hoe je de coördinaten van de snijpunten van een parabool en een lijn berekent
- hoe je berekent hoeveel punten een parabool en een lijn gemeenschappelijk hebben

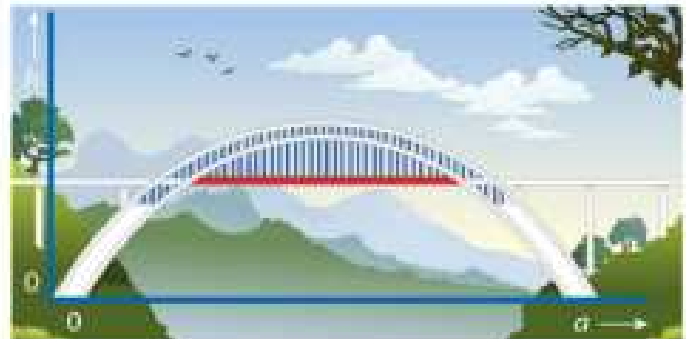
Leerroutes

- ondersteunend: 16—017—18—19—20—021—21
- basis: 16—17—18—19—20—21—22
- uitdagend: 16—18—19—21—22—U5—U6

De hoogte h in meters van de boog van de brug kun je berekenen met functievoorschrift $h(a) = -0,0075a^2 + 1,35a$. Hierin is a de horizontale afstand in meters.

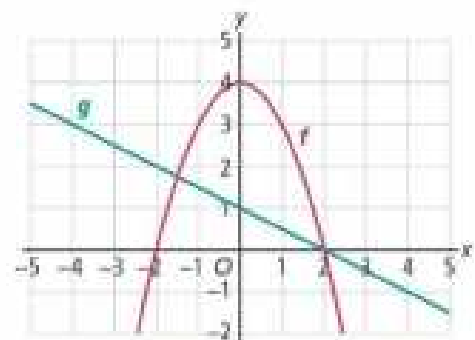
- Met welke vergelijking kun je de lengte van het rode gedeelte van het wegdek berekenen?

- A $h(a) = 0$ C $h(a) = 40$
 B $h(a) = 25$ D $h(a) = 60$



- 16** Je ziet de grafieken van de functies $f(x) = 4 - x^2$ en $g(x) = 1 - 0,5x$. Je kunt de x -coördinaten van de snijpunten berekenen door de functievoorschriften aan elkaar gelijk te stellen.

- Los de vergelijking $4 - x^2 = 1 - 0,5x$ op en bereken de x -coördinaten van de snijpunten.
- Bereken de y -coördinaten van de snijpunten door de gevonden x -coördinaten in het functievoorschrift van f in te vullen.
- Controleer je antwoorden door de gevonden x -coördinaten in het functievoorschrift van g in te vullen.
- Schrijf de coördinaten van de snijpunten op.

**Aanpak**

Hoe bereken je de coördinaten van de snijpunten van een parabool en een lijn?

- 1 Stel de bijbehorende functievoorschriften aan elkaar gelijk.
- 2 Bereken de x -coördinaten van de snijpunten door de verkregen vergelijking op te lossen.
- 3 Bereken de y -coördinaten van de snijpunten door de gevonden x -coördinaten in te vullen in één van de functievoorschriften.
- 4 Controleer de coördinaten van de gevonden punten door de x -coördinaten ook in het andere functievoorschrift in te vullen.

Voorbeeld 1

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken bij $f(x) = x^2 - 4x$ en $g(x) = 12 - 3x$.

Oplossing

- 1 $x^2 - 4x = 12 - 3x$
- 2 $x^2 - x - 12 = 0$
 $(x - 4)(x + 3) = 0$
 $x - 4 = 0$ of $x + 3 = 0$
 $x = 4$ of $x = -3$
- 3 $f(4) = 0$ en $f(-3) = 21$
- 4 Controle $g(4) = 0$ en $g(-3) = 21$
 De coördinaten zijn $(4, 0)$ en $(-3, 21)$.

Voorbeeld 2

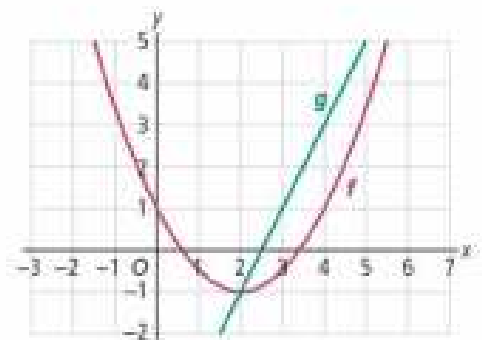
Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken bij $f(x) = 2x^2 - 3x$ en $g(x) = 2x - 2$.

Oplossing

- 1 $2x^2 - 3x = 2x - 2$
- 2 $2x^2 - 5x + 2 = 0$
 $D = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9$
 $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = 2$ of $x = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$
- 3 $f(2) = 2$ en $f(\frac{1}{2}) = -1$
- 4 Controle $g(2) = 2$ en $g(\frac{1}{2}) = -1$
 De coördinaten zijn $(2, 2)$ en $(\frac{1}{2}, -1)$.

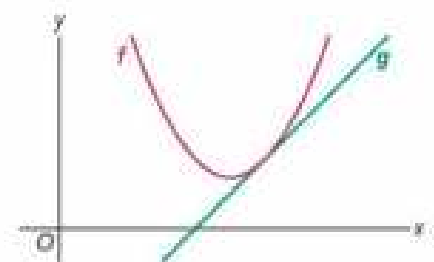
Ondersteunende route → maak opdracht 017

- 17** In het assenstelsel zijn de grafieken van de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ en $g(x) = 2x - 5$ getekend.
- a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
 - b Bereken ook de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de lijn $y = 5\frac{1}{2} - 2x$.



- 18** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van de functies f en g .
- a $f(x) = x^2 - 2x$ en $g(x) = 24 - 4x$
 - b $f(x) = x(x + 2)$ en $g(x) = 2x + 9$
 - c $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$ en $g(x) = x - 3$

- 19** In de figuur zijn de grafieken van de functies $f(x) = 4x^2 - 10x + 7$ en $g(x) = 2x - 2$ geschetst.
- a Stel de functievoorschriften aan elkaar gelijk.
 - b Los deze vergelijking met de abc -formule op.
 - c Hoe kun je aan de discriminant zien dat de grafieken van de functies maar één punt gemeenschappelijk hebben?
 - d Bereken de coördinaten van dit punt.



Theorie

De grafieken van een kwadratische functie f en een lineaire functie g kunnen elkaar **snijden** of elkaar **raken**. Het is ook mogelijk dat deze twee grafieken **geen punt gemeenschappelijk** hebben.

Om dat te onderzoeken, herleid je de vergelijking $f(x) = g(x)$ op nul.

Bepaal van deze vergelijking de waarde van de discriminant D .

$D > 0$: de grafieken van f en g snijden elkaar en er zijn twee snijpunten.

$D = 0$: de grafieken van f en g raken elkaar.

$D < 0$: de grafieken van f en g hebben geen punt gemeenschappelijk.



$f(x) = g(x)$ heeft twee oplossingen.



$f(x) = g(x)$ heeft één oplossing.



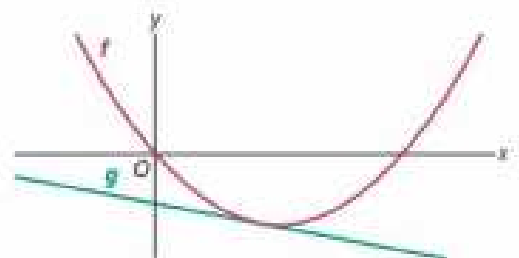
$f(x) = g(x)$ heeft geen oplossingen.

- 20** Gegeven zijn de functies $f(x) = -x^2 + x$ en $g(x) = 2x - 2$.
- Herleid de vergelijking $f(x) = g(x)$ op nul.
 - Bepaal van de verkregen vergelijking de discriminant.
 - Geef aan of de grafieken van f en g elkaar snijden, raken of dat ze geen punt gemeenschappelijk hebben.

Ondersteunende route → maak opdracht 021

- 21** Bepaal of de grafieken van de functies f en g elkaar snijden, raken of geen punt gemeenschappelijk hebben.
- $f(x) = x^2 - 6x + 6$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x - 2$
 - $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ en $g(x) = 2 - x$
 - $f(x) = -x^2 - 2,5x$ en $g(x) = 1,5x + 4$

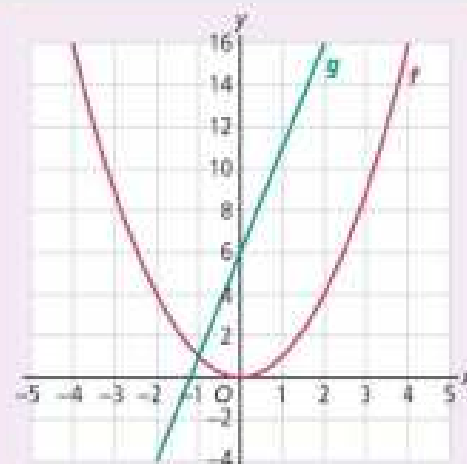
- 22** In de figuur zijn de grafieken van de functies $f(x) = 3x^2 - 6x$ en $g(x) = -x - 2$ geschetst. Het lijkt of de parabool en de lijn elkaar raken. Zoek uit of dat zo is.



Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

Ondersteunende opdrachten

- 017** In het assenstelsel zijn de grafieken van de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 5x + 6$ getekend.
- Om de coördinaten van de snijpunten te berekenen, stel je de functievoorschriften aan elkaar gelijk. Je krijgt dan de vergelijking $x^2 = 5x + 6$. Los deze vergelijking op.
 - Vul in: $f(-1) = \dots$ en $f(6) = \dots$
 - Controleer de gevonden punten door de x -coördinaat ook in het functievoorschrift van g in te vullen.
 - Bereken ook de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de lijn $y = -8x$.



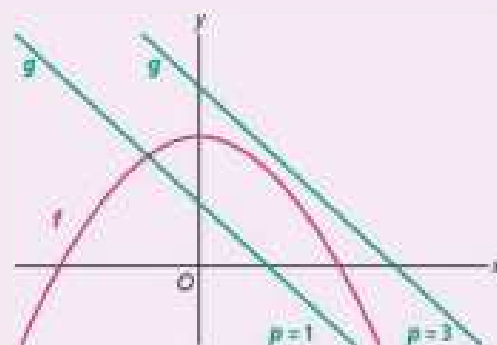
- 021** Je gaat onderzoeken of de grafieken van de functies $f(x) = x^2 + 7$ en $g(x) = 6x - 2$ elkaar snijden, raken of geen enkel punt gemeenschappelijk hebben.
- Stel de functievoorschriften aan elkaar gelijk.
 - Herleid de vergelijking op nul en ga na dat de discriminant van de verkregen vergelijking gelijk aan nul is.
 - Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking?
 - Geef aan of de grafieken elkaar snijden, raken of dat ze geen punt gemeenschappelijk hebben.

Uitdagende opdrachten

- U5** Is het mogelijk dat een lijn een parabool snijdt, maar dat de lijn en de parabool toch slechts één punt gemeenschappelijk hebben? Verklaar je antwoord.

- U6** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$ en $g(x) = p - x$. In de figuur is de grafiek van f en zijn de grafieken van g met $p = 1$ en $p = 3$ geschetst.

- Herleid de vergelijking $f(x) = g(x)$ op nul en druk de discriminant van de verkregen vergelijking uit in p .
- Voor welke waarde van p raken de parabool en lijn elkaar?
- Bereken de coördinaten van het punt waar de parabool en de lijn elkaar raken.



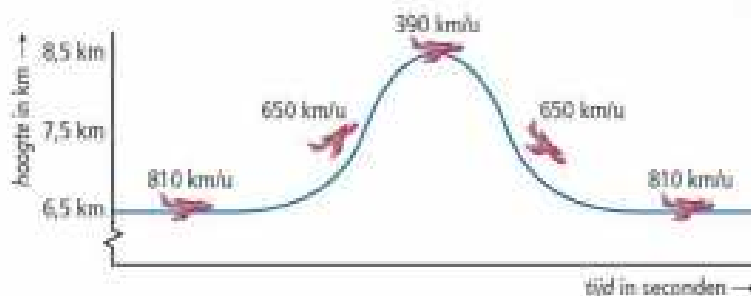
Je leert • hoe je intervallen in de ongelijkheidsnotatie en in de intervalnotatie schrijft

Leerroutes • ondersteunend: 23—24—25—26—27—028—29—030—30
 • basis: 23—24—25—26—27—28—29—30—31
 • uitdagend: 23—25—26—27—29—30—31—U7—U8

W Tijdens een paraboolvlucht kun je gedurende een korte tijd gewichtloosheid simuleren.

Dat is het geval wanneer het vliegtuig boven de 7600 meter komt.

- Geef op de horizontale as aan hoelang deze periode duurt.



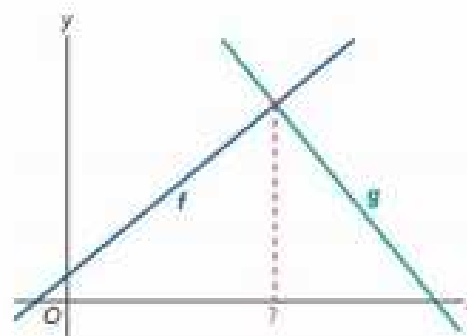
23 In de figuur zijn de grafieken bij $f(x) = 2x + 1$ en $g(x) = 17 - 3x$ getekend.

- Los de ongelijkheid $2x + 1 \geq 17 - 3x$ op.
- De oplossing van deze ongelijkheid kun je op een getallenlijn weergeven.



Welk getal moet op de puntjes staan?

- Wat betekent een dicht rondje bij deze getallenlijn?
- Vul in.
De oplossing schrijf je in de intervalnotatie als $[\dots, \rightarrow)$.



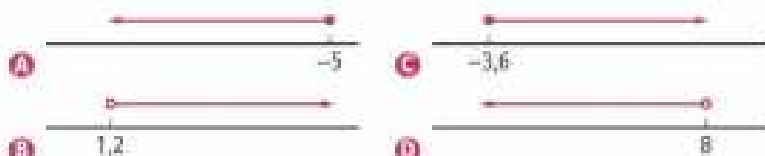
Theorie

Een interval kun je in de **ongelijkheidsnotatie** en in de **intervalnotatie** schrijven. Bij de intervalnotatie gebruik je rechte haken en punthaken. De rechte haak betekent: het getal telt wel mee. De punthaak betekent: het getal telt niet mee. Bij de pijl gebruik je een punthaak.

Voorbeeld

ongelijkheidsnotatie	intervalnotatie
$x > -1,8$	$(-1,8; \rightarrow)$
$x < 9$	$(\leftarrow, 9)$
$x \geq 1$	$[1, \rightarrow)$
$x \leq -3,5$	$(\leftarrow, -3,5]$

24 Op de getallenlijnen zijn intervallen aangegeven. Schrijf deze intervallen in zowel de ongelijkheidsnotatie als in de intervalnotatie.



25 Schrijf in de intervalnotatie.

- a $x > 13$ c $x < -2,5$
 b $x \geq -5$ d $x \leq 20$

26 Het interval op de getallenlijn stelt alle getallen x voor waarbij x groter is dan 2 én kleiner dan of gelijk aan 6.

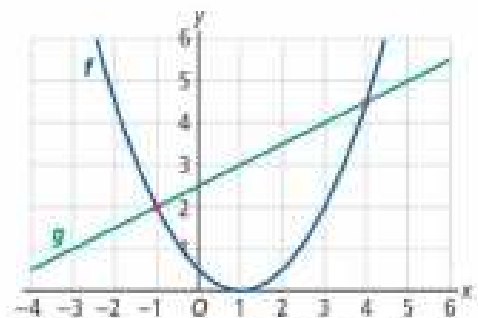
- a Schrijf het interval in de intervalnotatie $\langle \dots, \dots \rangle$.
 b Geef twee waarden voor x die op dit interval liggen.
 c Leg uit dat je voor deze getallen kunt schrijven $2 < x$.
 d Vul in.

Omdat op het interval geldt dat $2 < x$ en $x \leq 6$, kun je het interval in de ongelijkheidsnotatie schrijven als $\dots < x \leq \dots$.



27 In het assenstelsel zijn de grafieken van f en g getekend.

- a Lees af bij welke twee waarden van x geldt $f(x) = g(x)$.
 b Voor welke waarden van x geldt $f(x) \leq g(x)$? Schrijf de oplossing in de intervalnotatie.
 c Leg uit waarom de oplossing van $f(x) > g(x)$ uit twee losse intervallen bestaat.
 d Vul in: je kunt de oplossing $x < \dots$ of $x > \dots$ ook in de intervalnotatie schrijven als $\langle \leftarrow, \dots \rangle$ en $\langle \dots, \rightarrow \rangle$.



Theorie

De volgende afspraken gelden voor de intervalnotatie.

Voor een interval tussen twee getallen:

$-2 < x < 2$, dit noteer je als $\langle -2, 2 \rangle$.

$-2 \leq x \leq 2$, dit noteer je als $[-2, 2]$.

Voor twee losse intervallen:

$x < -2$ of $x > 2$, dit noteer je als $\langle \leftarrow, -2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$.

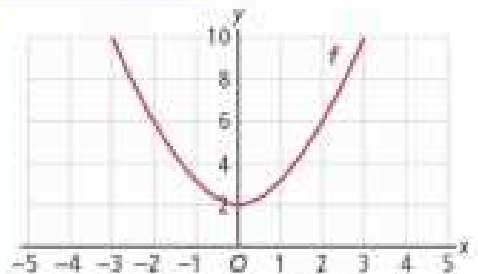
$x \leq -2$ of $x \geq 2$, dit noteer je als $\langle \leftarrow, -2] \cup [2, \rightarrow \rangle$.

Als x elke waarde mag aannemen, noteer je dit als $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$.

Je zegt ook wel dat x dan tot de verzameling $\mathbb{R}$ behoort.

In de verzameling $\mathbb{R}$ zitten alle **reële getallen**, dit zijn alle getallen die als breuk te schrijven zijn en getallen als π en $\sqrt{2}$.

Voorbeeld



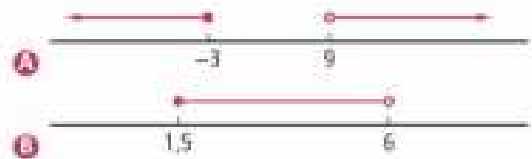
De oplossing van $f(x) \geq 0$ zijn alle getallen voor x . Je kunt dit schrijven als $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$ of als $\mathbb{R}$.

De ongelijkheid $f(x) < 0$ heeft geen oplossing.

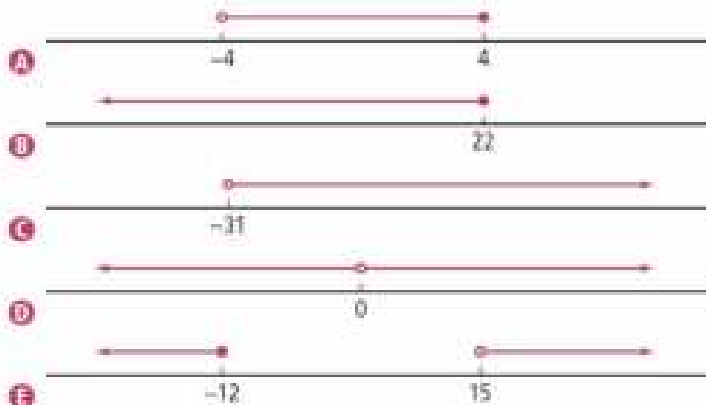
Ondersteunende route → maak opdracht D28

- 28 a Schrijf bij de getallenlijnen het interval in zowel de ongelijkheidsnotatie als in de intervalnotatie.
b Schrijf in de intervalnotatie.

A $2 < x < 14$ C $x < -5$ of $x \geq 10$
B $x \leq 0$ of $x \geq 3$ D $-3 \leq x < 2,5$



- 29 Schrijf bij elke getallenlijn het interval in zowel de ongelijkheidsnotatie als in de intervalnotatie.

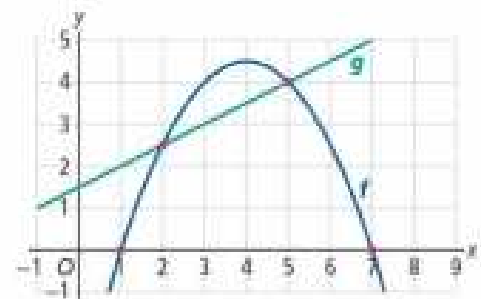


Ondersteunende route → maak opdracht D30

- 30 De parabool hoort bij de kwadratische functie f en de lijn hoort bij de lineaire functie g .

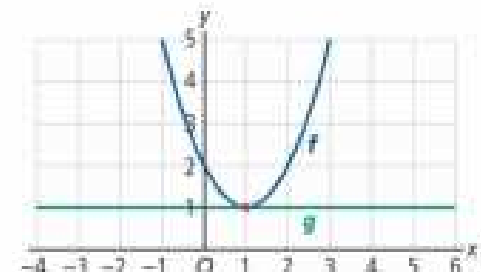
Schrijf de oplossing van elke ongelijkheid in zowel de ongelijkheidsnotatie als in de intervalnotatie.

a $f(x) < g(x)$ d $f(x) > 0$
b $f(x) \geq g(x)$ e $g(x) \geq 4$
c $f(x) < 0$ f $g(x) < 2\frac{1}{2}$



- 31 De grafieken van de functies f en g raken elkaar. Geef de oplossing van elke ongelijkheid.

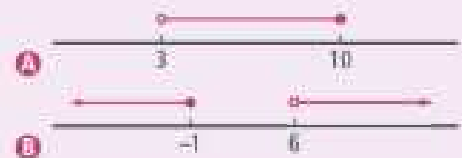
a $f(x) > g(x)$ c $f(x) < g(x)$
b $f(x) \geq g(x)$ d $f(x) \leq g(x)$



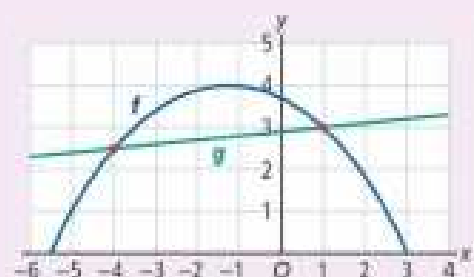
Uitdagende route → maak opdracht U7 en U8

Ondersteunende opdrachten

- 028**
- a** Teken bij de ongelijkheidsnotaties het interval op een getallenlijn.
- A $2 < x \leq 7$ C $x \leq -5$ of $x \geq 1$
 B $x < 0$ of $x \geq 4$ D $-2 < x < 5$
- b** Schrijf de intervallen van opdracht a in de intervalnotatie.
- c** Vul in: bij interval A hiernaast horen de getallen tussen ... en ..., waarbij ... niet mee telt en ... wel mee telt.
- d** Je kun interval A in de ongelijkheidsnotatie schrijven als $\dots < x \leq \dots$
- e** Vul in: voor interval B geldt $x \dots -1$ en $x \dots 6$.
- f** Schrijf de intervallen A en B in de intervalnotatie.



- 030** Je gaat de ongelijkheid $f(x) \geq g(x)$ oplossen.
- a** Lees de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken af.
- b** Kies het juiste antwoord:
 In de ongelijkheid staat het teken $\geq$, dus de x -coördinaten van de snijpunten tellen *wel/niet* mee bij de oplossing.
- c** Kies het juiste antwoord:
 De ongelijkheid is $f(x) \geq g(x)$, dus je kijkt waar de grafiek van f *hoger/lager* ligt dan de grafiek van g .
- d** Vul in.
 De oplossing van $f(x) \geq g(x)$ is $\dots \leq x \leq \dots$ en geschreven in de intervalnotatie $[\dots, \dots]$.



Uitdagende opdrachten

- U7** Gegeven zijn twee lineaire functies f en g .
- a** Geef met een schets aan in welke gevallen de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ geen oplossing heeft.
- b** Wat kun je in die situatie zeggen over de oplossing van $f(x) > g(x)$?
- U8** Gegeven is de kwadratische functie $f(x) = (x - 3)^2 + q$. De grafiek van de functie g ontstaat door de grafiek van functie f te spiegelen in de horizontale as.
- a** Neem $q = 0$ en geef de oplossing van $f(x) > g(x)$.
- b** Neem $q = -1$ en geef de oplossing van $f(x) \geq g(x)$.
- c** Welke waarde kan q hebben in het geval de oplossing van de ongelijkheid $f(x) > g(x)$ gelijk is aan $(\leftarrow, \rightarrow)$?

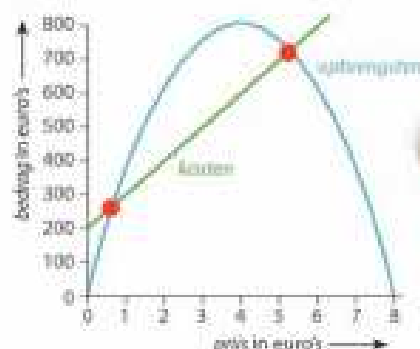
11B.5 Kwadratische ongelijkheden

Je leert • hoe je een kwadratische ongelijkheid met grafieken oplost

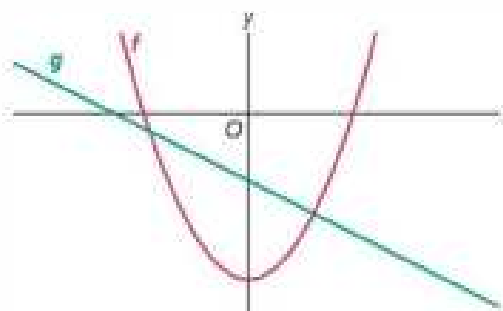
Leerroutes • ondersteunend: 32—033—34—035—35—36—37—38
 • basis: 32—33—34—35—36—37—38—39
 • uitdagend: 32—33—35—36—38—39—U9—U10

Brenda verkoopt koppen soep op de jaarmarkt. In de grafieken kun je de totale opbrengst en totale kosten bij een bepaalde prijs per kop soep af lezen.

- Hoe kun je in de grafiek zien bij welke prijs per kop soep Brenda winst of verlies maakt?



- 32** Susan gaat de ongelijkheid $x^2 - 10 < -x - 4$ oplossen. Ze heeft een schets van de grafieken gemaakt.
- Los de vergelijking $x^2 - 10 = -x - 4$ op.
 - Vul in: de grafieken in de schets horen bij de functies $f(x) = x^2 - 10$ en $g(x) = \dots$
 - Vul in: de grafiek van f ligt lager dan die van g bij waarden van x die liggen tussen ... en
 - Schrijf de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.



