

MODERNE WISKUNDE



Noordhoff Uitgevers

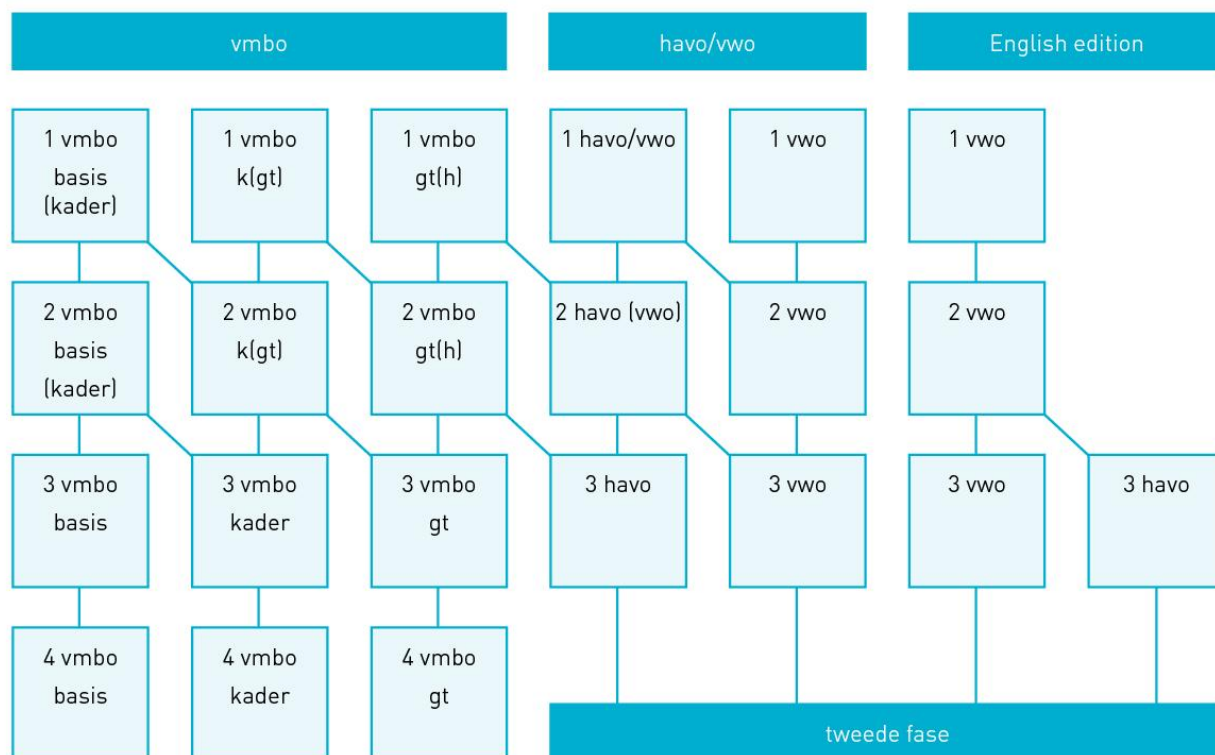
1 1 2 3 5 8 13

12e editie

Moderne Wiskunde

2B havo(vwo)

Serieoverzicht Onderbouw



Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever. Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van (een) gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken [artikel 16 Auteurswet 1912] kan men zich wenden tot Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.stichting-pro.nl).

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without prior written permission of the publisher.

12e editie

Moderne Wiskunde

2B havo(vwo)

Ineke de Bruijn

Emile van der Eijk

Joyce Manintveld

Sebas Nannings

Gerard van Proosdij

Colin Roll

Geertrui Schaberg

Marjon Schippers

Ron Sinkeldam

Greetje Smeenk – van Broekhoven

Noordhoff Uitgevers Groningen

Moderne Wiskunde

2B

havo

(vwo)

7 Procentuele groei 6

Voorkennis 8

7.1 100% en meer 10

7.2 Van procent naar factor 14

7.3 Exponentiële groei 18

7.4 Exponentiële formules 22

7.5 Standaardvorm 26

7.6 Gemengde opdrachten 30

Samenvatting 32

Test jezelf 36

Extra oefening 38

vwo Groeifactor en tijd 40

8 Oppervlakte 42

Voorkennis 44

8.1 Driehoeken 46

8.2 Parallellogrammen 50

8.3 Omtrek van een cirkel 54

8.4 Oppervlakte van een cirkel 58

8.5 Gemengde opdrachten 62

Samenvatting 64

Test jezelf 68

Extra oefening 70

vwo Trapezium 72

Vaardigheden 4 74

Metriek stelsel 76

Statistiek 77

Factor 78

Formule en grafiek 78

Wortels 79

9 Lineaire vergelijkingen 80

Voorkennis 82

9.1 Met de balans 84

9.2 Vergelijkingen oplossen 88

9.3 Snijdende lijnen 92

9.4 Grafieken schetsen bij lineaire formules 96

9.5 Ongelijkheden oplossen 100

9.6 Gemengde opdrachten 104

Samenvatting 106

Test jezelf 110

Extra oefening 112

vwo Formules herleiden 114

10 Ruimtemeetkunde 116

Voorkennis 118

10.1 Balk en cilinder 120

10.2 Prisma 124

10.3 Piramide en kegel 128

10.4 Vergroten 132

10.5 Samengestelde ruimtefiguren 136

10.6 Gemengde opdrachten 140

Samenvatting 142

Test jezelf 146

Extra oefening 148

vwo Verdieping 150

Vaardigheden 5 152

Tijd 154

Procenten 154

Vergelijkingen 155

Formules en grafieken 155

Meetkunde 157

11 Ontbinden in factoren 158

Voorkennis 160

11.1 Ontbinden in factoren 162

11.2 Ontbinden van tweetermen 166

11.3 Ontbinden van drietermen 170

11.4 $A \times B = 0$ 174

11.5 Kwadratische vergelijkingen 178

11.6 Gemengde opdrachten 182

Samenvatting 184

Test jezelf 188

Extra oefening 190

vwo Verdieping 192

12 Kijk op kans 194

Voorkennis 196

12.1 Kansen 198

12.2 Rekenen met kansen 202

12.3 Boomdiagrammen 206

12.4 Tellen en machten 210

12.5 Gemengde opdrachten 214

Samenvatting 216

Test jezelf 220

Extra oefening 222

vwo Wisselende kansen 224

Vaardigheden 6 226

Rekenen met breuken 228

Vergelijkingen en ongelijkheden 229

Ontbinden in factoren 230

Getallen 230

Meetkunde 231

Trefwoorden 232



Procentuele groei

7



In dit hoofdstuk

In klas 1 en ook al op de basisschool, heb je geleerd hoe je met procenten rekent. Je hebt daarbij meestal gebruik gemaakt van verhoudingstabellen.

In dit hoofdstuk ga je ook weer met procenten rekenen. Je leert hoe je daarbij handig gebruik kunt maken van een factor, dat is een getal waarmee je vermenigvuldigt. Je leert ook hoe je eenvoudig kunt berekenen hoe groot een hoeveelheid wordt als je die meerdere keren met dezelfde factor moet vermenigvuldigen. Je gaat daarbij formules opstellen.

Het werken met de formules die je in dit hoofdstuk leert, wordt uitgebreid in klas 3.

- V1** Henk staat op het schoolplein en houdt een stok van 60 cm vast. De lengte van de schaduw van de stok is 90 cm.
- Henk heeft ook een stok die twee keer zo lang is. Hoe lang zal de schaduw van deze stok zijn? Licht je antwoord toe.
 - Henk is 1 meter 50 lang. Gebruik de verhoudingstabel om uit te rekenen hoe lang de schaduw van Henk is.



		$\div 60$	$\times 150$	
hoogte in cm	60	1	150	
lengte schaduw in cm	90	1,5	...	
		$\div 60$	$\times 150$	

- Een lantaarnpaal is 3,5 m hoog. Gebruik een verhoudingstabel en bereken hoe lang de schaduw is van de lantaarnpaal.
 - De schaduw van de school is 18 meter. Hoe hoog is de school?
- V2** Bjorn koopt een brommer die normaal € 1.825,- kost. Omdat het een oud model is, krijgt hij € 300,- korting. Bjorn wil berekenen hoeveel procent dat is.
- Waarom staat 100% onder de 1825 euro?
 - Waarom moet je het getal onder 1 niet afronden?
 - Bereken hoeveel procent korting Bjorn heeft gekregen.
- V3** In de klas van Victor komen 18 leerlingen met de fiets naar school. Dat is 58% van de leerlingen in de klas. Je wilt weten hoeveel leerlingen er in de klas zitten.

		$\div 1825$	$\times 300$	
bedrag in euro's	1825	1	300	
percentage	100	0,0547...	...	
		$\div 1825$	$\times 300$	

aantal leerlingen	18	...	...
percentage	...	...	100

- Waarom staat in de tabel de 100% nu niet onder het getal 18?
- Zet in de verhoudingstabel 58% op de goede plaats en bereken hoeveel leerlingen de klas in totaal telt.

Aanpak**Hoe bereken je iets met een verhoudingstabel?**

- 1 Maak een verhoudingstabel en zet de gegevens er in.
- 2 Ga eerst terug naar 1 en dan naar het gevraagde aantal.
Bedenk welke getallen bij de bijbehorende pijlen komen te staan.
- 3 Bereken met de pijlen de ontbrekende getallen in de tabel. Rond de getallen niet tussendoor af.
- 4 Schrijf het antwoord op de vraag op.

Voorbeeld

Op een school zijn 632 leerlingen die 15 jaar of jonger zijn. Dit is 56,4% van alle leerlingen. Hoeveel leerlingen heeft deze school?

Oplossing

1	<i>aantal</i>	632	...	...
	<i>procenten</i>	56,4	1	100

$\swarrow$ $\searrow$
 $: 56,4 \quad \times 100$

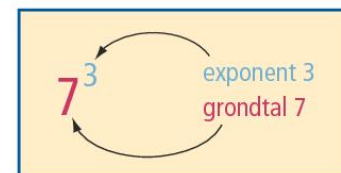
2

		$: 56,4$	$\times 100$
3	<i>aantal</i>	632	...
	<i>procenten</i>	56,4	1
		$: 56,4$	$\times 100$

$$632 : 56,4 \times 100 = 1120,567...$$

4 De school heeft 1121 leerlingen.

- V4** Peter betaalt € 540,- huur per maand. Dat is 23% van zijn maandinkomen.
Hoeveel verdient Peter per maand?
- V5** Esmea koopt een jas met 13% korting. Ze moet voor de jas nu € 124,50 betalen.
a Hoeveel procent van de oude prijs moet zij betalen?
b Hoeveel euro kostte de jas zonder korting?
- V6** Tamar koopt een nieuw bankstel. In de winkel moet ze € 94,50 betalen. Dit is 5% van het totale bedrag. De rest moet zij betalen als het bankstel thuis bezorgd wordt.
Hoeveel moet Tamar nog betalen?
- V7** Schrijf het grondtal en de exponent op en bereken zonder rekenmachine.
- | | |
|------------------|-----------------|
| a 3^4 | d 10^6 |
| b $0,1^3$ | e 1^7 |
| c 10^3 | f 15^2 |



Je leert • hoe je rekt in een verhoudingstabel met percentages boven de 100%

Leerroutes • ondersteunend: 1—2—3—4—05—06—6—7
• doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8
• uitdagend: 1—2—3—5—7—8—U1—U2

In de maand januari kun je een laptop van € 425,- met een korting van 10% kopen.
In februari kost de laptop weer € 425,-.
• Onderzoek of de prijs in februari meer of minder dan 10% is gestegen ten opzichte van januari.



- 1 Na 20% korting kost een stoel nog € 198,-.
a Jack gebruikt de verhoudingstabel om de oude prijs te berekenen.
Waarom staat onder 198 het getal 80?

<i>prijs in euro's</i>	198	...	...
<i>percentage</i>	80	1	100



- b Vul de tabel in.
c Jolanda berekent 20% van 198 en telt dat bij 198 op. Welke oude prijs vindt Jolanda?
d Welke fout maakt Jolanda?
e Bereken de oude prijzen van de andere twee aanbiedingen hiernaast.

- 2 Marieke verkoopt kaarten voor het goede doel. Vorig jaar heeft ze € 12,- verdiend. Dit jaar verdient ze 15% meer.
a Leg uit dat ze dit jaar 115% heeft verdiend.
b Bereken met behulp van de tabel hoeveel Marieke dit jaar heeft verdiend.

<i>bedrag in euro's</i>	12	...	...
<i>percentage</i>	100	1	115

: 100 × 115

- 3 Jeroen verkoopt elk jaar bonbons op de vrijmarkt. Hij heeft dit jaar 70 bonbons verkocht. Dat is 30% meer dan vorig jaar.
Ilse berekent hoeveel bonbons hij vorig jaar heeft verkocht.
a Verklaar het getal 130 onder het getal 70.
b Welk percentage moet Ilse nog invullen?
c Hoeveel bonbons heeft Jeroen vorig jaar verkocht?

<i>aantal bonbons</i>	70	...	...
<i>percentage</i>	130	1	...

: 130 × ...

Aanpak**Hoe reken je in een verhoudingstabel met percentages boven de 100%?**

- 1 Maak een tabel. Zet linksboven aantal en daaronder percentage.
- 2 Vul het gegeven aantal in en zet het bijbehorende percentage eronder.
- 3 Ga in de tabel via het getal 1 naar het gevraagde percentage.
- 4 Bereken de ontbrekende aantallen.
- 5 Schrijf het antwoord op de vraag op.

Voorbeeld 1

Bart fietst 60 km per week. Hij wil 35% meer kilometers fietsen per week.
Hoeveel kilometer wil Bart per week fietsen?

Oplossing

1	<i>afstand in km</i>	60	...	...
2	<i>percentage</i>	100	...	...
3	<i>afstand in km</i>	60	0,6	81
4	<i>percentage</i>	100	1	135

$\begin{array}{c} \text{↖} \quad \text{↗} \\ : 100 \quad \times 135 \end{array}$

- 5 Bart wil 81 kilometer per week gaan fietsen.

Voorbeeld 2

De verkoop van ijsjes in de kantine is gestegen met 25%. Er zijn deze zomer 350 ijsjes verkocht.
Bereken hoeveel ijsjes er vorige zomer verkocht zijn.

Oplossing

1	<i>aantal ijsjes</i>	350	...	...
2	<i>percentage</i>	125	...	...
3	<i>aantal ijsjes</i>	350	2,8	280
4	<i>percentage</i>	125	1	100

$\begin{array}{c} \text{↖} \quad \text{↗} \\ : 125 \quad \times 100 \end{array}$

- 5 Vorig jaar zijn er 280 ijsjes verkocht.

- 4 Bij Jesse in de tuin staat een appelboom. Vorig jaar zaten er 30 appels aan de boom. Dit jaar zitten er 10% meer appels aan de boom.
Hoeveel appels heeft Jesse dit jaar geoogst?

Ondersteunende route → maak opdracht 05

- 5 Meneer Hiemstra heeft een deuk in het portier van zijn auto. De kosten voor het uitdeuken en spuiten zijn € 400,-, maar dat is exclusief btw. Er komt nog 21% van dat bedrag bij.
- a Is de prijs exclusief btw 100% of 121%?
 - b Welk bedrag inclusief btw heeft meneer Hiemstra betaald voor de reparatie?

De afkorting btw staat voor Belasting Toegevoegde Waarde. De prijs zonder de btw noem je 'exclusief btw' en de prijs met de btw noem je 'inclusief btw'. De prijs exclusief btw is 100%. Voor veel artikelen is de btw 21%. Deze komt bovenop de 100%, zodat je 121% betaalt.

Ondersteunende route → maak opdracht O6



Mobiele telefoon

€ 450,- exclusief btw

Fietscomputer

€ 32,- exclusief btw



Snowboard

€ 570,- inclusief btw

Ski-jas

€ 298,- inclusief btw



- 6
 - a Bereken de prijs van de mobiele telefoon inclusief 21% btw.
 - b Hoe duur is de fietscomputer inclusief btw?
 - c Het snowboard kost € 570,- inclusief 21% btw.
Hoe duur is het snowboard exclusief btw?
 - d Bereken de prijs van de ski jas exclusief btw.
- 7 Marius bestelt via internet een 17-inch lcd-monitor voor € 167,50 exclusief 21% btw. De bezorgkosten zijn € 12,50 inclusief 21% btw.
 - a Bereken het bedrag dat Marius moet betalen.
 - b Marit koopt haar 17-inch lcd-monitor in de winkel voor € 190,-.
Hoe duur is haar monitor zonder btw?
- 8 Voor de brandverzekering van een huis met een rieten dak rekent een verzekeringsmaatschappij 35% extra bovenop de jaarlijkse basispremie. De familie Werkman betaalt daardoor jaarlijks € 105,- meer.
Hoe hoog is de totale premie die ze jaarlijks betalen?

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2



Ondersteunende opdrachten

- 05** Een basketbal kost € 25,- exclusief 21% btw.
- a** De prijs zonder btw is 100%.
Leg uit dat de prijs inclusief btw overeenkomt met 121%.
- b** Welk percentage (100 of 121) komt er onder het getal 25 te staan?

<i>prijs</i> in euro's	25	...	...
<i>percentage</i>	...	1	...

- c** Bereken de prijs inclusief btw.



- 06** Een zonnebril kost € 80,- inclusief 21% btw.
- a** De prijs inclusief btw is $100\% + 21\% = \dots\%$
- b** Leg uit dat de prijs exclusief btw overeenkomt met 100%.
- c** Welk percentage (100 of 121) komt er onder het getal 80 te staan?

<i>prijs</i> in euro's	80	...	...
<i>percentage</i>	...	1	...

- d** Bereken de prijs exclusief btw.

Uitdagende opdrachten

- U1** Een elektronicazaak stunt met de actie 'btw, weg ermee'. De btw op elektronica is 21%. Krijg je bij deze actie 21% korting?
Leg je antwoord uit.

- U2** Jasper gaat zwemmen met zijn vrienden. Aan het eind van de dag ontdekt hij dat hij € 4,10 meer kwijt is dan de vorige keer. Hij maakt twee lijstjes met de kosten. Hij weet dat het zwembad 20% duurder is geworden. Hoeveel procent duurder zijn het patatje en kroket geworden?

Vorige keer
entree zwembad??
patatje en kroket??
blikje cola €1,00

Nu
entree zwembad €5,10
patatje en kroket €4,75
blikje cola €1,00
ijsje €2,50

Je leert • hoe je procenten omzet naar factoren

Leerroutes • ondersteunend: 9—0—11—012—13—14—15—016—16
• doorlopend: 9—10—11—12—13—14—15—16—17
• uitdagend: 9—10—11—12—14—15—16—U3—U4

Tussen 1995 en 2006 is het gebruik van mobiele telefoons enorm gestegen. Het aantal telecomwinkels steeg zelfs met 700%.

- Hoeveel keer groter was het aantal telecomwinkels in 2006 dan in 1995?



- 9 In de schoolkrant staat dat 80% van de 570 leerlingen lid is van een sportvereniging.
Rens en Blanche rekenen uit hoeveel leerlingen dat zijn.

Rens Ik maak een verhoudingstabel.

aantal leerlingen	570	...	...
percentage	100	1	80

Diagram showing arrows indicating the relationships between the values in the table: from 570 to 100, from 100 to 1, from 1 to 80, and from 80 back to 100.

Blanche

80% betekent $\frac{80}{100}$ deel.

$\frac{80}{100} = 0,80$

Dus 80% van 570 is dan $0,80 \times 570 = \dots$

- Welke rekenstappen moet Rens bij de pijlen zetten?
- Hoeveel leerlingen zal Rens vinden?
- Hoeveel leerlingen zal Blanche vinden?
- Van alle leerlingen bespeelt 30% een instrument.
Bereken op de manier van Blanche het aantal leerlingen.

- 10 Vul in.

- 70% van 40 is $\frac{70}{100} \times 40 = 0, \dots \times 40 = \dots$
- 3% van 88 is $\frac{\dots}{100} \times 88 = 0, \dots \times 88 = \dots$
- 0,2% van 280 is $0, \dots \times 280 = \dots$

- 11 Bij een groothandel kost een computer € 700,- exclusief 21% btw. Met de tabel bereken je de prijs inclusief btw.

- Welke getal moet er onder de pijl staan?
- Bereken het bedrag inclusief btw.
- Bij een toename met 21% vermenigvuldig je met 1,21.
Met welk getal moet je vermenigvuldigen bij een toename van 15%? En bij een toename van 3%?

prijs in euro's	700	...
percentage	100	121

Diagram showing an arrow from 100 to 121 with the label $\times \dots$.