Ondersteunende route → maak opdracht 033

- 33** Je gaat de ongelijkheid $x^2 - 3x > x - 3$ oplossen.
- Schrijf de vergelijking op die bij de ongelijkheid past.
 - Los de vergelijking op en berekenen de coördinaten van de snijpunten van de grafieken.
 - Schets in één figuur de grafieken. Gebruik daarbij de snijpunten die je in opdracht b hebt berekend.
 - Lees in de schets af voor welke waarden van x geldt $x^2 - 3x > x - 3$ en schrijf de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.

Aanpak**Hoe los je een ongelijkheid op met grafieken?**

- 1 Stel de vergelijking op die bij de ongelijkheid past.
- 2 Los de vergelijking op en bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken.
- 3 Schets in één figuur de bijbehorende grafieken.
- 4 Lees uit de bijbehorende grafieken de oplossing van de ongelijkheid af.

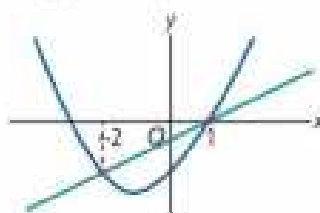
Voorbeeld

Los op: $x^2 + 2x - 3 > x - 1$

Oplossing

- 1 $x^2 + 2x - 3 = x - 1$
- 2 $x^2 + x - 2 = 0$
 $(x + 2)(x - 1) = 0$
 $x + 2 = 0$ of $x - 1 = 0$
 $x = -2$ of $x = 1$
 Snijpunten $(-2, -3)$ en $(1, 0)$.

- 3 De grafieken zijn een dalparabool en een stijgende lijn.



- 4 In de schets zie je dat de parabool links van -2 en rechts van 1 hoger dan de lijn ligt.
 De oplossing van de ongelijkheid is $x < -2$ of $x > 1$.
 In de intervalnotatie geschreven $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$.

- 34** Los met de schets van het voorbeeld de ongelijkheid $x^2 + 2x - 3 < x - 1$ op. Schrijf de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.

Ondersteunende route → maak opdracht 035

- 35** Los de ongelijkheden op en schrijf de oplossingen van de ongelijkheden in de intervalnotatie.

- | | |
|-----------------------|----------------------------|
| a $2x^2 > 4x + 6$ | c $(x + 2)(x - 1) \leq 2x$ |
| b $x^2 - 28 \geq -3x$ | d $x^2 - 3x - 6 > x - 1$ |

- 36** In een kas worden tomaten geteeld. De totale opbrengst TO in euro's hangt af van het aantal planten volgens de formule $TO = -0,04a^2 + 5a$. Hierin is a het aantal planten in tientallen. Voor de totale kosten TK in euro's geldt $TK = 0,6a + 40$.

- Bereken bij welke aantallen tomatenplanten de totale opbrengst gelijk is aan de totale kosten.
- Bij welke aantallen tomatenplanten is er winst?



- 37** Gegeven is de functie $f(x) = x^2$. Soms kun je ongelijkheid oplossen zonder een schets te maken van de grafiek.
- a** Leg uit waarom de ongelijkheid $x^2 < -4$ geen oplossingen heeft.
- b** Zoek bij elke ongelijkheid de juiste oplossing.
- | | |
|--------------|--|
| A $x^2 > 4$ | E $\langle -4, 4 \rangle$ |
| B $x^2 > 0$ | F $\langle \leftarrow, -2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$ |
| C $x^2 < 16$ | G $\mathbb{R}$ |
| D $x^2 > -2$ | H $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$ |

Theorie

Bij het oplossen van een ongelijkheid is niet altijd een schets van de grafieken nodig. Nadat je de bijbehorende vergelijking opgelost hebt, kun je soms door redeneren de oplossing vinden.

Voorbeeld

Los door redeneren op: $2x^2 \geq 128$

Oplossing

$$2x^2 = 128$$

$$x^2 = 64$$

$$x = -8 \text{ of } x = 8$$

Voor $x^2 = 64$ geldt:

Elk getal kleiner dan -8 is in het kwadraat groter dan 64 .

Dat geldt ook voor elk getal groter dan 8 .

De oplossing van de ongelijkheid is $\langle \leftarrow, -8 \rangle \cup [8, \rightarrow)$.

- 38** Los de ongelijkheden door redeneren op en schrijf de oplossingen van de ongelijkheden in de intervalnotatie.
- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| a $x^2 > 49$ | d $3x^2 \geq 75$ |
| b $0,5x^2 < 18$ | e $2 - 3x^2 < 2$ |
| c $x^2 + 4 \leq 0$ | f $(x + 2)^2 \geq -4$ |
- 39** Los de ongelijkheden op en schrijf de oplossingen van de ongelijkheden in de intervalnotatie.
- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| a $3x + 10 > -2$ | d $-x^2 + 2x + 3 \leq 4$ |
| b $x^2 - 4x - 12 \geq 0$ | e $2x^2 + 1 < -1$ |
| c $x(x + 2) + 3 > 1$ | f $(x - 6)^2 + 3 \leq 19$ |

Uitdagende route → maak opdracht U9 en U10

Ondersteunende opdrachten

- 033** Met de schets van de grafieken van de functies $f(x) = x^2 - 4x$ en $g(x) = -x$ ga je de ongelijkheid $x^2 - 4x > -x$ oplossen.

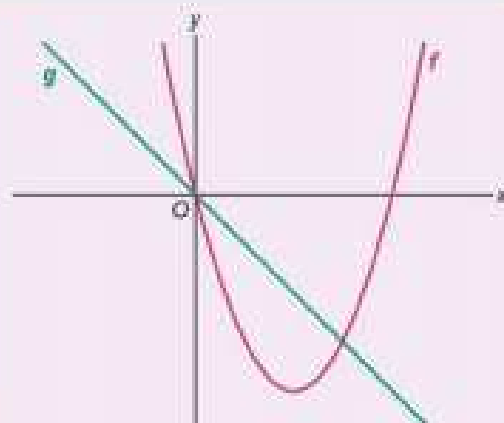
- a** In de schets zie je dat de grafieken elkaar snijden in de oorsprong.

Los de vergelijking $x^2 - 4x = -x$ op om de x -coördinaat van het andere snijpunt te vinden.

- b** Om de ongelijkheid $x^2 - 4x > -x$ op te lossen, kijk je in de schets voor welke waarden van x de parabool hoger ligt dan de lijn.

Vul in.

De oplossing van de ongelijkheid is $x < \dots$ of $x > \dots$ of in de intervalnotatie geschreven $(\leftarrow, \dots) \cup (\dots, \rightarrow)$.



- 035** Je gaat de ongelijkheid $x^2 - 5 \leq x + 1$ oplossen.

- a** Bij de ongelijkheid hoort de vergelijking $x^2 - 5 = x + 1$.
Los de vergelijking op en bereken de coördinaten van de snijpunten van de bijbehorende grafieken.
- b** Is de grafiek van $f(x) = x^2 - 5$ een bergparabool of een dalparabool? En in welk punt snijdt de grafiek de y -as?
- c** Is de grafiek van $g(x) = x + 1$ een stijgende of dalende lijn en waar snijdt deze lijn de y -as?
- d** Schets de grafieken van f en g in één figuur en geef de x -coördinaten van beide snijpunten aan.
- e** Voor welke waarden van x ligt de grafiek van f lager dan of even hoog als de grafiek van g ?
- f** Vul in: de oplossing van de ongelijkheid geschreven in de intervalnotatie is $[\dots, \dots]$.

Uitdagende opdrachten

- U9** Gegeven is de functie $h(x) = -2x^2 + px - 8$.
Voor welke waarden van p heeft de ongelijkheid $h(x) > 0$ geen oplossingen?
- U10** Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 - 4x + q$ en de functie $g(x) = -2x + 2$.
Zoek uit voor welke waarde(n) van q geldt dat de oplossing van de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ gelijk is aan $0 < x < 1$.

11B.6 Machtsvergelijkingen en -ongelijkheden

Je leert

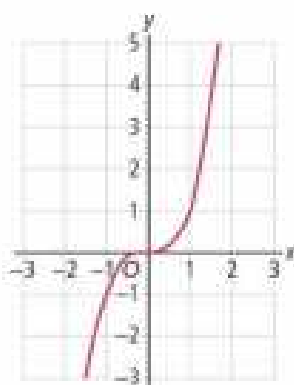
- wat een machtsvergelijking is
- hoe je een machtsvergelijking oplost
- hoe je een machtsongelijkheid oplost

Leerroutes

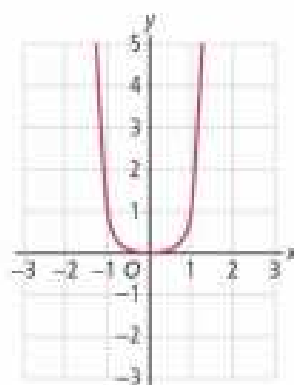
- ondersteunend: 40—41—042—43—44—045—46
- basis: 40—41—42—43—44—45—46
- uitdagend: 40—42—43—44—46—U11—U12

Een raket wordt gelanceerd. De hoogte h in kilometers die de raket na t seconden bereikt, kun je berekenen met de formule $h = 1,2t^3$.

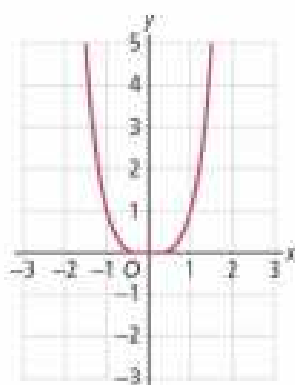
- Kies de juiste bewering.
 - De raket bereikt een hoogste punt.
 - De raket gaat steeds sneller.
 - De raket gaat steeds langzamer.



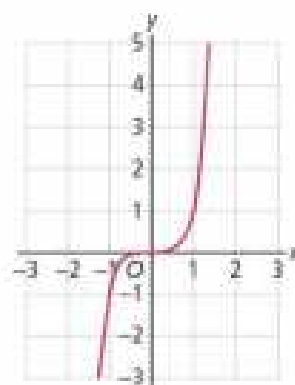
1



2



3



4

- 40 De grafieken horen bij de functies $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$, $h(x) = x^5$ en $i(x) = x^6$.

- Zoek bij iedere functie de juiste grafiek.
- Geef van elke grafiek aan hoeveel snijpunten deze heeft met de lijn $y = 4$.

- 41
- Hoeveel snijpunten heeft de grafiek van $f(x) = x^3$ met de lijn $y = -64$?
 - Los de vergelijking $x^3 = -64$ op.
 - Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^4 = 16$?
 - Geef de oplossingen van de vergelijking $x^4 = 16$.
 - Waarom heeft de vergelijking $x^4 = -10$ geen oplossingen?
 - Van de vergelijking $x^c = c$ is bekend dat deze geen oplossingen heeft.
Wat kun je zeggen over de waarde van n en van c ?

Theorie

Een vergelijking als $2p^5 = -64$ of als $8a^3 - 120 = 392$ waarbij het grondtal van een macht een variabele is, noem je een **machtsvergelijking**. In eenvoudige gevallen kun je een machtsvergelijking met bordjes oplossen.

Vereenvoudig de vergelijking tot de vorm $x^a = c$ door de macht te isoleren.

- > Bij een oneven exponent n is er altijd één oplossing.
- > Bij een even exponent n is het mogelijk dat er geen, één of twee oplossingen zijn.

Voorbeeld 1

Los op: $6k^3 = 48$

Oplossing

$$k^3 = 8$$

De exponent 3 is oneven.

Er is één oplossing.

$$k = 2, \text{ want } 2^3 = 8.$$

Voorbeeld 2

Los op: $2x^4 = 162$

Oplossing

$$x^4 = 81$$

De exponent 4 is even.

Er zijn twee oplossingen.

$$x = -3 \text{ of } x = 3, \text{ want } (-3)^4 = 81 \text{ en } 3^4 = 81.$$

Ondersteunende route → maak opdracht 042

42 Los indien mogelijk de vergelijkingen op.

a $3x^6 = 192$

d $100 - x^4 = 181$

b $2p^3 = -64$

e $x^5 + 4 = 36$

c $120 - a^3 = 56$

f $300 - t^4 = 219$

43 a Waarom heeft $x^3 = 20$ maar één oplossing?

b De exacte oplossing van $x^3 = 20$ is $x = \sqrt[3]{20}$.

Geef een benadering in twee decimalen van $\sqrt[3]{20}$.

c De vergelijking $x^4 = 20$ heeft als exacte oplossingen

$$x = -\sqrt[4]{20} \text{ en } x = \sqrt[4]{20}.$$

Benader deze oplossingen in twee decimalen.

Op je rekenmachine zit een toets waarmee je een hogere machtswortel kunt benaderen.



Theorie

De wortel $x = \sqrt[n]{c}$ met $n > 2$ heet een **hogere machtswortel**.

De oplossing van $x^n = c$ met n oneven is $x = \sqrt[n]{c}$.

De oplossingen van $x^n = c$ met n even en $c > 0$ zijn $x = \sqrt[n]{c}$ en $x = -\sqrt[n]{c}$.

De oplossing van $x^n = 0$ is $x = 0$.

Voorbeeld

Los op: $p^4 - 3 = 6$

Oplossing

$$p^4 = 9$$

De exponent 4 is even.

Er zijn twee oplossingen.

$$p = -\sqrt[4]{9} \approx -1,73 \text{ of } p = \sqrt[4]{9} \approx 1,73$$

- 44** Los indien mogelijk de vergelijkingen op. Geef een exact antwoord en een benadering in twee decimalen.

a $2x^3 = 200$

d $0,5x^7 + 100 = 50$

b $1000x^8 = 0,1$

e $10x^8 + 650 = 350$

c $100 - 5x^6 = 100$

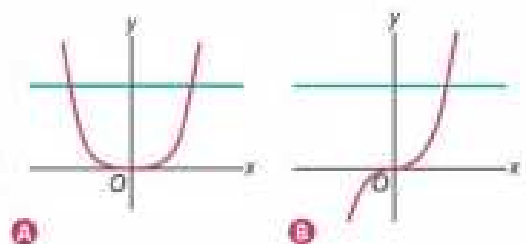
f $1000 - 2,5x^5 = 1250$

Bij het oplossen van machtsongelijkheden maak je gebruik van een schets van de grafieken. Bedenk daarbij welke vorm de grafieken hebben.

Ondersteunende route → maak opdracht D45

- 45** In de figuur zijn de grafieken bij de ongelijkheden $2x^3 \leq 250$ en $0,5x^4 > 648$ geschetst.

- a** Welke schets hoort bij welke ongelijkheid?
b Los de vergelijking $2x^3 = 250$ op.
c Schrijf de oplossing van de ongelijkheid $2x^3 \leq 250$ in de intervalnotatie.
d Los de vergelijking $0,5x^4 = 648$ op.
e Schrijf de oplossing van de ongelijkheid $0,5x^4 > 648$ in de intervalnotatie.



- 46** Los de ongelijkheden op en schrijf de oplossingen van de ongelijkheden in de intervalnotatie.

a $10x^3 > 320$

c $3x^6 \geq -18$

b $0,25x^4 \leq 2500$

d $0,04x^7 < 3125$

Uitdagende route → maak opdracht U11 en U12

Ondersteunende opdrachten

- 042** Je gaat de vergelijkingen op de blaadjes oplossen.
- Bij de vergelijking $2x^3 = 128$ is de macht geïsoleerd. Welk getal moet er op het bordje staan bij x^3 ?
 - Omdat de exponent 3 oneven is, is er precies één oplossing. Vul het bovenste blaadje verder in.
 - Bij de vergelijking $750 - x^4 = 125$ is de macht x^4 geïsoleerd. Welk getal moet er op het bordje staan bij x^4 ?
 - Omdat de exponent 4 even is, zijn er twee oplossingen. Vul het onderste blaadje verder in.

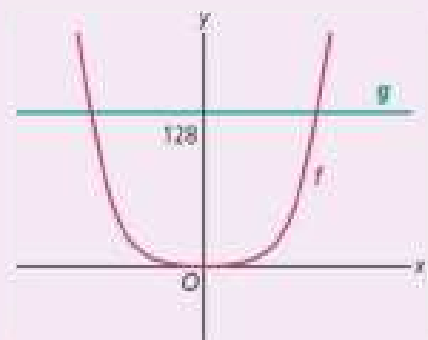
$2x^3 = 128$			
$x^3 = \dots$			
$x = \dots$			
want $\dots^3 = \dots$			

$750 - x^4 = 125$			
$x^4 = \dots$			
$x = \dots$ of $x = \dots$			
want $(\dots)^4 = \dots$ en $\dots^4 = \dots$			

Los op dezelfde manier de vergelijkingen op.

- $1100 - x^3 = 100$
- $2x^3 = -64$
- $2x^4 = 162$
- $8x^6 + 10 = 18$

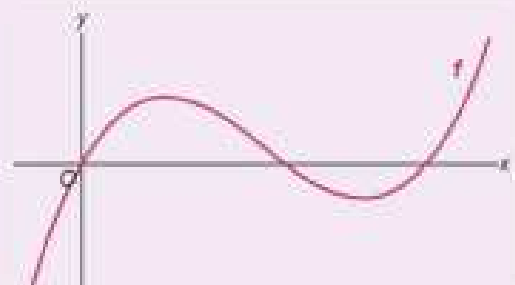
- 045** Je gaat met de schets van de grafieken $f(x) = 2x^6$ en $g(x) = 128$ de ongelijkheid $2x^6 \leq 128$ oplossen.
- Los de vergelijking $2x^6 = 128$ op.
 - Tellen de x -coördinaten van de snijpunten wel of niet mee bij de oplossingen van de ongelijkheid? Leg uit waarom wel of niet.
 - Vul in: de grafiek van f ligt lager dan of even hoog als die van g voor $\dots \leq x \leq \dots$.
 - Vul in: de oplossing van de ongelijkheid geschreven in de intervalnotatie is $[\dots, \dots]$.



Uitdagende opdrachten

- U11** Voor de inhoud I in cm^3 van een bol met diameter van d cm geldt de formule $I = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3$. Een volleybal heeft een inhoud van 8 liter. Bereken in hele cm de diameter van deze volleybal.

- U12** In de figuur is de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 8x^2 + 15x$ geschetst. Los de ongelijkheid $x^3 - 8x^2 + 15x > 0$ op en schrijf de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.



- 47** Tijdens een rattenplaag in een stad geldt voor het aantal ratten de formule $R = 120 + 90 \cdot 2^{0,5t}$. Hierin is R het aantal ratten en t de tijd in weken na het begin van de rattenplaag.
- Hoeveel ratten zijn er aan het begin van de rattenplaag?
 - Berekenen wanneer het aantal ratten gelijk is aan 3000.
 - Bereken in hoeveel weken tijd het aantal ratten toeneemt van 5880 tot 23 160.



- 48** Los indien mogelijk de vergelijkingen op. Geef exacte antwoorden.

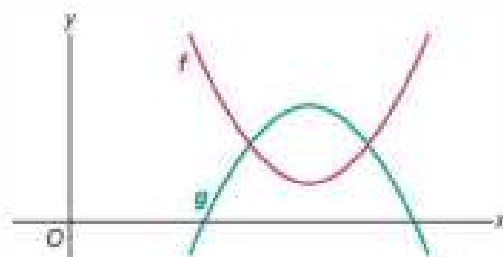
a $3\sqrt{4c-1} = 15$	e $d = \frac{15}{d-2}$
b $0,5 \cdot 2^{m-5} = 4$	f $2x^4 + 8 = 520$
c $36 = \frac{18}{2x-5}$	g $\frac{8}{4+w} = 2w+10$
d $-\sqrt{2p+3} = 6$	h $0,5x^5 - 18 = 3$

- 49** De machtsvergelijking $3x^n + 56 = 6200$ heeft $x = 2$ als oplossing. Bereken n .

- 50** Los de ongelijkheden op en schrijf de oplossingen in de ongelijkheidsnotatie en in de intervalnotatie.

a $x^2 + 4x < 3x + 6$	c $3x^4 \geq 243$
b $(4-x)(x-2) \geq 3$	d $\frac{1}{3}x^3 < -9$

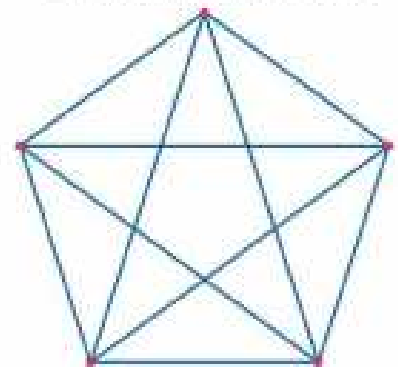
- 51** In de figuur zijn de grafieken van de functies $f(x) = x^2 - 8x + 17$ en $g(x) = -x^2 + 8x - 13$ getekend. Bereken voor welke waarde van c geldt dat $f(x) \geq c$ dezelfde oplossing heeft als $g(x) \leq c$.





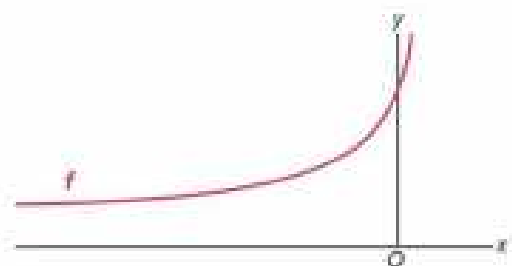
- 52** In een schaaktoernooi spelen alle deelnemers precies één keer tegen elkaar. In het speelschema stelt elke stip een deelnemer en elk lijntje een wedstrijd voor.
- Leg uit dat je met de functie $W(d) = \frac{d(d-1)}{2}$ het aantal wedstrijden W met d deelnemers kunt uitrekenen.
 - Hoeveel wedstrijden zijn er bij zes deelnemers?
 - Hoeveel deelnemers zijn er bij 66 wedstrijden?
 - Hoeveel deelnemers heb je minstens nodig voor minimaal 100 wedstrijden?

speelschema met vijf deelnemers



- 53** Gegeven zijn de functies $f(x) = -0,5x^2$ en $g(x) = p - x$.
- Bereken voor welke waarde van p de grafieken van f en g elkaar raken.
 - Geef in die situatie de oplossing van $g(x) \geq f(x)$. Schrijf de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.

- 54** In de figuur is de grafiek van $f(x) = \frac{36}{\sqrt{16-2x}}$ geschetst.
- Bereken in welk punt de grafiek de verticale as snijdt.
 - Los de vergelijking $f(x) = 18$ op.
 - Los de ongelijkheid $f(x) \leq 6$ op en schrijf de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.



Theorie

Gebroken vergelijking, exponentiële vergelijking, wortelvergelijking en machtsvergelijking

Bij een gebroken vergelijking zoals $\frac{45}{2p-7} + 2 = 7$ staat de variabele in de noemer van de breuk.

Bij een exponentiële vergelijking zoals $3 \cdot 2^x = 48$ staat de variabele in de exponent van de macht.

Bij een wortelvergelijking zoals $\sqrt{12-x} = 3$ staat de variabele onder het wortelteken.

Bij een machtsvergelijking zoals $2p^5 = 64$ is de variabele het grondtal van de macht.

Voorbeeld

gebroken vergelijking

$$\frac{4}{2x-3} = 2 + x$$

exponentiële vergelijking

$$5^x + 6 = 31$$

wortelvergelijking

$$\sqrt{3-2x} - 4 = 7$$

machtsvergelijking

$$6 - 2p^5 = -28$$

S1 Geef van de vier vergelijkingen aan welke soort vergelijking het is.

a $6 + 2^x = 38$

c $3p^4 + 8 = 42$

b $\sqrt{x+5} = 4$

d $\frac{150}{8-x} = 30$

Vaardigheid

Je kunt een gebroken vergelijking oplossen.

1 Isoleer de breuk zodat deze alleen komt te staan.

2 Als de variabele alleen in de noemer van de breuk staat, gebruik dan bordjes.

Staan er aan beide kanten van het gelijkteken variabelen, vermenigvuldig dan links en rechts van het gelijkteken met de noemer van de breuk. Gebruik daarbij haakjes.

3 Los de vergelijking verder op.

Voorbeeld

Los op: $x + 6 = \frac{-6}{x-3} + 2$

Oplossing

1 $x + 4 = \frac{-6}{x-3}$

2 $(x-3)(x+4) = \frac{-6}{x-3} \cdot (x-3)$

3 $x^2 + x - 12 = -6$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x+3=0 \text{ of } x-2=0$$

$$x=-3 \text{ of } x=2$$

S2 Los de vergelijkingen op.

a $\frac{-24}{2x} + 3 = 9$

b $x + 8 = \frac{11}{x+1} - 3$

Vaardigheid

Je kunt een exponentiële vergelijking oplossen.

Bij het oplossen van een exponentiële vergelijking schrijf je beide kanten van het gelijkteken als een macht met hetzelfde grondtal en leg je een bordje op de exponent van de macht. Maak zo nodig een tabel met machten van dat grondtal. Soms moet je de vergelijking eerst vereenvoudigen door de macht te isoleren.

Voorbeeld

Los op: $7 \cdot 2^{x+1} = 112$

Oplossing

$2^{x+1} = 16$	macht geïsoleerd
$2^{x+1} = 2^4$	16 als macht van 2 geschreven
$x + 1 = 4$	bordje gelegd
$x = 3$	

S3 Los de vergelijkingen op.

a $4^{2x-1} = 4096$

b $-3 \cdot 4^x = -192$

macht	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6
uitkomst	4	...	...	...	...	...

Vaardigheid

Je kunt een wortelvergelijking oplossen.

Wortelvergelijkingen los je meestal op met bordjes. Soms moet je de vergelijking eerst vereenvoudigen door de wortel te isoleren.

Voorbeeld

Los op: $\sqrt{p+9} - 1 = 14$

Oplossing

$\sqrt{p+9} = 15$	wortel geïsoleerd
$\sqrt{225} = 15$	bordje gelegd
$p + 9 = 225$	
$p = 216$	

S4 Los de vergelijkingen op.

a $\sqrt{6b+19} + 3 = 10$

b $5\sqrt{8-x} = 15$

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een parabool en een lijn berekenen.

- 1 Stel de bijbehorende functievoorschriften aan elkaar gelijk.
- 2 Bereken de x -coördinaten van de snijpunten door de verkregen vergelijking op te lossen.
- 3 Bereken de y -coördinaten van de snijpunten door de gevonden x -coördinaten in te vullen in één van de functievoorschriften.
- 4 Controleer de coördinaten van de gevonden punten door de x -coördinaten ook in het andere functievoorschrift in te vullen.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken bij $f(x) = x^2 + x$ en $g(x) = 2x + 6$.

Oplossing

- 1 $x^2 + x = 2x + 6$
- 2 $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x+2)(x-3) = 0$
 $x+2 = 0$ of $x-3 = 0$
 $x = -2$ of $x = 3$
- 3 $f(-2) = 2$ en $f(3) = 12$
- 4 Controle $g(-2) = 2$ en $g(3) = 12$
 De coördinaten van de snijpunten zijn $(-2, 2)$ en $(3, 12)$.

- S5** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van de functies $f(x) = x^2 - 3x$ en $g(x) = 35 - x$.

Vaardigheid

Je kunt berekenen hoeveel punten een parabool en een lijn gemeenschappelijk hebben.

De grafieken van een kwadratische functie f en een lineaire functie g kunnen elkaar snijden of elkaar raken. Het is ook mogelijk dat deze twee grafieken geen punt gemeenschappelijk hebben. Om dat te onderzoeken, herleid je de vergelijking $f(x) = g(x)$ op nul. Bepaal van deze vergelijking de waarde van de discriminant D .

$D > 0$: de grafieken van f en g snijden elkaar.

$D = 0$: de grafieken van f en g raken elkaar.

$D < 0$: de grafieken van f en g hebben geen punt gemeenschappelijk.

Voorbeeld

Bepaal of de grafieken van $f(x) = x^2 - x + 4$ en $g(x) = x + 2$ elkaar snijden, raken of geen punt gemeenschappelijk hebben.

Oplossing

$$x^2 - x + 4 = x + 2$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4$$

De grafieken van f en g hebben geen punt gemeenschappelijk.

- S6** Bepaal of de grafieken van $f(x) = x^2 - x + 6$ en $g(x) = 5x - 3$ elkaar snijden, raken of geen punt gemeenschappelijk hebben.

Vaardigheid

Je kunt intervallen in de ongelijkheidsnotatie en in de intervalnotatie schrijven.

Een interval kun je in de ongelijkheidsnotatie als ook in de intervalnotatie schrijven.

De rechte haak betekent: het getal telt wel mee.

De punthaak betekent: het getal telt niet mee.

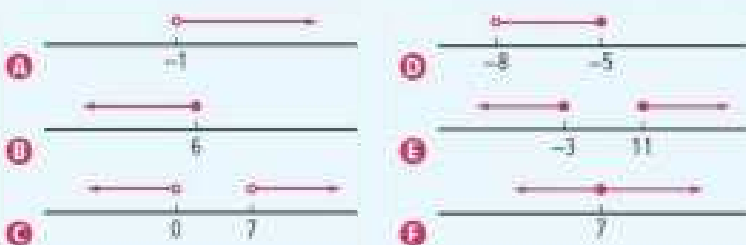
Bij de pijl gebruik je een punthaak.

Als x alle waarden mag zijn, noteer je dat als $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$ of als $\mathbb{R}$.

Voorbeeld

ongelijkheidsnotatie	intervalnotatie
$x > -5$	$\langle -5, \rightarrow \rangle$
$x < -2,8$	$\langle \leftarrow, -2,8 \rangle$
$x \geq 1,1$	$[1,1; \rightarrow \rangle$
$x \leq 7$	$\langle \leftarrow, 7]$
$-2 < x \leq 5$	$\langle -2, 5]$
$x \leq 4$ of $x > 8$	$\langle \leftarrow, 4] \cup (8, \rightarrow \rangle$

- S7** Schrijf bij elke getallenlijn het interval in zowel de ongelijkheidsnotatie als in de intervalnotatie.



Vaardigheid

Je kunt een machtsvergelijking oplossen.

Vereenvoudig de vergelijking tot de vorm $x^n = c$.

De oplossing van $x^n = c$ met n oneven is $x = \sqrt[n]{c}$.

De oplossingen van $x^n = c$ met n even en $c > 0$ zijn $x = -\sqrt[n]{c}$ en $x = \sqrt[n]{c}$.

De oplossing van $x^n = 0$ is $x = 0$.

Voorbeeld

Los op: $-3x^4 + 92 = 62$

Oplossing

$$-3x^4 = -30$$

$$x^4 = 10 \quad \text{macht geïsoleerd}$$

De exponent 4 van de macht is even.

Er zijn twee oplossingen.

$$x = -\sqrt[4]{10} \approx -1,78 \text{ of } x = \sqrt[4]{10} \approx 1,78$$

S8 Los indien mogelijk de vergelijkingen op.

a $0,04x^6 = 625$

c $1000 - x^5 = 757$

b $1000x^3 = -3375$

d $-80 - \frac{1}{2}x^4 = 62$

Vaardigheid

Je kunt een ongelijkheid oplossen met grafieken.

- 1 Stel de vergelijking op die bij de ongelijkheid past.
- 2 Los de vergelijking op en bereken de coördinaten van de snijpunten.
- 3 Schets in één figuur de bijbehorende grafieken.
- 4 Lees uit de bijbehorende grafieken de oplossing van de ongelijkheid af.

Voorbeeld

Los op: $0,5x^5 \geq 16$

Oplossing

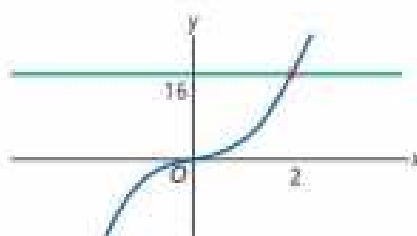
1 $0,5x^5 = 16$

2 $x^5 = 32$

$$x = \sqrt[5]{32} = 2$$

De coördinaten van het snijpunt $(2, 16)$.

3



- 4** De oplossing van de ongelijkheid is $x \geq 2$. In de intervalnotatie geschreven $[2, \rightarrow)$.

S9 Los de ongelijkheden op en schrijf de oplossingen in de intervalnotatie.

a $x^2 - 8x + 11 < x - 7$

c $2x^4 > 162$

b $130 - 4x^2 \geq 30$

d $0,25x^3 \leq -16$

T1 Los de vergelijkingen op.

a $\frac{24}{5b-3} = 4$

c $\frac{12}{x-2} = x-6$

b $1 + \frac{30}{7h} = 6$

d $\frac{2}{x} - 3 = -2x + 1$

T2 Bij een proef koelt de temperatuur in een kweekbak af volgens het functievoorschrift $T(t) = 20 + \frac{24}{\frac{1}{2}t + 2}$

Hierin is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en t de verstreken tijd in minuten.

- a** Hoeveel graden is de temperatuur aan het begin van de proef?
- b** Bereken de temperatuur na 8 minuten.
- c** Hoe hoog zal uiteindelijk de temperatuur in de kweekbak worden, aangenomen dat de bak niet meer verwarmd wordt?
- d** Wanneer de temperatuur lager wordt dan 23°C moet de kweekbak opnieuw worden verwarmd. Bereken na hoeveel minuten je het verwarmingselement moet inschakelen.

T3 Los de vergelijkingen op.

a $7^{2x} = 343$

c $7^{3k-1} - 1 = 2400$

b $2 \cdot 7^n = 4802$

d $7^{-2+5a} = 49$

T4 Bij een klok bepaalt de lengte van de slinger de slingertijd. Dat is de tijd waarin de slinger heen en weer gaat. Door deze lengte aan te passen, kun je de klok op tijd laten lopen. Met de functie $T(l) = 2\sqrt{l}$ bereken je T de slingertijd in seconden bij een lengte l in meters.

- a** Bereken de lengte van de slinger in cm bij een slingertijd van 1,4 seconden.
- b** Wordt bij een twee keer zo lange slinger, de slingertijd ook twee keer zo groot? Leg je antwoord uit.

T5 Los de vergelijkingen op.

a $4\sqrt{t+1} = 12$

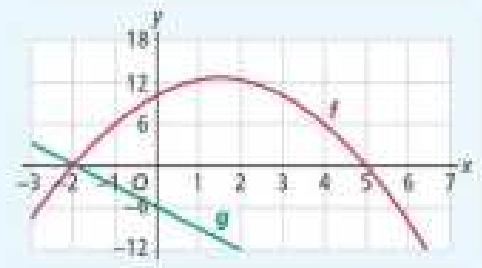
c $27 - 3\sqrt{3a} = 0$

b $\frac{32}{4\sqrt{2u}} + 2 = 4$

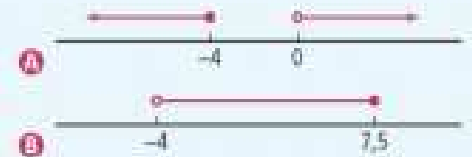
d $\frac{\sqrt{6-c}}{8} + 5 = 6$



- T6** In de figuur zijn de grafieken van de functies $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ en $g(x) = -3x - 6$ getekend.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
 - Laat met een berekening zien dat de grafiek van $h(x) = -3x + 19$ de parabool raakt.
 - Bereken de coördinaten van het punt waar de grafiek van h de parabool raakt.



- T7**
- Schrijf bij de getallenlijnen A en B het interval in zowel de ongelijkheidsnotatie als in de intervalnotatie.
 - Schrijf in de intervalnotatie.
- A $x \geq 3$ C $x \leq 7$ of $x \geq 13$
 B $x < -9$ D alle waarden van x



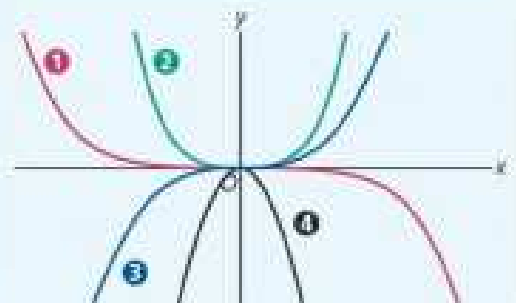
- T8** Een cilindervormige kaars past precies in een kubus. De inhoud van de kaars bereken je met de formule $I = 0,8z^3$. Hierin is I de inhoud in cm^3 en z de ribbe van de kubus in cm.
- Bereken de inhoud van de kaars als deze precies in een kubus past met ribben van 6 cm.
 - Bereken de ribbe van de kubus als de inhoud van de kaars gelijk is aan 100 cm^3 .
 - In een andere kubus past ook precies zo'n kaars. De kaars vult niet de gehele kubus. Er blijft wat lege ruimte over. Bereken de ribbe van de kubus in het geval de lege ruimte gelijk is aan 50 cm^3 . Rond af op één decimaal.



- T9** Los de ongelijkheden op en schrijf de oplossingen in de intervalnotatie.
- $5x^2 + 9 \geq 89$
 - $x^2 + 3x < 2x + 30$
 - $3x^6 \geq 192$
 - $0,5x^5 < -512$

- T10** Van de functies $f(x) = -20x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^4$ en $i(x) = -0,01x^5$ zijn de grafieken geschetst.
- Zoek bij iedere functie de juiste grafiek.
 - Welke ongelijkheden hebben dezelfde oplossing?

- A $f(x) > 0$ C $h(x) > 0$
 B $g(x) < 0$ D $i(x) > 0$



Je kunt een gebroken vergelijking oplossen.

E1 Los de vergelijkingen op.

a $\frac{20}{2x+1} = 5$

c $5 - \frac{4}{3x} = 4$

b $\frac{-24}{2x} = x - 7$

d $7x + 5 = \frac{20}{x} + 1$

Je kunt een exponentiële vergelijking oplossen.

E2 Los de vergelijkingen op.

Gebruik de tabellen met machten van 3 en van 4.

a $4^x = 256$

d $3^{-x} = 729$

b $3^{2x} = 81$

e $0,2 \cdot 4^x = 3,2$

c $2 \cdot 3^{x+1} = 486$

f $4^{x-3} - 2 = 62$

<i>macht</i>	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
<i>uitkomst</i>	3	9	...	...	...	729
<i>macht</i>	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6
<i>uitkomst</i>	4	...	...	...	...	...

Je kunt een wortelvergelijking oplossen.

E3 Los de vergelijkingen op.

a $\sqrt{3a} = 9$

d $20 - \sqrt{3d - 5} = 16$

b $\sqrt{24 - 7b} = 5$

e $8 + 2\sqrt{e} = 22$

c $\frac{12}{\sqrt{e+9}} = 6$

f $\frac{24}{0,5\sqrt{2f}} = 3$

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een parabool en een lijn berekenen.

E4 Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van de functies f en g .

a $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ en $g(x) = 5x$

b $f(x) = x^2 - 5x$ en $g(x) = 4x - 14$

c $f(x) = x^2 - 3x + 4$ en $g(x) = -2x + 16$

Je kunt berekenen hoeveel punten een parabool en een lijn gemeenschappelijk hebben.

E5 Bepaal of de grafieken van de functies f en g elkaar snijden, raken of geen punt gemeenschappelijk hebben.

a $f(x) = x^2 - 6x + 8$ en $g(x) = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$

b $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ en $g(x) = 2 - x$

c $f(x) = 3x^2 + 7x - 5$ en $g(x) = x - 8$

Je kunt intervallen in de ongelijkheidsnotatie en intervalnotatie schrijven.



- E6** Schrijf bij elke getallenlijn het interval in zowel de ongelijkheidsnotatie als in de intervalnotatie.

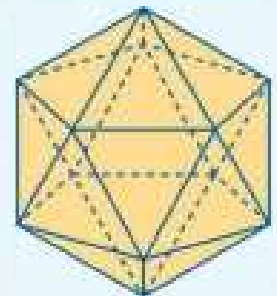
Je kunt een machtsvergelijking oplossen.

- E7** Los indien mogelijk de vergelijkingen op.

- a $t^3 = 343$ c $3g^3 + 12 = -84$
b $3p^4 = 1875$ d $100 - 4c^4 = 200$

- E8** De inhoud van het twintigvlak kun je berekenen met de formule $I = 2,2r^3$. Hierbij is I de inhoud in cm^3 en r de lengte van een ribbe in cm.

- a Bereken de inhoud voor $r = 8$.
b Bereken de lengte van een ribbe als $I = 275$.
c Van een twintigvlak is de inhoud 1 liter.
Bereken de lengte van de ribbe. Geef een benadering in hele millimeters.



Je kunt een ongelijkheid oplossen met grafieken.

- E9** Los de ongelijkheden op en schrijf de oplossingen in de intervalnotatie.

- a $20 - 2x^2 < 20$ d $3x^3 \geq -375$
b $x^2 + 4x - 5 \geq 0$ e $0,25x^4 \geq 64$
c $71 - x^2 > -10$ f $3x^5 < 729$

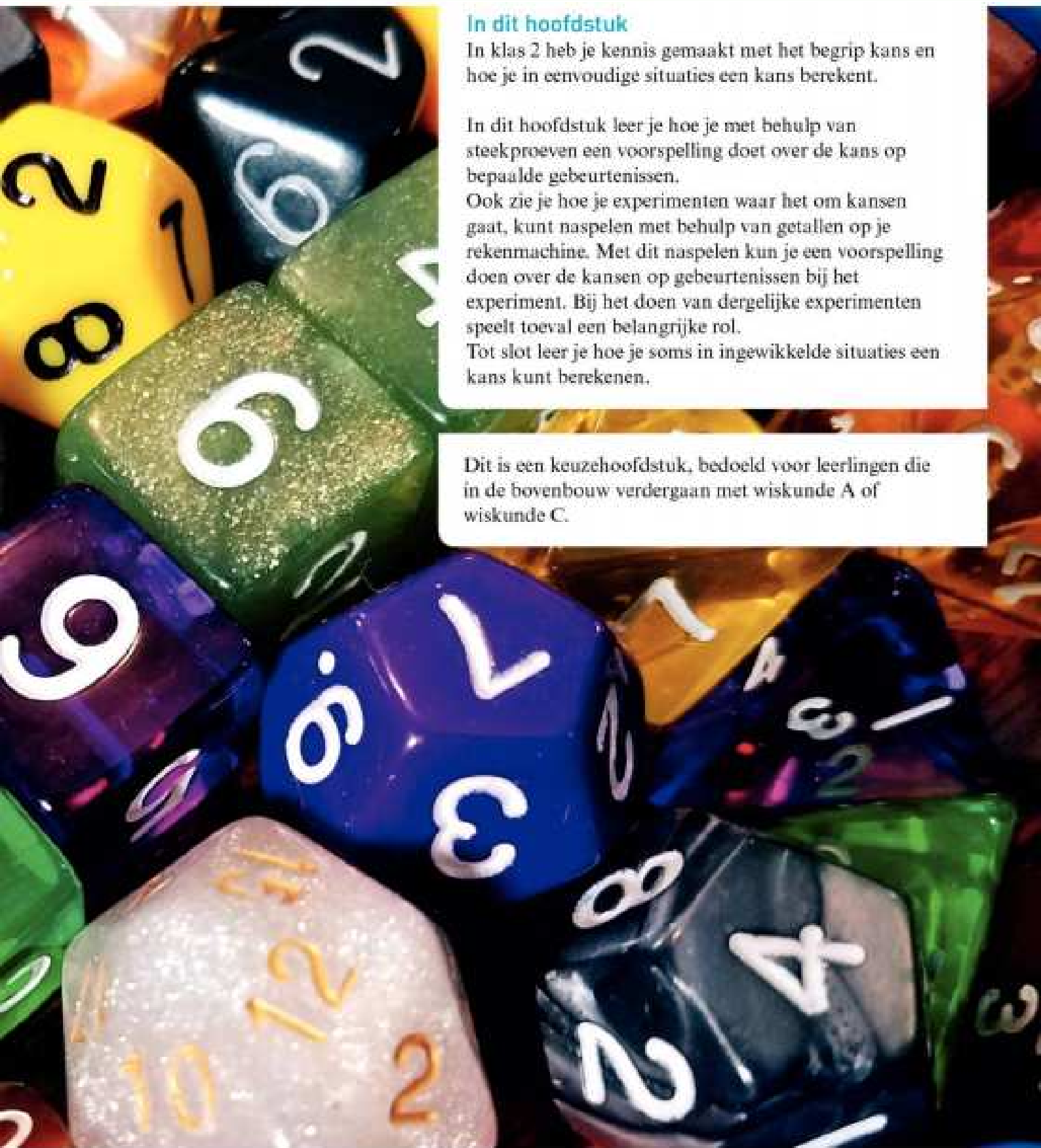
- E10** Bij een bepaalde rupsensoort geldt voor het verband tussen de lengte l in mm en het gewicht g in grammen de formule $g = 0,0001 \cdot l^3$.

- a Een rups heeft een gewicht van 0,8 gram.
Bereken hoe lang deze rups is.
b Vlak voordat de rupsen gaan verpoppen ligt het gewicht tussen 3 en 4 gram.
Bereken de lengte in hele mm van de rups bij verpoppen.





Zicht op toeval 12A



In dit hoofdstuk

In klas 2 heb je kennis gemaakt met het begrip kans en hoe je in eenvoudige situaties een kans berekent.

In dit hoofdstuk leer je hoe je met behulp van steekproeven een voorspelling doet over de kans op bepaalde gebeurtenissen.

Ook zie je hoe je experimenten waar het om kansen gaat, kunt naspelen met behulp van getallen op je rekenmachine. Met dit naspelen kun je een voorspelling doen over de kansen op gebeurtenissen bij het experiment. Bij het doen van dergelijke experimenten speelt toeval een belangrijke rol.

Tot slot leer je hoe je soms in ingewikkelde situaties een kans kunt berekenen.

Dit is een keuzehoofdstuk, bedoeld voor leerlingen die in de bovenbouw verdergaan met wiskunde A of wiskunde C.

- V1** Gemiddeld is één op de twaalf mannen kleurenblind. Bij de vrouwen is dat vier op de duizend.
- Hoeveel procent van de mannen is kleurenblind?
 - Hoe groot is dit percentage bij de vrouwen?
 - In een klas met 18 jongens en 12 meisjes is niemand kleurenblind.
Is dit in strijd met het feit dat een op de twaalf mannen kleurenblind is?
- V2** In een vaas zitten vijf blauwe, drie rode en zeven witte knikkers. Volgens Aisa is de kans dat je een blauwe knikker pakt 5 op 15. Berend zegt dat de kans gelijk is aan $\frac{1}{3}$. Carlos beweert dat de kans ongeveer 33,3% is.
- Leg uit dat ze alle drie gelijk hebben.
 - Hoe groot is de kans dat je een rode knikker trekt?
Schrijf die kans op drie verschillende manieren op.

Aanpak**Hoe bereken je een kans?**

- Tel eerst het totaal aantal mogelijkheden.
- Tel daarna hoeveel mogelijkheden voldoen aan de gestelde eis.
- Schrijf de gevraagde kans in de vorm ... op, of als breuk, of als percentage. Vereenvoudig de breuk als dat mogelijk is. Rond het percentage zo nodig verstandig af.

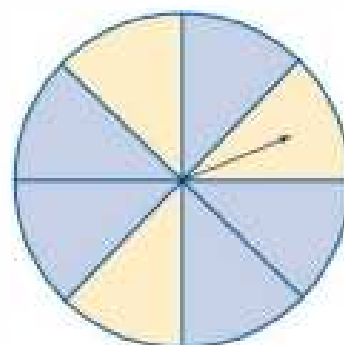
Voorbeeld:

Hoe groot is de kans dat je met een dobbelsteen hoger dan 4 gooit?

Oplossing

- Een dobbelsteen heeft zes kanten.
- Twee kanten zijn hoger dan 4.
- De gevraagde kans is 2 op 6
of $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ of ongeveer 33,3%.

- V3** In een klas zitten de meisjes Alie, Debbie, Isis, Anne en Ine en de jongens Danny, Kasper, Roy, Sjoerd, Yvo en Youri.
- Er wordt geloot wie van deze leerlingen als eerste een spreekbeurt moet houden.
Hoeveel procent is de kans dat dit een jongen is?
 - Een jongen wordt door loten voor corvee aangewezen.
Hoe groot is de kans dat Yvo dat is?
- V4** Een kanstol is verdeeld in acht even grote sectoren.
- Hoeveel procent is de kans dat de pijl een blauwe sector aanwijst?
 - En de kans dat de pijl een gele sector aanwijst?
 - Waarom is de som van de kans dat de sector blauw is en de kans dat de sector geel is 100%?
 - Derk wil net zo lang draaien met de kanstol tot de pijl tien keer een gele sector heeft aangewezen.
Hoeveel keer moet Derk naar verwachting draaien?



Theorie

Om alle mogelijkheden bij een probleem te kunnen tellen kun je gebruik maken van een **boomdiagram**. Soms is het niet nodig om het hele boomdiagram te tekenen om alle mogelijkheden te kunnen tellen.

Voorbeeld

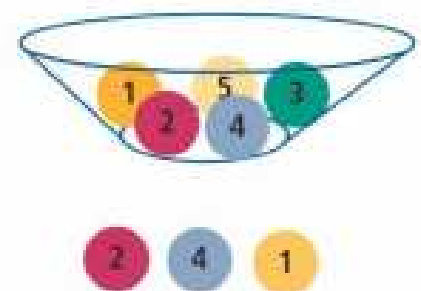
In de kast van Marieke liggen een rode, een groene en een blauwe broek. Verder liggen er een rood, een oranje, een zwart en een blauw T-shirt. Marieke pakt zonder te kijken een broek en een T-shirt. Hoeveel verschillende combinaties zijn er mogelijk?

Oplossing

Marieke pakt een broek en een T-shirt. Deze komen boven het boomdiagram. De kleuren komen bij de takken. Het aantal verschillende combinaties is $3 \times 4 = 12$.



- V5**
- Bij hoeveel combinaties in het voorbeeld hebben de broek en het T-shirt dezelfde kleur?
 - Hoeveel procent is de kans dat Marieke een combinatie pakt waarbij de broek en het T-shirt dezelfde kleur hebben?
 - Hoe zou het boomdiagram in het voorbeeld veranderen als er vijf verschillende broeken in de kast hadden gelegen: een rode, een groene, een blauwe, een zwarte, en een witte broek?
 - Hoeveel verschillende combinaties zijn er dan mogelijk?
- V6** Je gooit na elkaar, twee keer met een geldstuk.
- Maak een boomdiagram met daarin de verschillende rijtjes van kop en munt die er mogelijk zijn.
 - Hoe groot is de kans dat je één keer kop en één keer munt gooit?
 - Hoeveel verschillende rijtjes van kop en munt zijn er mogelijk na drie keer gooien?
 - Hoe groot is de kans op drie keer kop bij drie keer gooien?
- V7** In een schaal zitten vijf balletjes met daarop de cijfers 1, 2, 3, 4 en 5. Tom haalt zonder te kijken drie balletjes uit de vaas en legt ze naast elkaar neer. Hij noteert het getal dat hij zo krijgt.
- Leg uit dat hij op deze manier 60 verschillende getallen kan maken.
 - Hoe groot is de kans dat het getal met een 3 begint?
 - Hoeveel verschillende getallen kan Tom maken als hij alle vijf de balletjes naast elkaar legt?



12A.1 Steekproeven

Je leert • hoe je nagaat of een steekproef betrouwbaar is

Leerroutes • ondersteunend: 1—2—03—3—4—05—6
 • doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
 • uitdagend: 1—2—4—5—6—7—U1

Jesse wil weten hoeveel procent van de leerlingen op zijn school een iPhone heeft. In de klas van Jesse hebben 9 van de 27 leerlingen een iPhone.

- Mag Jesse nu de conclusie trekken dat ongeveer 33% van de leerlingen op zijn school een iPhone heeft?



- 1 Een politieke partij wil onder de 24 000 stemgerechtigde inwoners een onderzoek doen naar de naamsbekendheid van de plaatselijke lijsttrekker. Het bestuur van deze politieke partij besluit het onderzoek tot 250 mensen te beperken.
- Noem twee redenen waarom het onderzoek tot 250 mensen beperkt zal worden.
 - Hiernaast staat een aantal methoden om die 250 mensen te selecteren.
Ga bij iedere methode na of deze geschikt is en geef aan waarom wel of waarom niet.
 - Waarom zal het onderzoek een verkeerd beeld geven als ook kinderen voor het onderzoek geselecteerd kunnen worden?
 - Neem aan dat die 250 mensen op een goede manier zijn geselecteerd. Uit het onderzoek blijkt dat 82 van de 250 ondervraagde mensen de naam van de lijsttrekker kennen. Hoeveel procent van de ondervraagden is dat?
 - Maak een schatting van het aantal stemgerechtigde inwoners dat de naam van de lijsttrekker kent.

- Ze ondervragen 250 mensen op dinsdagmorgen in een winkelcentrum.
- Ze doen telefonisch onderzoek. Op woensdag van 11.00 uur tot 21.00 uur worden ieder uur 25 mensen gebeld.
- Ze versturen 500 vragenformulieren naar willekeurige adressen en gebruiken de eerste 250 formulieren die teruggestuurd worden voor het onderzoek.
- Uit het bevolkingsregister worden 250 mensen willekeurig geselecteerd en deze mensen worden ondervraagd.

Theorie

Om iets te weten te komen over een groep onderzoek je meestal slechts een deel van de groep. Je noemt dat een **steekproef**. Bij bevolkingsonderzoek wordt vaak met een steekproef gewerkt.