Theorie

Het getal waarmee je een oude hoeveelheid moet vermenigvuldigen om een nieuwe hoeveelheid te krijgen noem je de **factor**. Er geldt
 $\text{oude hoeveelheid} \times \text{factor} = \text{nieuwe hoeveelheid}$.

$$\text{factor} = \frac{\text{nieuwe hoeveelheid}}{\text{oude hoeveelheid}}$$

Voorbeeld 1

Hoe duur wordt een artikel van € 14,50 als de prijs 20% hoger wordt?

Oplossing

Een toename van 20% betekent een verandering van 100% naar 120%.

De factor daarbij is $\frac{120}{100} = 1,2$.

prijs in euro's	14,50	...
percentage	100	120
	$\times 1,2$	

De nieuwe prijs wordt € $14,50 \times 1,2 = € 17,40$.

Voorbeeld 2

Hoe duur wordt een artikel van € 23,- als de prijs 25% lager wordt?

Oplossing

Een afname van 25% betekent een verandering van 100% naar 75%.

De factor daarbij is $\frac{75}{100} = 0,75$.

prijs in euro's	23	...
percentage	100	75
	$\times 0,75$	

De nieuwe prijs wordt € $23,00 \times 0,75 = € 17,25$.

Ondersteunende route → maak opdracht 012

- 12** Op een broek krijg je een korting van 15%.
- Hoeveel procent van de oude prijs moet je nog betalen?
 - Met welke factor moet je de oude prijs vermenigvuldigen om de nieuwe prijs te krijgen?
 - Bereken met deze factor de nieuwe prijs van een broek van € 60,-.
- 13** Door het slechte oogstjaar zijn aardappelen 12% duurder dan vorig jaar.
- Met welke factor moet je de oude prijs vermenigvuldigen om de nieuwe prijs te krijgen?
 - Een zak aardappelen kostte vorig jaar € 3,90. Bereken de prijs van een zak aardappelen dit jaar.



Theorie

Als de nieuwe hoeveelheid groter is dan de oude hoeveelheid dan spreek je van een toename.
Bij een toename is de factor groter dan 1.

Als de nieuwe hoeveelheid kleiner is dan de oude hoeveelheid dan spreek je van een afname.
Bij een afname zit de factor tussen 0 en 1.

- 14** Geef bij de onderstaande veranderingen de factor waarmee je de oude hoeveelheid moet vermenigvuldigen om de nieuwe hoeveelheid te krijgen.
- a** toename met 28% **c** toename met 7%
 - b** afname met 34% **d** toename met 12,5%
- 15** In de uitverkoop betaal je 85% van de normale prijs van een broek. De broek kost normaal € 98,-.
- a** Met welke factor kun je de uitverkoopprijs berekenen?
 - b** Bereken de uitverkoopprijs van de broek.
 - c** Op de laatste dag van de uitverkoop krijg je extra korting. Je betaalt dan 70% van de uitverkoopprijs. Hoeveel kost de broek op de laatste dag?
 - d** Laat zien dat je het in één keer kunt uitrekenen met de vermenigvuldiging $0,85 \times 0,7 \times 98$.



Ondersteunende route → maak opdracht 016

- 16** Bereken.
- a** 80% van 90% van 600 liter
 - b** 90% van 80% van 300 gram
 - c** 5% van 5% van € 500,-
 - d** 10% van 25% van € 400,-
- 17** Op 1 januari 2017 heeft een dorp 5450 inwoners. In dat jaar neemt het aantal inwoners van het dorp af met 2%.
- a** Bereken het aantal inwoners van het dorp op 1 januari 2018.
 - b** Ook in 2018 neemt het aantal inwoners af met 2%. Bereken het aantal inwoners van het dorp op 1 januari 2019.

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

- O12** Op een jas van € 140,- krijg je 30% korting.
- De prijs zonder korting is 100%.
Leg uit dat de nieuwe prijs, dat is de prijs waar de korting af is, dan overeenkomt met 70%.
 - De factor waarmee je de oude prijs moet vermenigvuldigen om de nieuwe prijs te krijgen, is gelijk aan $\frac{70}{100}$.
Schrijf deze factor als decimaal getal.
 - Bereken met deze factor de nieuwe prijs van een jas van € 140,-.
 - Op een paar schoenen van € 80,- krijg je 20% korting.
Bereken met een factor de nieuwe prijs van de schoenen.

bedrag in euro's	140	...
percentage	100	70
		$\times \dots$

- O16** Je gaat berekenen hoeveel 30% van 60% van € 400,- is.
- Met welke factor moet je € 400,- vermenigvuldigen om 60% van € 400,- te berekenen?
 - Met welke factor moet je een bedrag vermenigvuldigen om 30% van dat bedrag te berekenen?
 - Vul deze factoren in bij $\dots \times \dots \times 400 = \dots$ en bereken daarmee hoeveel 30% van 60% van € 400,- is.

Uitdagende opdrachten

- U3**
- Een spijkerbroek kost € 60,-. In de uitverkoop is de broek 15% goedkoper. Bij de kassa krijg je nog eens 20% kassakorting op de uitverkoopprijs.
Laat zien dat de broek uiteindelijk € 40,80 kost.
 - Is de totale korting op de broek hoger of lager dan 35%?
 - In december kost een trui € 49,-. Op 1 januari gaat de prijs van de trui met 10% omhoog en op 1 februari weer met 10% omlaag.
Is de prijs van de trui in februari gelijk aan, lager dan of hoger dan in december? Verklaar je antwoord.
- U4** Elles krijgt in december naast haar salaris een bonus. Ze krijgt die maand € 66,-. Dat is 20% hoger dan normaal.
Hessel krijgt in december ook € 66,-. Normaal verdient hij € 2,20 minder dan Elles.
Hoeveel procent bonus heeft Hessel gekregen?

Je leert

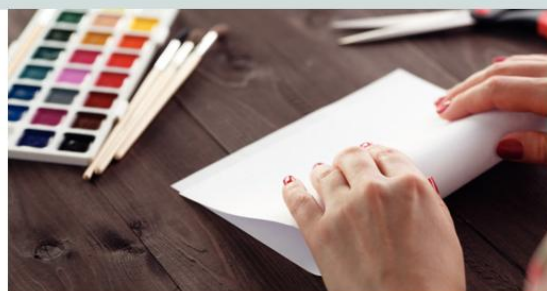
- hoe je exponentiële groei herkent
- hoe je bij exponentiële groei de groeifactor berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 18—19—020—20—21—22—23—24—025
- doorlopend: 18—19—20—21—22—23—24—25—26
- uitdagend: 18—19—20—21—22—23—25—U5—U6

Als je een blaadje papier dubbelvouwt, heb je twee lagen papier. Als je het weer dubbelvouwt, heb je al vier lagen.

- Gaat het je lukken om een blaadje papier zoveel keer dubbel te vouwen zodat je meer dan 100 lagen papier hebt?



- 18 Er bestaan zeer snel groeiende waterplanten, waarvan de hoeveelheid zich in één week verdubbelt. Van een groot meer is op een zeker moment 5 m^2 bedekt met deze planten.

- Vul in: na een week is $5 \times 2 = \dots \text{ m}^2$ bedekt.
- Hoeveel m^2 is er na twee weken bedekt?
- Vul de tabel verder in.

tijd in weken	0	1	2	3	4	5	6
bedekte oppervlakte in m^2	..	...	...	...	...	...	...

- Welke regelmaat zie je in de tabel?

Theorie

Je noemt een groeiprocess **exponentieel** als de factor waarmee je vermenigvuldigt steeds hetzelfde is.

Deze factor heet de **groeifactor**.

Ook bij een afname spreek je van exponentiële groei.

$$\text{groeifactor} = \frac{\text{nieuwe hoeveelheid}}{\text{oude hoeveelheid}}$$

Bij een toename is de groeifactor groter dan 1.

Bij een afname zit de groeifactor tussen 0 en 1.

Voorbeeld

tijd in jaren	0	1	2	3
aantal	100	80	64	51,2

$\times 0,8$ $\times 0,8$ $\times 0,8$

In de tabel geldt $80 : 100 = 0,8$;

$64 : 80 = 0,8$ en $51,2 : 64 = 0,8$.

De groeifactor per jaar is steeds gelijk, dus bij de tabel hoort een exponentieel groeiprocess.

- Hoe groot is de groeifactor in het voorbeeld?
- Gaat het om een afname of een toename?

Ondersteunende route → maak opdracht 020

20 De tabellen horen bij exponentiële groei.

Bereken bij iedere tabel de groeifactor en vul de tabellen in.

a

t	0	1	2	3	4	5
h	0,07	1,4	28	560	...	...

b

t	0	1	2	3	4	5
h	80	40	20	10	...	...

c

t	0	1	2	3	4	5
h	24	36	54	81	...	...

d

t	0	1	2	3	4	5
h	...	6	18	...	162	...

21 De tabel hieronder hoort bij een lineair verband.

t	0	1	2	3	4
h	25	35	45	55	65

- a** Welke regelmaat zie je in deze tabel?
b Leg het verschil uit tussen een tabel die bij exponentiële groei hoort en een tabel die bij lineaire groei hoort.

22 Het aantal vogels van een soort neemt elk jaar af met 8%.

- a** Hoeveel procent van de vogels is er na één jaar over?
b Hoe groot is dus de groeifactor per jaar?
c Vul de tabel verder in. Rond af op helen.

<i>tijd</i> in jaren	0	1	2	3	4
<i>aantal vogels</i>	25 000	...	...	...	...

- d** Zoek uit door de tabel aan te vullen, na hoeveel jaar het aantal vogels kleiner is dan 15 000.

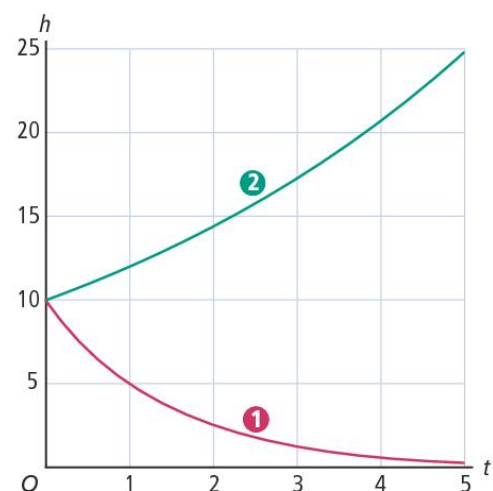
23 De grafieken 1 en 2 horen bij exponentiële groei.

- a** Welke grafiek hoort bij de tabel?

t	0	1	2	3
h	10	12	14,4	17,28

- b** Bereken de groeifactor bij deze tabel.
c Bij de andere grafiek hoort onderstaande tabel. Bereken de groeifactor en vul de tabel verder in.

t	0	1	2	3
h	10	5	...	...



- 24** Eline heeft in 2006 geld gespaard bij een bank tegen een vast rentepercentage van 4% per jaar.
- Leg uit dat de groeifactor gelijk is aan 1,04.
 - Hoe kun je aan de groeifactor zien dat het om een toename gaat?
 - Voor vijf jaren staat hieronder hoe het bedrag is gegroeid. De bedragen zijn afgerond op hele euro's.

<i>tijd</i> in jaren	2006	2007	2008	2009	2010	2011
<i>bedrag</i> in euro's	1209	1257	1308	1360	1414	1471

Als je het bedrag in 2007 door het bedrag in 2006 deelt, krijg je niet precies 1,04.

Hoe komt dat?

- Bereken voor de hele tabel de groeifactor tussen twee opeenvolgende jaren. Rond af op twee decimalen.

Om exponentiële groei vast te stellen, moet je alle delingen (nieuwe hoeveelheid delen door oude hoeveelheid) uitvoeren. Doordat de hoeveelheden vaak afgerond zijn, kan het gebeuren dat de factor niet steeds exact hetzelfde is, terwijl er toch sprake is van exponentiële groei.

Ondersteunende route → maak opdracht 025

- 25**
- Laat met een berekening zien dat in de tabel hiernaast de factor tussen 0 en 1 dagen gelijk is aan 1,08.
 - Is de factor tussen 1 en 2 dagen precies gelijk aan 1,08?
 - Ga na dat de andere groeifactoren ook ongeveer 1,08 zijn.
 - Leg uit waarom je in dit geval toch kunt spreken van een exponentieel verband. Hoe groot is de groeifactor dan?

<i>tijd</i> in dagen	0	1	2	3	4
<i>hoeveelheid</i> in duizendtallen	100	108	117	126	136
		$\times \dots$	$\times \dots$	$\times \dots$	$\times \dots$

- 26** In een gebied zijn er ieder jaar minder weidevogels. In de tabel staan de aantallen.
- Leg uit waarom bij deze tabel geen lineaire groei hoort.
 - Laat zien dat bij de tabel exponentiële groei hoort met een groeifactor van 0,97.
 - Hoeveel weidevogels waren er in 2018 in het gebied?

<i>tijd</i> in jaren	<i>aantal</i> weidevogels
2013	500
2014	485
2015	470
2016	456
2017	443

Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

Ondersteunende opdrachten

- 020** Bij de tabel hoort exponentiële groei. Onder de tabel moet op de puntjes de groeifactor staan.
- Om de groeifactor te berekenen, deel je 350 door 250. Hoe groot is de groeifactor?
 - Ga na dat je met de delingen $490 : 350$ en $686 : 490$ dezelfde groeifactor vindt.
 - Bereken de waarde van h bij $t = 4$ door 686 met je groeifactor te vermenigvuldigen.
 - Bereken ook h bij $t = 5$.

t	0	1	2	3	4	5
h	250	350	490	686	...	...
		$\times \dots$	$\times \dots$	$\times \dots$	$\times \dots$	$\times \dots$

- 025** Van een stad loopt het aantal inwoners langzaam terug. In de tabel staat voor een aantal jaar het aantal inwoners, afgerond op duizendtallen.

<i>tijd</i> in jaren	0	1	2	3	4
<i>aantal inwoners</i> in duizendtallen	135	128	122	116	110
		$\times \dots$	$\times \dots$	$\times \dots$	$\times \dots$

- Zal het aantal inwoners in jaar 0 precies gelijk zijn aan 135 000? En in jaar 1 precies gelijk aan 128 000?
- Bereken de factor tussen 0 en 1 jaar door 128 te delen door 135. Laat zien dat de factor, afgerond op twee decimalen, gelijk is aan 0,95.
- Bereken ook de andere factoren door $122 : 128$, $116 : 122$ en $110 : 116$ te berekenen.
- De factoren zijn niet gelijk. Als je de factoren afrondt, zijn ze wel gelijk. Leg uit dat je in dit geval toch kunt spreken van exponentiële groei. Hoe groot is de groeifactor?

Uitdagende opdrachten

- U5** Uit een bepaald gebied trekken steeds meer mensen weg. Vanaf 1995 heeft men om de vijf jaar het aantal bewoners geteld. Er is afgerond op duizendtallen.
- Laat zien dat in deze periode de groeifactor per vijf jaar ongeveer 0,925 is.
 - Hoeveel mensen denk je dat er in 2025 zullen wonen?
 - De afname van de bevolking is een exponentieel proces dat al eerder is begonnen. Bereken het aantal mensen dat in 1990 in het gebied woonde.

<i>tijd</i> in jaren	<i>aantal mensen</i>
1995	1 026 000
2000	949 000
2005	878 000
2010	812 000
2015	751 000

- U6** Een winkelier verhoogt in een korte tijd zijn prijzen twee keer met hetzelfde percentage. Een artikel kost nu € 242,- in plaats van € 200,-. Met welk percentage heeft de winkelier twee keer zijn prijs verhoogd?

Je leert

- hoe je bij exponentiële groei een formule opstelt
- hoe je aan een exponentiële formule ziet of de grafiek stijgend of dalend is

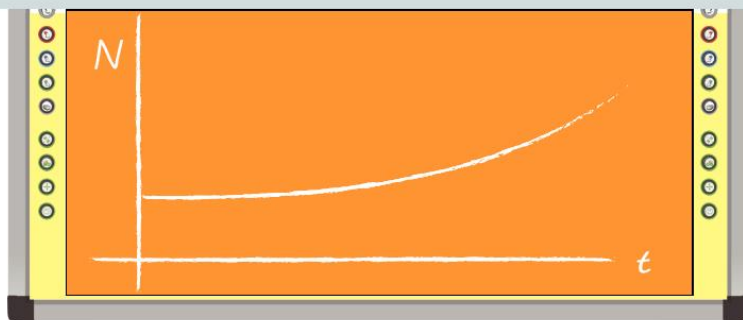
Leerroutes

- ondersteunend: 27—28—29—30—031—32—33—034—34
- doorlopend: 27—28—29—30—31—32—33—34—35
- uitdagend: 27—28—29—30—31—32—34—U7—U8

De docente wiskunde vertelt een verhaal over bacteriën waarvan het aantal elk uur met 5% toeneemt. Ze schetst daarbij de grafiek die je hiernaast ziet op het bord.

- Welke van de volgende formules kan bij de grafiek horen?

- A $N = 1200 \times 0,05^t$
- B $N = 1200 \times 1,05^t$
- C $N = 1200 + 0,05t$
- D $N = 1200 \times 5t$



- 27** Na een aanvaring verspreidde de olie van een olietanker zich in de loop van de uren over het water.

De oppervlakte A van de olievlek in km^2 werd elk uur drie keer zo groot. Om 10.00 uur ($t = 0$) had de olievlek een oppervlakte van $0,12 \text{ km}^2$.

- a Ga na dat om 11.00 uur, dus bij $t = 1$, de olievlek een oppervlakte heeft van $0,36 \text{ km}^2$.
- b Maak een tabel met $t = 0$ tot en met $t = 4$ en bereken daarbij de door olie bedekte oppervlakte.
- c Welke regelmaat zie je in de tabel?
- d Hoe groot was de olievlek om 9 uur 's ochtends?

- 28** De oppervlakte van de olievlek van opdracht 27 kun je bij $t = 2$ als volgt berekenen: $A = 0,12 \times 3 \times 3$ oftewel $A = 0,12 \times 3^2 = 1,08$.

- a Leg uit dat bij $t = 4$ geldt $A = 0,12 \times 3^4$ en bereken de oppervlakte van de olievlek op dat tijdstip.
- b Bereken ook de oppervlakte van de olievlek bij $t = 5$.
- c De oppervlakte A van de olievlek in km^2 na t uur kun je berekenen met de formule $A = 0,12 \times 3^t$. Leg uit waarom deze formule goed is.



- 29 a Hoe groot is in de formule $s = 20 \times 1,8^t$ de groeifactor?
 b Bereken de uitkomst s bij $t = 3$.
 c Hiernaast zie je hoe je met de rekenmachine de uitkomst s bij $t = 6$ kunt berekenen.
 Bereken s bij $t = 7$ en bij $t = 11$.
 d Laat zien dat je bij $t = 0$ voor s de waarde 20 krijgt.

$$20 \times 1,8 \times^y 6 = 680,24448$$

of

$$20 \times 1,8 \wedge 6 \text{ enter } 680,24448$$

- 30 a Gebruik de tabel om de uitkomst van 3^4 te berekenen.
 b Bereken met de tabel ook de uitkomst van 3^1 en van 3^0 .
 c Maak eenzelfde soort tabel voor de machten van 5.
 d Wat kun je zeggen van de uitkomst van een macht als de exponent 0 is?

macht	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4
uitkomst	...	...	9	27	...
		$\times 3$	$\times 3$	$\times 3$	$\times 3$

Theorie

Een formule van de vorm $h = b \times g^t$ heet een **exponentiële formule**. In deze formule is b de **beginhoeveelheid** op tijdstip $t = 0$ en g de **groeifactor** per tijdseenheid.

Het keerteken wordt vaak door de **vermenigvuldigpunt** vervangen. Je krijgt dan $h = b \cdot g^t$.

De groeifactor g is altijd groter dan 0 en $g^0 = 1$.

Bij het opstellen van een formule neem je voor b de waarde bij $t = 0$.

Voorbeeld

Geef een formule bij de tabel.

t	0	1	2	3
h	2	8	32	128
		$\times 4$	$\times 4$	$\times 4$

Oplossing

De beginhoeveelheid (bij $t = 0$) is 2.

De groeifactor is 4.

De formule is $h = 2 \cdot 4^t$.

Ondersteunende route → maak opdracht 031

- 31 De tabellen horen bij exponentiële formules.

1	t	0	1	2	3	4	5
	h	200	40	8	...	...	...

2	t	0	1	2	3	4	5
	h	...	...	18	54	162	...

- a Bereken bij tabel 1 de groeifactor.
 b Vul de tabel in en geef de bijbehorende formule.
 c Maak opdracht a en b ook voor tabel 2.

- 32 Margriet zet een bedrag van € 500,- op een spaarrekening. Ze krijgt op deze spaarrekening 3,5% rente per jaar.

- a Leg uit dat de groeifactor per jaar 1,035 is.
 b Maak een formule waarmee ze kan berekenen hoeveel euro er na een tijd van t jaren op de spaarrekening staat.
 c Zoek met behulp van de formule uit na hoeveel jaar ze voor het eerst meer dan € 1.000,- heeft gespaard.

33 Gegeven zijn de formules:

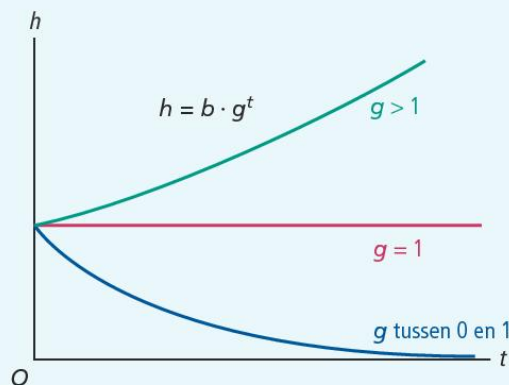
$$w = 15 \cdot 0,9^t, \quad p = 70 \cdot 0,5^t, \quad m = 15 \cdot 1,3^t \text{ en } k = 1,6^t.$$

- Geef bij elk van deze formules de beginhoeveelheid en de groeifactor.
- Bereken voor elke formule de uitkomst bij $t = 1$ en bij $t = 3$.
- Geef bij elk van de formules aan of de bijbehorende grafiek stijgend of dalend is.
- Hoe kun je dat aan de groeifactor zien?

Theorie

Een groeifactor g van een exponentieel verband is altijd een positief getal. Voor de grafiek bij dit verband geldt:
als $g > 1$, dan is de grafiek **stijgend**,
als g tussen 0 en 1 ligt, is de grafiek **dalend**.

Als $g = 1$, dan is de grafiek **constant**. De grafiek is een horizontale lijn.



Ondersteunende route → maak opdracht 034

34 Op een eiland gedijt de ene vlindersoort goed en de andere minder. Bij soort A hoort de formule $v = 28,5 \cdot 0,9^t$ en bij soort B hoort de formule $v = 19 \cdot 1,1^t$. Hierbij is v het aantal vlinders in duizendtallen en t de tijd in jaren.

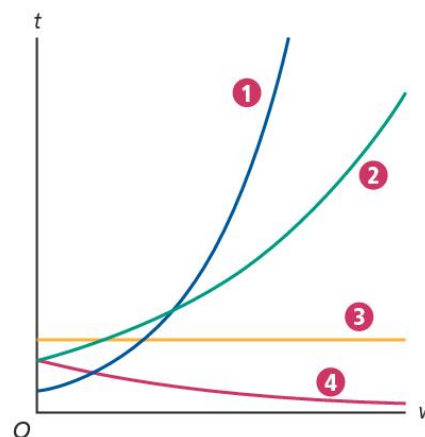
- Welke soort heeft het grootste aantal vlinders op het tijdstip $t = 0$?
- Welke soort sterft uit op dit eiland? Leg uit waarom.
- Is de grafiek bij soort B stijgend of dalend? Hoe zie je dat aan de groeifactor?
- Teken in één assenstelsel van beide formules de grafiek. Neem voor t de waarden van 0 tot en met 8 en voor v een stapgrootte 5.

35 Bij de grafieken horen de onderstaande formules.

A $v = 5 \cdot 2^t$ C $v = 2 \cdot 5^t$

B $v = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ D $v = 7 \cdot 1^t$

- Welke formule hoort bij grafiek 4?
- Geef bij de overgebleven grafieken aan welke formule erbij hoort. Licht steeds je antwoord toe.



Uitdagende route → maak opdracht U7 en U8

Ondersteunende opdrachten

031 De tabellen horen bij exponentiële groei.

- a** Bereken van tabel 1 de groeifactor door $15 : 5$ en $45 : 15$ te berekenen.
- b** Vul met behulp van de groeifactor tabel 1 verder in.
- c** Hoe groot is de beginhoeveelheid?
- d** Bij de tabel hoort de formule $h = b \cdot g^t$.
Vul voor b en g de juiste getallen in.
- e** Bereken de groeifactor die bij tabel 2 hoort.
- f** Bij tabel 2 kun je de beginhoeveelheid berekenen door 64 te delen door de groeifactor.
Bereken de beginhoeveelheid bij tabel 2.
- g** Maak een formule bij tabel 2. Gebruik dezelfde stappen als bij tabel 1.

1

t	0	1	2	3	4	5
h	5	15	45	...	...	...

$\times \dots$ $\times \dots$ $\times \dots$ $\times \dots$ $\times \dots$

2	t	0	1	2	3	4	5
	h	...	64	32	16	...	...

034 Van sommige auto's neemt de waarde in de loop van de jaren toe, van andere auto's neemt de waarde af. Leo heeft een Ford Mustang. Met de formule $w = 25 \cdot 1,05^t$ bereken je de waarde w in duizenden euro's van de Ford na t jaar. Hendrik heeft een Suzuki. Bij deze auto hoort de formule $w = 10 \cdot 0,75^t$.

- Welke formule heeft een groeifactor groter dan 1? Van welke auto neemt de waarde dus toe?
- Welke auto is na verloop van een aantal jaar vrijwel niets meer waard?
- Vul de tabellen in en teken in één assenstelsel van beide formules de grafiek.

Ford Mustang

t	0	1	2	3	4	5	6
h	25	...	...	...	...	...	...

Suzuki

t	0	1	2	3	4	5	6
h	10	...	...	...	...	...	...

Uitdagende opdrachten

U7 Bij de grafieken horen de onderstaande formules.

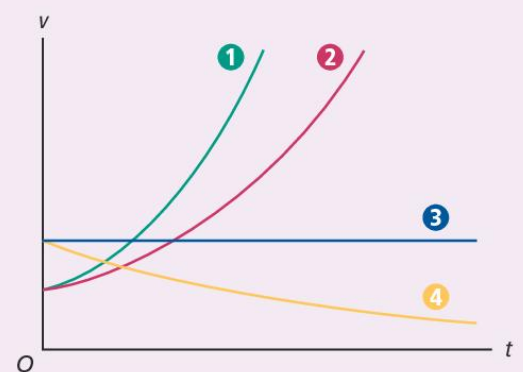
- A $v = 5 \cdot 5^t$ C $v = 5 \cdot 3^t$
B $v = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ D $v = 10 \cdot 1^t$

- Geef van elke grafiek aan welke formule erbij hoort. Licht steeds je antwoord toe.
- Welke formule is eigenlijk een lineaire formule? Leg uit waarom.

U8 De grafieken die bij de tabellen horen hebben een snijpunt. Zoek uit welke coördinaten het snijpunt heeft.

t	0	1	2	3
h	1	2	4	8

t	0	1	2	3
h	240	242	244	246



Je leert

- hoe je grote getallen schrijft met een macht van 10
- hoe je kleine getallen schrijft met een macht van 10

Leerroutes

- ondersteunend: 36—37—038—39—41—42—043—43
- doorlopend: 36—37—38—39—40—41—42—43
- uitdagend: 36—38—39—41—42—43—U9—U10

Bij het spel Miljoenenjacht staan 26 gesloten koffers op het podium met daarin geldbedragen variërend tussen € 0,01 en € 5.000.000,-.

De finalist van het spel bepaalt door het openen van een aantal koffers de gewonnen prijs.

- Bereken zonder rekenmachine hoeveel keer het kleinste bedrag € 0,01 in het grootste bedrag € 5.000.000,- past.



36 Een aantal grote getallen is geschreven als macht van 10.

$$\begin{array}{ll} 10 = 10^1 & 100\,000 = 10^5 \\ 100 = 10^2 & 1\,000\,000 = 10^6 \\ 1000 = 10^3 & 10\,000\,000 = 10^7 \\ 10\,000 = 10^4 & 100\,000\,000 = 10^8 \end{array}$$

- Schrijf het getal 1 miljard als macht van 10.
- Schrijf het getal 1000 miljard als macht van 10.
- Hoeveel nullen heeft het getal 10^5 ? En 10^{13} ?
- Wat is het voordeel om grote getallen als een macht van 10 te schrijven?
- Hoe noem je het getal 10^6 ook wel?
- Hoeveel keer groter is 10^8 dan 10^5 ?

37 Een zwerm sprinkhanen groeit exponentieel volgens de formule $S = 400 \times 3^t$. Hierbij is S het aantal sprinkhanen en is t de tijd in weken.

- Hoeveel sprinkhanen zijn er op $t = 0$? En op $t = 10$?
- Bereken het aantal sprinkhanen op $t = 15$ en vermenigvuldig dit aantal met 3. Ga na dat je rekenmachine een antwoord geeft zoals hiernaast staat.
- Rond het getal 1,721 868 84 af op twee decimalen.
- Het aantal sprinkhanen op $t = 16$ kun je nu opschrijven als $S = 400 \times 3^{16} \approx \dots \times 10^{10}$. Vul op de puntjes het afgeronde getal uit opdracht c in.
- Hoeveel sprinkhanen zijn er na 25 weken?



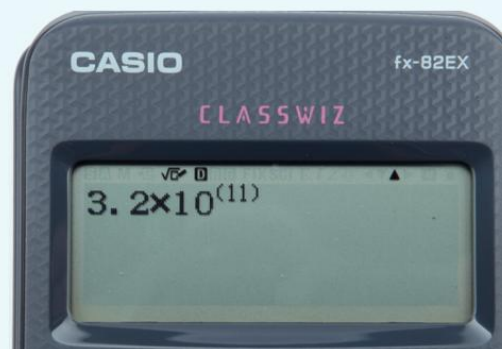
Theorie

Grote getallen zoals 320 000 000 000 worden in het venster van de rekenmachine vaak als macht van 10 geschreven.

Je ziet dan in het venster $3,2 \times 10^{11}$. Dat betekent $3,2 \times 100\,000\,000\,000$.

Je moet dan bij het getal 3,2 de komma elf plaatsen naar rechts verschuiven. Op de open plaatsen zet je nullen.

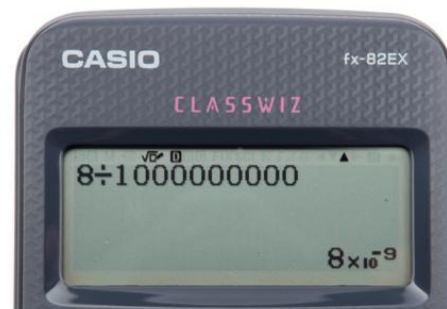
Elk getal kun je met deze **wetenschappelijke notatie** of met deze **standaardvorm** schrijven als een vermenigvuldiging van een getal met een macht van 10. Daarbij ligt het voorste getal tussen 1 en 10.



Ondersteunende route → maak opdracht 038

- 38** Schrijf de volgende getallen als gewoon getal.
- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| a $6,7 \times 10^2$ | d $9,009 \times 10^9$ |
| b $1,8 \times 10^6$ | e $1,0007 \times 10^5$ |
| c $7,2 \times 10^8$ | f $1,200006 \times 10^3$ |
- 39** Je kunt het getal 675,4 in de standaardvorm schrijven als $675,4 = 6,754 \times 10^2 \approx 6,8 \times 10^2$.
Schrijf de volgende getallen ook in de standaardvorm.
Rond daarbij het voorste getal af op één decimaal.
- | | |
|--|----------------------|
| a $848,9 = 8,489 \times 10^{\dots} \approx$ | d 676 500 000 |
| b $3967,5 = 3,9675 \times 10^{\dots} \approx$ | e 8 905,4 |
| c $54678 = 5,4678 \times 10^{\dots} \approx$ | f 127,937 |
- 40** De Europese Unie heeft ongeveer $5,0 \times 10^8$ inwoners.
China heeft ongeveer $1,4 \times 10^9$ inwoners.
- Heeft de Europese Unie meer of minder dan 1 miljard inwoners?
 - Hoeveel keer zoveel inwoners heeft China als de Europese Unie? Kies uit: ongeveer 3 keer, ongeveer 30 keer, ongeveer 300 keer of ongeveer 3000 keer.
 - Nederland heeft ongeveer 17 miljoen inwoners. Schrijf dit aantal in de wetenschappelijke notatie.

- 41**
- a Bereken zonder rekenmachine $8 : 1000000000 =$.
 - b Bereken met de rekenmachine $8 : 1000000000 =$.
 - c Vul in: $0,000\,000\,008 = 8 \times 10^{\dots}$.
 - d Vul in: $0,000\,074 = 7,4 \times 10^{\dots}$.
 - e Welk voordeel heeft het om het antwoord in de standaardvorm te geven?



Theorie

Kleine getallen zoals 0,000 000 000 002 1 worden in het venster van een rekenmachine ook in de standaardvorm weergegeven. Op je rekenmachine zie je $2,1 \times 10^{-12}$. Je moet dan bij het getal 2,1 de komma twaalf plaatsen naar links verschuiven. Op de open plaatsen zet je nullen. Het voorste getal ligt weer tussen 1 en 10 en de exponent van 10 is bij getallen tussen 0 en 1 negatief.

Voorbeeld 1

Het getal $5,04 \times 10^{-6}$ kun je als gewoon getal schrijven door de komma zes plaatsen naar links te verschuiven.
 $5,04 \times 10^{-6} = 0,000\,005\,04$

Voorbeeld 2

Het getal 0,000 874 2 in de standaardvorm is $8,742 \times 10^{-4}$. Bij het getal 8,742 moet je de komma vier plaatsen naar links verschuiven.
 $0,000\,874\,2 = 8,742 \times 10^{-4}$

- 42** Schrijf de volgende getallen als gewoon getal.
- a 4×10^{-5}
 - b 3×10^{-8}
 - c $1,4 \times 10^{-1}$
 - d $5,09 \times 10^{-6}$
 - e $8,123 \times 10^{-4}$
 - f $9,0072 \times 10^{-2}$

Ondersteunende route → maak opdracht 043

- 43** Je kunt het getal 0,008 26 in de standaardvorm schrijven als $0,00826 = 8,26 \times 10^{-3} \approx 8,3 \times 10^{-3}$. Schrijf de volgende getallen ook in de standaardvorm. Rond daarbij het voorste getal af op één decimaal.

- a $0,043 = 4,3 \times 10^{\dots}$
- b $0,0000152 = 1,52 \times 10^{\dots} \approx$
- c $0,002309 = 2,309 \times 10^{\dots} \approx$
- d $0,008\,912$
- e $0,037\,2$
- f $0,158\,743$

Uitdagende route → maak opdracht U9 en U10

Ondersteunende opdrachten

- 038** Het getal $7,09361 \times 10^8$ staat in de standaardvorm.
 10^8 is gelijk aan 100 000 000.
 $7,09361 \times 10^8$ is dus gelijk aan $7,09361 \times 100\,000\,000$.
 De komma in het getal 7,093 61 schuif je dan acht plaatsen naar rechts, dus $7,09361 \times 10^8 = 709\,361\,000$.
- Hoeveel plaatsen moet je de komma naar rechts verschuiven om $3,50082 \times 10^3$ als gewoon getal te schrijven?
 - Schrijf $3,50082 \times 10^3$ als gewoon getal.
 Schrijf de volgende getallen als gewoon getal.
- | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| c $1,897 \times 10^5$ | f $4,1 \times 10^2$ |
| d $2,0918 \times 10^3$ | g $5,3200515 \times 10^{10}$ |
| e $3,0005 \times 10^9$ | h $6,73 \times 10^1$ |

- 043** Het getal 0,000 682 1 is in de standaardvorm $6,821 \times 10^{-4}$.
 Bij het getal 6,821 moet je de komma vier plaatsen naar links verschuiven, dus $0,000\,682\,1 = 6,821 \times 10^{-4}$.
- Hoeveel plaatsen moet je de komma in het getal 4,029 naar links verschuiven om het getal 0,000 004 029 te krijgen?
 - Vul in: $0,000\,004\,029 = 4,029 \times 10^{-4}$
 - Vul in: $0,00541 = 5,41 \times 10^{-3}$
 - Vul in: $0,000\,865\,231 \approx 8,7 \times 10^{-4}$

Uitdagende opdrachten

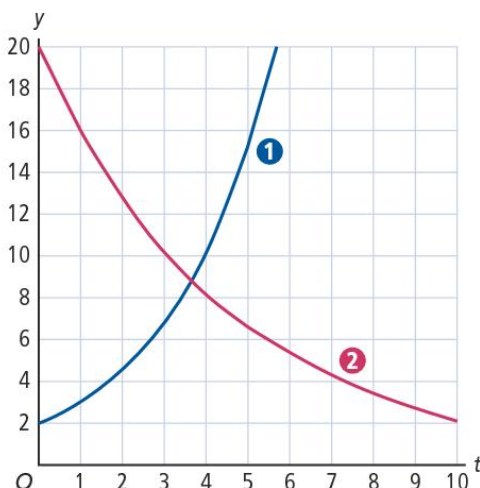
- U9** De snelheid van licht is ongeveer 3×10^8 m/s.
- Hoeveel meter legt licht af in één seconde?
 - En hoeveel meter legt licht af in één minuut? En in één uur?
 - Hoeveel km per uur is de snelheid van licht?
- U10** Je vermenigvuldigt twee van de getallen hiernaast met elkaar.
- Met welke twee getallen krijg je het grootste antwoord?
 - Met welke twee getallen krijg je het kleinste antwoord?
 - Afgerond op 1 decimaal is het antwoord $1,5 \times 10^6$.
 Welke twee getallen zijn er gebruikt?

$\frac{71}{1000}$
2 090 563
$2,01 \times 10^4$
$7,2654 \times 10^{-3}$
0,713

- 44** De gemiddelde huizenprijs is in een jaar tijd met 4,6% gestegen.
- Met welke factor kun je de nieuwe huizenprijs berekenen als je de oude huizenprijs weet?
 - De gemiddelde huizenprijs in een stad was een jaar geleden € 300.000,-.
Bereken de gemiddelde huizenprijs nu.
 - Een appartement kostte een jaar geleden € 225.000,-.
Bauke koopt nu een vergelijkbaar appartement.
Hoeveel kost dit appartement nu?
 - Als je een huis koopt heb je extra kosten. Je betaalt € 4.750,- aan de notaris en de makelaar en je betaalt 2% belasting over de verkoopprijs.
Bereken het bedrag dat Bauke totaal moet betalen.



- 45** De twee grafieken horen bij exponentiële formules.



- Maak bij elke grafiek een tabel. Lees de waarden zo nauwkeurig mogelijk af.
 - Bereken bij beide tabellen de groeifactor.
 - Hoe kun je aan de groeifactor zien dat de grafiek daalt?
 - Geef bij beide grafieken de bijbehorende formule
- 46** Van alle planeten lijkt Mars het meeste op Aarde. In de tabel vind je gegevens van Mars en Aarde.
- Schrijf de diameter van Aarde als gewoon getal.
 - Is de diameter van Mars ongeveer 2, 20, of 200 keer zo klein als de diameter van Aarde?
 - Welke planeet heeft de grootste massa?
 - De afstand van Mars tot de zon is 228 miljoen km. Schrijf deze afstand in de standaardvorm.

planeet	diameter in km	massa in kg
Aarde	$12,8 \times 10^3$	$5,97 \times 10^{24}$
Mars	$6,8 \times 10^3$	$6,42 \times 10^{24}$

- 47** Een oude legende vertelt dat de uitvinder van het schaakbord aan de koning een beloning mocht vragen. Hij vroeg op het eerste veld één graankorrel, op het tweede veld $1 \times 2 = 2$ graankorrels, op het derde veld $2 \times 2 = 4$ graankorrels, op het vierde veld $2 \times 2 \times 2 = 8$ graankorrels, enzovoort.

a Vul de tabel in.

<i>veld schaakbord</i>	1	2	3	4	5	6
<i>aantal graankorrels</i>	1	2	...	...	...	...



- b** Waarom hoort bij de tabel een exponentieel verband?
c Controleer dat op het 9e veld 2^8 graankorrels liggen.
d Een schaakbord heeft 64 velden.
 Hoeveel graankorrels komen op het laatste veld?
 Schrijf dit aantal in de standaardvorm en rond het voorste getal af op twee decimalen.
e Had de koning aan één zak graan genoeg? Leg uit.

- 48** **a** Bij welke tabellen hoort exponentiële groei?
 Leg uit waarom.