Voor het nemen van een betrouwbare steekproef moet je erop letten dat iedereen uit de groep dezelfde kans heeft om in de steekproef terecht te komen. Verder is het belangrijk dat de steekproef voldoende groot is.

Als de te onderzoeken groep uit meer dan 20 000 personen bestaat, nemen onderzoekers een steekproef van bijvoorbeeld 650 personen. Bij kleinere groepen worden in verhouding meer personen ondervraagd.

- 2** Een nieuwe politieke partij ondervraagt om kosten te besparen slechts 75 mensen. Het blijkt dat van deze groep 33 mensen de naam van de lijsttrekker kennen.
- Hoeveel procent van de ondervraagden kent de naam van de lijsttrekker?
 - Mag je op grond van dit percentage concluderen dat de naamsbekendheid van de lijsttrekker van deze partij groter is dan die van de lijsttrekker van opdracht 1? Leg je antwoord uit.

Ondersteunende route → maak opdracht 03

- 3** Lansingerland heeft 60 000 inwoners. Met behulp van een steekproef wil de gemeenteraad onderzoeken of de inwoners een nieuw zwembad willen.
- Voor de steekproef worden geen kinderen geselecteerd. Zijn de resultaten van de steekproef betrouwbaar?
 - Noem een aantal groepen inwoners die voor een goede steekproef ondervraagd moeten worden.
 - Zal een steekproef van 2% van de inwoners voldoende groot zijn? Of is 50% nodig? Verklaar je antwoord.
- 4** BNN hield een enquête onder haar leden om de waardering voor het televisieprogramma Proefkonijnen te onderzoeken. Aan 500 leden werd een enquêteformulier gestuurd. Het enquêteformulier werd door 384 leden teruggestuurd.
- Waarom is dit geen betrouwbare steekproef?
 - De waardering voor Proefkonijnen leverde een gemiddelde cijfer van 7,8 op. Wat kun je op grond van dit cijfer zeggen over de waardering van alle Nederlanders voor Proefkonijnen?



Ondersteunende route → maak opdracht 05

- 5** Greenpeace doet onderzoek naar de mening van de Nederlandse bevolking over hun acties. Leg van elke methode uit of deze een betrouwbare steekproef geeft.

- | | | | |
|----------|--|----------|--|
| A | In het tijdschrift van Greenpeace wordt aan de lezers gevraagd om hun mening te geven en die op te sturen. | C | Er worden 20 willekeurige mensen gebeld om naar hun mening te vragen. |
| B | Op 200 middelbare scholen, verspreid over Nederland, wordt aan 10 willekeurig gekozen leerlingen naar hun mening gevraagd. | D | Via bevolkingsregisters worden 1000 mensen geselecteerd die vervolgens worden ondervraagd. |
| | | E | Duizend treinreizigers worden naar hun mening gevraagd. |

- 6 Steven wil weten hoeveel van de 1600 leerlingen van zijn school ontevreden zijn over het aanbod van koek en frisdranken in de kantine.

- A Steven ondervraagt alle leerlingen uit havo 3A en vwo 3G.
- B Hij ondervraagt de eerste 20 leerlingen die in de pauze de kantine binnen komen.
- C Hij legt vragenformulieren in de kantine en laat 50 leerlingen die dit willen de vragenformulieren invullen.

- a Geef van alle drie de methoden aan waarom ze geen betrouwbare steekproef opleveren.
 - b Bedenk een methode om wel een betrouwbare steekproef te krijgen.
 - c Steven neemt een goede steekproef en vindt dat 27 van de 50 leerlingen uit deze steekproef ontevreden zijn. Hoeveel procent van de leerlingen is dat?
 - d De schoolleiding vertrouwt het onderzoek van Steven niet en besluit alle leerlingen te ondervragen. De uitkomst luidt dat 46% van de leerlingen ontevreden is. Moet je nu concluderen dat het onderzoek van Steven niet goed is? Leg uit waarom.
- 7 Er zijn ongeveer 900 000 middelbare scholieren. Het Nibud heeft een betrouwbare steekproef onder deze scholieren uitgevoerd. Uit de steekproef blijkt dat ongeveer $\frac{1}{3}$ deel van de scholieren een bijbaantje heeft en dat zeven op de tien scholieren zakgeld krijgen.
- a Schat hoeveel scholieren zakgeld krijgen.
 - b In een 6 vwo klas hebben 15 van de 27 scholieren een bijbaantje.
Verklaar waarom dit niet overeenkomt met de steekproef van het Nibud.



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

- 03** Een jeugdcommissie uit een gemeente met 22 000 inwoners wil onderzoeken of er behoefte is aan een jeugdsoos. Om de inwoners van de gemeente te ondervragen doet de jeugdcommissie telefonisch onderzoek. Op maandag tussen 9.00 uur en 16.00 uur worden 750 mensen uit de gemeente gebeld.
- Van welke groep wil de jeugdcommissie de mening weten?
 - Waarom heeft niet iedereen uit deze groep dezelfde kans om in de steekproef terecht te komen?
 - Welke conclusie kun je trekken over de betrouwbaarheid van de steekproef?
 - Noem een aantal groepen inwoners die voor een goede steekproef ondervraagd moeten worden.
- 05** De gemeenteraad van een stad met 32 000 inwoners wil onderzoeken of het gemeentehuis op zaterdag voor de inwoners geopend moet zijn.

- A** Ze ondervragen in de maand mei elke ochtend de eerste 50 bezoekers aan het gemeentehuis.
- B** Ze zetten op de site van de gemeente een enquêteformulier. Nadat de eerste 1000 enquêteformulieren zijn ingevuld, wordt het onderzoek afgesloten.
- C** Via het bevolkingsregister worden 1000 mensen van 16 jaar en ouder geselecteerd en ondervraagd.

- Waarom heeft bij methode A niet iedereen dezelfde kans om in de steekproef terecht te komen?
- Welke mensen zullen bij methode B het enquêteformulier gaan invullen?
- Zal methode C wel een goede steekproef opleveren? Verklaar je antwoord.

Uitdagende opdrachten

- U1** De bestuurders van een hogeschool met 15 500 studenten willen weten hoeveel procent van de studenten graag wil dat de bibliotheek ook op zondag geopend is. Beschrijf hoe je een betrouwbare steekproef kunt nemen uit de studenten.

Je leert

- wat toevalsgetallen zijn
- hoe je een experiment simuleert met toevalsgetallen

Leerroutes

- ondersteunend: 8—9—010—011—11—12
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 9—10—11—12—13—U2

De voorlichter van een kerncentrale geeft een lezing over de veiligheid. Om het te illustreren heeft hij een vaas met 99 999 witte knikkers en één rode knikker. Eén van de aanwezigen mag zonder te kijken een knikker uit de vaas halen.

- Wat wil de voorlichter hiermee duidelijk maken?



- 8
- Zoek uit hoe de RANDOM-toets op je rekenmachine werkt.
 - Druk veertig keer op de RANDOM-toets en turf hoe vaak de cijfers 0, 1, 2, ..., 9 als eerste na de komma voorkomen.
 - Komt ieder cijfer ongeveer even vaak voor?
 - Leg uit dat de kans op een even cijfer net zo groot is als de kans op een oneven cijfer.
 - Hoe vaak zal ieder cijfer ongeveer voorkomen als je 30 000 keer op de RANDOM toets drukt?



- 9
- Drie keer de RANDOM-toets gebruiken geeft bijvoorbeeld 0,304 en 0,85 en 0,366. Met deze getallen kun je een serie van negen cijfers maken. Je krijgt dan 3 0 4 8 5 0 3 6 6.
- Waarom staat er een 0 tussen de 5 en de 3?
 - Maak zelf met je rekenmachine een serie van vijftien cijfers.
 - Je kunt met de RANDOM-toets het gooien met een geldstuk naspelen. Een oneven cijfer hoort dan bij munt en een even cijfer hoort bij kop. De serie 3 0 4 8 5 0 3 6 6 levert dan het rijtje m k k k m k m k k. Schrijf de serie cijfers die je bij opdracht b gekregen hebt op als een rijtje bij het gooien met een geldstuk.
 - Hoe vaak heb jij kop gegooit?

Als de RANDOM-toets gebruikt, krijg je een willekeurig getal tussen 0 en 1, bijvoorbeeld 0,381. Sommige rekenmachines geven meer cijfers. Alle getallen horen wel even lang te zijn, dus als jouw rekenmachine drie cijfers geeft en er komt 0,47 te staan, is dit eigenlijk 0,470.

Theorie

De RANDOM-toets op je rekenmachine geeft **toevalsgetallen**. Dat zijn willekeurig gekozen getallen. Met toevalsgetallen kun je een experiment naspelen of **simuleren**.

Ondersteunende route → maak opdracht 010

- 10** Met toevalsgetallen is de samenstelling van twintig gezinnen met drie kinderen gesimuleerd.

3 7 9 7 3 5 9 1 6 0 7 3 6 8 6 7 8 9 1 6 7
1 8 3 2 0 8 7 9 7 3 4 1 8 6 5 9 1 7 1 0 8
8 4 7 5 0 3 5 7 3 4 9 0 2 8 3 5 2 8

Elk groepje stelt een gezin met drie kinderen voor. Een even cijfer stelt een jongen voor en een oneven cijfer een meisje.

- Vul de tabel in.
- In hoeveel procent van de gezinnen zijn er drie meisjes?
- Waarom komt niet iedere gezinssamenstelling even vaak voor?
- Welke gezinssamenstelling komt het vaakst voor?
- Hoeveel procent van de gezinnen heeft die samenstelling?

<i>gezinssamenstelling</i>	<i>frequentie</i>
3 jongens	...
2 jongens, 1 meisje	...
1 jongen, 2 meisjes	...
3 meisjes	...

Ondersteunende route → maak opdracht 011

- 11** Tjeerd en Eli willen twaalf worpen met een dobbelsteen simuleren. Ze tellen het aantal keren 6 in die twaalf worpen. Hiernaast zie je welke werkwijze Tjeerd en Eli kiezen.

- Waarom is de simulatie van Tjeerd niet goed?
- Is de simulatie van Eli goed? Verklaar je antwoord.

Tjeerd maakt met toevalsgetallen een rijtje van twaalf cijfers en telt hoe vaak het cijfer 6 er in voorkomt. Eli noteert uit de toevalsgetallen die hij maakt alleen de cijfers 1 tot en met 6. Hij maakt op deze manier zoveel toevalsgetallen tot hij twaalf cijfers heeft. Vervolgens telt hij hoe vaak de 6 voorkomt.

Theorie

Bij het simuleren moet je er voor zorgen dat de kans op een gebeurtenis bij de simulatie gelijk is aan de kans op de gebeurtenis die je wilt simuleren.

Voorbeeld

Als Ivan tegen Charly tennist, dan wint hij gemiddeld 7 van de 10 partijen. De kans dat hij wint is dus 70%. Bij het simuleren met toevalsgetallen kies je bijvoorbeeld voor 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7 voor winst van Ivan en 8, 9 en 0 voor winst van Charly.

- 12** Volgens Xander is bij een gezin met vier kinderen de kans op drie meisjes en één jongen even groot als de kans op twee meisjes en twee jongens. Volgens Yvonne is de kans op twee meisjes en twee jongens groter.
- Je kunt de beweringen van Xander en Yvonne onderzoeken met een simulatie. Maak rijtjes van vier cijfers. Neem 0 tot en met 4 voor een meisje en 5 tot en met 9 voor een jongen.
- Waarom is dit een goede simulatie van een gezin met vier kinderen?
 - Voer de simulatie 50 keer uit.
 - In hoeveel procent van jouw simulaties is er sprake van een gezin met drie meisjes en één jongen? En in hoeveel procent van de simulaties is er sprake van een gezin met twee meisjes en twee jongens?
 - Met een computer kun je heel snel veel simulaties uitvoeren. In de tabel zie je het resultaat van 1000 simulaties. Hoeveel keer zo groot, ongeveer, is de kans op twee meisjes en twee jongens als de kans op drie meisjes en één jongen?
 - Kun je het antwoord van opdracht d verklaren?
 - Wie heeft er gelijk, Xander of Yvonne?

●	8002	j m m m
●	0926	m j m j
●	1155	m m j j
●	1240	m m m m
●	0876	m j j j

gezinsamenstelling	frequentie
4 meisjes	63
3 meisjes, 1 jongen	253
2 meisjes, 2 jongens	384
1 meisje, 3 jongens	238
4 jongens	62

- 13** Nina wil weten hoe groot de kans is dat in een groep met 30 leerlingen er twee of meer op dezelfde dag jarig zijn. Met toevalsgetallen gaat ze dat simuleren. Een manier om dat te simuleren is door iedere dag door een toevalsgetal voor te stellen. Bijvoorbeeld 1 januari wordt gesimuleerd met het getal 001, 2 januari met 002 en zo verder tot en met 31 december. Met het maken van 30 toevalsgetallen vind je 30 dagen. Als binnen die 30 toevalsgetallen, een getal twee of meer keer voorkomt, vind je dus een dag waarop meer leerlingen jarig zijn.
- Nina houdt geen rekening met de schrikkel dag. Welk toevalsgetal stelt 31 december voor?
 - Welke toevalsgetallen worden bij deze simulatie niet gebruikt?
 - Nina heeft van 50 groepen met 30 leerlingen de dag waarop ze jarig zijn gesimuleerd. Leg uit dat de kans dat van een groep van 30 leerlingen er geen twee op dezelfde dag jarig zijn volgens Nina 26% is.
 - Hoe groot schat Nina de kans dat van een groep van 30 leerlingen er twee of meer op dezelfde dag jarig zijn?

		Nina
aantal keren met twee of meer dezelfde toevalsgetallen		frequentie
0		13
1		22
2		14
3		1

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

- 010** Met toevalsgetallen kun je het werpen met twee geldstukken simuleren. Een oneven cijfer hoort dan bij munt en een even cijfer hoort dan bij kop.

<i>simulatie</i>	94	66	03	92	27	99	62	59	69	08
<i>resultaat</i>	<i>m k</i>	<i>k k</i>	<i>k m</i>	...	...	...	...	...	...	...

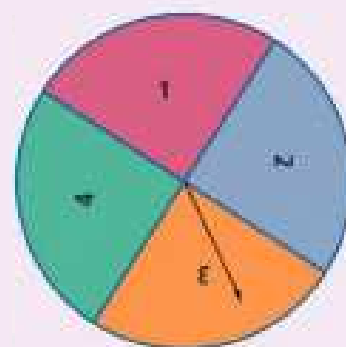
- Leg uit dat bij de simulatie 92 het resultaat *m k* hoort.
- Vul de tabel verder in.
- Vul de tabel hieronder in.

<i>resultaat</i>	2 keer munt	1 keer munt, 1 keer kop	2 keer kop
<i>frequentie</i>	...	...	...

- Waarom komt één keer kop en één keer munt vaker voor dan twee keer kop?

- 011** Een kanstol is verdeeld in vier even grote sectoren.

- Marja draait 20 keer met de tol.
Hoe vaak zal naar verwachting de pijl op de tol het cijfer 3 aanwijzen?
- Noa wil de tol simuleren met toevalsgetallen. Ze maakt met haar RANDOM-toets een rijtje van 20 cijfers.
Hoe vaak zal het cijfer 3 naar verwachting in haar rijtje staan?
- Waarom kun je het draaien met de kanstol niet simuleren door alle cijfers van toevalsgetallen te gebruiken?
- Leg uit waarom je de kanstol wel kunt simuleren door alleen de cijfers 1 tot en met 4 van toevalsgetallen te noteren.

**Uitdagende opdrachten**

- 02**
- Beschrijf hoe je het werpen met twee dobbelstenen kunt simuleren met behulp van toevalsgetallen.
 - Simuleer het werpen met twee dobbelstenen twintig keer en noteer telkens de som van de ogen op de dobbelstenen.
 - Hoeveel keer heb je de som 7? En hoeveel keer heb je de som 2?
 - Verklaar waarom de som 7 vaker voorkomt dan de som 2.

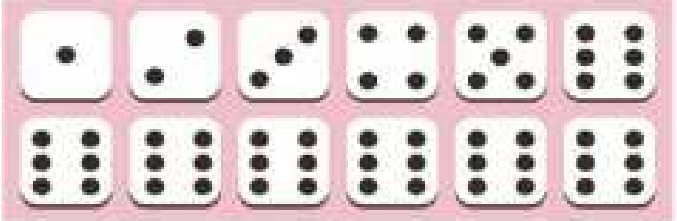
12A.3 Kansexperimenten

- Je leert** • hoe je een kans voorspelt bij experimenten waar toeval een rol speelt
- Leerroutes** • ondersteunend: 14—15—016—17—18—19
 • doorlopend: 14—15—16—17—18—19
 • uitdagend: 14—15—16—17—19—U3

Guus gooit zes keer met een dobbelsteen. Hij krijgt achtereenvolgens een 1, een 2, een 3, een 4, een 5 en een 6.

Guus zegt dat de kans op dit resultaat kleiner is dan de kans op zes keer een 6 gooien.

- Ben jij het met Guus eens? Verklaar je antwoord.

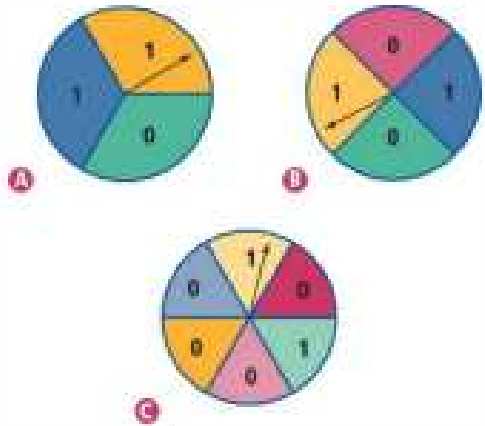


- 14** Richard gooit met een geldstuk. Bij gooien met het geldstuk is er 50% kans op kop en 50% kans op munt.
- Hoeveel keer verwacht je dat kop boven komt als hij 30 keer met het geldstuk gooit?
 - Gooi 30 keer met een geldstuk of simuleer dat met toevalsgetallen. Hoeveel keer krijg je kop?
 - Hoe groot is het verschil met wat je verwachtte?
 - Richard gaat tien keer met het geldstuk gooien. De eerste zes keer gooit hij kop. Hij denkt dat hij de volgende vier keer munt zal gooien. Volgens Elie is de kans groter dat hij twee keer munt en twee keer kop zal gooien. Wie heeft er volgens jou gelijk? Waarom?

- 15** Rob draaide tien keer met één van de drie tollen. Hij noteerde hoe vaak de pijl een 1 aanwees. Ook na 50 keer, 100 keer en 1000 keer draaien met dezelfde tol noteerde hij dat aantal.

aantal keren gedraaid	10	50	100	1000
aantal keren een 1	4	37	71	671

- Bereken bij de tabel het percentage van het aantal keren dat hij een 1 kreeg bij 10, 50, 100 en 1000 keer draaien.
- Welke van de drie tollen heeft Rob waarschijnlijk gebruikt? Leg uit waarom.



Theorie

Het gooien met dobbelstenen en geldstukken zijn voorbeelden van **kansexperimenten**. Bij kansexperimenten speelt het toeval een grote rol.

Hoe vaker je een kansexperiment herhaalt, hoe dichtter het resultaat zal komen bij wat je kunt verwachten.

Ondersteunende route → maak opdracht 016

- 16** Met een computer is het gooien met een geldstuk gesimuleerd. Hiernaast zie je het resultaat na 20 keer, na 200 keer en na 2000 keer gooien.
- Hoeveel is het verschil tussen het aantal keren kop na 20 keer gooien en het aantal keren kop dat je verwacht?
 - Bereken ook het verschil na 200 keer gooien en na 2000 keer gooien.
 - Na welk aantal keren gooien komt het percentage van het aantal keren kop het dichtst bij het verwachte percentage? Geef hier een verklaring voor.

	<i>aantal keren kop</i>	<i>aantal keren munt</i>
20 keer	11	9
200 keer	92	108
2000 keer	986	1014

- 17** Bij het spel Mens-erger-je-niet moet je eerst een 6 gooien voordat je mag beginnen. Yacco is al drie keer aan de beurt geweest en nog is het hem niet gelukt om een 6 te gooien.
- Yacco denkt dat de kans om drie keer achter elkaar geen 6 te gooien kleiner is dan 10%.
Hoeveel procent denk jij dat deze kans ongeveer is?
 - Bij een recordpoging speelden 250 mensen het spel Mens-erger-je-niet. In de tabel zie je hoeveel worpen het duurde voor 6 boven kwam. Je ziet dat er door 38 mensen in de eerste worp 6 werd gegooid.

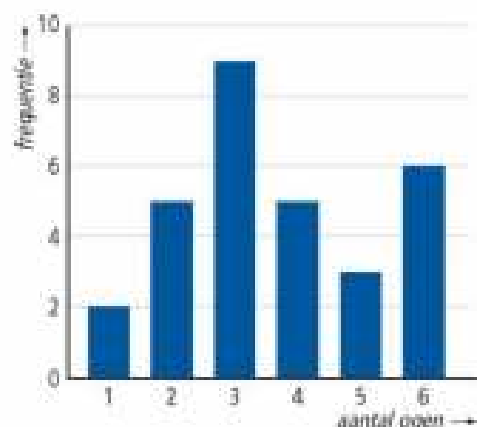
<i>aantal worpen</i>	1	2	3	4 of meer
<i>frequentie</i>	38	37	28	147

In hoeveel procent van de gevallen was al in de eerste worp 6 gegooid? Had je dat verwacht?

- Hoeveel procent is volgens de tabel de kans dat je meer dan drie keer moet gooien voordat er een 6 boven komt?
- Yacco gooit drie keer geen 6.
Hoe groot is de kans dat hij de vierde keer wel een 6 gooit?



- 18** Met een computer zijn 30 worpen met een dobbelsteen gesimuleerd. Bij het resultaat is een staafdiagram getekend.
- Hoe groot is volgens het staafdiagram de kans dat je een 4 gooit? Schrijf de kans als breuk.
 - Ziet het staafdiagram er net zo uit als je verwacht had? Leg uit waarom.
 - Teken een staafdiagram dat je verwachten kunt bij 3000 worpen met een dobbelsteen.



- 19** Met een computer zijn 4000 worpen met twee dobbelstenen gesimuleerd. Daarbij is telkens de som van het aantal ogen op de dobbelstenen geteld.



- Verklaar waarom de kans op 12 ogen kleiner is dan de kans op 10 ogen.
- Hoeveel procent is de kans op 12 ogen volgens de simulatie?
- Hoeveel procent is de kans op 7 ogen volgens de simulatie?
- In de tabel zie je dat er zes manieren zijn op 7 ogen. Leg uit dat de kans op 7 ogen ongeveer gelijk is aan 16,7%.
- Welke kans is volgens de simulatie groter, de kans op 5 ogen of de kans op 9 ogen?
- Laat met behulp van de tabel zien dat de kans op 5 ogen gelijk is aan de kans op 9 ogen.
- Van welk aantal ogen is de kans gelijk aan de kans op 3 ogen? Verklaar je antwoord.

	1	2	3	4	5	6
1	...	...	...	...	...	7
2	...	...	...	...	7	...
3	...	...	...	7	...	...
4	...	...	7	...	...	...
5	...	7	...	...	...	...
6	7	...	...	...	...	...

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

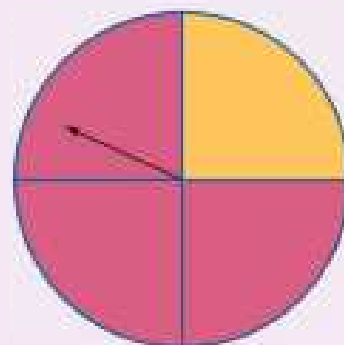
016 Pim draait 20, 200 en 2000 keer met de tol.

- Hoe vaak verwacht je dat hij rood zal draaien na 20 keer draaien? En na 200 keer? En na 2000 keer?
- In de tabel heeft Pim het aantal keren rood genoteerd.

<i>aantal keren gedraaid</i>	20	200	2000
<i>aantal keren rood</i>	14	155	1488

Bij welk aantal keren draaien is het verschil met wat je verwacht het kleinst?

- Hoeveel procent is de kans dat je rood draait?
- Bereken bij de tabel het percentage van het aantal keren rood na 20 keer, na 200 keer en na 2000 keer draaien.
- Na welk aantal keren draaien komt het percentage van het aantal keren rood het dichtst bij het verwachte percentage? Geef hier een verklaring voor.

**Uitdagende opdrachten**

U3 Dion en Paul spelen een spel. Bij een worp met drie dobbelstenen telt het hoogste aantal ogen als honderdtal, het volgende aantal als tiental en het laagste als eenheid. Zo geeft de worp 5, 2, 3 het getal 532 en de worp 4, 6, 4 geeft het getal 644.

De eerste speler gooit met de drie dobbelstenen. Nadat de eerste speler gegooid heeft, mag de tweede speler één, twee of drie dobbelstenen opnieuw gooien om op een hoger getal te komen. Daarna mag de eerste speler nog een keer proberen om op een hoger getal uit te komen.

Dion gooit als eerste. Hiernaast zie je zijn worp.

Paul is daarna aan de beurt. Hij besluit om alleen de dobbelsteen waarmee 1 werd gegooid over te gooien. Paul gooit een 4.

Dion moet nu proberen om op een hoger getal dan 654 te komen. Hij kan kiezen alleen de 4 opnieuw gooien, alleen de 5 opnieuw gooien of zowel de 4 als de 5 opnieuw gooien. Onderzoek welke keuze het verstandigst is.



12A.4 Kansen berekenen

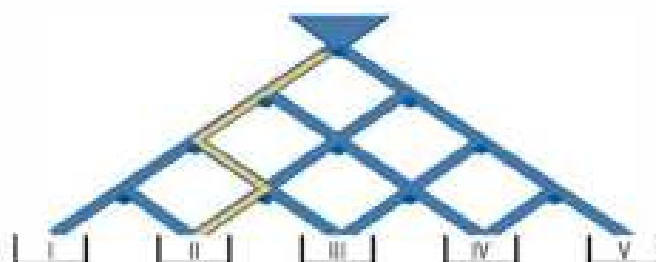
Je leert • hoe je met systematisch tellen een kans berekent

Leerroutes • ondersteunend: 20—021—22—023—23—24
 • doorlopend: 20—21—22—23—24—25
 • uitdagend: 20—22—23—24—25—U4

Bij een knikkerbak vallen knikkers via een trechter naar beneden en komen dan in bakje I, II, III, IV of V terecht. Bij elk pinnetje is de kans dat de knikker naar links gaat even groot als de kans dat hij naar rechts gaat.

Sandra gooit 400 knikkers in de trechter.

- Hoeveel knikkers zullen er naar verwachting in de verschillende bakjes terecht komen?