A

<i>t</i>	0	1	2	3	4
<i>h</i>	0,5	2	8	16	32

C

<i>t</i>	1	2	3	4
<i>h</i>	3	18	108	648

B

<i>t</i>	0	1	2	3	4
<i>h</i>	10	8	6,4	5,1	4,1

D

<i>t</i>	0	1	2	3	4
<i>h</i>	84	72	60	48	36

- b** Maak een formule bij de tabellen die bij exponentiële groei horen.

- 49** Thomas onderzoekt of maïsplanten exponentieel groeien. Hij meet daarvoor elke week de lengte van een maïsplant.

<i>tijd in weken</i>	0	1	2	3	4
<i>lengte in cm</i>	2,5	3,8	5,7	8,6	12,9



- a** Bereken voor elke week de groeifactor.
b Klopt het vermoeden van Thomas?
c Teken de grafiek van de lengte van de maïsplant.
d Na vijf weken was de maïsplant 17,1 cm lang, na zes weken 22,0 cm en na 7 weken 25,6 cm.
 Verwerk deze nieuwe gegevens in de grafiek.
e Klopt het vermoeden van Thomas nog vanaf week 5?

Theorie

Factor

Het getal waarmee je een oude hoeveelheid moet vermenigvuldigen om een nieuwe hoeveelheid te krijgen noem je de factor. Er geldt

$$\text{oude hoeveelheid} \times \text{factor} = \text{nieuwe hoeveelheid}.$$

Als de nieuwe hoeveelheid groter is dan de oude hoeveelheid dan spreek je van een toename.

Bij een toename is de factor altijd groter dan 1.

Als de nieuwe hoeveelheid kleiner is dan de oude hoeveelheid dan spreek je van een afname.

Bij een afname ligt de factor altijd tussen 0 en 1 in.

Voorbeeld

In de uitverkoop worden alle prijzen met hetzelfde percentage verlaagd. Een jas van € 120,- kost in de uitverkoop € 96,-.

Met welke factor worden alle prijzen vermenigvuldigd?

Oplossing

prijs in euro's	120	96
percentage	100	...

$$\text{De factor is } \frac{96}{120} = 0,8.$$

- S1**
- Een tv kost € 500,-. Vorig jaar kostte de tv € 545. Bereken de factor waarmee de prijs vermenigvuldigd is.
 - Een kaartje van een festival kost dit jaar € 44,-. Dat is 1,1 keer zoveel als de prijs van een kaartje vorig jaar. Bereken hoeveel een kaartje vorig jaar kostte.

Theorie

Exponentiële groei en groeifactor

Je noemt een groeiproces exponentieel als de factor per tijdseenheid steeds hetzelfde is.

Deze factor heet de groeifactor.

De groeifactor bereken je door de nieuwe hoeveelheid te delen door de oude hoeveelheid.

Ook bij een afname spreek je van exponentiële groei.

Bij een toename is de groeifactor groter dan 1.

Bij een afname zit de groeifactor tussen 0 en 1.

Voorbeeld

tijd in weken	0	1	2	3
aantal	7	21	63	189

De groeifactor per week is steeds gelijk, dus bij de tabel hoort een exponentieel groeiproces. Het groeiproces beschrijft een exponentiële toename.

- S2**
- De tabellen hieronder horen bij exponentiële groei. Bereken bij elke tabel de groeifactor en vul de tabel in.

tijd in minuten	0	1	2	3	4	5
aantal	48	72	108	162	...	...

tijd in minuten	0	1	2	3	4	5
aantal	...	64	32	16	...	4

Theorie**Exponentiële formule, beginhoeveelheid en vermenigvuldigpunt**

Een formule van de vorm $h = b \times g^t$ heet een exponentiële formule. In deze formule is b de beginhoeveelheid op tijdstip $t = 0$ en is g de groeifactor per tijdseenheid.

Het keerteken wordt vaak door de vermenigvuldigpunt vervangen. Je krijgt dan $h = b \cdot g^t$.

De groeifactor g is altijd groter dan 0 en $g^0 = 1$.

Voorbeeld

$h = 4 \times 2^t$ met t de tijd in uren

t	0	1	2	3
h	4	8	16	32

De beginhoeveelheid is 4.
De groeifactor per uur is 2.
Je kunt de formule ook schrijven als $h = 4 \cdot 2^t$.

- S3** Gegeven is de formule $p = 250 \times 1,2^t$.
- Schrijf de formule met een vermenigvuldigpunt.
 - Geef de beginhoeveelheid en de groeifactor.
 - Bereken de uitkomst p bij $t = 1$ en bij $t = 4$.

Vaardigheid**Je kunt rekenen in een verhoudingstabel met percentages boven de 100%.**

- Maak een tabel. Zet linksboven aantal en daaronder percentage.
- Vul het gegeven aantal in en zet het bijbehorende percentage eronder.
- Ga in de tabel via het getal 1 naar het gevraagde percentage.
- Bereken de ontbrekende aantallen.
- Schrijf het antwoord op de vraag op.

Voorbeeld 1

Een mobiele telefoon kost € 530,- exclusief btw. Bereken de prijs inclusief 21% btw.

Oplossing

- | | | | | |
|---|-----------------|-----|------|--------|
| 1 | prijs in euro's | 530 | ... | ... |
| 2 | percentage | 100 | ... | ... |
| 3 | prijs in euro's | 530 | 0,53 | 641,30 |
| 4 | percentage | 100 | 1 | 121 |
- 5 De prijs inclusief btw is € 641,30.

Voorbeeld 2

Een mobiele telefoon kost € 605,- inclusief btw. Bereken de prijs exclusief 21% btw.

Oplossing

- | | | | | |
|---|-----------------|-----|-----|-----|
| 1 | prijs in euro's | 605 | ... | ... |
| 2 | percentage | 121 | ... | ... |
| 3 | prijs in euro's | 605 | 5 | 500 |
| 4 | percentage | 121 | 1 | 100 |
- 5 De prijs exclusief btw is € 500,-.

- S4**
- Een stoel kost € 167,- exclusief btw. Bereken de prijs inclusief 21% btw.
 - Een tafel kost € 489,- inclusief 21% btw. Bereken de prijs exclusief btw.

Vaardigheid

Je kunt procenten omzetten naar een factor.

Een toename van 25% betekent een verandering van 100% naar 125%. De factor daarbij is $\frac{125}{100} = 1,25$.

Bij een toename is de factor groter dan 1, bij een afname is de factor kleiner dan 1.

Voorbeeld

Hoe duur wordt een abonnement van € 50,- als de prijs met 15% verhoogd wordt?

Oplossing

Een toename van 15% betekent een verandering van 100% naar 115%.

De factor daarbij is $\frac{115}{100} = 1,15$.

De nieuwe prijs wordt € 50,- $\times 1,15 = € 57,50$.

S5 Vul de tabel verder in.

oude prijs	verandering	factor	nieuwe prijs
€ 75,-	3% toename	...	...
€ 390,-	...	1,24	...
€ 1.250,-	12% afname	...	...

Vaardigheid

Je kunt exponentiële groei herkennen en er een exponentiële formule bij opstellen.

Bij een exponentieel groeiproces is de groeifactor per tijdseenheid telkens hetzelfde. Je controleert dat door alle twee opeenvolgende uitkomsten door elkaar te delen.

Voor het opstellen van een exponentiële formule $h = b \cdot g^t$ moet je de beginhoeveelheid en de groeifactor weten.

Voorbeeld

t	0	1	2	3
N	5000	2000	800	320

Ga na of de tabel bij exponentiële groei hoort en stel de formule op.

Oplossing

$$\frac{2000}{5000} = 0,4; \frac{800}{2000} = 0,4; \frac{320}{800} = 0,4.$$

De groeifactor is telkens hetzelfde, dus de tabel hoort bij exponentiële groei. De beginhoeveelheid is 5000.

Een formule is $N = 5000 \cdot 0,4^t$.

S6 In de tabel zie je hoe de hoogte in cm per minuut afneemt.

- Ga na dat er sprake is van exponentiële groei.
- Bereken de groeifactor die bij de tabel hoort.
- Stel een formule op bij de tabel.

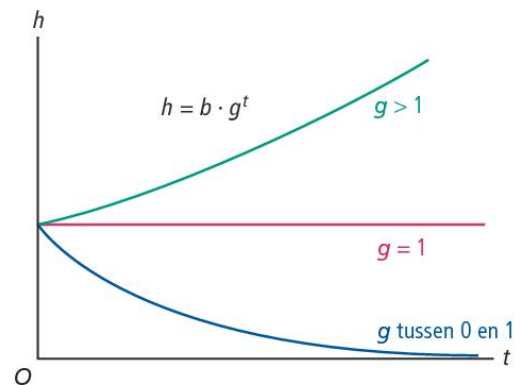
tijd in minuten	0	1	2	3	4
hoogte in cm	320	80	20	5	1,25

Vaardigheid

Je kunt aan een exponentiële formule zien of de grafiek stijgend of dalend is.

Een groeifactor g van een exponentieel verband is altijd een positief getal. Voor de grafiek bij dit verband geldt dat als $g > 1$, dan is de grafiek stijgend, als g tussen 0 en 1 ligt, is de grafiek dalend.

Als $g = 1$, dan is de grafiek constant. De grafiek is een horizontale lijn.



S7 Schrijf van elk van de volgende formules op of de grafiek stijgend, dalend of constant is.

- a** $b = 3 \cdot 5^t$ **c** $b = 5 \cdot 1^t$
b $b = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$ **d** $b = 3 \cdot 1,5^t$

Vaardigheid

Je kunt de standaardvorm voor grote en kleine getallen gebruiken.

Bij de standaardvorm of wetenschappelijke notatie is een getal geschreven als een vermenigvuldiging van een getal met een macht van 10. Daarbij ligt het voorste getal tussen 1 en 10. Bij grote getallen is de exponent van 10 positief en bij kleine getallen is de exponent van 10 negatief.

Voorbeeld 1

Het getal $7,02 \times 10^4$ kun je als gewoon getal schrijven door de komma vier plaatsen naar rechts te schuiven.
 $7,02 \times 10^4 = 70\,200$

Voorbeeld 2

Het getal $6,3 \times 10^{-5}$ kun je als gewoon getal schrijven door de komma vijf plaatsen naar links te schuiven.
 $6,3 \times 10^{-5} = 0,000\,063$

Voorbeeld 3

Het getal 0,001 378 in de standaardvorm is $1,378 \times 10^{-3}$. Bij het getal 1,378 moet de komma drie plaatsen naar links.
 $0,001\,378 = 1,378 \times 10^{-3}$

- S8**
- a** Schrijf als gewoon getal.
- A $3,41 \times 10^5$ C $1,09 \times 10^{-8}$
 B $8,0041 \times 10^3$ D $3,2 \times 10^{-3}$
- b** Schrijf in de standaardvorm. Rond daarbij het voorste getal af op één decimaal.
- E 50928000 G 4500210023
 F 0,00080526 H 0,057002

- T1** Bart koopt een broek, een vest en een T-shirt in de uitverkoop. Op een broek van € 55,- krijgt hij 15% korting, op een vest van € 39,95 krijgt hij 25% korting en het T-shirt kost € 10,-
Hoeveel betaalt Bart voor zijn nieuwe kleding?

- T2** Bente wil een nieuwe fiets. Ze vergelijkt de prijzen. Ze kan de fiets voor € 670,- exclusief 21% btw kopen via het internet. Bij de fietsenwinkel kost de fiets € 799,- inclusief 21% btw.
Waar is Bente het goedkoopste uit?

- T3** Het aantal muizen in een bepaald gebied groeit exponentieel. In de tabel staan de aantallen vanaf 2012.

<i>tijd</i> in jaren	2012	2013	2014	2015	2016
<i>aantal muizen</i>	1400	1498	1603	1715	1835



- a** Laat zien dat de groeifactor 1,07 is.
 - b** Met hoeveel procent groeit het aantal muizen per jaar?
 - c** Hoeveel muizen zullen er in 2018 in het gebied zijn?
 - d** De exponentiele groei is al in 2011 gestart.
Hoeveel muizen waren er in 2011?
- T4** Mireille heeft € 50.000,- gewonnen. Ze zet het geld op de bank en krijgt 1,5% rente per jaar.
- a** Met welke factor kun je berekenen hoe groot het bedrag is dat Mireille na een jaar op de bank heeft staan?
 - b** Maak een formule waarmee ze kan berekenen welk bedrag er na t jaren op haar rekening staat.
 - c** Na hoeveel jaar heeft ze voor het eerst meer dan € 52.500,- op haar rekening?

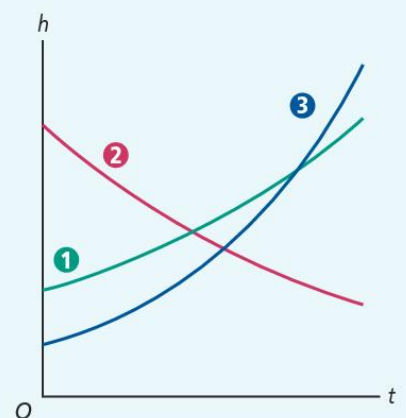
- T5** Bij de grafieken horen onderstaande formules.

A $h = 4 \cdot 1,1^t$

B $h = 10 \cdot 0,9^t$

C $h = 2 \cdot 1,2^t$

- a** Geef bij de formules aan welke grafiek erbij hoort.
- b** Er zijn twee grafieken die stijgen. Leg uit hoe je aan de bijbehorende formule kunt zien welke grafiek het snelst stijgt.



- T6** David heeft een tablet paracetamol geslikt. Met de formule $h = 500 \cdot 0,75^t$ kun je berekenen hoeveel milligram werkzame stof er na t uur nog in zijn bloed zit.
- Hoeveel milligram werkzame stof zit er in het bloed van David direct nadat hij een tablet geslikt heeft?
 - Hoe kun je aan de formule zien dat de werkzame stof afneemt?
 - Hoeveel werkzame stof in milligram zit er na 4 uur nog in het bloed van David? Rond je antwoord af op helen.
 - Na hoeveel uur zit er minder dan 100 milligram werkzame stof in het bloed van David?
 - Sven neemt twee tabletten tegelijk. Bereken hoeveel werkzame stof in milligram er na een uur in zijn bloed zit.



- T7** a Welke tabellen horen bij exponentiële groei?

A	t	0	1	2	3	4
	h	5,5	11	33	132	660

B	t	0	1	2	3	4
	h	3840	960	240	60	15

C	t	0	1	2	3	4
	h	16	56	196	686	2401

- b Maak een formule bij de tabellen die bij exponentiële groei horen.

- T8** a Schrijf de getallen uit de onderstaande zinnen in de standaardvorm. Rond zo nodig af op één decimaal.
 1 000 000 Indonesische roepia is ongeveer 68 euro.
 Dus een Indonesische roepia is 0,000 068 38 euro waard.
 In 2015 telde Indonesië ongeveer 255 993 000 inwoners.
- b Schrijf $7,65 \times 10^4$ en $2,78 \times 10^{-3}$ als gewoon getal.



Je kunt rekenen in een verhoudingstabel met percentages boven de 100%.

- E1**
- a** Vorig jaar zaten er 781 leerlingen op een school.
Het aantal leerlingen is dit jaar met 7% toegenomen.
Hoeveel leerlingen zitten er dit jaar op deze school?
 - b** In een klas met 29 leerlingen zit 55% meisjes.
Hoeveel meisjes zitten er in deze klas?
- E2** Bij een groothandel kost een nieuwe smartphone € 340,- exclusief 21% btw.
- a** Bereken de prijs inclusief 21% btw.
 - b** Dezelfde smartphone kun je via internet kopen voor € 445,- inclusief btw.
Bereken de prijs van deze smartphone exclusief btw.



Je kunt procenten omzetten naar factoren.

- E3** Vul de tabel in.

<i>oude prijs</i>	<i>verandering</i>	<i>factor</i>	<i>nieuwe prijs</i>
€ 125,-	40% toename	...	...
€ 80,-	26% afname	...	...
€ 930,-	...	1,21	...
€ 785,-	...	0,89	...

- E4** Jasper koopt een nieuwe sportoutfit met 25% korting.
De oorspronkelijke prijs is € 129,-
- a** Met welke factor kun je de nieuwe prijs berekenen?
 - b** Bereken de nieuwe prijs.

Je kunt exponentiële groei herkennen en er een exponentiële formule bij opstellen.

- E5**
- a** Eén van de tabellen hoort bij exponentiële groei.
Welke tabel is dat?

A

<i>t</i>	0	1	2	3	4
<i>h</i>	23	43	63	83	103

B

<i>t</i>	0	1	2	3	4
<i>h</i>	12	30	75	187,5	468,75

- b** Welke groeifactor hoort er bij de tabel met de exponentiële groei?
- c** Stel een formule op bij de tabel met exponentiële groei.

E6 De bedragen in de tabel zijn afgerond op hele euro's.

<i>tijd</i> in jaren	0	1	2	3	4
<i>bedrag</i> in euro's	550	616	690	773	866

- a Laat zien dat bij de tabel een groeifactor hoort van 1,12.
- b Hoe komt het dat de groeifactor niet overal precies 1,12 is?
- c Stel een formule op bij de tabel.

Je kunt aan een exponentiële formule zien of de grafiek stijgend of dalend is.

E7 De formules horen bij exponentiële groei.

- A $h = 23 \cdot 8^t$
- B $h = 0,7 \cdot 1,6^t$
- C $h = 2 \cdot 0,77^t$
- D $h = 0,5 \cdot 0,456^t$

- a Welke van deze formules horen bij een dalende grafiek?
- b Vul een getal in.
De groeifactor van een exponentiële formule die bij een stijgende grafiek hoort is groter dan ...
- c Is de volgende bewering juist?
Een groeifactor is altijd groter dan 0.

Je kunt de standaardvorm voor grote en kleine getallen gebruiken.

- E8**
- a Schrijf de getallen als een gewoon getal.
Een mens bestaat uit ongeveer 10^{14} cellen.
Een menselijke cel heeft een diameter van ongeveer $1,5 \times 10^{-5}$ meter.
 - b Schrijf de vier getallen uit de zinnen hieronder in de standaardvorm.
De kleinste keversoort is 0,325 millimeter groot.
Bultruggen wegen 25 000 tot 40 000 kilo. Ze eten ongeveer 1 500 kilo krill per dag.



E9 Schrijf de getallen hieronder als gewoon getal.

- a $5,725 \times 10^2$
- b $7,9213 \times 10^6$
- c $5,43 \times 10^{-3}$
- d 6×10^{-2}

E10 Schrijf de getallen hieronder in de standaardvorm.
Rond daarbij het voorste getal af op één decimaal.

- a 4 632 312 000
- b 59 118 733
- c 0,004
- d 0,000 027 645

Je leert

- hoe je de groeifactor omzet naar een groeifactor met een grotere tijdseenheid
- hoe je de groeifactor omzet naar een groeifactor per halve tijdseenheid

Deze paragraaf bereidt voor op klas 3 vwo.

- 1** Onder gunstige omstandigheden wordt een populatie fruitvliegjes 3 keer zo groot per dag.
Op een gegeven moment zijn er 1500 fruitvliegjes.
- Hoeveel zijn er een dag later? En twee dagen later?
 - Vul de tabel verder in.
 - Hoe groot is de groeifactor per dag?
 - En hoe groot is de groeifactor per twee dagen?

tijd per dag	0	1	2
aantal fruitvliegjes	1500	...	...

- 2** Hiernaast zie je de exponentiële groei van een aantal bacteriën. De groeifactor per kwartier is 1,5.
- De groeifactor tussen $t = 0$ en $t = 2$ is $1800 : 800 = 2,25$.
Bereken ook de groeifactor tussen $t = 1$ en $t = 3$.
 - Bereken $1,5^2$. Wat valt je op?
 - Hoe groot is de groeifactor per half uur?
 - En hoe groot is de groeifactor per heel uur?

tijd in kwartieren	0	1	2	3	4
aantal bacteriën	800	1200	1800	2700	4050

$\times 1,5$

Theorie

De groeifactor hangt af van de gegeven tijdseenheid.
Als de tijdseenheid wordt veranderd, verandert de groeifactor ook.
Als de groeifactor per jaar gelijk is aan g dan is de groeifactor per vijf jaar gelijk aan $g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g = g^5$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $A = 10 \cdot 1,8^t$ met t de tijd in kwartieren.
Geef een formule voor A met t de tijd in uren.

Oplossing

De groeifactor per kwartier is 1,8.
De groeifactor per uur is $1,8^4$ ofwel 10,5.
De formule wordt $A = 10 \cdot 10,5^t$.

- 3** De gemiddelde prijs van een woning in Amsterdam stijgt volgens de formule $P = 280 \times 1,013^t$.
 P is de prijs in duizenden euro's en t de tijd in maanden.
- Geef de groeifactor g per maand.
 - Bereken de waarde van g^{12} . Rond af op twee decimalen.
 - Leg uit dat dit de groeifactor per jaar is.
- 4** In een dorp met 15 000 inwoners is de groeifactor 0,98 per jaar.
- Bereken de groeifactor per vijf jaar, per tien jaar en per 25 jaar. Rond af op twee decimalen.
 - Geef formules voor het aantal inwoners met de groeifactor per vijf jaar, per tien jaar en per 25 jaar.
 - Bereken bij elke formule het aantal inwoners na 50 jaar.
 - Verklaar het verschil bij de antwoorden van opdracht c.

- 5 Een populatie fruitvliegjes wordt 25 keer zo groot in 2 weken. Op een gegeven moment zijn er 1600 fruitvliegjes.
- Hoe groot is de groeifactor per 2 weken?
 - Sanne zegt: ‘Voor de groeifactor g per week geldt $g \times g = g^2 = 25$, de groeifactor per week is dus $\sqrt{25} = 5$. Leg de redenering van Sanne met behulp van de tabel uit.
 - Bereken op dezelfde manier de groeifactor per halve week. Rond het antwoord af op twee decimalen.
 - Controleer de antwoorden door de vermenigvuldigingen onder de tabel te maken.

<i>tijd in weken</i>	0	1	2
<i>aantal fruitvliegjes</i>	1600	...	...
groeifactor per week	$\times \dots$	$\times \dots$	
groeifactor per 2 weken	$\times \dots$		

Theorie

Als de groeifactor per tijdseenheid gelijk is aan g , dan is de **groeifactor per halve tijdseenheid** gelijk aan $\sqrt{g}$.

Voorbeeld

De groeifactor per uur is 9.
Bereken de groeifactor per half uur en per kwartier.

Oplossing

De tijdseenheid wordt gehalveerd, dus de groeifactor per half uur is gelijk aan $\sqrt{9} = 3$.
Voor de groeifactor per kwartier wordt de tijdseenheid nogmaals gehalveerd.
De groeifactor is dan $\sqrt{3} \approx 1,73$.

- 6 Bereken de volgende groeifactoren. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- De groeifactor per dag gelijk is aan 9.
Hoe groot is de groeifactor per 12 uur?
 - De groeifactor per half uur is gelijk aan 1,44.
Bereken de groeifactor per kwartier.
 - De groeifactor per jaar is gelijk aan 0,75.
Bereken de groeifactor per half jaar.
- 7 Ina krijgt 8 cc (= 8 cm³) van een geneesmiddel toegediend. Het lichaam breekt het geneesmiddel af, zodat de hoeveelheid medicijn in haar bloed steeds kleiner wordt.
Voor de hoeveelheid medicijn H in cc na een tijd van t dagen geldt de formule $H = 8 \times 0,6^t$.
- Bereken de groeifactor per twaalf uur in twee decimalen nauwkeurig.
 - Gebruik de nieuwe groeifactor om de hoeveelheid medicijn na twaalf uur te berekenen.







In dit hoofdstuk

In klas 1 heb je geleerd hoe je de oppervlakte van driehoeken die getekend zijn op roosterpapier, berekent door inlijsten.

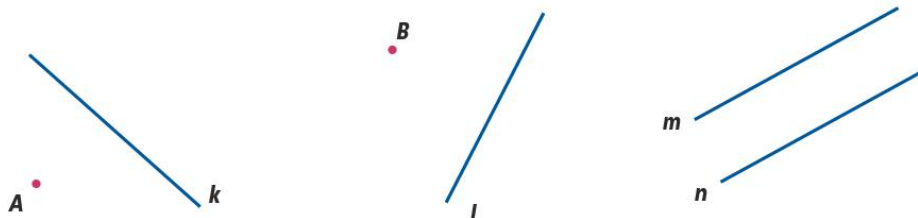
In dit hoofdstuk leer je hoe je de oppervlakte van driehoeken berekent die niet op roosterpapier zijn getekend.

De oppervlakte van een rechthoek kun je berekenen met de formule $\text{oppervlakte} = \text{lengte} \times \text{breedte}$. In dit hoofdstuk maak je kennis met een formule waarmee je de oppervlakte van een parallellogram berekent. Soms moet je daarbij de stelling van Pythagoras gebruiken. Ten slotte leer je de omtrek en de oppervlakte van een cirkel te berekenen.

In hoofdstuk 10 ga je deze formules toepassen bij het berekenen van de inhoud van een ruimtefiguur.



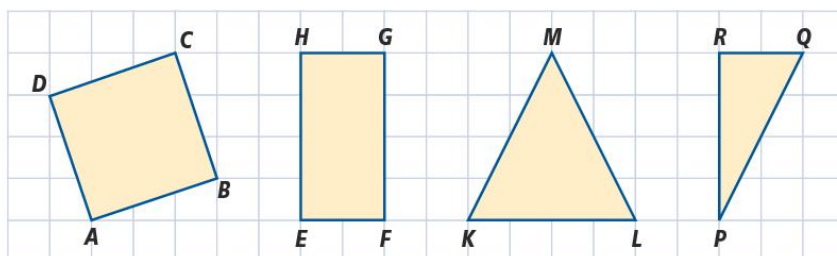
V1



- Meet in de figuur de afstand van punt A tot lijn k .
- Hoeveel mm is de afstand van punt B tot lijn l ?
- En hoeveel mm is de afstand tussen lijn m en lijn n ?

V2 Vul in.

- | | |
|---|--|
| a $5,8 \text{ km} = \dots \text{ m}$ | e $710 \text{ mm}^2 = \dots \text{ cm}^2$ |
| b $491 \text{ cm} = \dots \text{ m}$ | f $0,034 \text{ m}^2 = \dots \text{ cm}^2$ |
| c $27 \text{ m} = \dots \text{ km}$ | g $41 \text{ dm}^2 = \dots \text{ mm}^2$ |
| d $16\,000 \text{ cm} = \dots \text{ km}$ | h $5200 \text{ cm}^2 = \dots \text{ m}^2$ |



V3

W

- Geef met tekenjes in de figuren aan welke hoeken even groot zijn en welke zijden even lang zijn.
- Hoe noem je vierhoek $ABCD$?
- En hoe noem je vierhoek $EFGH$?
- Wat voor een soort driehoek is driehoek KLM ?
- En wat voor een soort driehoek is driehoek PQR ?
- Hoeveel roostervierkantjes is de oppervlakte van vierhoek $EFGH$?
- Bereken met inlijsten de oppervlakten van de andere figuren.

V4 Vierkant $PQRS$ heeft zijden van 6 cm. Vierkant $VWXY$ heeft zijden van 18 cm.

- Hoe groot is de factor bij de vergroting van vierkant $PQRS$ naar vierkant $VWXY$?
- Bereken de oppervlakte van beide vierkanten.
- Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van vierkant $VWXY$ als de oppervlakte van vierkant $PQRS$?

- V5** Van vier rechthoeken zijn de lengte en de breedte gegeven. Reken, indien nodig, deze maten om in dm en bereken hoeveel dm^2 de oppervlakte is.

- a** 1,6 dm en 7 dm **c** 0,41 dm en 1700 cm
b 45 cm en 11,6 dm **d** 8,9 m en 930 cm

Aanpak

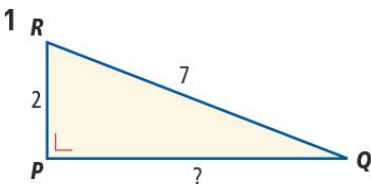
Hoe bereken je de lengte van een zijde in een rechthoekige driehoek?

- 1 Maak een schets van de driehoek en zet de gegevens erbij.
- 2 Zet de bekende afmetingen in een schema. Zorg er voor dat de langste zijde altijd onderaan staat.
- 3 Bereken de kwadraten van de gegeven zijden.
- 4 Bereken het kwadraat van de onbekende zijde.
- 5 Neem de wortel.

Voorbeeld

Van $\triangle PQR$ is $\angle P = 90^\circ$, $PR = 2$ en $QR = 7$.
 Bereken de lengte van zijde PQ .

Oplossing



2	zijde	kwadraat
3	$PR = 2$	4
	$PQ = \dots$	$\dots +$
	$QR = 7$	49

4 $PQ^2 = 49 - 4$

$PQ^2 = 45$

5 $PQ = \sqrt{45} \approx 6,71$

- V6** Bereken met de gegevens van de driehoeken hieronder de lengte van de onbekende zijde. Rond indien nodig af op twee decimalen.

- a** $\triangle ABC$ met $\angle A = 90^\circ$, $AB = 2$ en $AC = 5$
b $\triangle KLM$ met $\angle L = 90^\circ$, $KL = 24$ en $KM = 25$
c $\triangle PQR$ met $\angle R = 90^\circ$, $PQ = 30$ en $QR = \sqrt{704}$

- V7** De clubvlag van SRB is een rechthoek van 120 cm bij 75 cm. De diagonaal verdeelt die rechthoek in tweeën.
- Bereken hoeveel cm^2 de oppervlakte van de clubvlag is.
 - Wat voor soort driehoek wordt gevormd door het blauwe gedeelte van de clubvlag van SRB?
 - Hoe groot is de oppervlakte van het blauwe gedeelte van de clubvlag van SRB?
 - Hoeveel cm is de lengte van de diagonaal? Rond je antwoord af op één decimaal.



Je leert • hoe je de oppervlakte van een driehoek berekent

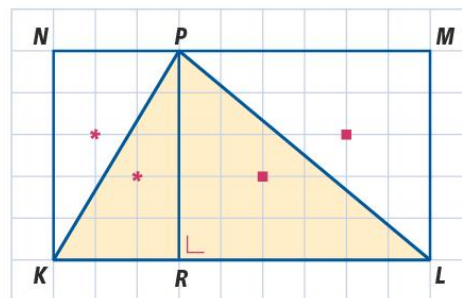
Leerroutes • ondersteunend: 1—2—3—04—5—6—07—7
 • doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8
 • uitdagend: 2—3—4—5—6—7—8—U1

Het type zeilboot op de foto heet '16 kwadraat'. De lengte van deze boot is 6 meter.

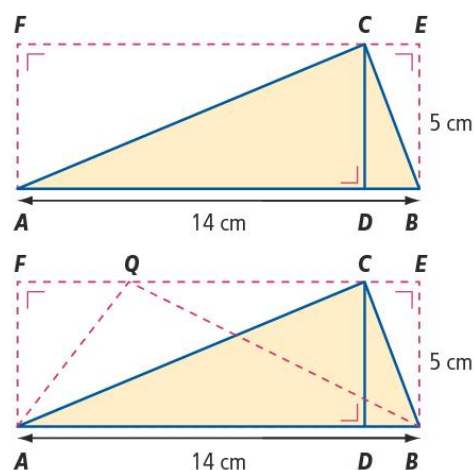
- Kun je de naam '16 kwadraat' verklaren?



- 1 Van $\triangle KLP$ is $KL = 9$ cm en de afstand van punt P tot zijde KL is 5 cm.
- Bereken met inlijsten de oppervlakte in cm^2 van $\triangle KLP$.
 - Leg uit waarom de twee linker driehoeken met een sterretje dezelfde oppervlakte hebben.
 - Wat weet je van de oppervlakte van de twee rechter driehoeken met een vierkantje?
 - Waarom is de oppervlakte van $\triangle KLP$ gelijk aan de helft van de oppervlakte van rechthoek $KLMN$?
 - Ga na dat je de oppervlakte van $\triangle KLP$ kunt berekenen met de formule
 $\text{oppervlakte } \triangle KLP = \text{lengte } KL \times \text{lengte } PR : 2$.



- 2
- Hoe groot is in $\triangle ABC$ de afstand van hoekpunt C tot zijde AB ?
 - Bereken de oppervlakte van rechthoek $ABEF$.
 - Leg uit waarom de oppervlakte van $\triangle ABC$ de helft is van de oppervlakte van rechthoek $ABEF$.
 - Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.
 - Punt Q ligt net als punt C op de lijn EF . Hoe groot is de afstand van hoekpunt Q tot zijde AB ?
 - Leg uit waarom de oppervlakte van $\triangle ABQ$ gelijk is aan de oppervlakte van $\triangle ABC$.
 - Punt R is een ander punt op de lijn EF . Hoe groot is de oppervlakte van $\triangle ABR$?



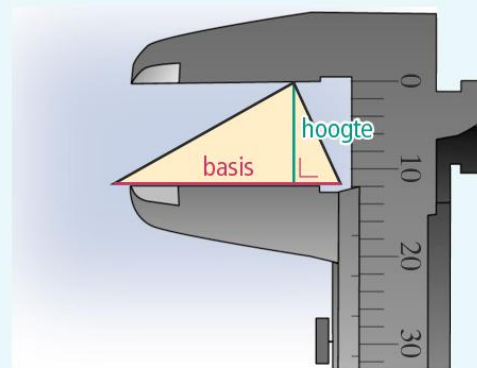
Theorie

Voor de oppervlakte van een driehoek zijn de afstand van een hoekpunt tot de tegenoverliggende zijde en de lengte van die zijde belangrijk. Voor de afstand tot die zijde en de lengte van die zijde gebruik je de woorden **hoogte** en **basis**. De hoogte staat daarbij altijd loodrecht op de basis.

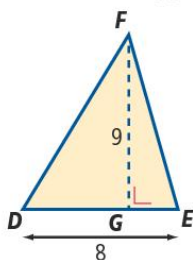
Voor de **oppervlakte van een driehoek** geldt

$$\text{oppervlakte} = \text{basis} \times \text{hoogte} : 2.$$

Voor de oppervlakte wordt als afkorting de letter A van area (oppervlakte in het Engels) gebruikt. De formule wordt dan korter $A = b \times h : 2$ of ook wel $A = \frac{1}{2} \times b \times h$.

**Voorbeeld**

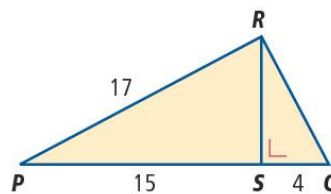
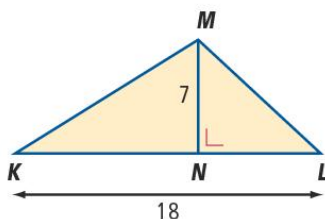
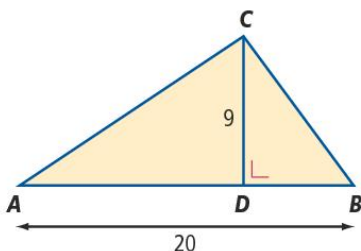
Bereken de oppervlakte van $\triangle DEF$.

**Oplossing**

De basis $DE = 8$ en de hoogte $FG = 9$.

$$\text{oppervlakte } \triangle DEF = 8 \times 9 : 2$$

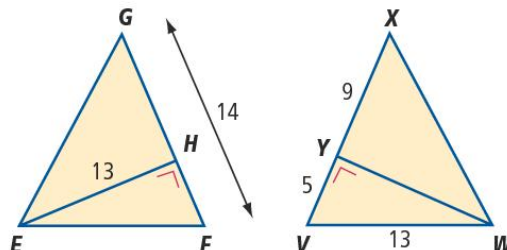
$$\text{oppervlakte } \triangle DEF = 36$$



- 3 a Leg uit dat in $\triangle ABC$ bij de basis AB de hoogte CD hoort.
 b Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.
 c Bereken de oppervlakte van $\triangle KLM$.
 d Bereken met de stelling van Pythagoras de hoogte RS in $\triangle PQR$.
 e Bereken de oppervlakte van $\triangle PQR$.

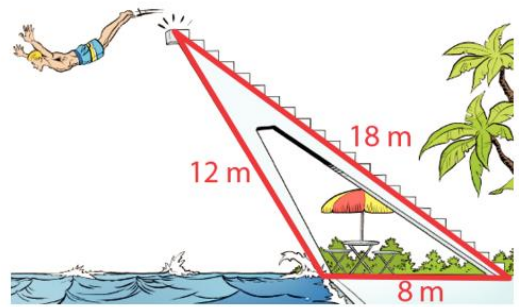
Ondersteunende route → maak opdracht 04

- 4 a Om de oppervlakte van $\triangle EFG$ te berekenen, kun je zijde FG als basis gebruiken. Welk hoogte hoort bij de basis FG ?
 b Bereken de oppervlakte van $\triangle EFG$.
 c Bereken de oppervlakte van $\triangle VWX$.

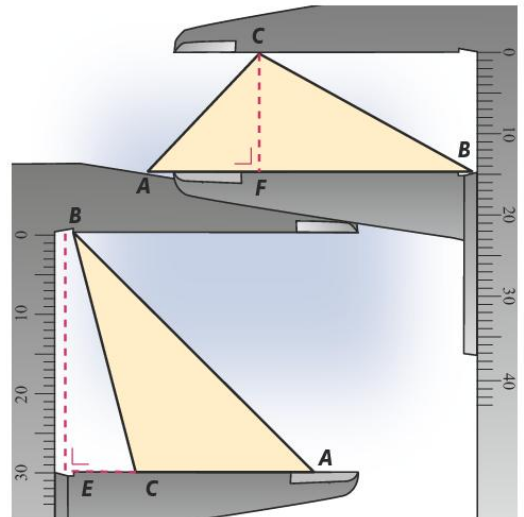


- 5** In een folder van een zwembad staat een schets van een duiktoren. Een duiktoren is hoger dan een duikplank en heeft geen springplank. Tom zegt: 'Die duiktoren is wel 12 meter hoog!'. In de folder staat echter dat de hoogte 10 meter is.

- a** Leg uit waarom Tom geen gelijk heeft.
b Geef in de schets de hoogte van de duiktoren aan.

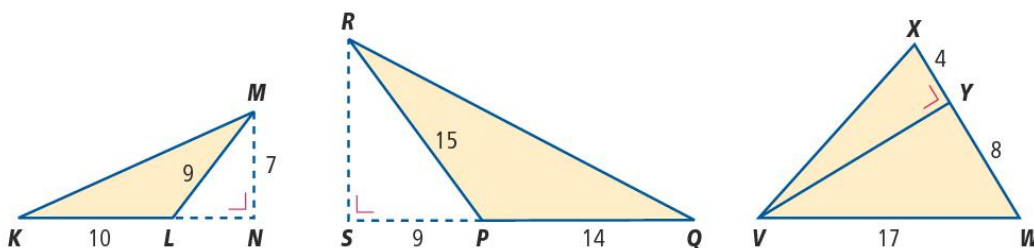


- 6** Een driehoek heeft zijden van 40 mm, 31 mm en 20 mm. Pepijn plaatst de driehoek eerst in een schuifmaat zodat zijde AB de basis is.
- a** Hoeveel mm is de hoogte CF ?
b Bereken in mm^2 de oppervlakte van de driehoek met de formule
 $\text{oppervlakte } \triangle ABC = \text{basis } AB \times \text{hoogte } CF : 2$.
c Vervolgens plaatst Pepijn de driehoek met zijde AC als basis in de schuifmaat. Je ziet dat de hoogte BE nu buiten de driehoek komt te liggen. Hoeveel mm is de hoogte BE ?
d Bereken in mm^2 de oppervlakte van de driehoek met de formule
 $\text{oppervlakte } \triangle ABC = \text{basis } AC \times \text{hoogte } BE : 2$.
e Vergelijk de uitkomsten van de opdrachten b en d. Waarom moeten deze uitkomsten gelijk zijn?



Ondersteunende route → maak opdracht 07

- 7** Bereken de oppervlakte van de driehoeken hieronder.



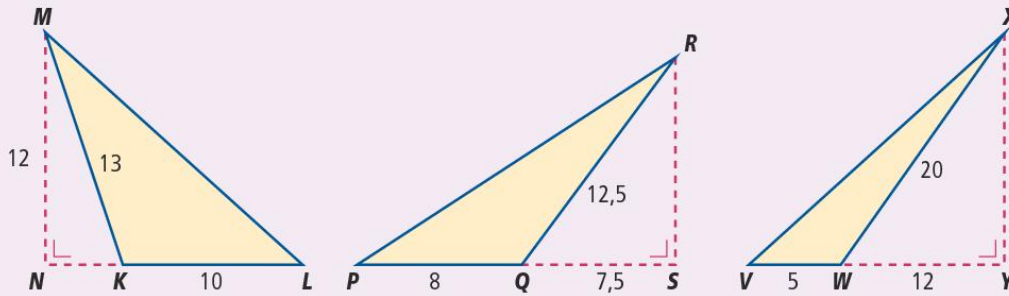
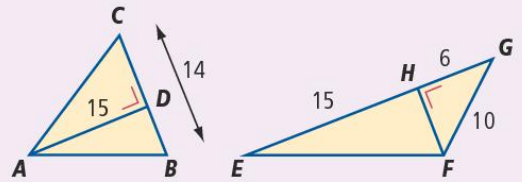
- 8** Gegeven zijn de punten $G(4, 1)$, $H(7, 1)$ en $I(1, 4)$.
- a** Teken in een assenstelsel $\triangle GHI$.
b Welke zijde kun je het beste als basis nemen?
c Bereken de oppervlakte van $\triangle GHI$.

Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

04

- a Om de oppervlakte van $\triangle ABC$ te berekenen, kun je zijde BC als basis gebruiken.
Waarom? En welke hoogte hoort bij die basis?
- b Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.
- c Waarom kun je de oppervlakte van $\triangle EFG$ nog niet berekenen als je zijde EG als basis gebruikt?
- d Bereken met de stelling van Pythagoras de hoogte FH .
- e Bereken de oppervlakte van $\triangle EFG$.



07

- a Leg uit waarom in $\triangle KLM$ de zijde KM niet de hoogte kan zijn bij de basis KL .
- b Welke hoogte hoort wel bij de basis KL ?
- c Bereken de oppervlakte van $\triangle KLM$.
- d Bereken in $\triangle PQR$ de hoogte die hoort bij de basis PQ .
- e Bereken de oppervlakte van $\triangle PQR$.
- f Bereken de oppervlakte van $\triangle VWX$.

Uitdagende opdrachten

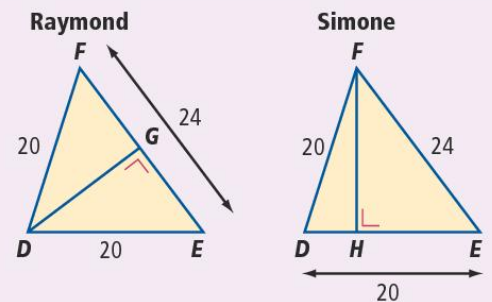
U1

Raymond en Simone moeten de oppervlakte van de gelijkbenige driehoek DEF berekenen.

Raymond neemt EF als basis en DG als hoogte.

Simone neemt DE als basis en FH als hoogte.

- a Waarom kun je de hoogte DG bij Raymond wel berekenen en de hoogte FH bij Simone nog niet?
- b Bereken eerst de hoogte DG en reken daarmee de oppervlakte van $\triangle DEF$ uit.
- c Simone weet nu de oppervlakte van $\triangle DEF$ en wil daarmee de hoogte FH berekenen. Simone gebruikt voor de oppervlakte van $\triangle DEF$ de formule $\text{oppervlakte } \triangle DEF = \text{basis } DE \times \text{hoogte } FH : 2$.
Vul de oppervlakte van $\triangle DEF$ en de basis DE in deze formule in en bereken de hoogte FH .

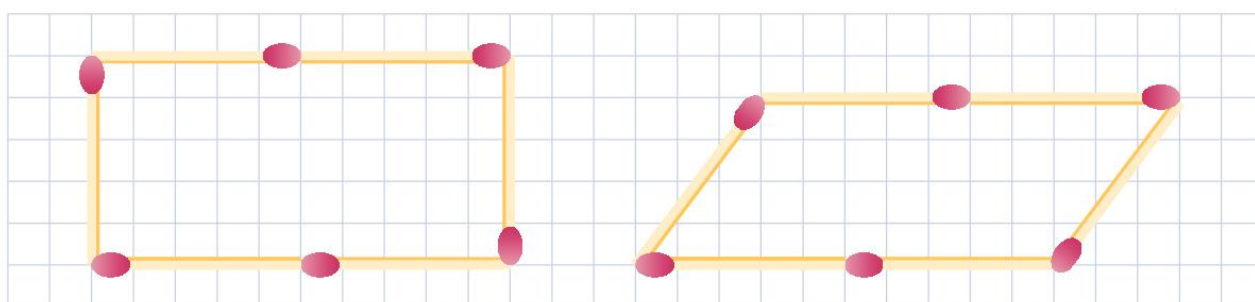


Je leert • hoe je de oppervlakte van een parallellogram berekent

Leerroutes • ondersteunend: 9—10—011—12—013—13
• doorlopend: 9—10—11—12—13—14
• uitdagend: 10—11—12—13—14—U2

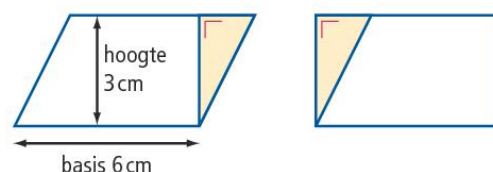
Julia heeft een hek gemaakt met twee latten van 1 meter en twee van 50 cm.

- Waarom heeft de vierhoek die wordt ingesloten door de latten de vorm van een parallellogram?
- Wanneer is de oppervlakte van dit parallellogram maximaal?



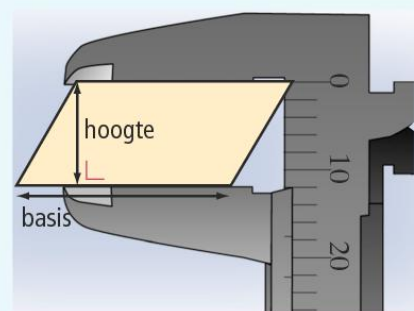
- 9 Met zes lucifers van 5 cm wordt op roosterpapier een rechthoek gelegd.
- Bereken de oppervlakte in cm^2 van de rechthoek.
 - Met zes andere lucifers wordt het parallellogram gelegd. Zeg, zonder te berekenen, of je denkt dat de oppervlakte van het parallellogram groter dan, kleiner dan of gelijk is aan de oppervlakte van de rechthoek.
 - Controleer je antwoord door met inlijsten de oppervlakte van het parallellogram te berekenen.

- 10 Maura knipt van een parallellogram de gekleurde rechthoekige driehoek af en legt die aan de andere kant erbij.
- Hoe breed en hoe hoog is de rechthoek die Maura krijgt?
 - En hoe groot is de oppervlakte A van de rechthoek?
 - Waarom is de oppervlakte van het parallellogram even groot als de oppervlakte van de rechthoek die ze krijgt?
 - Hoe groot is de oppervlakte A van het parallellogram?

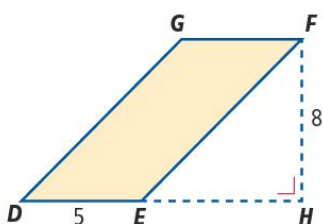


Theorie

Ook voor de oppervlakte van een parallellogram zijn de basis en de hoogte belangrijk. De hoogte staat daarbij weer altijd loodrecht op de basis. Je mag de hoogte ook buiten het parallellogram kiezen. Voor de **oppervlakte van een parallellogram** geldt $\text{oppervlakte} = \text{basis} \times \text{hoogte}$ of korter $A = b \times h$.

**Voorbeeld**

Bereken de oppervlakte van parallellogram $DEFG$.

**Oplossing**

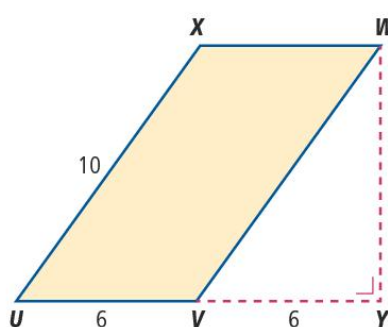
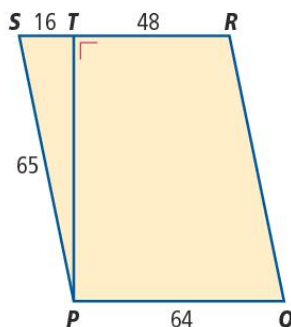
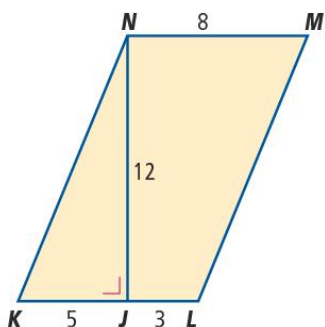
De basis $DE = 5$ en de hoogte $FH = 8$.

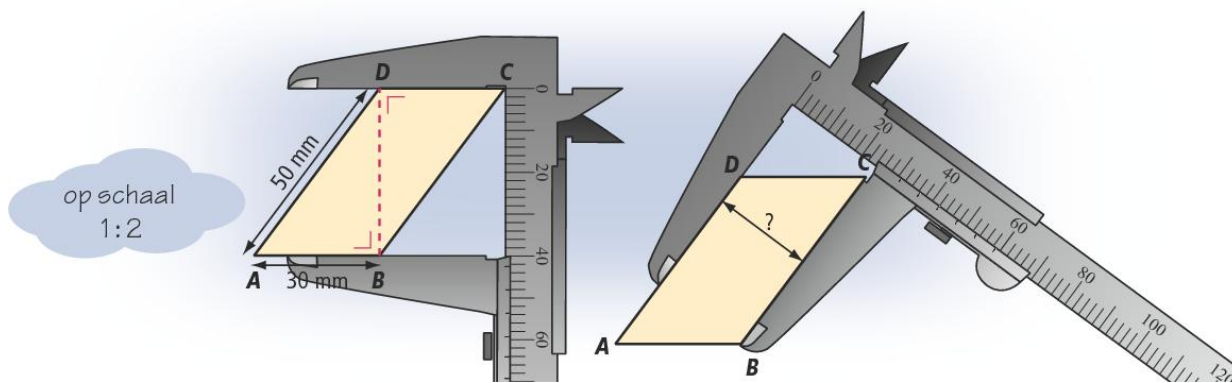
$$\text{oppervlakte } DEFG = 5 \times 8$$

$$\text{oppervlakte } DEFG = 40$$

Ondersteunende route → maak opdracht 011

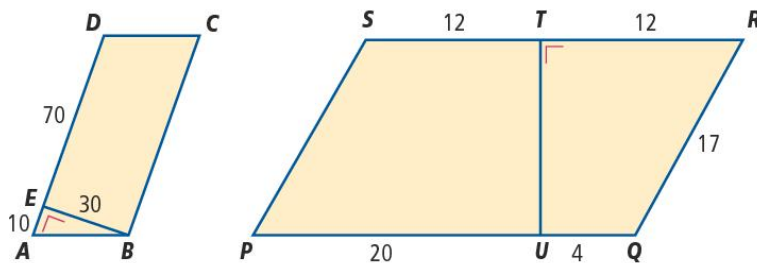
- 11
- Bereken de oppervlakte van parallellogram $KLMN$.
 - Bereken met de stelling van Pythagoras de lengte van lijnstuk PT in parallellogram $PQRS$.
 - Bereken de oppervlakte van parallellogram $PQRS$.
 - Bereken de oppervlakte van parallellogram $UVWX$.





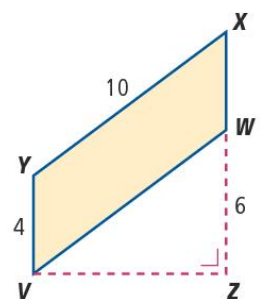
- 12** Pepijn heeft een parallellogram met $AB = 30$ mm en $AD = 50$ mm. Hij plaatst het parallellogram zo in een schuifmaat dat zijde AB de basis is. In die stand linksboven staat BD loodrecht op AB en is BD de hoogte.
- Geef de lengte van BD .
 - Hoeveel mm^2 is de oppervlakte van parallellogram $ABCD$?
 - Daarna plaatst Pepijn het parallellogram zoals rechtsboven in de schuifmaat. Zijde BC is nu de basis. Hoeveel mm is de hoogte in dat geval?
 - Hoe kun je nu met een berekening controleren dat je de hoogte goed afgelezen hebt?

Ondersteunende route → maak opdracht 013

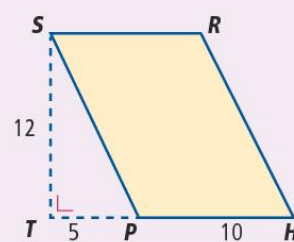
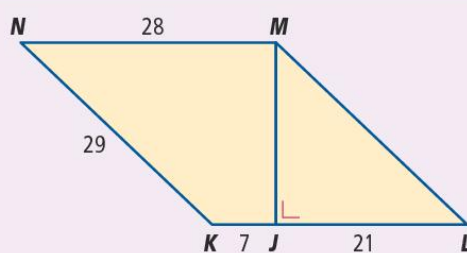
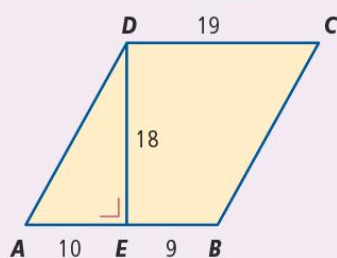


- 13** Bereken de oppervlakte van parallellogram $ABCD$ en parallellogram $PQRS$.
- 14**
- Bereken de oppervlakte van parallellogram $VWXY$.
 - Parallellogram $VWXY$ wordt vergroot door alle zijden met de factor 3 te vermenigvuldigen. Bereken de omtrek en de oppervlakte van de vergroting.

Uitdagende route → maak opdracht U2

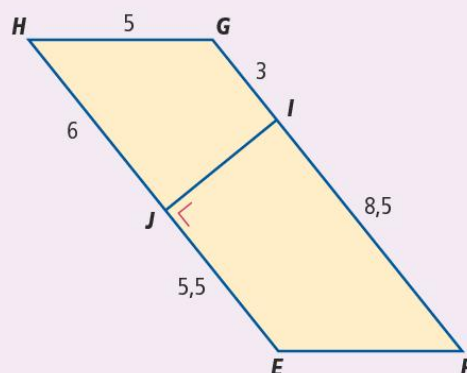


Ondersteunende opdrachten

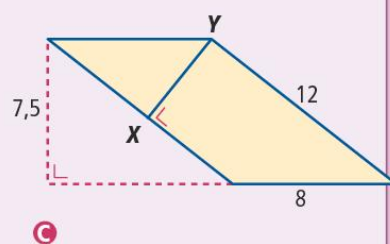
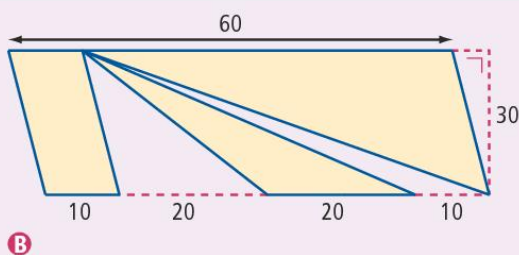
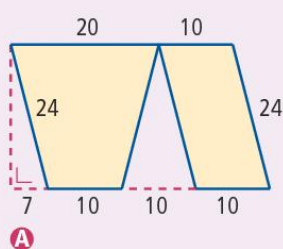


- 011**
- Hoeveel is de hoogte van parallellogram $ABCD$? En hoe lang is de basis?
 - Bereken de oppervlakte van parallellogram $ABCD$.
 - Waarom is in parallellogram $KLMN$ zijde $LM = 29$?
 - Leg uit dat je de lengte van JM nodig hebt om de oppervlakte van parallellogram $KLMN$ te berekenen.
 - Bereken de lengte van lijnstuk JM .
 - Bereken de oppervlakte van parallellogram $KLMN$.
 - Bereken de oppervlakte van parallellogram $PQRS$.

- 013**
- In het parallellogram $EFGH$ is de hoogte IJ aangegeven. Leg uit waarom je met deze tekening de lengte van IJ niet kunt berekenen.
 - Pim trekt een hulplijn GK loodrecht op zijde EH . Waarom is lijnstuk GK net zo lang als lijnstuk IJ ?
 - Maak een schets van parallellogram $EFGH$ met daarin de hulplijn GK van Pim uit opdracht b.
 - Zet de maten in de schets.
 - Bereken de hoogte van het parallellogram.
 - Hoe groot is de oppervlakte van parallellogram $EFGH$?



Uitdagende opdrachten



- U2**
- Bereken van figuur A de oppervlakte van het gele gedeelte. Rond af op twee decimalen.
 - Bereken ook van figuur B de oppervlakte van het gele gedeelte.
 - Bereken de oppervlakte van figuur C.
 - Bereken in figuur C de lengte van lijnstuk XY .

Je leert

- wat een middellijn, straal en diameter is
- hoe je de omtrek van een cirkel berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 15—16—17—018—18—019—19
- doorlopend: 15—16—17—18—19—20—21
- uitdagend: 15—16—17—20—21—U3—U4

Het gele vierkant in het glas-in-loodraam is 60 cm bij 60 cm.

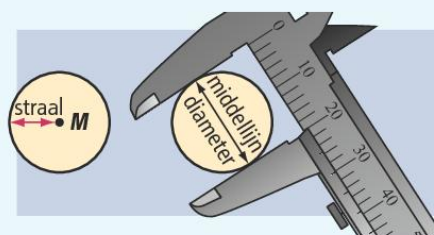
- Hoe groot is de omtrek van het blauwe vierkant?
- Geef een schatting van de omtrek van de cirkel in het raam.



- 15
- Teken een cirkel met een straal van 3 cm.
 - Teken een lijnstuk dat de cirkel in precies twee even grote stukken verdeelt.
Hoe lang is dit lijnstuk?

Theorie

Een lijnstuk dat een cirkel in twee gelijke stukken verdeelt, heet een **middellijn**. De middellijn is twee keer zo lang als de **straal**. De lengte van de middellijn is de **diameter** van de cirkel.



- 16
- De straal van een munt van 2 euro is ongeveer 13 mm. Meet op de foto hoe groot de diameter van de munt is.
 - Meet ook de diameter van de andere munten.
 - Met de touwtjes is de omtrek van de drie munten gemeten.
Welk touwtje hoort bij de munt van 1 euro?
 - Vul de diameters en de lengten van de touwtjes in de tabel in.

<i>munt</i>	<i>2 euro</i>	<i>1 euro</i>	<i>20 cent</i>
<i>diameter munt</i> in mm	...	...	...
<i>lengte touwtje</i> in mm	...	...	...

- Ga bij elke munt na met welk getal je de diameter moet vermenigvuldigen om de omtrek te krijgen.

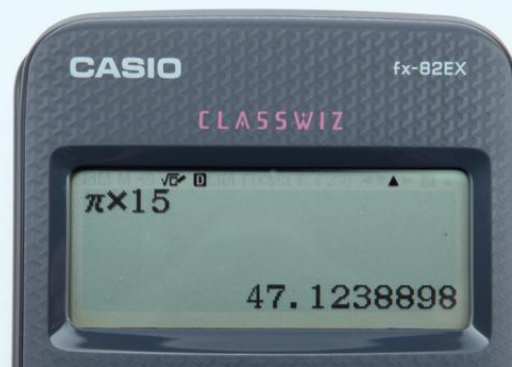


Theorie

De omtrek van een cirkel kun je benaderen door de diameter met 3,14 te vermenigvuldigen. Het exacte getal waarmee je moet vermenigvuldigen is het getal π . Je spreekt dat uit als pi. Op je rekenmachine zit een toets voor het getal π .

De formule waarmee je de **omtrek van een cirkel** berekent is $omtrek = \pi \times diameter$.

Voor de omtrek wordt wel de P van perimeter (omtrek in het Engels) gebruikt. De formule wordt dan korter $P = \pi \times d$.

**Voorbeeld 1**

Van een wiel is de diameter 15 cm.
Bereken de omtrek van het wiel in mm nauwkeurig.

Oplossing

$$omtrek\ wiel = \pi \times 15$$

$$omtrek\ wiel \approx 47,1\text{ cm of }471\text{ mm.}$$

Voorbeeld 2

Hoe groot is de omtrek P van een cirkel met een straal van 3? Rond af op twee decimalen.

Oplossing

De diameter is $2 \times 3 = 6$.

$$P = \pi \times 6$$

De omtrek P is ongeveer 18,85.

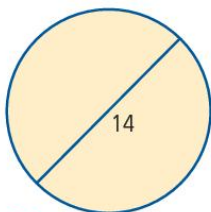
17 Vul de tabel verder in.

straal cirkel	diameter cirkel	omtrek cirkel
...	9	28,27
4	...	...
14	...	...
...	12	...