- 20** Mia draait eerst met kanstol 1 en daarna met kanstol 2.
- Maak een boomdiagram bij de mogelijke kleuren die Mia kan draaien.
 - Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er in totaal?
 - Bereken de kans op twee keer groen.
 - Bereken de kans dat Mia geen groen draait.
 - Hoe groot is de kans dat Mia rood en groen draait?



Theorie

Als je een kans wilt berekenen, dan moet je eerst alle mogelijkheden en alle mogelijkheden die voldoen aan de gestelde eis **systematisch tellen**. Daarbij kun je gebruik maken van een tabel of van een boomdiagram. Soms is het niet nodig om het hele boomdiagram te tekenen.

Voorbeeld

Bereken de kans dat er in een willekeurig gezin met drie kinderen twee meisjes en een jongen zijn.

Oplossing

Hiernaast staat een gedeelte van het boomdiagram dat hoort bij gezinnen met drie kinderen. In het boomdiagram zie je dat er bij een gezin met drie kinderen $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ volgordes mogelijk zijn. Er zijn drie volgordes met twee meisjes en een jongen, namelijk jmm, mjm en mmj.

De kans op twee meisjes en een jongen is $\frac{3}{8}$ of 0,375 of 37,5%.

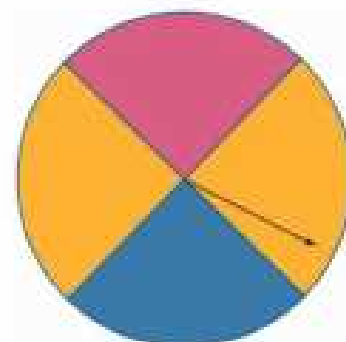
1e kind 2e kind 3e kind volgorde



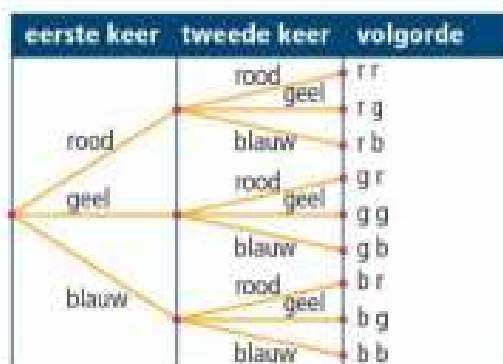
Ondersteunende route → maak opdracht 021

- 21** Jesse gooit vier keer met een geldstuk. Hij krijgt dan een rijtje, bijvoorbeeld het rijtje: *mun t mun t kop mun t*.
- Hoeveel verschillende rijtjes zijn er?
 - Hoe groot is de kans op vier keer kop?
 - Hoeveel verschillende rijtjes zijn er met drie keer kop en één keer munt?
 - Hoe groot is de kans op een rijtje met drie keer kop en één keer munt?

- 22** Een kanstol is in vier even grote sectoren verdeeld. Na het draaien van de kanstol wijst de pijl rood, geel of blauw aan. Er wordt twee keer met de kanstol gedraaid.



- Hoeveel verschillende volgordes zijn er in totaal?
- Waarom is de kans op twee keer geel groter dan de kans op twee keer blauw?
- Jean maak een boomdiagram om te berekenen hoe groot de kans is dat de pijl twee keer achter elkaar blauw aanwijst.



Hij telt negen volgordes en één daarvan is twee keer achter elkaar blauw. De kans is volgens hem dus $\frac{1}{9}$.

Welke fout maakt Jean?

- Barbara maakt een tabel. Waarom zet ze boven de tabel en links van de tabel twee keer geel?
- Vul de tabel verder in.
- Hoe groot is de kans dat de pijl twee keer blauw aanwijst?
- Hoe groot is de kans dat de pijl twee keer geel aanwijst?

		1e keer			
		r	g	g	b
2e keer	r	rr	gr	gr	...
	g	...	...	...	...
	g	...	...	...	...
	b	...	...	...	...

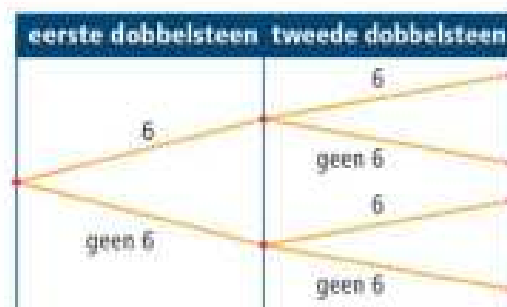
Ondersteunende route → maak opdracht D23

- 23** Bij een bazaar staat een rad.
- Hoe groot is de kans dat de pijl de groene sector aanwijst?
 - Waarom is de kans dat de pijl twee keer achter elkaar een blauwe sector aanwijst niet even groot als de kans dat de pijl twee keer achter elkaar een groene sector aanwijst?
 - Bereken de kans dat de pijl twee keer achter elkaar een blauwe sector aanwijst.
 - Bereken de kans dat de pijl drie keer achter een groene sector aanwijst.



- 24** Een cijferslot is alleen te openen als de juiste combinatie van vier cijfers is ingesteld. De combinatie bestaat uit de cijfers 2, 3, 5 en 9.
- Met een boomdiagram kun je het aantal mogelijkheden tellen.
Waarom zijn er in het boomdiagram voor het tweede cijfer drie takken in plaats van vier takken?
 - Hoe groot is de kans dat je in één keer de juiste combinatie vindt?
 - Harm heeft ook zo'n cijferslot, maar zijn combinatie bestaat uit de cijfers 1, 7, 7 en 9.
Hoe groot is de kans dat je in één keer de juiste combinatie van dit cijferslot vindt?

- 25**
- Rachid bepaalt met het boomdiagram de kans om bij het gooien met twee dobbelstenen één keer 6 en één keer geen 6 te werpen. Die kans is volgens hem 2 op 4. Welke fout maakt hij?
 - Wat is bij het vinden van deze kans handiger, een tabel of een boomdiagram? Waarom?
 - Bereken de kans op één keer 6 en één keer geen 6.
 - Hoeveel procent is de kans op twee keer geen 6?
 - Rachid wil weten hoe groot de kans is dat je bij het gooien met drie dobbelstenen drie keer 6 gooit.
Beredeneer met een boomdiagram hoe groot die kans is.



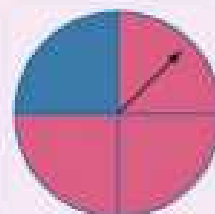
Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

- 021**
- Bij het gooien met drie geldstukken krijg je een rijtje met kop en munt, bijvoorbeeld: *munt kop kop*. Met een boomdiagram kun je het aantal verschillende rijtjes berekenen. Je kunt het aantal verschillende rijtjes ook als volgt berekenen: $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = \dots$. Maak de berekening verder af.
 - Leg uit dat de kans op drie keer kop $\frac{1}{8}$ is.
 - Laat zien dat er drie verschillende rijtjes zijn waarbij je twee keer kop en één keer munt kunt gooien.
 - Hoe groot is de kans op twee keer kop en één keer munt?
 - Hoeveel verschillende rijtjes zijn er bij vijf keer gooien?
 - Hoe groot is de kans dan op vijf keer kop?
 - En hoe groot is de kans op vier keer kop en één keer munt?

- 023** Een tol is in vier even grote gekleurde sectoren verdeeld. Na het draaien van de tol wijst de pijl rood of blauw aan.

- Waarom is de kans dat de pijl na het draaien van de tol blauw aanwijst niet $\frac{1}{2}$, maar $\frac{1}{4}$?
- Je kunt bij twee keer draaien een tabel gebruiken. Waarom is rood drie keer en blauw één keer ingevuld?
- Vul de tabel verder in.
- Hoe groot is de kans dat bij twee keer draaien, de pijl twee keer blauw aanwijst?
- En hoe groot is de kans op twee keer achter elkaar rood?
- Bereken ook de kans dat de pijl één keer blauw en één keer rood aanwijst bij twee keer draaien.



		1e keer			
		r	r	r	b
2e keer	r	...	...	...	...
	r	...	...	...	...
	r	...	...	...	...
	b	...	...	...	...

Uitdagende opdrachten

- U4** Eline, Kristen en Lois doen een spelletje. Ze houden alle drie willekeurig een munt van 5, 10 of 20 cent in hun gesloten hand. Om de beurt raden ze wat het totaalbedrag is dat ze samen in hun hand hebben. Raadt iemand het goede bedrag, dan krijgt ze de munten van de andere twee. Zo niet, dan kiest iedereen weer een nieuwe munt en mag de volgende raden.
- Eline en Kristen zijn verbaasd als ze horen dat Lois telkens hetzelfde bedrag noemt en het vaakst wint.
- Welk bedrag noemt Lois en hoe groot is de kans dat ze wint?

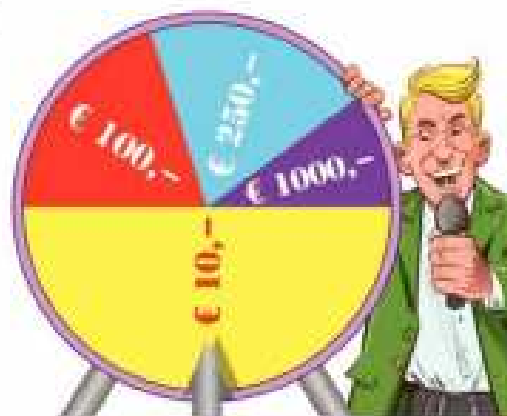
- 26** Bij een quiz wordt een rad van fortuin gebruikt om de prijs te bepalen.

- De hoeken van de sectoren zijn 36° , 72° , 72° en 180° . Welke hoek hoort bij welke prijs?
- Hoe groot is de kans op een prijs van € 250,-?
- Bereken ook de kansen op een prijs van € 10,-, van € 100,- en van € 1.000,-.
- Gisela heeft tweehonderd keer een simulatie van één keer draaien met het rad van fortuin uitgevoerd. In de tabel zie je het resultaat.

prijs	€ 10,-	€ 100,-	€ 250,-	€ 1.000,-
frequentie	104	43	38	15

Is dit wat je ongeveer verwachtte? Licht je antwoord toe.

- De winnaar mag drie keer draaien met het rad. Hij krijgt de som van de bedragen die het rad van fortuin aanwijst. Bedenk een simulatie waarmee je kunt uitzoeken hoeveel drie keer draaien met het rad van fortuin als prijs oplevert.



- 27** Op een fancy-fair is een spel waarbij je met pijltjes naar een snel ronddraaiend dartbord moet gooien. Tegen betaling van € 1,50 mag je gooien tot je het dartbord raakt. Je krijgt het bedrag van de sector waar je pijltje terechtkomt.

Alle sectoren van het dartbord zijn even groot.

- Hoe groot is de kans op een uitbetaling van € 2,50?
- Hoe groot is de kans dat je minder dan € 1,50 krijgt?
- Het is ook mogelijk om € 2,50 te betalen. Dan mag je net zo lang gooien tot je het dartbord twee keer geraakt hebt. De twee geraakte bedragen worden dan uitgekeerd. In de tabel is een begin gemaakt met een overzicht van alle mogelijke bedragen die uitgekeerd kunnen worden. Zijn er nog meer combinaties van worpen die € 1,50 als bedrag geven?
- Vul de tabel verder in.
- Hoe groot is de kans dat je precies de € 2,50 die je betaald hebt, terug krijgt?
- Hoe groot is de kans dat je meer dan € 1,50 terug krijgt?
- Hoe groot is de kans dat je twee keer hetzelfde bedrag raakt?



		tweede pijl				
		0,00	0,50	1,00	1,50	2,50
eerste pijl	0,00	0,00	0,50	...	...	...
	0,50	0,50	1,00	...	...	...
	1,00	1,00	1,50	...	...	...
	1,50	1,50	2,00	...	...	...
	2,50	2,50	...	...	...	...

- 28** Ben draait 300 keer met de twee tollen. Bij 114 keer komen beide tollen op dezelfde kleur. De keren dat ze op dezelfde kleur komen, heeft hij in de tabel gezet. De tabel is niet goed leesbaar meer. Welke getallen zullen er bij blauw en bij geel gestaan hebben? Verklaar je antwoord.



kleur	rood	blauw	geel
frequentie	72		9

- 29** Een tenniswedstrijd tussen Noa en Vera is afgelopen zodra één van hen twee sets gewonnen heeft. Beide speelsters zijn ongeveer even sterk, dus beiden hebben een kans van 50% om een set te winnen.
- Hoeveel sets kan zo'n tenniswedstrijd maximaal duren?
 - Laat zien dat er zes mogelijke wedstrijdverlopen zijn.
 - Met toevalsgetallen zijn mogelijke wedstrijdverlopen bij dertig tenniswedstrijden gesimuleerd. Kies bij een even getal voor winst voor Noa en bij een oneven getal voor Vera.

534	009	191	586	560	090	740	427	057	256
456	705	424	564	278	404	708	188	476	663
315	712	384	793	302	872	312	596	004	835

Hoeveel van deze wedstrijden zijn na twee sets voorbij?

- En hoeveel van deze wedstrijden worden door Vera gewonnen? Komt dat overeen met wat je verwachtte?
- 30** Deze eenvoudige fruitautomaat heeft twee vensters, waarachter trommels draaien die je met een hendel in beweging kunt brengen. Op elke trommel staan tien figuurtjes. Door het venster kun je er telkens eentje zien. Op beide trommels staat hetzelfde: één bel, vier appels en vijf citroenen.
- Welke combinatie zal het minst voorkomen? Waarom?
 - De linker trommel is stil blijven staan bij een appel. Hoe groot is de kans dat dan in het rechter venster ook een appel te zien zal zijn?
 - Hoe groot is de kans dat je twee citroenen te zien krijgt?
 - Als in beide vensters hetzelfde figuurtje te zien is, win je een prijs. Met welk figuurtje heb je de grootste kans zo'n prijs te winnen?
 - Bereken de kans dat je een prijs wint.



Theorie

Toevalsgetallen en simuleren

Toevalsgetallen zijn willekeurig gekozen getallen. Je kunt ze bijvoorbeeld vinden met de RANDOM-toets op je rekenmachine. Met toevalsgetallen getallen kun je een experiment naspelen of simuleren.



- S1** Simone wil weten hoe groot de kans is op twee keer kop en één keer munt bij het werpen met drie geldstukken. Ze heeft daarom twintig toevalsgetallen van drie cijfers gemaakt met de RANDOM-toets op haar rekenmachine.

245	034	789	118	673
559	440	520	956	401
828	579	001	875	539
010	993	462	913	287

Ze neemt voor kop de even cijfers en voor munt de oneven cijfers.

- Bij hoeveel simulaties is er sprake van twee keer kop en één keer munt?
- Hoeveel procent is de kans op twee keer kop en één keer munt bij deze simulatie?

Vaardigheid

Je kunt nagaan of een steekproef betrouwbaar is.

Een steekproef is een gedeelte van een groep die je wilt onderzoeken. Bij bevolkingsonderzoek wordt vaak met een steekproef gewerkt.

Voor het nemen van een betrouwbare steekproef moet je erop letten dat iedereen uit de groep dezelfde kans heeft om in de steekproef terecht te komen. Verder is het belangrijk dat de steekproef voldoende groot is.

Voorbeeld

De directie van een school met 2200 leerlingen wil onderzoeken of het beter is om de school om 8.30 uur te laten beginnen in plaats van 8.15 uur. Ze nemen een steekproef van 200 leerlingen. Welke van de steekproeven A of B is betrouwbaar?

Oplossing

Steekproef A is niet betrouwbaar, want de leerlingen die met de bus of lopend komen kunnen niet binnen de steekproef vallen.

Steekproef B is wel betrouwbaar, want iedere leerling heeft evenveel kans om in de steekproef terecht te komen.

- Ze ondervragen bij de fietsenstalling de eerste 200 leerlingen die daar aankomen.
- Ze kiezen willekeurig 200 leerlingen uit het leerlingenbestand.

- S2** Men wil met een steekproef onderzoek doen naar het gebruik van Facebook onder leerlingen in de bovenbouw. Hieronder staan vier methoden voor een steekproef.

- A** Aan 245 bovenbouwleerlingen wordt een vragenlijst gestuurd met het verzoek die ingevuld in te sturen. De personen die niet reageren worden niet meegeteld.
- B** Vijf bovenbouwleerlingen in Rotterdam met een achternaam die met een A begint krijgen een vragenlijst.
- C** Op de avond van de diploma-uitreiking vullen de geslaagde leerlingen van een school in Den Haag een vragenlijst in die daarna per computer wordt verwerkt.
- D** Op 1000 willekeurige adressen in Nederland wordt gevraagd of er bovenbouwleerlingen wonen. Zo ja, dan krijgen ze een vragenlijst.

- a** Ga van elke methode na of deze een betrouwbare steekproef geeft of niet.
- b** Bedenk zelf een methode waarbij een betrouwbare steekproef wordt verkregen.

Vaardigheid

Je kunt een experiment met toevalsgetallen simuleren.

Bij het simuleren moet je er voor zorgen dat bij de simulatie de kans op een gebeurtenis gelijk is aan de kans op de gebeurtenis die je wilt simuleren.

Voorbeeld

Bij korfbalwedstrijden tussen Nederland en België wint Nederland gemiddeld 7 van de 10 wedstrijden, wint België 2 van de 10 wedstrijden en eindigt 1 van de 10 wedstrijden in een gelijkspel.

Simuleer met toevalsgetallen 25 wedstrijden tussen Nederland en België.

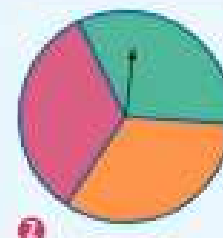
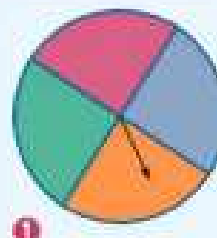
Oplossing

Kies 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7 voor winst van Nederland, 8 en 9 voor winst van België en 0 voor een gelijkspel.

2 7 2 5 2 9 3 2 5 9 8 4 0 6 8 6 8 5 8 2 6 0 6 4 6
N N N N N B N N N B B N G N B N B N B N N G N N N

De simulatie geeft 17 keer winst voor Nederland, 6 keer winst voor België en 2 keer een gelijkspel.

- S3** Kanstol 1 is in vier even grote sectoren verdeeld en kanstol 2 is in drie even grote sectoren verdeeld. Na het draaien van de kanstol wijst de pijl blauw, rood, groen of oranje aan.
- Schrijf op hoe je met toevalsgetallen het draaien met kanstol 1 kunt simuleren. Welke getallen kies je voor blauw? En voor rood? En voor groen? En voor oranje?
 - Schrijf ook op hoe je met een dobbelsteen het draaien met kanstol 2 kunt simuleren.



Vaardigheid

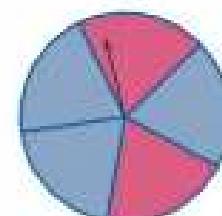
Je kunt een kans voorspellen bij experimenten waar toeval een rol speelt.

Bij het gooien met dobbelstenen en geldstukken speelt het toeval een grote rol. Daarom noem je dit kansexperimenten. Hoe vaker je een kansexperiment herhaalt, hoe dichtter het resultaat zal komen bij wat je kunt verwachten.

Voorbeeld

Een kanstol is in vijf even grote sectoren verdeeld. Na het draaien wijst de pijl rood of blauw aan. De tabel geeft het resultaat na 10 keer, na 100 keer en na 1000 keer draaien.

	<i>aantal keren rood</i>	<i>aantal keren blauw</i>
10 keer	5	5
100 keer	42	58
1000 keer	397	603



De kans op rood na 10 keer draaien is $\frac{5}{10} = 50\%$, de kans op rood na 100 keer draaien is $\frac{42}{100} = 42\%$ en de kans op rood na 1000 keer draaien is $\frac{397}{1000} = 39,7\%$. Bij 1000 keer draaien kom je het dichtst bij de 40% die je kunt verwachten.

- S4** In de tabel zie je het resultaat na 30 keer, na 300 keer en na 3000 keer gooien met een dobbelsteen.
- Hoe groot is de kans dat je bij een worp 6 gooit?
 - Hoeveel is het verschil tussen het aantal keren 6 na 30 keer gooien en het aantal dat je kunt verwachten?
 - Bereken dat verschil na 300 keer en 3000 keer gooien.
 - Bereken in hoeveel procent van de worpen er 6 ogen zijn gegooid na 30 keer gooien, na 300 keer gooien en na 3000 keer gooien.
 - Bij welk aantal keren gooien, komen de resultaten het best overeen met je verwachting?

<i>aantal ogen</i>	<i>30 keer</i>	<i>300 keer</i>	<i>3000 keer</i>
1	2	37	521
2	5	54	488
3	7	29	502
4	4	62	472
5	8	61	534
6	4	57	483

Vaardigheid

Je kunt met systematisch tellen een kans berekenen.

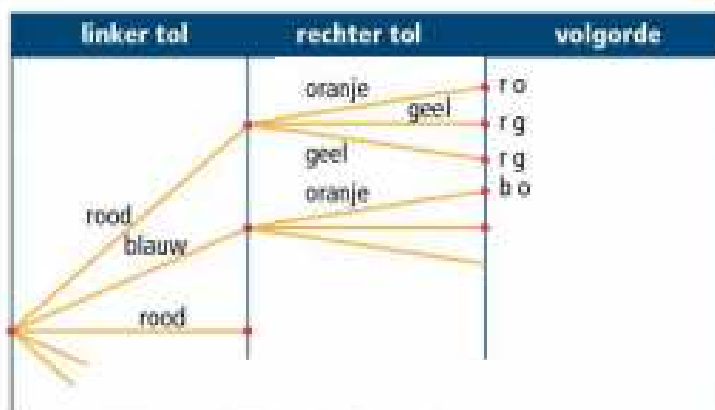
Bij het systematisch tellen van een aantal mogelijkheden kun je gebruik maken van een boomdiagram of van een tabel. Met die tabel of met het boomdiagram kun je vervolgens kansen berekenen.

Voorbeeld

De linker kanstel is in vijf even grote sectoren verdeeld en de rechter kanstel is in drie even grote sectoren verdeeld.

Hoe groot is de kans dat de pijlen blauw en geel aanwijzen?

Oplossing



		linker kanstel				
		r	r	b	b	b
rechter kanstel	o	ro	ro	bo	bo	bo
	ge	rg	rg	bg	bg	bg

Er zijn totaal 15 verschillende volgordes.

Er zijn zes volgordes waarbij de pijlen blauw en geel aanwijzen.

De kans op blauw en geel is dus $\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 40\%$.

- S5** Kijk bij een worp met twee dobbelstenen naar het verschil tussen de ogen. Bij 3 en 5 ogen zet je een 2 in de tabel.

- Vul de tabel verder in.
- Hoe vaak komt het verschil 0 voor?
- Hoeveel procent kans is er op het verschil 0? Rond je antwoord af op één decimaal.
- Maak een tabel als hieronder en vul de percentages in.

verschil van de ogen	0	1	2	...
kans in procenten	...	...	...	...

- Hoe vaak verwacht je een verschil van 3 ogen als er 2400 keer wordt geworpen?

	1	2	3	4	5	6
1	0	...	...	...	...	...
2	...	...	...	...	...	...
3	...	...	...	...	2	...
4	...	...	...	...	...	...
5	...	...	2	...	...	...
6	...	...	...	...	...	...

- T1** Enkele producenten van computerspelletjes willen onderzoek doen naar de bekendheid van een nieuw in Nederland op de markt gebracht computerspel.

- A** Ze bellen de eerste 2000 mensen uit het telefoonboek van Apeldoorn.
- B** Ze zetten een enquête op hun website. Iedereen die deze invult maakt kans op een prijs.
- C** Ze interviewen op vijf doordeweekse ochtenden in totaal 2000 mensen in een druk winkelcentrum.

- a** Geef van de methoden aan waarom ze niet geschikt zijn.
- b** Bedenk een methode die wel een betrouwbare steekproef oplevert.
- c** Ze nemen een goede steekproef en vinden dat 56 van de 2000 ondervraagden het computerspel kent.
Hoeveel procent van de ondervraagden kent het spel?
- d** Maak hiermee een schatting hoeveel van de in totaal 17,3 miljoen Nederlanders het computerspel kent.

- T2** Bij een spelletje wordt met drie dobbelstenen gegooid. Het aantal punten dat je krijgt is de som van de ogen op de drie dobbelstenen.

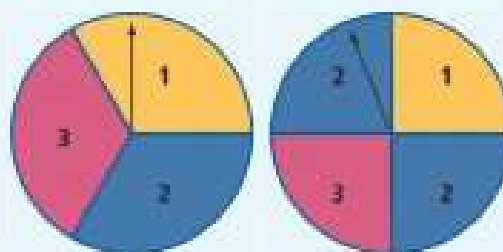
- a** Hoe groot is de kans dat de som van de ogen 18 is?
- b** Laat zien dat er drie manieren zijn om als som van de ogen 17 te krijgen.
- c** Hoe groot is de kans op 17 punten?
- d** Leg uit dat de kans op 16 punten gelijk is aan de kans op 5 punten.

- T3** Twee schakers, Boris en Ton, spelen regelmatig een schaakwedstrijd tegen elkaar. Uit de uitslagen blijkt dat Boris 30% kans heeft om te winnen en Ton 20%. In 50% van de schaakwedstrijden wordt het remise.

- a** Beschrijf hoe je met toevalsgetallen de uitslag van een schaakwedstrijd kunt simuleren.
- b** Hoe groot is de kans dat ze drie keer achter elkaar remise spelen?
- c** Boris en Ton spelen in een toernooi twee keer tegen elkaar.
Hoe groot is de kans dat Ton twee keer wint?



- T4** Bij een spelletje moet je met twee tollen draaien. Het aantal punten dat je krijgt, is de som van het aantal ogen op de twee tollen.
- Welke aantallen punten zijn er mogelijk?
 - Hoe groot is de kans dat je drie punten krijgt?
 - Bereken de kans dat je meer dan vier punten krijgt.
 - Bij welk aantal punten hoort de grootste kans?
Licht toe!
 - Hoeveel keer verwacht je dat je twee punten krijgt als je het spelletje 500 keer speelt?

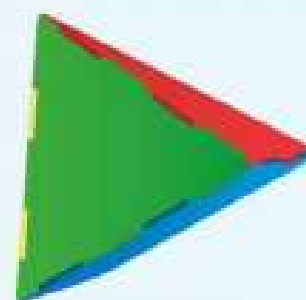


- T5** Uit onderzoek onder Nederlanders van 13 jaar en 14 jaar blijkt dat $\frac{1}{6}$ deel van hen minder dan tien keer per dag een appje verzendt. In een 3 vwo klas zitten 24 leerlingen.
- Hoeveel van deze leerlingen zullen naar verwachting minder dan tien keer per dag een appje verzenden?
 - In de klas blijken maar liefst 19 leerlingen minder dan tien keer per dag een appje te verzenden. Annelot wil weten of dat te verwachten was. Ze laat een computer 100 keer een serie van 24 worpen met een dobbelsteen uitvoeren. Ze telt per serie het aantal keer dat er een zes wordt gegooid.

aantal keren 6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aantal series	2	7	15	14	25	15	14	4	3	0	1

Heeft Annelot de situatie in haar klas goed gesimuleerd?

- Het blijkt niet voor te komen dat van de 24 worpen 19 keer een 6 wordt gegooid. Annelot concludeert nu dat het niet waar kan zijn dat $\frac{1}{6}$ deel van de jeugd minder dan drie keer per dag een appje verzendt.
Klopt Annelots conclusie?
- T6** De regelmatige driezijdige piramide hiernaast noem je ook wel een tetraëder. De vier vlakken van de tetraëder hebben de kleuren rood, groen, blauw en geel. Je gooit met de tetraëder en kijkt bij de worp naar de kleur die onder ligt. Hoe groot is de kans dat je na drie keer gooien één keer geel, één keer blauw en één keer groen gooit?



Je kunt nagaan of een steekproef betrouwbaar is.

- E1** Radio 538 wil onderzoeken hoeveel mensen naar het nieuwe radioprogramma op maandagavond luisteren.
- Geef aan waarom de methoden hiernaast niet geschikt zijn.
 - Bedenk een methode die wel een goede steekproef oplevert.
 - Radio 538 neemt een betrouwbare steekproef en vindt dat 37 van de 3000 ondervraagden regelmatig luisteren. Zullen dan ook 370 van de 30 000 inwoners van de gemeente Oldebroek regelmatig luisteren?

- Ze vragen luisteraars te reageren.
- Ze ondervragen 1000 bezoekers van verschillende discotheken.
- Er worden enquêteformulieren aan een muziektijdschrift toegevoegd. De eerste 200 inzenders winnen een cd naar keuze.
- Er worden 100 winkelende mensen ondervraagd op een zaterdagochtend.

Je kunt een experiment met toevalsgetallen simuleren.

- E2** Martijn moet de kans schatten dat er in een willekeurig gezin met drie kinderen twee meisjes en een jongen zijn. Hij gooit 25 keer met drie geldstukken en telt het aantal keer kop.

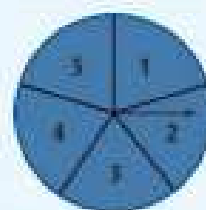
<i>aantal keren kop</i>	0	1	2	3
<i>aantal worpen</i>	4	10	9	2

- Voor kop kiest hij dat het kind een meisje is. Hoe groot zal hij de kans op twee meisjes schatten?
- Na 100 keer met drie geldstukken gooien, krijgt hij het resultaat in deze tabel.

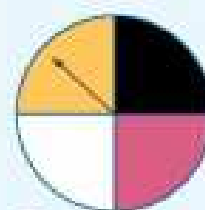
<i>aantal keren kop</i>	0	1	2	3
<i>aantal worpen</i>	13	39	37	11

Hoe groot zal hij nu de kans op twee meisjes schatten?

- Schrijf alle mogelijke samenstellingen op van gezinnen met drie kinderen.
 - Hoe groot zal de kans op twee meisjes zijn?
- E3**
- Kanstel A is in vijf even grote sectoren verdeeld. Na het draaien van de kanstel wijst de pijl 1, 2, 3, 4 of 5 aan. Schrijf op hoe je met toevalsgetallen het draaien met kanstel A kunt simuleren.
 - Kanstel B is in vier even grote sectoren verdeeld. Na het draaien wijst de pijl zwart, wit, rood of geel aan. Schrijf op hoe je met toevalsgetallen het draaien met kanstel B kunt simuleren.



A



B

Je kunt een kans voorspellen bij experimenten waar toeval een rol speelt.

- E4** Op een tol staan in zes even grote sectoren de letters S, P, E, L, E en N. In de tabel staat het resultaat van een simulatie na 30 keer, na 300 keer en na 3000 keer draaien met de tol.

	30 keer	300 keer	3000 keer
S	4	45	502
P	6	52	487
E	8	91	994
L	5	54	534
N	7	58	483

- Hoe groot is het percentage dat de letter L voorkomt na 30 keer draaien? Rond af op één decimaal.
- En hoe groot is het percentage dat de letter L voorkomt na 300 keer draaien? En na 3000 keer?
- Welke percentages verwacht je dat bij de letters horen?
- Hoe vaak verwacht je dat de letter S gedraaid zal worden na 8000 keer draaien? En hoe vaak de letter E?

Je kunt met systematisch tellen een kans berekenen.

- E5** Liesbeth stelt Tjarco de volgende weddenschap voor. We gooien ieder met een dobbelsteen. Ligt er een 1, een 6, of allebei, dan win ik. Anders win jij.

- Voor wie lijkt deze weddenschap het gunstigst, voor Liesbeth of voor Tjarco?
- Maak een tabel met alle mogelijke worpen met twee dobbelstenen.
- Hoe groot is de kans op een 1, een 6, of allebei?
- Klopt je antwoord bij opdracht a?

- E6** Bij een spelletje moet je om te winnen 3 gooien of draaien. Je mag kiezen tussen twee dobbelstenen of de tol met elf even grote sectoren. Wat kies je? Verklaar je antwoord.





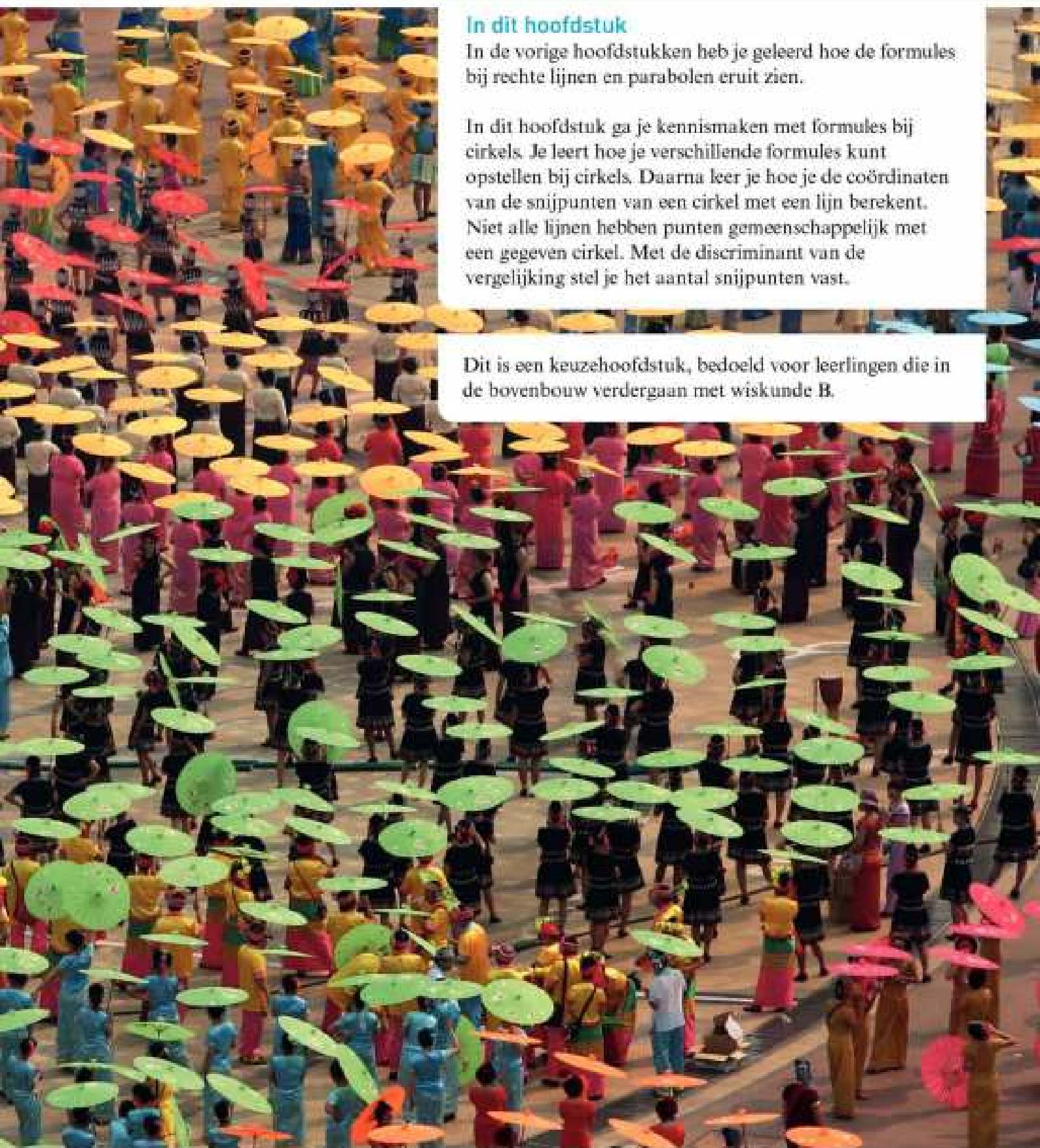
Cirkels 12B

In dit hoofdstuk

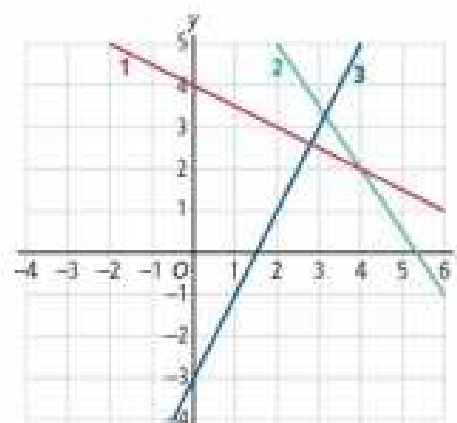
In de vorige hoofdstukken heb je geleerd hoe de formules bij rechte lijnen en parabolen eruit zien.

In dit hoofdstuk ga je kennismaken met formules bij cirkels. Je leert hoe je verschillende formules kunt opstellen bij cirkels. Daarna leer je hoe je de coördinaten van de snijpunten van een cirkel met een lijn berekent. Niet alle lijnen hebben punten gemeenschappelijk met een gegeven cirkel. Met de discriminant van de vergelijking stel je het aantal snijpunten vast.

Dit is een keuzehoofdstuk, bedoeld voor leerlingen die in de bovenbouw verdergaan met wiskunde B.



- V1
- Welke van de grafieken hoort bij de formule $2x + 4y = 16$?
 - Ga na welk startgetal en welk hellingsgetal bij deze grafiek hoort.
 - Schrijf de formule $2x + 4y = 16$ in de vorm $y = ax + b$.
 - Welke grafiek hoort bij de formule $2x - y = 3$?
 - Herleid de formule $2x - y = 3$ waarbij je y uitdrukt in x .
 - Stel een formule op bij de overgebleven grafiek. Schrijf deze formule in de vorm $y = ax + b$ en in de vorm $px + qy = r$.



- V2
- Herleid de formules waarbij je q uitdrukt in p .
 - $2p - 3q = 6$
 - $18p + 6q = 30$
 - $2p + 5q = 12$
 - $p - 3q + 6 = 0$

Theorie

In een formule kun je een variabele vervangen door een andere formule. Je noemt dit **substitueren**. Vaak is het nodig om daarbij haakjes te gebruiken. Na het substitueren vereenvoudig je zo mogelijk de formule.

Voorbeeld

Substitueer de formule $t = x + 1$ in de formule $2y - 3t = -1$ en druk y uit in x .

Oplossing

$$2y - 3(x + 1) = -1$$

$$2y - 3x - 3 = -1$$

$$2y - 3x = 2$$

$$y = 1\frac{1}{2}x + 1$$

- V3
- Substitueer formule B in formule A en druk y uit in x .
 - A: $y = 2t - 65$ en B: $t = 7x$
 - A: $4y + 3t = 8$ en B: $t = 3 + 2x$
 - A: $-2y + 11 = t$ en B: $x - 2t = 8$
- V4
- Tess wil het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 4y + x = 14 \end{cases}$ met behulp van substitutie oplossen. Ze substitueert de vergelijking $y = 2x - 1$ in de vergelijking $4y + x = 14$. Op het blaadje zie je hoe ze begonnen is.
- Los de vergelijking $4(2x - 1) + x = 14$ verder op.
 - Bereken y door de gevonden waarde van x in één van beide formules in te vullen.

					Tess
☐	$4y + x = 14$				
☐	$y = 2x - 1$				
☐	$4(2x - 1) + x = 14$				

V5 Los de stelsels vergelijkingen op met substitutie.

a $\begin{cases} y = 2 - 2x \\ 5y + 2x = 14 \end{cases}$

b $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 3y + 2x = 5 \end{cases}$

V6 Schrijf de formules zonder haakjes.

a $y = (x + 4)^2$

c $y = (x - 1)^2 + 8$

b $y = (x - 2)^2$

d $y = (x + 5)^2 - 25$

Theorie

Formules van de vorm $y = x^2 + bx + c$ kun je herschrijven in de vorm $y = (x + p)^2 + q$. Deze manier van herleiden heet **kwadraat afsplitsen**.

Voorbeeld

Schrijf de formule $y = x^2 + 6x - 8$ in de vorm $y = (x + p)^2 + q$.

Oplossing

$$y = x^2 + 6x - 8$$

$$y = (x + 3)^2 - 9 - 8$$

$$y = (x + 3)^2 - 17$$

V7 Schrijf de formules in de vorm $y = (x + p)^2 + q$.

a $y = x^2 + 8x + 16$

c $y = x^2 + 10x - 10$

b $y = x^2 - 6x + 17$

d $y = x^2 + x + 1$

- V8 a Los de vergelijking $2x^2 + 3x - 2 = 0$ op met behulp van de *abc*-formule.
 b Bereken de discriminant van de vergelijking $x^2 - 4x + 5 = 0$.
 c Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^2 - 4x + 5 = 0$?
 d Bereken het aantal oplossingen van de volgende vergelijkingen.

A $0,5x^2 + 3x - 4 = 0$

B $3x^2 - x + 1 = 0$

C $2x^2 + 6x + 5 = 0$

D $-x^2 + 2x - 1 = 0$

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

met $D = b^2 - 4ac$.

Als $D > 0$ dan zijn er twee oplossingen.

Als $D = 0$ dan is er één oplossing.

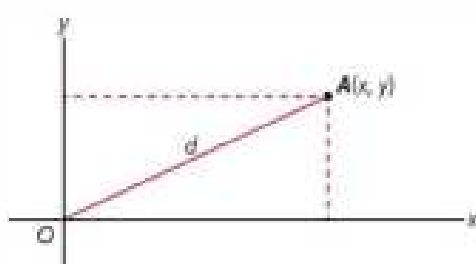
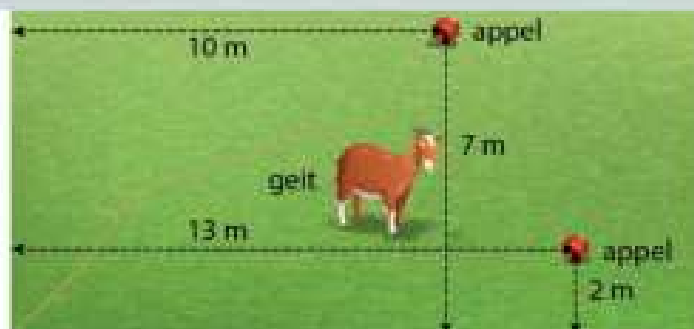
Als $D < 0$ dan zijn er geen oplossingen.

Je leert • hoe je een vergelijking van een cirkel opstelt

Leerroutes • ondersteunend: 1–2–3–04–5–06–7
 • doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7
 • uitdagend: 1–2–3–4–5–7–U1

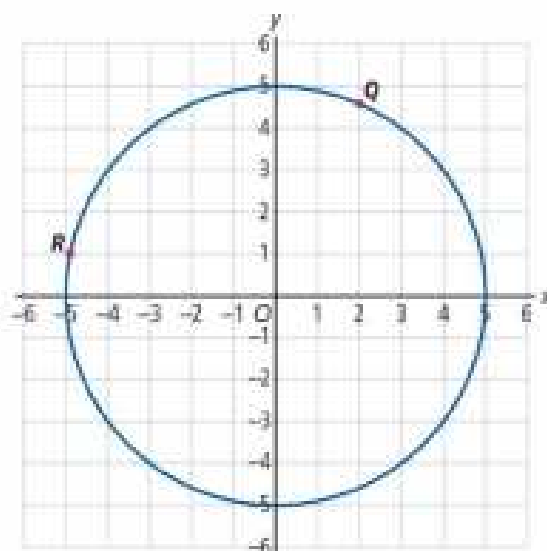
Een geit zit vast aan een touw. Hij kan één van beide appels opeten. De andere appel kan hij niet bereiken.

- Hoe lang is het touw ongeveer waar de geit aan vast zit?



- Gegeven is een punt A met een afstand d tot de oorsprong.
 - Bereken de afstand d van de oorsprong tot het punt $A(15, 8)$.
 - Bereken de exacte waarde van d bij punt $A(20, 9)$.
 - Leg uit dat bij het punt $A(x, y)$ geldt dat $x^2 + y^2 = d^2$.

- Hoe groot is de straal van de cirkel?
 - Geef de coördinaten van zes roosterpunten die op de cirkel liggen.
 - Ga na dat voor al deze roosterpunten geldt dat $x^2 + y^2 = 25$.
 - De punten Q en R liggen op de cirkel. Waarom geldt voor de coördinaten van de punten Q en R ook dat $x^2 + y^2 = 25$?
 - De x -coördinaat van punt Q is 2. Ga na dat de y -coördinaat van punt Q gelijk is aan $\sqrt{21}$.
 - De y -coördinaat van punt R is 1. Bereken de x -coördinaat van punt R . Geef een exact antwoord.



- 3
- Teken in een assenstelsel het punt $A(4, 1)$.
 - Bereken de afstand van punt A tot de oorsprong.
Geef een exact antwoord.
 - Teken nog zeven roosterpunten die dezelfde afstand tot de oorsprong hebben.
 - Teken een cirkel door de roosterpunten van opdracht c.
 - Het punt $P(x, y)$ ligt op de cirkel.
Leg uit dat moet gelden $x^2 + y^2 = 17$.

Theorie

Een vergelijking van een cirkel met het middelpunt in de oorsprong en straal r is $x^2 + y^2 = r^2$.

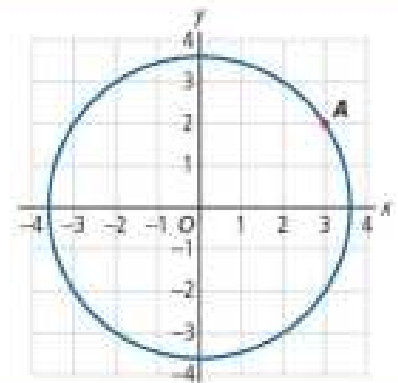
Voorbeeld

Een cirkel met het middelpunt in de oorsprong gaat door het punt $A(3, 2)$.
Stel een vergelijking op van de cirkel.

Oplossing

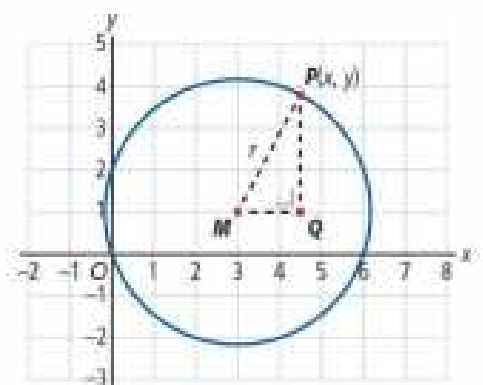
De straal r is $OA = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Een vergelijking van de cirkel is $x^2 + y^2 = 13$.



Ondersteunende route → maak opdracht 04

- 4
- Stel een vergelijking op van de cirkel met het middelpunt in de oorsprong en straal 8.
 - Een cirkel met middelpunt $(0, 0)$ gaat door het punt $(5, 7)$.
Stel een vergelijking op van de cirkel.
 - Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $(0, 0)$ die door het punt $(-5, 2)$ gaat.
- 5
- Het middelpunt van de cirkel is $M(3, 1)$ en de cirkel gaat door het punt $(0, 2)$.
- Bereken de straal van de cirkel.
 - Ga met een berekening na dat het punt $(6, 2)$ op de cirkel ligt.
 - Het punt $P(x, y)$ ligt op de cirkel.
Toon aan dat in $\triangle MQP$ geldt: $MQ = x - 3$.
 - Druk PQ uit in y .
 - Leg uit dat moet gelden $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$.



Theorie

Een vergelijking van een cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r is $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Voorbeeld 1

Een cirkel heeft de vergelijking $(x - 11)^2 + (y + 5)^2 = 8$.

Geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel.

Oplossing

$a = 11$, $b = -5$ en $r^2 = 8$.

Het middelpunt is $(11, -5)$ en de straal is $\sqrt{8}$.

Voorbeeld 2

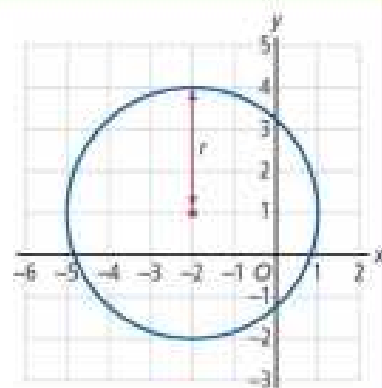
Stel een vergelijking op van de cirkel.

Oplossing

Het middelpunt is $M(-2, 1)$, dus $a = -2$ en $b = 1$.

De straal $r = 3$, dus $r^2 = 9$.

Een vergelijking van de cirkel is $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.



Ondersteunende route → maak opdracht O6

- 6 Geef van de cirkels bij de volgende vergelijkingen de coördinaten van het middelpunt en de straal.

a $(x - 7)^2 + (y - 11)^2 = 49$

b $(x + 3)^2 + (y - 8)^2 = 10$

c $x^2 + (y + 5)^2 = 64$

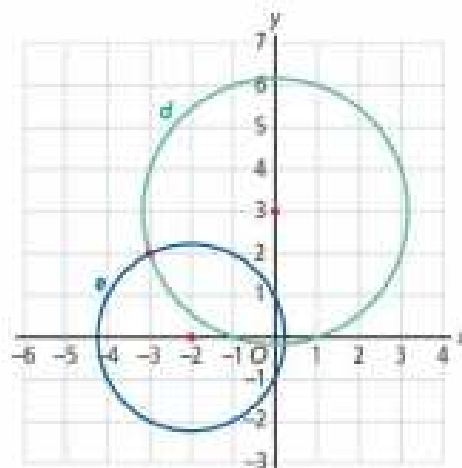
- 7 Stel een vergelijking op van de volgende cirkels.

a Een cirkel met middelpunt $(2, 5)$ en straal 6.

b Een cirkel met middelpunt $(-2, 3)$ en straal $\sqrt{7}$.

c Een cirkel met middelpunt $(-4, -1)$ die door het punt $(2, 3)$ gaat.

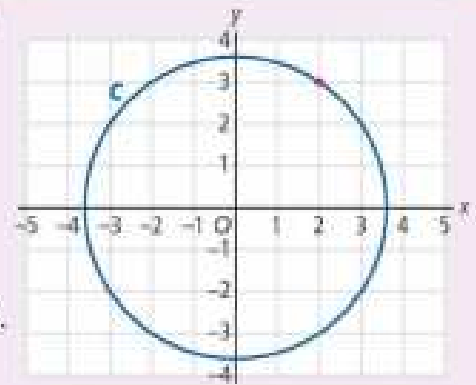
d De getekende cirkels d en e .



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

- 04** a Cirkel c met middelpunt $(0, 0)$ gaat door het punt $(2, 3)$.
De vergelijking van deze cirkel is van de vorm $x^2 + y^2 = r^2$.
Bereken de straal r van cirkel c .
- b Geef een vergelijking van cirkel c .
- c Gegeven is cirkel d met het middelpunt in de oorsprong en straal $r = 7$.
Bereken r^2 en geef een vergelijking van de cirkel.
- d Cirkel e met middelpunt $(0, 0)$ gaat door het punt $(-5, 2)$.
Bereken de straal en geef een vergelijking van cirkel e .

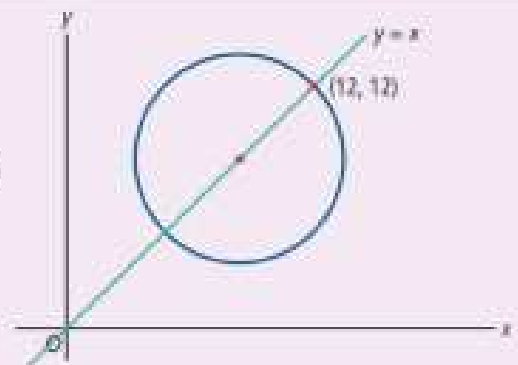


Een vergelijking van een cirkel met het middelpunt $M(a, b)$ en straal r is $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

- 06** a Gegeven is de cirkel c met vergelijking $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 121$.
Welke waarden hebben a en b in deze vergelijking?
- b Welke coördinaten heeft het middelpunt?
- c Welke waarde heeft r^2 in deze vergelijking?
- d Hoe groot is de straal van cirkel c ?
- e Cirkel d heeft de vergelijking $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 64$.
Leg uit dat $(4, -5)$ het middelpunt van cirkel d is.
- f Hoe groot is de straal van cirkel d ?
- g Cirkel e heeft de vergelijking $x^2 + (y - 7)^2 = 9$.
Welke waarden hebben a en b in deze vergelijking?
- h Geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van cirkel e .

Uitdagende opdrachten

- U1** De straal van cirkel c is $\sqrt{50}$ en het middelpunt ligt op de lijn $y = x$. De cirkel gaat door het punt $(12, 12)$.
- a Stel een vergelijking op van cirkel c .
- b Er is nog een cirkel met straal $\sqrt{50}$ en met het middelpunt op de lijn die $y = x$ door het punt $(12, 12)$ gaat.
Stel een vergelijking op van die cirkel.



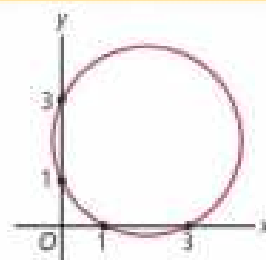
Je leert • hoe je $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$ herleidt tot $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Leerroutes • ondersteunend: 8—09—10—11—012—13—14
 • doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14
 • uitdagend: 8—9—11—12—13—14—U2

Op het bord is een cirkel getekend met een vergelijking. De cirkel snijdt de x -as in de punten $(1, 0)$ en $(3, 0)$ en de y -as in de punten $(0, 1)$ en $(0, 3)$.