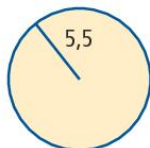
Ondersteunende route → maak opdracht 018

18 Rond in deze opdracht je antwoorden af op twee decimalen.

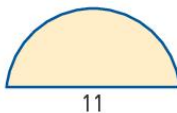
- Bereken de omtrek van figuur A.
- Bereken ook de omtrek van figuur B.
- Figuur C is een halve cirkel met diameter 11.
Welke omtrek heeft deze figuur?



A



B



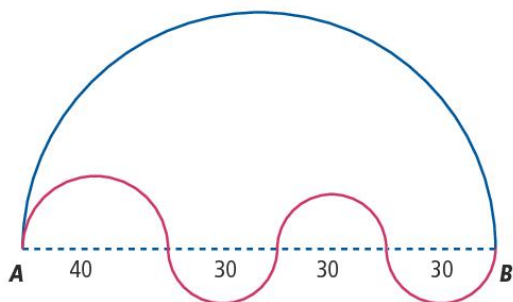
C

Als je de omtrek van een cirkel weet, dan kun je de bijbehorende diameter berekenen. Hiervoor moet je de omtrek door π delen.

$$\begin{aligned} \text{omtrek} &= \pi \times \text{diameter} \\ \text{diameter} &= \text{omtrek} : \pi \end{aligned}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 019

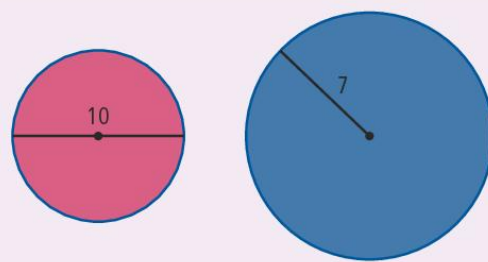
- 19**
- a** De diameter van een lantaarnpaal is 12,3 cm. Bereken de omtrek van de lantaarnpaal in cm. Rond verstandig af.
 - b** Hoeveel mm is de diameter van een paaltje met een omtrek van 158 mm?
 - c** Hoeveel mm, in één decimaal, is de straal van een paaltje met een omtrek van 245 mm?
- 20** De oude fiets hiernaast heeft een voorwiel met een straal van 80 cm.
- a** Hoeveel cm is de afstand die het voorwiel aflegt als het één keer ronddraait? Rond af op hele cm.
 - b** Nick fietst 6 km met deze fiets. Hoe vaak draait het voorwiel rond?
 - c** Het achterwiel draait tijdens deze rit 3200 keer rond. Hoeveel cm is de omtrek van het achterwiel?
 - d** En hoeveel cm is de diameter van het achterwiel?
- 21** De tekening hieronder bestaat uit halve cirkels. In de tekening zijn er drie routes om van punt *A* naar punt *B* te gaan. De kortste route is natuurlijk langs de gestippelde diameter van de 'grote' cirkel.
- a** Hoe groot is deze diameter?
 - b** Hoe lang is de route via de blauwe boog?
 - c** Wat verwacht je, is de route via de rode halve cirkels langer, korter of even lang als de route via de blauwe halve cirkel?
 - d** Controleer je antwoord van met een berekening.



Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

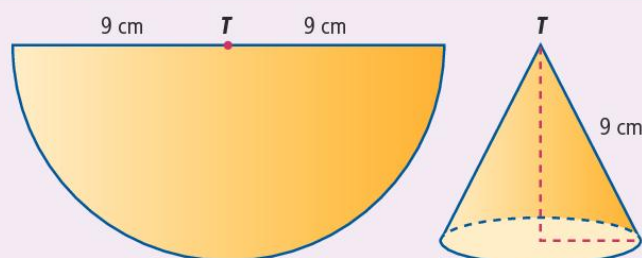
Ondersteunende opdrachten

- O18** a De diameter van de rode cirkel is 10.
Vul in:
de omtrek van de rode cirkel is $\pi \times \dots \approx \dots$
Rond je antwoord af op twee decimalen.
- b De straal van de blauwe cirkel is 7.
Vul in:
de diameter van de blauwe cirkel is $\dots \times 7 = \dots$ en
de omtrek van de blauwe cirkel is $\pi \times \dots \approx \dots$



- O19** Bij het rekenen met de omtrek van een cirkel gebruik je de formules $omtrek = \pi \times diameter$ en $diameter = omtrek : \pi$.

- a De diameter van een blikje is 8 cm.
Bereken de omtrek van het blikje in cm. Rond je antwoord af op één decimaal.
- b De omtrek van een ander blikje is 204 mm.
Vul in: de diameter is $204 : \dots \approx \dots$ mm.

**Uitdagende opdrachten**

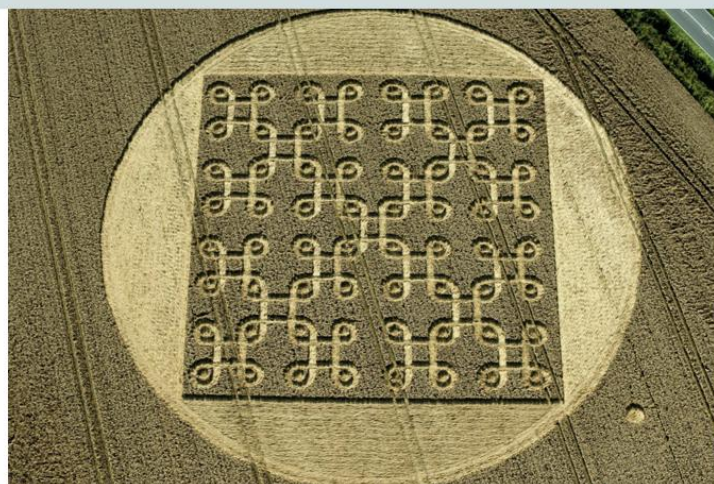
- U3** Van een stuk papier dat de vorm heeft van een halve cirkel met een straal van 9 cm wordt een kegel gemaakt. De onderste rand van de kegel heeft weer de vorm van een cirkel.
Hoe groot is de straal van deze cirkel?
- U4** Een cilindervormig blik heeft een diameter van 10 cm en een hoogte van 18 cm.
- a Bereken de oppervlakte in cm^2 van het etiket van het blik. Rond je antwoord af op twee decimalen.
- b Bij een ander blik zijn de afmetingen 2,5 keer zo groot.
Bereken de oppervlakte in cm^2 van het etiket van dat blik.



- Je leert** • hoe je de oppervlakte van een cirkel berekent
- Leerroutes** • ondersteunend: 22—23—24—25—026—027—27
 • doorlopend: 22—23—24—25—26—27—28
 • uitdagend: 23—24—26—27—28—U5—U6

Je ziet een luchtfoto van een graancirkel met daarin een vierkant. Het vierkant heeft zijden van 60 meter.

- Hoe groot schat je de oppervlakte van de graancirkel?

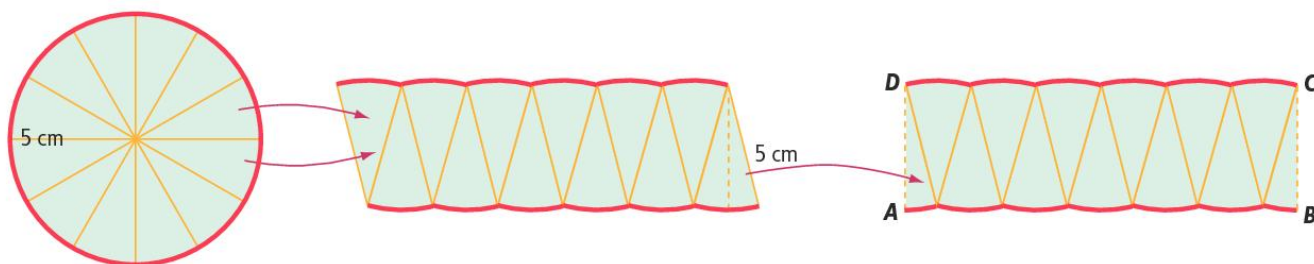


- 22** a Neem roosterpapier met vierkantjes van 1 cm bij 1 cm en teken een cirkel met een straal van 5 cm.
 b Schat door het aantal roostervierkantjes binnen je cirkel te tellen hoeveel cm^2 de oppervlakte van die cirkel ongeveer is.

- 23** Je wilt een nauwkeurigere schatting voor de oppervlakte van een cirkel met een straal van 5 cm vinden.

W

- a Verdeel een cirkel met een straal van 5 cm in twaalf even grote stukken en knip deze uit. Maak figuur $ABCD$ zoals hieronder staat aangegeven.
 b Figuur $ABCD$ lijkt een beetje op een rechthoek. Hoe lang is zijde AD ?
 c Meet de lengte van zijde AB en maak een schatting van de oppervlakte van figuur $ABCD$.
 d Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van de cirkel ongeveer?



- 24** Door de cirkel bij opdracht 23 in meer even grote stukken te verdelen, gaat figuur $ABCD$ meer op een rechthoek lijken.
- Hoe groot is de omtrek van de cirkel?
 - Hoe lang is zijde AB langs de boogjes gemeten?
 - Hoe groot ongeveer is de oppervlakte van figuur $ABCD$?
 - Ga na dat je de oppervlakte van figuur $ABCD$ kunt berekenen met $\pi \times 5 \times 5$.

Theorie

De **oppervlakte van een cirkel** kun je berekenen met de formule $oppervlakte = \pi \times \text{straal} \times \text{straal}$.

Het Latijnse woord voor straal is radius. Daarom gebruik je voor de straal vaak de letter r . De formule wordt dan korter $A = \pi \times r \times r$ of nog korter $A = \pi \times r^2$.

Voorbeeld 1

Een rond zwembad heeft een straal van 6 meter. Hoeveel m^2 is de oppervlakte van de zwembad?

Oplossing

$$oppervlakte = \pi \times 6^2$$

$$oppervlakte \approx 113 \text{ m}^2$$

Voorbeeld 2

Hoe groot is de oppervlakte A van een cirkel met een diameter van 26?

Oplossing

De straal is $26 : 2 = 13$

$$A = \pi \times 13^2$$

De oppervlakte A is ongeveer 530,93.

- 25** Vul de tabel verder in.

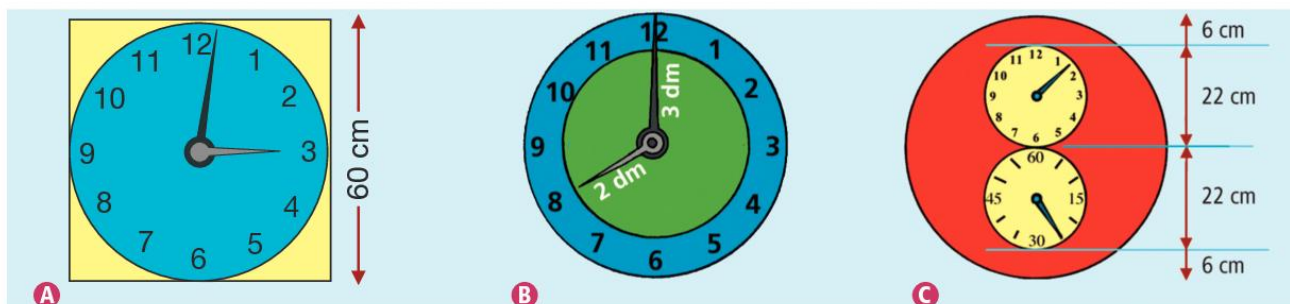
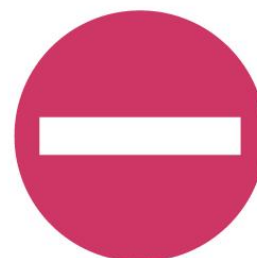
<i>straal cirkel</i>	<i>diameter cirkel</i>	<i>oppervlakte cirkel</i>
...	6	...
8	...	201,06
15	...	...
...	70	...

Ondersteunende route → maak opdracht 026

- 26**
- a** Een ronde vijver heeft een straal van 120 cm. Hoeveel m^2 is de oppervlakte van de vijver? Rond verstandig af.
 - b** Bereken de oppervlakte in m^2 van een ronde vijver waarvan de diameter 200 cm is.
 - c** In een park ligt een ronde vijver met een diameter van 110 meter. De visclub wil karpers in de vijver uitzetten. Er wordt per 7 m^2 één karper uitgezet. Hoeveel karpers worden er uitgezet?

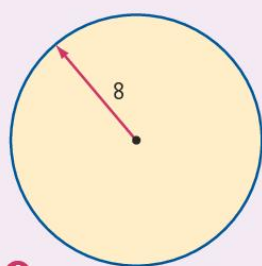
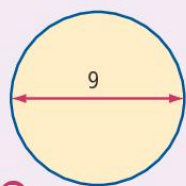
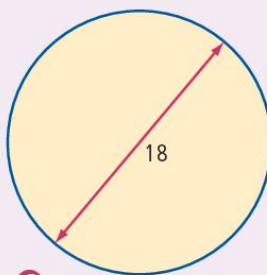
Ondersteunende route → maak opdracht 027

- 27**
- De diameter van het verkeersbord hiernaast is 36 cm.
 - a** Bereken de oppervlakte in cm^2 van dit verkeersbord. Rond je antwoord af op één decimaal.
 - b** De witte rechthoek van het verkeersbord is 4,5 cm bij 29 cm. Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van het rode deel op het verkeersbord?
- 28**
- a** Bereken van klok A de oppervlakte in cm^2 van het gele gebied.
 - b** Hoeveel procent van klok B is blauw gekleurd?
 - c** Het rode stuk van klok C wordt bedekt met een laagje koper. De prijs daarvan is 16 cent per cm^2 . Hoeveel euro kost dat in totaal?



Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

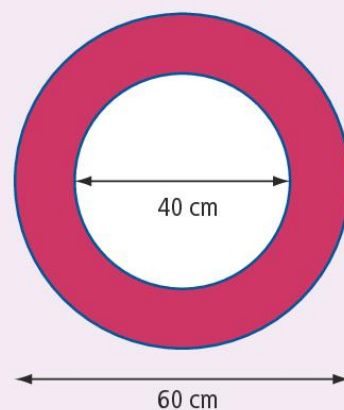
Ondersteunende opdrachten

**A****B****C**

026 De oppervlakte van een cirkel kun je berekenen met de formule $A = \pi \times r^2$.

- Vul in: de oppervlakte van cirkel A is $\pi \times \dots^2 \approx \dots$
Rond je antwoord af op één decimaal.
- Hoe groot is de straal van cirkel B?
- Vul in: de oppervlakte van cirkel B is $\pi \times \dots^2 \approx \dots$
- Bereken de oppervlakte van cirkel C.

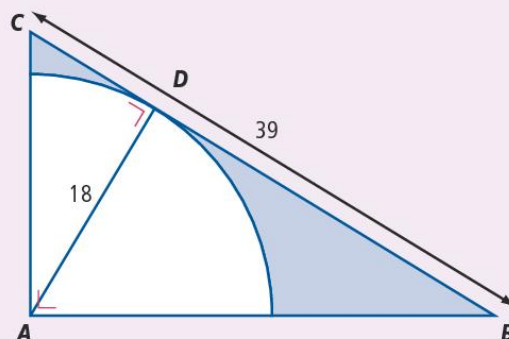
- 027**
- De diameter van het verkeersbord is 60 cm.
Bereken de oppervlakte van het verkeersbord in cm^2 .
Rond je antwoord af op één decimaal.
 - De witte cirkel heeft een diameter van 40 cm.
Bereken de oppervlakte van de witte cirkel in cm^2 .
Rond je antwoord af op één decimaal.
 - Hoe kun je met behulp van de antwoorden bij opdracht a en opdracht b de oppervlakte van de rode rand van het verkeersbord berekenen?
 - Bereken de oppervlakte van de rode rand van het verkeersbord in cm^2 .

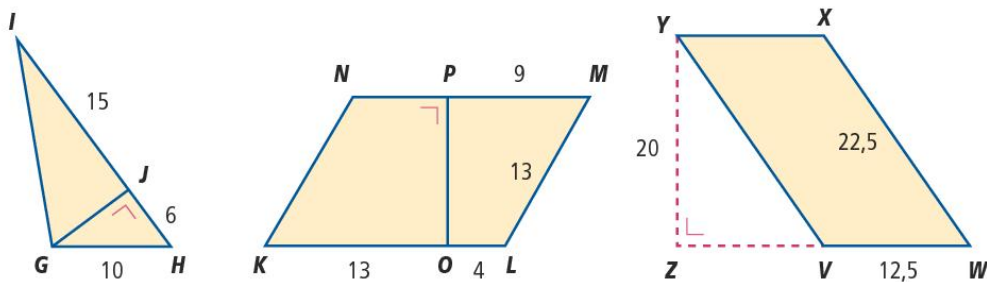


Uitdagende opdrachten

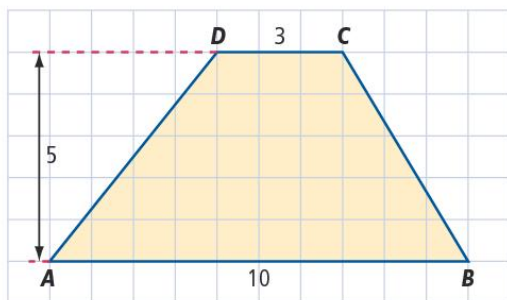
- U5**
- Van een cirkel is de oppervlakte 54 cm^2 .
Hoeveel cm is de diameter van de cirkel? Rond je antwoord af op één decimaal.
 - Van een andere cirkel is de omtrek 50 dm.
Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van deze cirkel?

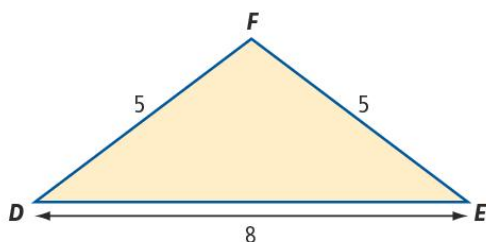
- U6** In de rechthoekige driehoek ABC is een kwart cirkel getekend. De straal AD van de cirkel staat loodrecht op zijde BC . Verder is $AD = 18$ en $BC = 39$. Bereken de oppervlakte van het blauwe deel. Rond je antwoord af op één decimaal.



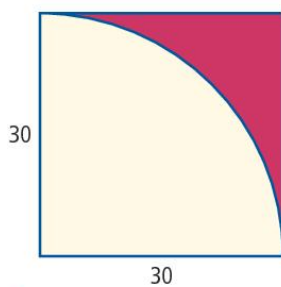
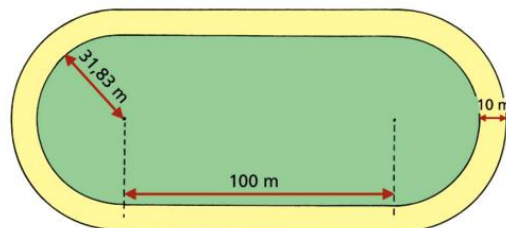


- 29**
- Bereken de oppervlakte van driehoek GHI .
 - Bereken de oppervlakte van parallellogram $KLMN$.
 - Bereken de oppervlakte van parallellogram $VWXY$.
- 30** Van een cirkel is de diameter 130.
- Bereken de omtrek van de cirkel. Rond af op één decimaal.
 - Bereken de oppervlakte van de cirkel.
 - Van een andere cirkel is de diameter 1,5 keer zo groot. Welke oppervlakte heeft die cirkel?
 - Een zwembad heeft de vorm van een cirkel. De omtrek van het zwembad is 20 meter. Bereken hoeveel meter de diameter van het zwembad is.
- 31** Van parallellogram $PQRS$ is $PQ = 12$ en $PS = 20$. In dit parallellogram is QS de hoogte.
- Maak een schets van parallellogram $PQRS$.
 - Bereken de omtrek en de oppervlakte van parallellogram $PQRS$.
 - De zijden van parallellogram $PQRS$ worden vermenigvuldigd met de factor 5. Hoe groot wordt de omtrek van deze vergroting?
 - Hoeveel keer zo groot wordt de oppervlakte van de vergroting als die van parallellogram $PQRS$?
- 32** Op roosterpapier is een vierhoek $ABCD$ getekend.
- Bereken met inlijsten de oppervlakte van de vierhoek.
 - Diagonaal AC verdeelt de vierhoek in twee driehoeken. Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.
 - Bereken op twee manieren de oppervlakte van $\triangle ACD$.