- Kan dit de vergelijking van de getekende cirkel zijn?

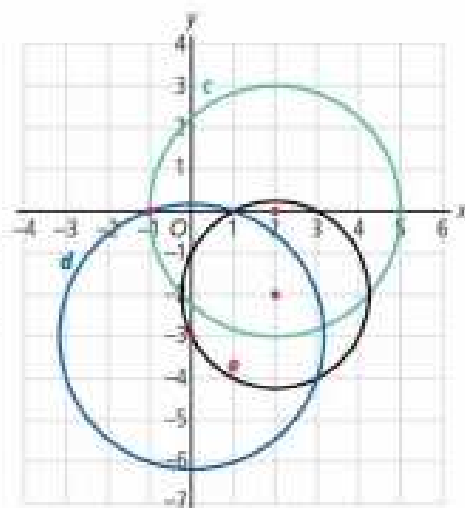
$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$



- 8 Gegeven is de cirkel met vergelijking $(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 20$.
- Geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel.
 - Werk de haakjes weg en laat daarmee zien dat de vergelijking van de cirkel te schrijven is als $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 25 = 0$.
 - Welk nadeel heeft de vergelijking van opdracht b?

Ondersteunende route → maak opdracht 09

- 9
- Cirkel c heeft middelpunt $(2, 0)$ en gaat door punt $(-1, 0)$. Stel een vergelijking op van cirkel c .
 - Hoe kun je aan de vergelijking zien dat het middelpunt op de x -as ligt?
 - Laat zien dat je de vergelijking van cirkel c kunt schrijven als $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$.
 - Cirkel d heeft middelpunt $(0, -3)$ en gaat door punt $(-1, 0)$. Stel een vergelijking op van cirkel d .
 - Cirkel e heeft middelpunt $(2, -2)$ en gaat door punt $(0, -3)$. Stel een vergelijking op van cirkel e .
 - Schrijf de vergelijkingen van cirkel d en cirkel e in de vorm $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$.



- 10** De vergelijking $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$ hoort bij een cirkel. Abel herleidt de vergelijking tot de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Maak de herleiding van Abel verder af.
 - Geef de coördinaten van het middelpunt van de cirkel.
 - Hoe groot is de straal van de cirkel?

				Abel
☐	$x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$			
☐	$x^2 - 8x + y^2 + 7 = 0$			
☐	$(x - 4)^2 - 16 + y^2 + 7 = 0$			
☐	$(x - 4)^2 + y^2 = \dots$			

- 11** De vergelijking $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$ hoort bij een cirkel. Je kunt de vergelijking schrijven als $x^2 - 8x + y^2 + 6y - 11 = 0$.
- Schrijf $x^2 - 8x$ in de vorm $(x - \dots)^2 - \dots$ en schrijf $y^2 + 6y$ in de vorm $(y + \dots)^2 - \dots$.
 - Herleid met behulp van opdracht a de vergelijking $x^2 - 8x + y^2 + 6y - 11 = 0$ tot een vergelijking van de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
 - Geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel.

Theorie

Vergelijkingen van cirkels van de vorm

$x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$ kun je, door twee keer kwadraat af te splitsen, herleiden tot de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Voorbeeld 1

Herleid $x^2 + y^2 - 16x + 12y + 75 = 0$ tot de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Oplossing

$$x^2 - 16x + y^2 + 12y + 75 = 0$$

$$(x - 8)^2 - 64 + (y + 6)^2 - 36 + 75 = 0$$

$$(x - 8)^2 + (y + 6)^2 - 64 - 36 + 75 = 0$$

$$(x - 8)^2 + (y + 6)^2 - 25 = 0$$

$$(x - 8)^2 + (y + 6)^2 = 25$$

Voorbeeld 2

Geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 + 10y - 11 = 0$.

Oplossing

$$x^2 + y^2 + 10y - 11 = 0$$

$$x^2 + (y + 5)^2 - 25 - 11 = 0$$

$$x^2 + (y + 5)^2 = 36$$

De coördinaten van het middelpunt zijn $(0, -5)$ en de straal is $\sqrt{36} = 6$.

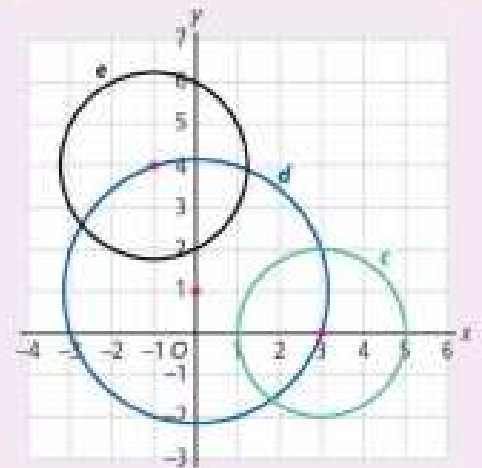
Ondersteunende route → maak opdracht D12

- 12** Herleid de vergelijkingen tot de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ en geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van de bijbehorende cirkels.
- $x^2 + y^2 - 8x + 8y - 4 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 18y + 72 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 10x = 0$
- 13**
- Teken cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0$.
Neem in je assenstelsel voor de x de waarden van -8 tot 2 en voor y de waarden van -6 tot 6 .
 - Door cirkel c te spiegelen in de x -as ontstaat cirkel d .
Teken cirkel d .
 - Welke vergelijking hoort bij cirkel d ?
 - Geef een vergelijking van een cirkel e met hetzelfde middelpunt als cirkel d , maar met een straal die twee keer zo groot is.
- 14**
- Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 45$.
Bereken de afstand van punt $A(4, 6)$ tot het middelpunt.
 - Ligt punt A binnen, op of buiten de cirkel?
 - Ga na of punt $B(3, -6)$ binnen, op of buiten de cirkel ligt.
 - Gegeven is de cirkel met vergelijking $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$.
Ga voor elk van de punten $P(4, 3)$ en $Q(-5, 0)$ na of deze binnen, op of buiten de cirkel liggen.
 - Gegeven is een cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$.
Ga voor de punten $K(5, 1)$ en $L(2, 4)$ na of deze binnen, op of buiten de cirkel liggen.

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

- 09
- Van welke van de drie cirkels ligt het middelpunt op de x -as?
 - Bij cirkel c hoort de vergelijking $(x - 3)^2 + y^2 = 4$. Hoe kun je aan de vergelijking zien dat het middelpunt van de cirkel op de x -as ligt?
 - Laat zien dat je de vergelijking kunt schrijven als $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$.
 - Welke coördinaten heeft het middelpunt van cirkel d ? En hoe groot is de straal van cirkel d ?
 - Stel een vergelijking op van cirkel d en laat zien dat je deze kunt schrijven als $x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$.
 - Stel een vergelijking op van cirkel e .
 - Schrijf de vergelijking van cirkel e in de vorm $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$.



- 012 Jasper herleidt de vergelijking van de cirkel $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 7 = 0$ tot de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Maak de herleiding van Jasper verder af.
 - Welke coördinaten heeft het middelpunt? En hoe groot is de straal van de cirkel?

	Jasper
☐	$x^2 + y^2 - 4x - 10y - 7 = 0$
☐	$x^2 - 4x + y^2 - 10y - 7 = 0$
☐	$(x - 2)^2 - 4 + (y - 5)^2 - 25 - 7 = 0$
☐	$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 - - - - = 0$
☐	$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = -$

	José
☐	$x^2 + 4x + y^2 - 12 = 0$
☐	$(x + 2)^2 - + y^2 - 12 = 0$
☐	
☐	Het middelpunt $(..., ...)$ en
☐	de straal is ...

- José berekent het middelpunt en de straal van de cirkel met vergelijking $x^2 + 4x + y^2 - 12 = 0$. Maak de berekening van José verder af.
- Bereken het middelpunt en de straal van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$.

Uitdagende opdrachten

- U2
- Bereken de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel $x^2 + x + y^2 + \frac{2}{3}y - \frac{1}{12} = 0$. Geef exacte antwoorden.
 - Waarom hoort bij de vergelijking $x^2 + 2x + y^2 + 4y + 10 = 0$ geen cirkel?

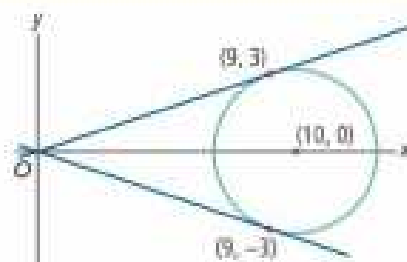
12B.3 Cirkel en lijn

Je leert • hoe je de coördinaten van de snijpunten van een lijn met een cirkel berekent

Leerroutes • ondersteunend: 15—16—D17—17—18—19—20
 • doorlopend: 15—16—17—18—19—20—21
 • uitdagend: 15—16—17—18—20—21—U3

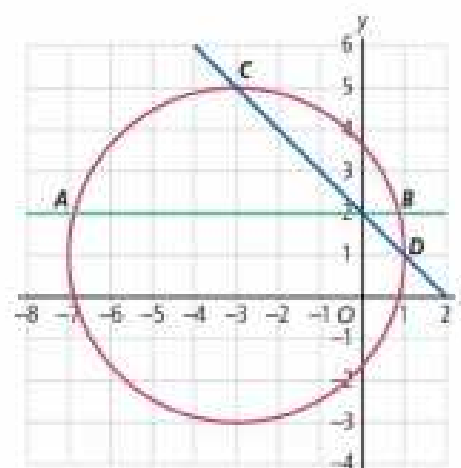
De twee getekende lijnen gaan door de oorsprong en raken de cirkel.

- Geef vergelijkingen van twee lijnen door de oorsprong die de cirkel snijden.
- Geef ook vergelijkingen van twee lijnen door de oorsprong die geen punten gemeenschappelijk hebben met de cirkel.



15 De vergelijking van de cirkel is $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$.

- a** De lijn $y = 2$ snijdt de cirkel in de punten A en B .
 Bereken met behulp van substitueren de coördinaten van de punten A en B .
- b** De lijn met vergelijking $x + y = 2$ lijkt de cirkel te snijden in de punten $C(-3, 5)$ en $D(1, 1)$.
 Controleer of dat het geval is door de coördinaten van C en D in beide vergelijkingen in te vullen.



16 Je kunt de coördinaten van de snijpunten C en D van opdracht 15b berekenen door de vergelijking $x + y = 2$ te substitueren in de vergelijking $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$.

- a** Lisa heeft een begin gemaakt met deze substitutie.
 Waarom schrijft ze de vergelijking $x + y = 2$ eerst als $y = -x + 2$?
- b** Laat zien dat je de vergelijking $(x + 3)^2 + (-x + 2 - 1)^2 = 16$ kunt herleiden tot $x^2 + 2x - 3 = 0$.
- c** Los de vergelijking $x^2 + 2x - 3 = 0$ op.
- d** Bereken de y -coördinaten van de snijpunten door de gevonden x -coördinaten in te vullen in de vergelijking van de lijn.

	Lisa
•	$x + y = 2$ herleiden tot
•	$y = -x + 2$
•	$y = -x + 2$ substitueren in
•	$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$ geeft
•	$(x + 3)^2 + (-x + 2 - 1)^2 = 16$
•	...

Aanpak

Hoe bereken je de coördinaten van de snijpunten van een lijn met een cirkel?

- 1 Schrijf de vergelijking van de lijn in de vorm $y = \dots$ of $x = \dots$
- 2 Substitueer de vergelijking van de lijn in die van de cirkel.
- 3 Bereken de x -coördinaten of de y -coördinaten door de verkregen vergelijking op te lossen.
- 4 Bereken de andere coördinaten van de snijpunten door de gevonden coördinaten in te vullen in de formule van de lijn.

Voorbeeld

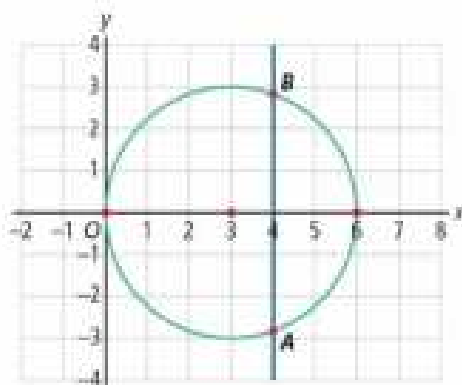
Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkel met vergelijking $(x-2)^2 + y^2 = 9$ en de lijn met vergelijking $2y - x = 4$.

Oplossing

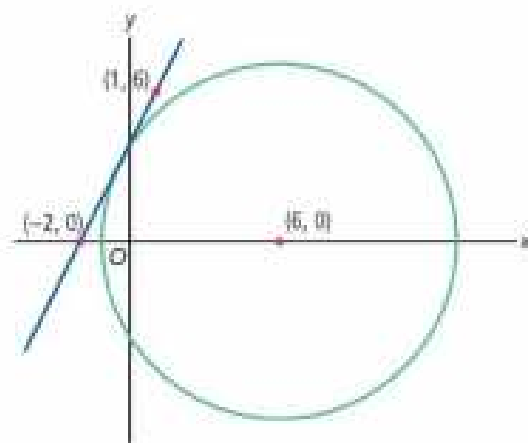
- 1 $2y - x = 4$ is te herleiden tot $x = 2y - 4$.
- 2 $(2y - 4 - 2)^2 + y^2 = 9$
 $(2y - 6)^2 + y^2 = 9$
- 3 $4y^2 - 24y + 36 + y^2 - 9 = 0$
 $5y^2 - 24y + 27 = 0$
 $a = 5, b = -24$ en $c = 27$
 $D = (-24)^2 - 4 \times 5 \times 27 = 36$
- 4 $y = \frac{24 \pm \sqrt{36}}{10} = 3$ of $y = \frac{24 - \sqrt{36}}{10} = 1\frac{4}{5}$
 $y = 3$ invullen geeft $x = 2 \times 3 - 4 = 2$
 $y = 1\frac{4}{5}$ invullen geeft $x = 2 \times 1\frac{4}{5} - 4 = 3\frac{3}{5} - 4 = -\frac{2}{5}$
De coördinaten van de snijpunten zijn $(2, 3)$ en $(-\frac{2}{5}, 1\frac{4}{5})$.

Ondersteunende route → maak opdracht 017

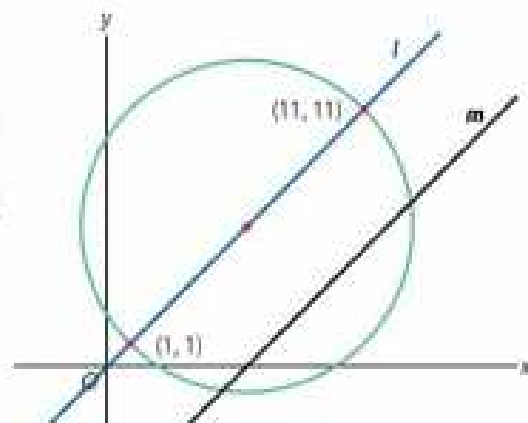
- 17** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkel met de lijn.
- a $x^2 + y^2 = 2$ en $y = 3x + 2$
 - b $(x-2)^2 + y^2 = 34$ en $2x - y = 3$
 - c $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$ en $2y - x = 4$
- 18** a Los het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 = 10 \\ 2y + x = 0 \end{cases}$ op.
- b Welke betekenis hebben de oplossingen van het stelsel?



- 19** Bereken de afstand van punt A tot punt B .
- 20** De cirkel heeft middelpunt $(6, 0)$ en de straal is $\sqrt{50}$. De lijn gaat door de punten $(-2, 0)$ en $(1, 6)$.
- Stel vergelijkingen van de cirkel en de lijn op.
 - Het lijkt erop dat de lijn de cirkel raakt. Stel een vergelijking op waarmee je de coördinaten van het punt waar de lijn de cirkel mogelijk raakt, kunt berekenen.
 - Waarom heeft de vergelijking van opdracht b geen oplossingen?
 - Welke conclusie kun je nu trekken over de ligging van de lijn ten opzichte van de cirkel?



- 21** De lijn l gaat door het middelpunt van de cirkel en snijdt de cirkel in de punten $(1, 1)$ en $(11, 11)$.
- Stel een vergelijking op van de cirkel.
 - Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkel met de y -as. Geef exacte antwoorden.
 - Lijn m loopt evenwijdig aan lijn l en gaat door het punt $(0, -6)$. Bereken de coördinaten van de snijpunten van lijn m met de cirkel.



Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

- U17** Aidin berekent de coördinaten van de snijpunten van de cirkel $x^2 + y^2 = 13$ met de lijn $y = x - 1$.
- Welke substitutie heeft Aidin gedaan?
 - Maak de berekening van Aidin verder af en geef de coördinaten van de snijpunten.

		Aidin
•	$x^2 + y^2 = 13$ en $y = x - 1$	
•	$x^2 + (x - 1)^2 = 13$	
•	$x^2 + \dots - \dots + \dots = 13$	
•	$2x^2 + \dots - \dots = 0$	
•	$x^2 - \dots - \dots = 0$	

		Irene
•	$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 17$ en $y = -x + 3$	
•	$(x + 1)^2 + (-x + 3 + 1)^2 = 17$	
•		
•		
•		

- Irene berekent de coördinaten van de snijpunten van de cirkel $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 17$ met de lijn $y = -x + 3$. Maak de berekening van Irene af.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkel $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 20$ met de lijn $y = -2x + 2$.

Uitdagende opdrachten

- U3**
- De lijn $x = a$ snijdt de cirkel $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ in twee punten. De afstand tussen deze twee punten is 8. Bereken voor welke twee waarden van a dit het geval is.
 - Lijn l gaat door het punt $(1, 8)$ en het middelpunt van de cirkel $x^2 + 4x + y^2 - 10y - 3 = 0$. Bereken de coördinaten van de snijpunten van lijn l met de cirkel.

12B.4 Snijden, raken of geen punt gemeenschappelijk

Je leert

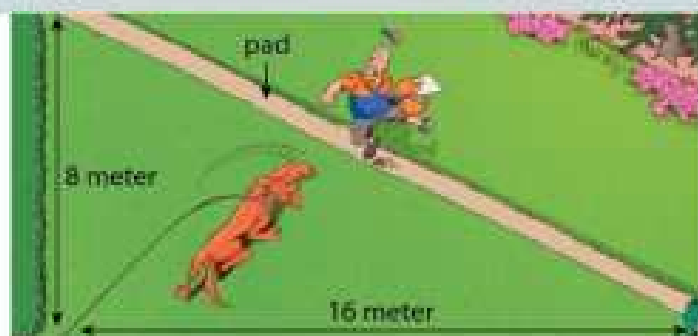
- hoe je vaststelt of een lijn aan een cirkel raakt
- hoe je een vergelijking van een lijn die raakt aan een cirkel opstelt

Leerroutes

- ondersteunend: 22—023—23—24—25—026
- doorlopend: 22—23—24—25—26—27
- uitdagend: 22—23—24—26—27—U4

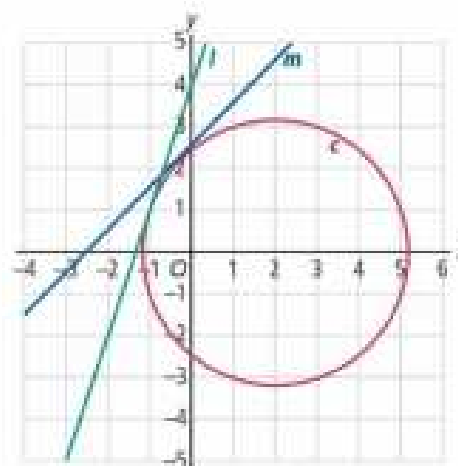
Door een tuin van 16 meter bij 8 meter loopt diagonaal een pad naar de brievenbus. In de hoek van de tuin zit een hond aan een ketting van 7,5 meter.

- Kan de postbode veilig over het pad naar de brievenbus lopen?



- 22 Gegeven zijn cirkel c : $(x - 2)^2 + y^2 = 10$ en de lijnen l : $y = 3x + 4$ en m : $y = x + 2,5$.

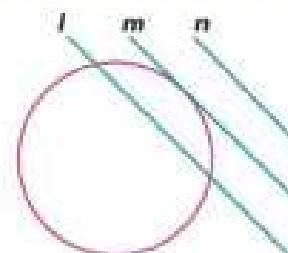
- Stel een vergelijking op waarmee je de x -coördinaat van de snijpunten van cirkel c met lijn l kunt berekenen.
- Bereken de discriminant van deze vergelijking.
- Hoeveel punten heeft lijn l gemeenschappelijk met cirkel c ?
- Ga ook met behulp van de discriminant na hoeveel punten lijn m gemeenschappelijk heeft met cirkel c .
- Welke van de twee lijnen raakt de cirkel?



Theorie

Een cirkel en een lijn kunnen elkaar snijden of elkaar raken. Het is ook mogelijk dat de cirkel en de lijn geen enkel punt gemeenschappelijk hebben.

Door de vergelijking van de lijn te substitueren in de vergelijking van de cirkel ontstaat een kwadratische vergelijking. Door de discriminant van die vergelijking te berekenen, kun je zien of er sprake is van snijden, van raken of dat er geen punt gemeenschappelijk is.



Lijn l snijdt de cirkel, dus $D > 0$.
Lijn m raakt de cirkel, dus $D = 0$.
Lijn n heeft geen punt gemeenschappelijk, dus $D < 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de lijn $y = 2x + 7$ en de cirkel $(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 20$.

Ga na of de lijn de cirkel snijdt, raakt of er geen punt gemeenschappelijk mee heeft.

Oplossing

$$(x + 1)^2 + (2x + 7 + 5)^2 = 20$$

$$x^2 + 2x + 1 + 4x^2 + 48x + 144 = 20$$

$$5x^2 + 50x + 125 = 0$$

$$a = 5, b = 50 \text{ en } c = 125$$

$$D = 50^2 - 4 \cdot 5 \cdot 125 = 0$$

De lijn raakt de cirkel.

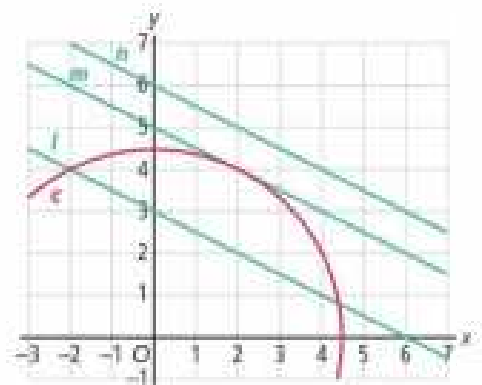
Ondersteunende route → maak opdracht 023

- 23** Ga na of de lijn de cirkel snijdt, raakt of er geen punt gemeenschappelijk mee heeft.

- a $(x - 2)^2 + y^2 = 18$ en $x + y = 8$
- b $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 6$ en $y = -2x + 5$
- c $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 100$ en $x - 2y = -8$

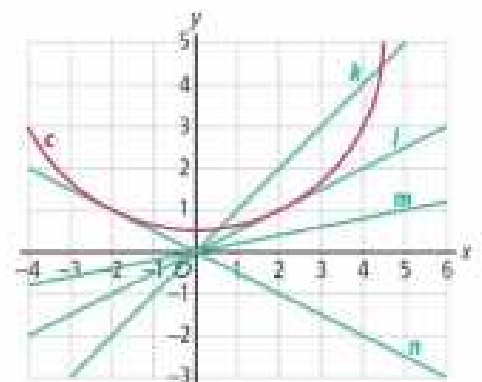
- 24** Grafiek c is een deel van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 20$.

- a Leg uit dat de vergelijkingen van de getekende lijnen van de vorm $y = -0,5x + p$ zijn.
- b Welke waarde heeft p bij lijn l ?
- c Lijn m lijkt te raken aan de cirkel. Welke waarde heeft p bij lijn m ?
- d Toon met een berekening aan dat lijn m inderdaad de cirkel raakt.



- 25** Grafiek c is een deel van de cirkel met vergelijking $x^2 + (y - 5)^2 = 20$.

- a Leg uit dat de vergelijkingen van de getekende lijnen van de vorm $y = px$ zijn.
- b Welke waarde heeft p bij lijn k ?
- c Welke waarde heeft p bij lijn l ?
- d Toon met een berekening aan dat lijn l de cirkel raakt.
- e De cirkel is spiegelsymmetrisch in de y -as. Gebruik de symmetrie om aan te tonen dat ook lijn n de cirkel raakt.
- f Bij welke waarden van p heeft de lijn $y = px$ twee snijpunten met de cirkel?



Theorie

Bij de formule $y = 2x + p$ hoort bij elke waarde van p een lijn. Al die lijnen samen vormen een **lijnenbundel**.
Met behulp van een berekening kun je vaststellen bij welke waarde van p de lijn uit de lijnenbundel raakt aan een cirkel.

Voorbeeld

Geef vergelijkingen van de lijnen uit de lijnenbundel $y = px + 3$ die raken aan de cirkel $(x - 2)^2 + y^2 = 9$.

Oplossing

$$(x - 2)^2 + (px + 3)^2 = 9$$

$$x^2 - 4x + 4 + p^2x^2 + 6px + 9 - 9 = 0$$

$$(1 + p^2)x^2 + (-4 + 6p)x + 4 = 0$$

$$a = 1 + p^2, b = -4 + 6p \text{ en } c = 4$$

$$D = (-4 + 6p)^2 - 4 \times (1 + p^2) \times 4$$

$$D = 16 - 48p + 36p^2 - 16 - 16p^2 = 0$$

$$20p^2 - 48p = 0 \text{ ofwel } 4p(5p - 12) = 0$$

$$\text{dus } p = 0 \text{ of } p = 2,4$$

De lijnen $y = 3$ en $y = 2,4x + 3$ raken aan de cirkel.

$y = px + 3$ gesubstitueerd

haakjes weggewerkt

termen samengenomen

discriminant berekend

discriminant gelijk gesteld aan 0

Ondersteunende route → maak opdracht 026

26 Gegeven is de cirkel $(x - 5)^2 + y^2 = 20$ en de lijnenbundel $y = px$.

- Laat zien dat substitutie van $y = px$ in $(x - 5)^2 + y^2 = 20$ de vergelijking $(p^2 + 1)x^2 - 10x + 5 = 0$ oplevert.
- Geef de vergelijkingen van de lijnen uit de lijnenbundel die raken aan de cirkel.
- Bereken de coördinaten van de punten waar de lijnen de cirkel raken.

27 Gegeven is de cirkel $x^2 + y^2 = 10$ en de lijn $y = -3x + 2$.

- Stel met behulp van de discriminant vast hoeveel snijpunten de cirkel en de lijn hebben.
- Bereken de waarden van p waarvoor de lijn uit de lijnenbundel $y = -3x + p$ de cirkel raakt.
- Welke van de volgende beweringen klopt? Verklaar je antwoord.
A Bij $p > 10$ heeft de lijn geen snijpunten met de cirkel.
B Bij $p < 10$ heeft de lijn twee snijpunten met de cirkel.

Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

- 023** Gegeven is de cirkel $(x-4)^2 + y^2 = 10$ en de lijn $y = 3x - 2$.
- Na substitutie ontstaat de vergelijking $(x-4)^2 + (3x-2)^2 = 10$.
Laat zien dat je de vergelijking kunt herleiden tot $10x^2 - 20x + 10 = 0$.
 - Bereken de discriminant van de vergelijking $10x^2 - 20x + 10 = 0$.
 - Welke conclusie kun je trekken over het aantal gemeenschappelijke punten tussen de cirkel en de lijn?
 - Gegeven is de cirkel $(x+1)^2 + (y+5)^2 = 15$ en de lijn $2x + y = 3$.
Schrijf de vergelijking $2x + y = 3$ in de vorm $y = \dots$
 - Laat zien dat na substitutie de vergelijking $(x+1)^2 + (-2x+8)^2 = 15$ ontstaat.
 - Bereken de discriminant van de vergelijking $(x+1)^2 + (-2x+8)^2 = 15$.
 - Welke conclusie kun je trekken over het aantal gemeenschappelijke punten van de cirkel met de lijn?

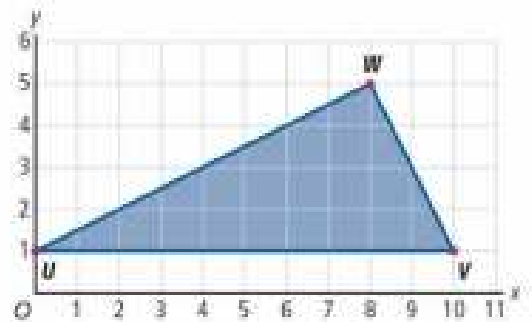
●	$(x-4)^2 + y^2 = 10$ en $y = 3x - 2$
●	$(x-4)^2 + (3x-2)^2 = 10$
●	$x^2 - 8x + 16 + \dots + \dots - 10 = 0$
●	$10x^2 - 20x + 10 = 0$
●	$a = \dots$, $b = \dots$ en $c = \dots$
●	$D = \dots - \dots \times \dots \times \dots = \dots$

- 026** Gegeven is de cirkel $(x+10)^2 + y^2 = 20$ en de lijnenbundel $y = px$.
- Laat zien dat substitutie van $y = px$ in $(x+10)^2 + y^2 = 20$ de vergelijking $x^2 + 20x + 100 + p^2x^2 = 20$ oplevert.
 - Laat zien dat je de vergelijking verder kunt herleiden tot $(p^2 + 1)x^2 + 20x + 80 = 0$ oplevert.
 - Neem $a = p^2 + 1$, $b = 20$ en $c = 80$ en laat zien dat de discriminant van de vergelijking te schrijven is als $D = 400 - 320(p^2 + 1)$.
 - Los de vergelijking $D = 0$ op.
 - Geef de vergelijkingen van de lijnen uit de lijnenbundel die raken aan de cirkel.
 - Bereken de coördinaten van de punten waar de lijnen de cirkel raken.

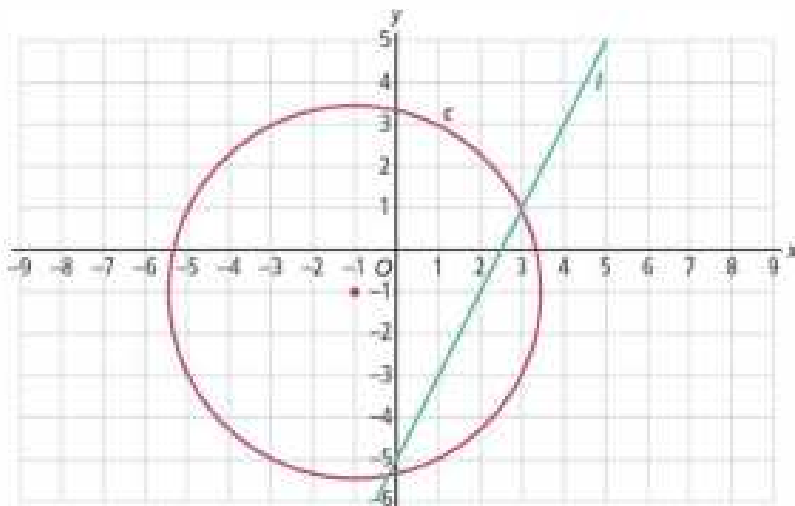
Uitdagende opdrachten

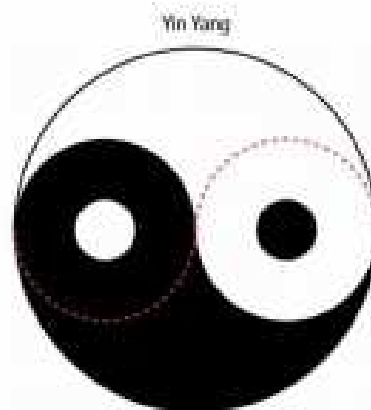
- 04** Gegeven is de cirkel $(x-2)^2 + y^2 = 20$ en de lijnenbundel $y = 2x + p$.
Bij welke waarden van p snijden de lijnen uit de lijnenbundel de cirkel?

- 28** Cirkel c gaat door de punten U en V en het middelpunt ligt op de lijn UV .
- Stel een vergelijking op van cirkel c .
 - Toon aan dat punt W ook op cirkel c ligt.
 - Punt W is het middelpunt van cirkel d . De straal van cirkel d is twee keer zo groot als de straal van cirkel c . Stel een vergelijking op van cirkel d .



- 29** **a** Los het stelsel vergelijkingen op.
- $$\begin{cases} (x-6)^2 + (y-2)^2 = 16 \\ x+2y = 6 \end{cases}$$
- b** Snijdt, raakt of heeft de lijn $x+2y=12$ geen punt gemeenschappelijk met de cirkel $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 16$?
- 30** Gegeven is cirkel c met vergelijking $x^2 + 6x + y^2 + 18y - 10 = 0$. Door spiegeling van cirkel c in de lijn $x=1$ ontstaat cirkel d . Stel een vergelijking op van cirkel d .
- 31** Cirkel c heeft middelpunt $(-1, -1)$ en straal $\sqrt{20}$.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van cirkel c en lijn l .
 - Lijn m loopt evenwijdig aan lijn l en gaat door het punt $(5, 1)$. Toon aan dat lijn m cirkel c raakt.
 - Bereken de coördinaten van het punt waar lijn m raakt aan cirkel c .





- 32** Het Yin Yang teken is opgebouwd uit vijf cirkels. De straal van de grootste cirkel is zes keer zo groot als de straal van de twee kleinste cirkels.
Serina gaat de figuur beschrijven met behulp van vergelijkingen van cirkels. Voor de grote cirkel gebruikt ze de vergelijking $x^2 + y^2 = 81$.
Stel vergelijkingen op bij de vier andere cirkels.
- 33** Gegeven is een cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 + 14x - 4y + 24 = 0$ en de punten $A(-5, 3)$, $B(-5, -3)$, $C(-12, 4)$ en $D(-4, -3)$.
Ga van elk van de punten na of ze binnen, op of buiten de cirkel liggen.
- 34** Cirkel c heeft middelpunt $(0, 0)$ en gaat door het punt $(-2, 4)$.
- Teken cirkel c .
 - Laat in je tekening zien dat er twee lijnen zijn die door het punt $(0, 10)$ gaan en de cirkel raken.
 - Stel met behulp van de discriminant de vergelijkingen op van deze lijnen die de cirkel raken.

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking van een cirkel opstellen.

De vergelijking van een cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r is $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(-3, 5)$ en straal 4.

Oplossing

Het middelpunt is $(-3, 5)$, dus $a = -3$ en $b = 5$. De straal is $r = 4$, dus $r^2 = 16$. Een vergelijking van de cirkel is $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$.

- S1**
- a** Geef van de volgende cirkels de coördinaten van het middelpunt en de straal.
- A $(x - 3)^2 + y^2 = 49$
- B $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 5)^2 = 6$
- b** Stel een vergelijking op van een cirkel met middelpunt $(-4, 7)$ en straal 8.

Vaardigheid

Je kunt $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$ herleiden tot $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Vergelijkingen van cirkels van de vorm

$x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$ kun je, door twee keer kwadraat af te splitsen, herleiden tot de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Voorbeeld 1

Herleid $x^2 + y^2 - 8x - 14y + 50 = 0$ tot de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Oplossing

$$x^2 - 8x + y^2 - 14y + 50 = 0 \text{ en}$$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y - 7)^2 - 49 + 50 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 7)^2 - 16 - 49 + 50 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 7)^2 - 15 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 15$$

Voorbeeld 2

Geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel met vergelijking

$$x^2 + 12x + y^2 - 13 = 0.$$

Oplossing

$$x^2 + 12x + y^2 - 13 = 0$$

$$(x + 6)^2 - 36 + y^2 - 13 = 0$$

$$(x + 6)^2 + y^2 = 49$$

De coördinaten van het middelpunt zijn $(-6, 0)$ en de straal is $\sqrt{49} = 7$.

S2 Herleid de vergelijkingen van cirkels tot de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ en geef de coördinaten van het middelpunt en de straal.

- a $x^2 + y^2 + 6y - 12 = 0$
- b $x^2 + y^2 + 4x + 16y + 3 = 0$
- c $x^2 + y^2 + 14x = 0$

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een lijn met een cirkel berekenen.

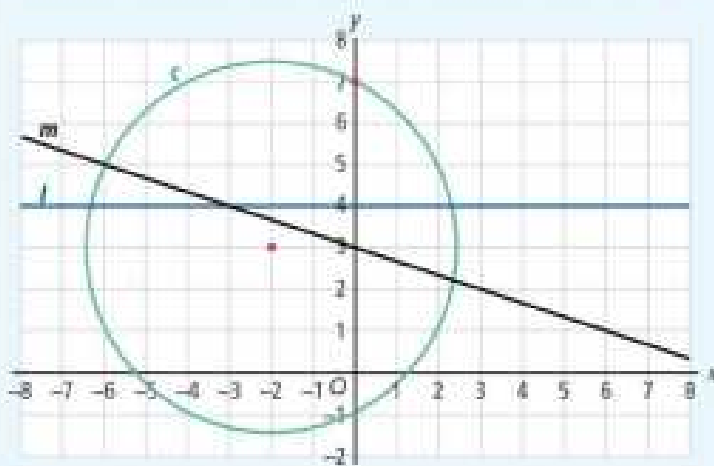
- 1 Schrijf de vergelijking van de lijn in de vorm $y = \dots$ of $x = \dots$
- 2 Substitueer de vergelijking van de lijn in die van de cirkel.
- 3 Bereken de x -coördinaten of de y -coördinaten door de verkregen vergelijking op te lossen.
- 4 Bereken de andere coördinaten van de snijpunten door de gevonden coördinaten in te vullen in de formule van de lijn.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkel met vergelijking $x^2 + (y + 1)^2 = 10$ en de lijn met vergelijking $2y - x = 3$.

Oplossing

- 1 $2y - x = 3$
 $-x = -2y + 3$
 $x = 2y - 3$
- 2 $(2y - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$
- 3 $4y^2 - 12y + 9 + y^2 + 2y + 1 - 10 = 0$
 $5y^2 - 10y = 0$
 $5y(y - 2) = 0$
 $y = 0$ of $y = 2$
- 4 $y = 0$ invullen geeft $x = 2 \times 0 - 3 = -3$ en
 $y = 2$ invullen geeft $x = 2 \times 2 - 3 = 1$
 De coördinaten van de snijpunten zijn $(-3, 0)$ en $(1, 2)$.



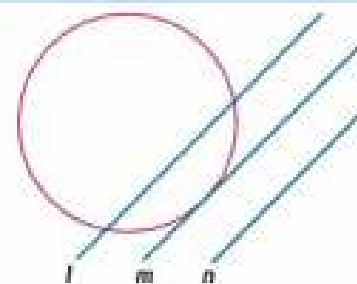
- S3** Gegeven zijn cirkel $c: (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 20$ en de lijnen $l: y = 4$ en $m: y = -\frac{1}{2}x + 3$.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van cirkel c met lijn l .
 - Bereken ook de coördinaten van de snijpunten van cirkel c met lijn m .

Vaardigheid

Je kunt vaststellen of een lijn aan een cirkel raakt.

Een cirkel en een lijn kunnen elkaar snijden of elkaar raken. Het is ook mogelijk dat de cirkel en de lijn geen enkel punt gemeenschappelijk hebben.

Door de vergelijking van de lijn te substitueren in de vergelijking van de cirkel ontstaat een kwadratische vergelijking. Door de discriminant van die vergelijking te berekenen, kun je zien of er sprake is van snijden, van raken of dat er geen punt gemeenschappelijk is.



Lijn l snijdt de cirkel, dus $D > 0$.
Lijn m raakt de cirkel, dus $D = 0$.
Lijn n heeft geen punt gemeenschappelijk, dus $D < 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de lijn $y = 2x + 1$ en de cirkel $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$.
Ga na of de lijn de cirkel snijdt, raakt of er geen punt gemeenschappelijk mee heeft.

Oplossing

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 + (2x + 1 - 1)^2 &= 20 \\ x^2 + 2x + 1 + 4x^2 &= 20 \\ 5x^2 + 2x - 19 &= 0 \\ a = 5, b = 2 \text{ en } c &= -19 \\ D = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot -19 &= 384 > 0 \\ \text{De lijn snijdt de cirkel.}\end{aligned}$$

- S4** Ga na of de lijn de cirkel snijdt, raakt of er geen punt gemeenschappelijk mee heeft.

a $x^2 + (y + 10)^2 = 45$ en $y = -2x + 5$

b $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$ en $y + 3x = 10$

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking van een lijn die raakt aan een cirkel opstellen.

Bij de formule $y = 2x + p$ hoort bij elke waarde van p een lijn. Al die lijnen samen vormen een lijnenbundel.

Met behulp van een berekening kun je vaststellen bij welke waarde van p de lijn uit de lijnenbundel raakt aan een cirkel.

Voorbeeld

Geef vergelijkingen van de lijnen uit de lijnenbundel $y = -x + p$ die raken aan de cirkel $x^2 + y^2 = 18$.

Oplossing

$$x^2 + (-x + p)^2 = 18$$

$$x^2 + x^2 - 2px + p^2 - 18 = 0$$

$$2x^2 - 2px + p^2 - 18 = 0$$

$$a = 2, b = -2p \text{ en } c = p^2 - 18$$

$$D = (-2p)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (p^2 - 18)$$

$$D = 4p^2 - 8p^2 + 144 = 0$$

$$-4p^2 + 144 = 0$$

$$p^2 = 36 \text{ dus } p = 6 \text{ of } p = -6$$

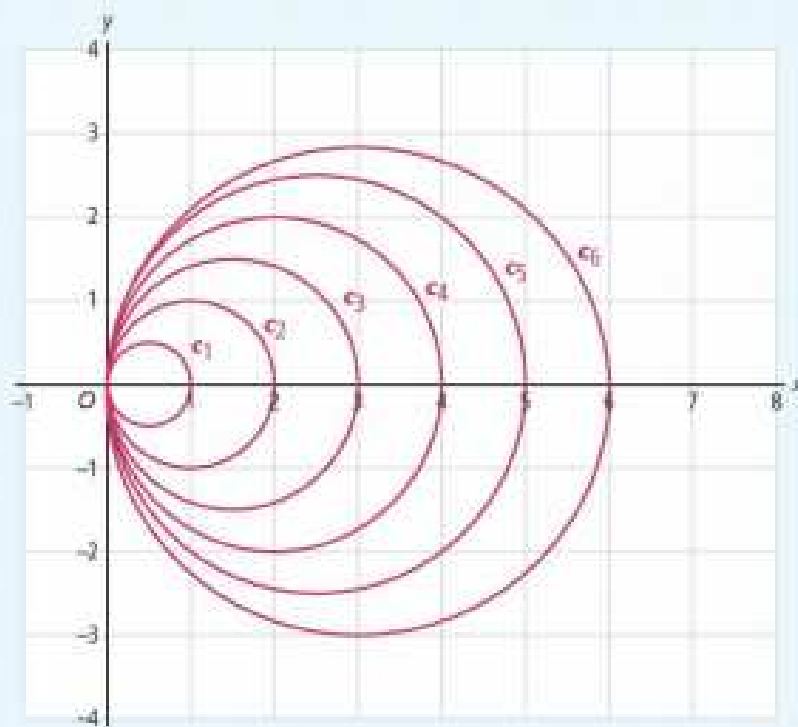
De lijnen $y = -x + 6$ en $y = -x - 6$ raken de cirkel.

$y = -x + p$ gesubstitueerd
haakjes weggewerkt

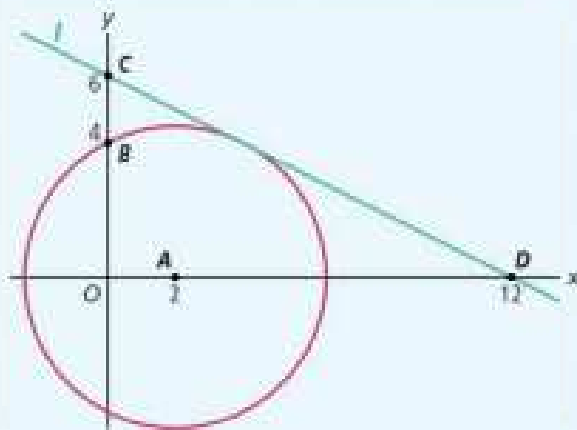
discriminant berekend
discriminant gelijk gesteld aan 0

- S5** Gegeven is de cirkel met vergelijking $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 9$ en de lijnenbundel $y = px + 1$.

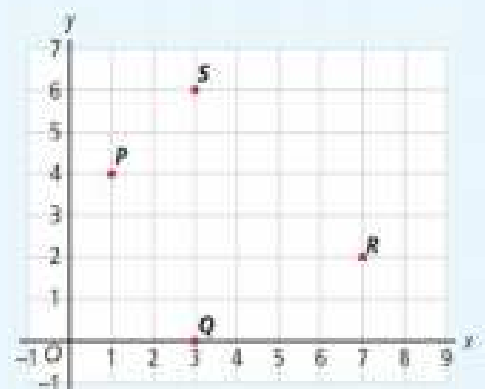
Geef vergelijkingen van de lijnen uit de lijnenbundel die de cirkel raken.



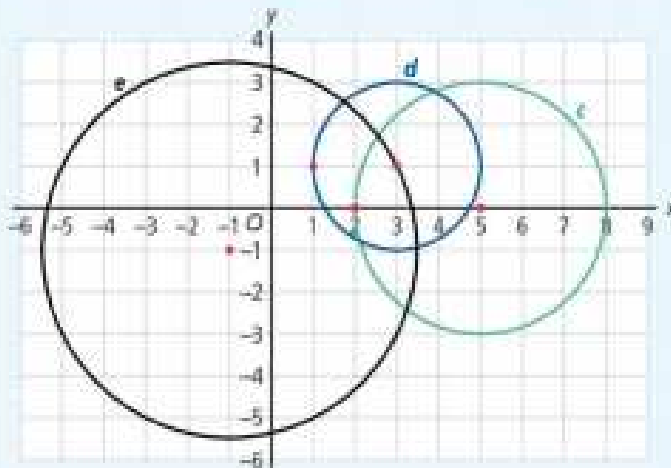
- T1** De middelpunten van de getekende cirkels liggen op de x -as. De diameter van cirkel c_1 is 1, de diameter van cirkel c_2 is 2 enzovoort. De cirkels gaan allemaal door de oorsprong.
- Geef een vergelijking van cirkel c_1 en van cirkel c_6 .
 - Je kunt het patroon van deze cirkels verder uitbreiden. Geef een vergelijking van cirkel c_q .
- T2**
- Gegeven is cirkel c met vergelijking $x^2 - 10x + y^2 - 8 = 0$. Bereken de coördinaten van het middelpunt en de straal van cirkel c .
 - Gegeven is cirkel d met vergelijking $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 = 0$. Cirkel e heeft hetzelfde middelpunt als cirkel d , maar de straal van cirkel e is drie keer zo groot. Geef een vergelijking van cirkel e .
 - Schrijf de vergelijking van cirkel e in de vorm $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$.
- T3** De lijn $y = 3x + 1$ snijdt de cirkel met vergelijking $(x + 2)^2 + y^2 = 25$ in de punten A en B . Bereken de afstand tussen de punten A en B .



- T4** De cirkel heeft middelpunt $A(2, 0)$ en gaat door punt $B(0, 4)$. De lijn l gaat door de punten $C(0, 6)$ en $D(12, 0)$.
- Toon aan dat lijn l de cirkel raakt.
 - Er is nog een lijn die de cirkel raakt en door punt D gaat. Geef een vergelijking van deze lijn.
- T5** Cirkel c heeft middelpunt $(5, 2)$ en de straal is $\sqrt{34}$.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van cirkel c met de y -as.
 - Cirkel d snijdt de y -as in dezelfde punten als cirkel c . Leg uit dat het middelpunt van cirkel d op de lijn $y = 2$ ligt.
 - De straal van cirkel d is $\sqrt{45}$. Welke middelpunten kan cirkel d hebben?
- T6** Cirkel c gaat door de punten P en R . Het middelpunt van cirkel c ligt op de lijn door de punten P en R .
- Stel een vergelijking op van cirkel c .
 - Toon aan dat de punten Q en S ook op cirkel c liggen.
 - Ligt punt $T(6; 5,5)$ op, binnen of buiten cirkel c ?
 - Door cirkel c te spiegelen in de y -as ontstaat cirkel d . Stel een vergelijking op van cirkel d .
 - Punt S is het middelpunt van cirkel e . De straal van cirkel e is drie keer zo groot als de straal van cirkel c . Stel een vergelijking op van cirkel e .
- T7** Gegeven is de lijnenbundel $y = px - 2$ en de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 8 = 0$. Bij welke waarden van p raakt een lijn uit de lijnenbundel aan de cirkel?



Je kunt een vergelijking van een cirkel opstellen.



E1 Stel vergelijkingen op van de cirkels c , d en e .

E2 Geef van de cirkels het middelpunt en de straal.

a $x^2 + y^2 = 64$

b $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + 6)^2 = 15$

c $(x + 13)^2 + y^2 = 100$

Je kunt $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$ herleiden tot $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

E3 Herleid de vergelijkingen van cirkels tot de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ en geef de coördinaten van het middelpunt en de straal.

a $x^2 + y^2 - 6x - 18 = 0$

b $x^2 + y^2 + 2x + 14y - 14 = 0$

c $x^2 + y^2 - 6y = 0$

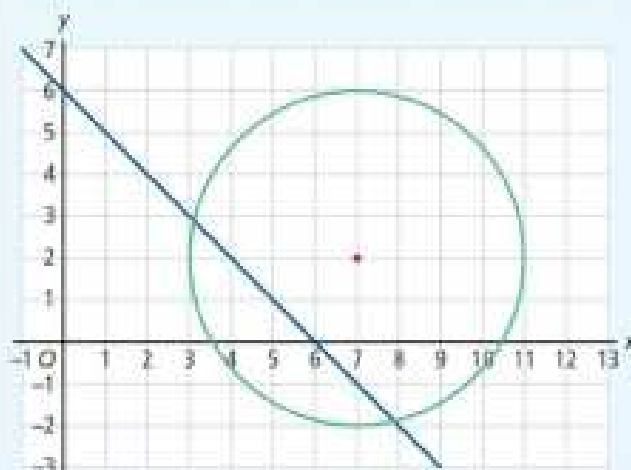
Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een lijn met een cirkel berekenen.

E4 Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + (y - 3)^2 = 25$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkel met de y -as.

b Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkel met de lijn $y = 5$.

c Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkel met de lijn $2y + x = 8$.



- E5** De cirkel heeft middelpunt $(7, 2)$ en straal 4.
Bereken de x -coördinaten van de snijpunten van de cirkel met de lijn. Geef exacte antwoorden.

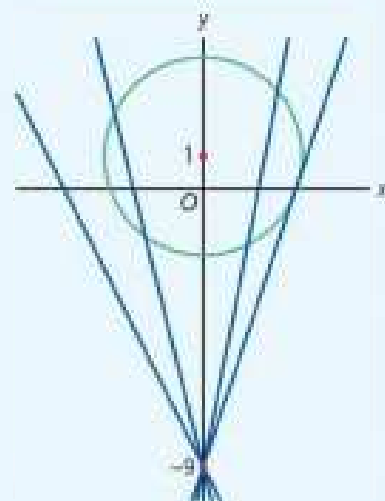
Je kunt vaststellen of een lijn aan een cirkel raakt.

- E6** Ga na of de lijn de cirkel snijdt, raakt of er geen punt gemeenschappelijk mee heeft.

- a** $(x + 3)^2 + y^2 = 18$ en $3x + y = 8$
- b** $x^2 + (y + 10)^2 = 6$ en $y = -2x + 5$
- c** $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$ en $y + 3x = 10$

Je kunt een vergelijking van een lijn die raakt aan een cirkel opstellen.

- E7** De cirkel heeft middelpunt $(0, 1)$ de straal is $\sqrt{10}$. De lijnen horen bij een lijnenbundel. De formule bij deze lijnen is $y = px - 9$.
- a** Bereken bij welke waarden van p de lijn uit de lijnenbundel de cirkel raakt.
 - b** Geef vergelijkingen van de lijnen uit de lijnenbundel die de cirkel raken.



Tussendoortje | Machtsrijen

De balans

Bij deze balans hoort een gewichtendoos waarmee je hoeveelheden kunt afwegen.

De gewichtendoos bevat gewichten van 1, 2, 4, 8, 16, 32 en 64 gram.

Van elk soort is er één gewicht.

- Hoe kun je hiermee in één keer 110 gram suiker afwegen?
- Kun je ook in één keer 59 gram suiker afwegen? En 78 gram suiker?
- Welke hoeveelheden kun je hiermee allemaal afwegen?
- Je mag nog één gewicht bijbestellen.
- Welk gewicht zou je dan kiezen?



Machten van drie

Bij een andere balans hoort een gewichtendoos met gewichten van 1, 3, 9, 27 en 81 gram.

- Beantwoord de vragen hierboven ook voor deze balans. Je mag daarbij de gewichten aan beide kanten neerleggen.

Machten van vijf

Met een gewichtendoos met gewichten van 1, 5, 25 en 125 gram kun je niet in één keer bijvoorbeeld 3 gram suiker afwegen.

Maar met twee van deze gewichtendozen lukt dat wel.

- Welke hoeveelheden kun je met twee van deze gewichtendozen allemaal afwegen?