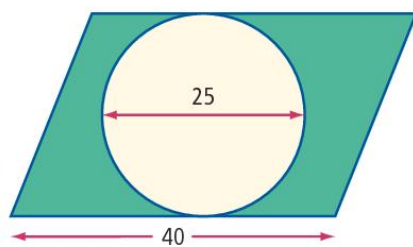




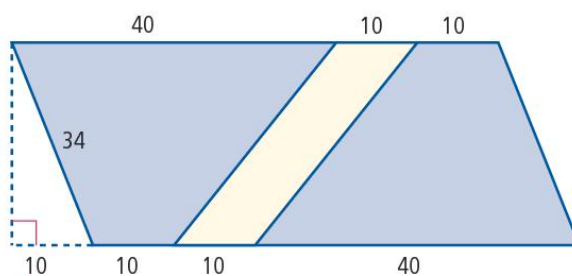
- 33** Van de gelijkbenige driehoek DEF is $DF = EF = 5$ en $DE = 8$.
Bereken de oppervlakte van driehoek DEF .
- 34** Een atletiekbaan bestaat uit twee rechte stukken die elk 100 meter lang zijn en twee stukken die worden begrensd door twee halve cirkels. De binnenste halve cirkel heeft een straal van 31,83 meter. De atletiekbaan is 10 meter breed.
- Bereken in hele meters hoe lang één rondje langs de binnenkant van de atletiekbaan is.
 - Hoeveel meter meer is één rondje langs de buitenkant?
 - Men wil de atletiekbaan sneller maken door er een nieuwe laag kunststof op aan te brengen.
Bereken hoeveel m^2 kunststof hiervoor nodig is.
- 35** Rond bij de volgende opdrachten af op één decimaal.
- Figuur A is een vierkant met daarin een kwart cirkel. Bereken de oppervlakte van het rode gedeelte.
 - Figuur B is een parallellogram met daarin een cirkel. Bereken de oppervlakte van het groene gedeelte.
 - Figuur C is een parallellogram met daarin nog een parallellogram. Bereken de oppervlakte van het blauwe gedeelte.



A



B



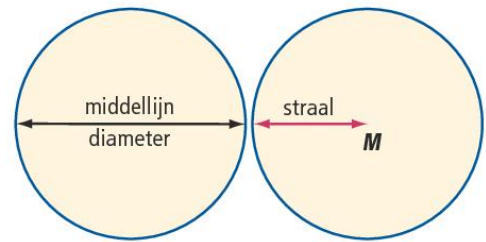
C

Theorie

Middellijn, diameter en straal

Een middellijn is een lijnstuk dat een cirkel in twee gelijke stukken verdeelt. De diameter is de lengte van de middellijn. De straal is de helft van de diameter. Voor de straal wordt vaak de letter r gebruikt.

Bij het berekenen van de omtrek van een cirkel speelt het getal π een rol. Je spreekt dat uit als pi. Op je rekenmachine zit een toets voor het getal π . Er geldt $\pi \approx 3,14$.



- S1
- Een cirkel heeft een straal van 6.
Hoe groot is de diameter?
 - De lengte van de middellijn van een andere cirkel is 32.
Hoe groot is de straal?

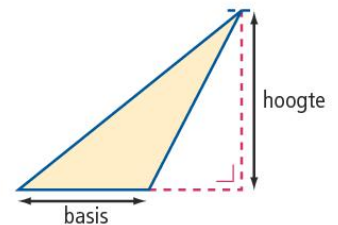
Vaardigheid

Je kunt de oppervlakte van een driehoek berekenen.

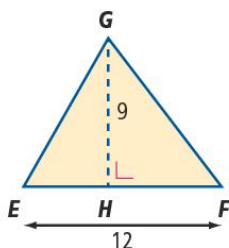
Voor de oppervlakte van een driehoek geldt

$\text{oppervlakte} = \text{basis} \times \text{hoogte} : 2$ of korter $A = b \times h : 2$ of ook wel $A = \frac{1}{2} \times b \times h$.

De hoogte staat daarbij altijd loodrecht op de basis.



Voorbeeld 1



Bereken de oppervlakte van $\triangle EFG$.

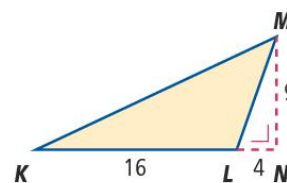
Oplossing

De basis $EF = 12$ en de hoogte $GH = 9$.

$$\text{oppervlakte } \triangle EFG = 12 \times 9 : 2$$

$$\text{oppervlakte } \triangle EFG = 54$$

Voorbeeld 2



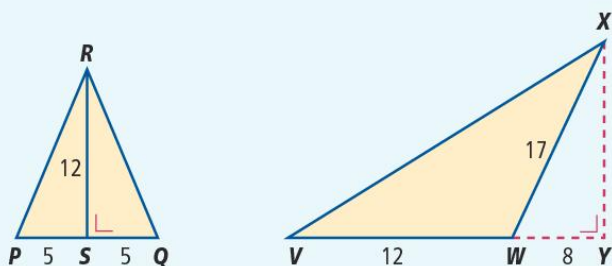
Bereken de oppervlakte van $\triangle KLM$.

Oplossing

De basis $KL = 16$ en de hoogte $MN = 9$.

$$\text{oppervlakte } \triangle KLM = 16 \times 9 : 2$$

$$\text{oppervlakte } \triangle KLM = 72$$

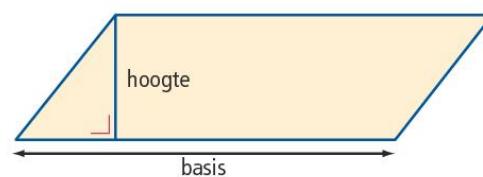


- S2 a Bereken de oppervlakte van $\triangle PQR$.
 b Bereken de oppervlakte van $\triangle VWX$.

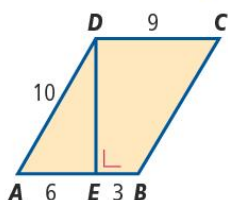
Vaardigheid

Je kunt de oppervlakte van een parallellogram berekenen.

Voor de oppervlakte van een parallellogram geldt
 oppervlakte = basis $\times$ hoogte of korter $A = b \times h$.



Voorbeeld



Bereken de oppervlakte van parallellogram $ABCD$.

Oplossing

Eerst de hoogte DE berekenen.

zijde	kwadraat
$AE = 6$	36
$DE = \dots$	$\dots +$
$AD = 10$	100

$$DE^2 = 100 - 36$$

$$DE^2 = 64$$

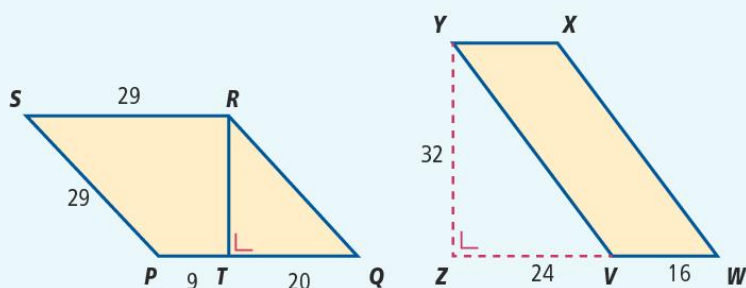
$$DE = \sqrt{64} \text{ dus } DE = 8$$

De basis $AB = 9$ en de hoogte $DE = 8$.

$$\text{oppervlakte } ABCD = 9 \times 8$$

$$\text{oppervlakte } ABCD = 72$$

- S3 Bereken de oppervlakte van parallellogram $PQRS$ en van parallellogram $VWXY$.



Vaardigheid

Je kunt de omtrek van een cirkel berekenen.

De omtrek van een cirkel kun je berekenen met de formule $omtrek = \pi \times diameter$ of $P = \pi \times d$.

Als je de omtrek van een cirkel weet, dan kun je de diameter berekenen met de formule $diameter = omtrek : \pi$.

Voorbeeld 1

Van een cirkel is de straal 9.
Bereken de omtrek van de cirkel. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Oplossing

De diameter is $2 \times 9 = 18$.

$$P = \pi \times 18$$

De omtrek P is ongeveer 56,55.

Voorbeeld 2

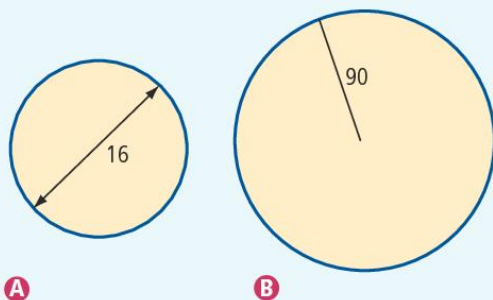
Van een wiel is de omtrek 81 cm.
Hoe groot is de straal van het wiel?
Rond je antwoord af op één decimaal.

Oplossing

De diameter is 81: $\pi \approx 25,78$ cm.

De straal van het wiel is $25,78 : 2 \approx 12,9$ cm.

- S4**
- a** Bereken de omtrek van cirkel A. Rond je antwoord af op één decimaal.
 - b** Hoe groot is de omtrek van cirkel B?
 - c** Van een andere cirkel is de omtrek 50,35.
Bereken, in één decimaal, de diameter van deze cirkel.



Vaardigheid**Je kunt de oppervlakte van een cirkel berekenen.**

De oppervlakte van een cirkel kun je berekenen met de formule $\text{oppervlakte} = \pi \times \text{straal} \times \text{straal}$ of $A = \pi \times r \times r$ of nog korter $A = \pi \times r^2$.

Voorbeeld 1

De middencirkel van een voetbalveld heeft een diameter van 18,3 meter.
Bereken de oppervlakte van de middencirkel van het voetbalveld in hele m^2 .

Oplossing

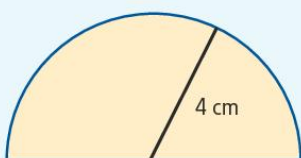
De straal is $18,3 : 2 = 9,15 \text{ m}$.

$$A = \pi \times 9,15^2$$

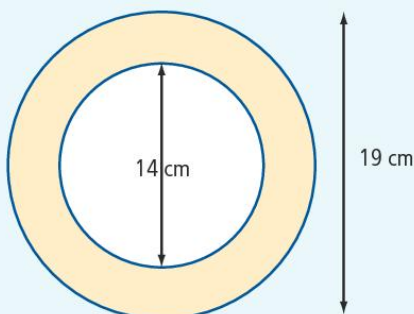
De oppervlakte A is ongeveer 263 m^2 .

S5 Rond bij de volgende opdrachten af op één decimaal.

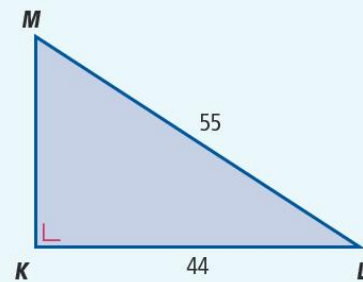
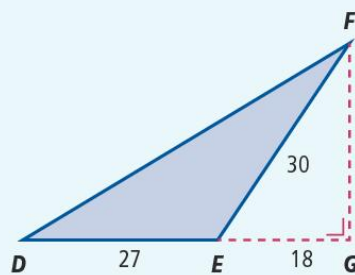
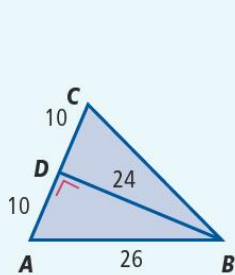
- Van een cirkel is de straal 12 cm.
Bereken de oppervlakte in cm^2 .
- De diameter van een andere cirkel is 13 cm.
Bereken de oppervlakte in cm^2 .
- Figuur A is een halve cirkel met een straal van 4 cm.
Bereken de oppervlakte van figuur A in cm^2 .
- De diameter van de hele figuur B is 19 cm. De diameter van de witte cirkel is 14 cm.
Bereken de oppervlakte van het gele gedeelte in cm^2 .



A



B



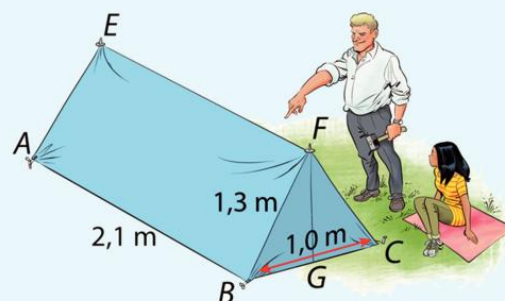
T1 Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$, van $\triangle DEF$ en van $\triangle KLM$.

T2

- Bereken de omtrek van een cirkel met een diameter 12.
- Hoe groot is de omtrek van een cirkel met een straal 5,3?
- Een blik heeft een omtrek 24,7 cm.
Bereken de straal van het blik. Rond af op één decimaal.

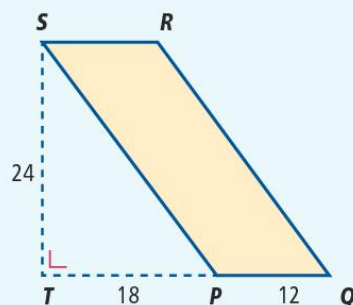
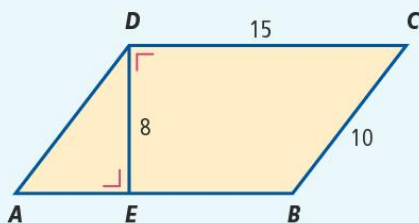
T3 Laura heeft voor haar vakantie van haar opa een tentje gekregen. In de tekening zie je de afmetingen van het tentje.

- Het lijnstuk FG geeft de hoogte van het tentje aan. Bereken de hoogte van het tentje.
- Hoeveel m^2 tentzeil was er nodig om de voorkant BCF te maken?
- En hoeveel m^2 tentzeil was er nodig voor het maken van het hele tentje inclusief het grondzeil?



T4

- Bereken de oppervlakte van parallellogram $ABCD$ en van parallellogram $PQRS$.
- Parallellogram $ABCD$ wordt vergroot door alle zijden van het parallellogram met de factor 4 te vermenigvuldigen.
Bereken de oppervlakte van de vergroting.

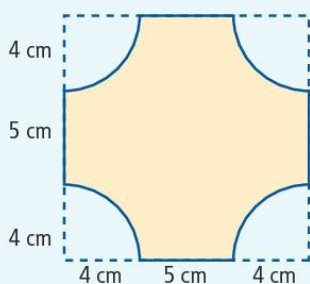


- T5** In de getekende cirkel passen precies zeven munten van 50 cent. De diameter van een munt van 50 cent is 24 mm.
- Bereken de omtrek in mm van een munt van 50 cent. Rond je antwoord af op één decimaal.
 - Bereken in mm^2 de oppervlakte van een munt van 50 cent.
 - Hoe groot is de omtrek van de getekende cirkel? Geef je antwoord in cm en rond af op één decimaal.
 - Hoeveel procent van de getekende cirkel wordt door de zeven munten van 50 cent bedekt? Rond af op hele procenten.

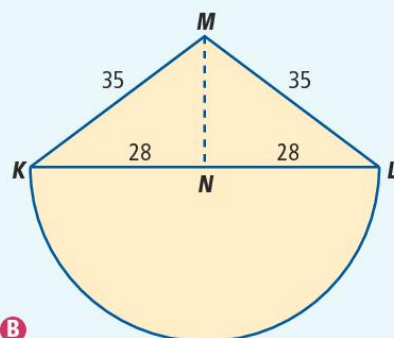


- T6** Meneer Stoof heeft in zijn achtertuin een cirkelvormige moestuin met een diameter van 7 meter. Hij wil zijn moestuin bemesten met koemestkorrels. Met een zak van 5 kg koemestkorrels kan meneer Stoof een oppervlakte van $7,5 \text{ m}^2$ bemesten. Bereken hoeveel zakken koemestkorrels meneer Stoof minstens nodig heeft om zijn moestuin te bemesten.

- T7**
- Bereken de oppervlakte van het gele deel van figuur A. Rond af op een geheel getal.
 - Figuur B bestaat uit een gelijkbenige driehoek KLM en een halve cirkel. Er geldt $KM = LM = 35$ en $KN = LN = 28$. Bereken de oppervlakte van figuur B. Rond weer af op een geheel getal.

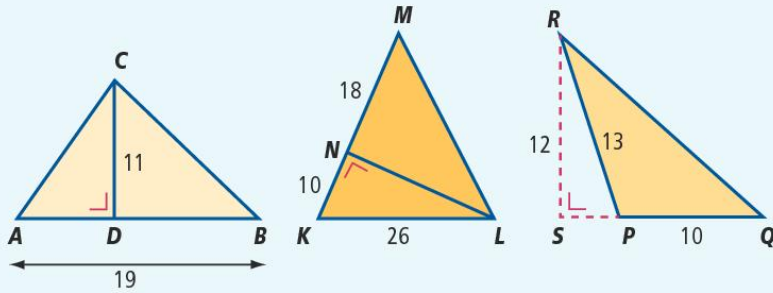


A



B

Je kunt de oppervlakte van een driehoek berekenen.

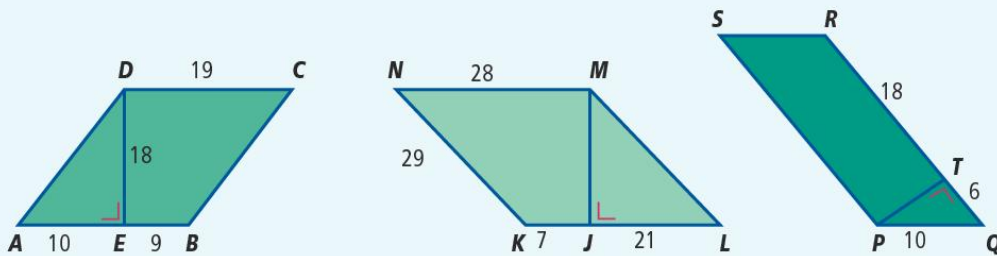


E1 Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$, van $\triangle KLM$ en van $\triangle PQR$.

E2 Gegeven zijn de punten $D(1, 7)$, $E(9, 7)$ en $F(2, 2)$.

- Teken in een assenstelsel driehoek DEF .
- Bereken de oppervlakte van driehoek DEF .
- Teken ook driehoek DEG met $G(5, 2)$ en bereken de oppervlakte van driehoek DEG .
- Annemarie tekent het punt $H(10, 2)$ en driehoek DEH . Hoe groot is de oppervlakte van driehoek DEH ?

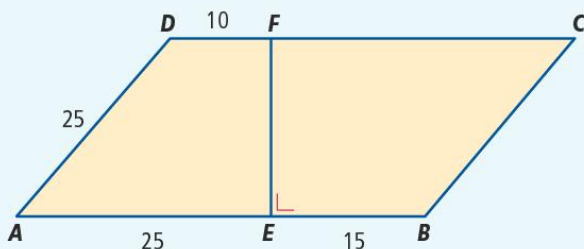
Je kunt de oppervlakte van een parallellogram berekenen.



- Bereken de oppervlakte van parallellogram $ABCD$.
- Bereken de oppervlakte van parallellogram $KLMN$.
- Bereken de oppervlakte van parallellogram $PQRS$.

E4 Van parallellogram $ABCD$ is gegeven dat $AE = 25$, $BE = 15$, $AD = 25$ en $DF = 10$.

- Bereken de oppervlakte van parallellogram $ABCD$.
- Bereken de omtrek van parallellogram $ABCD$.

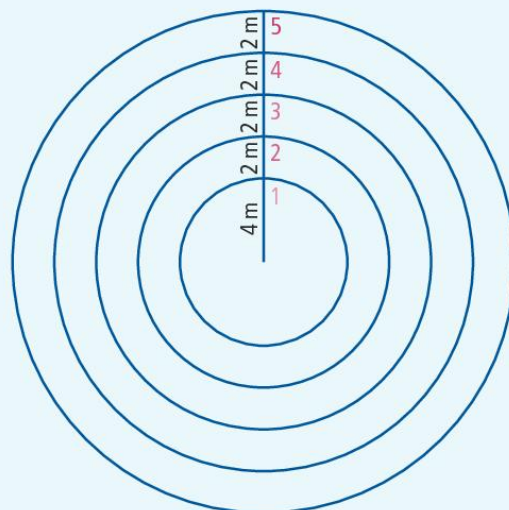


Je kunt de omtrek van een cirkel berekenen.**E5** Vul de tabel verder in.

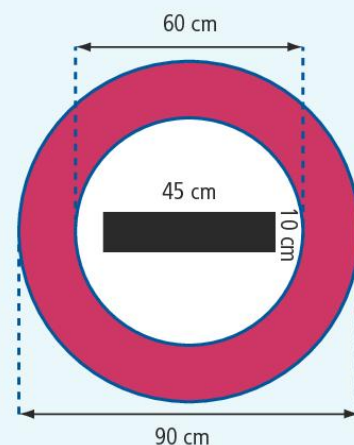
straal cirkel	diameter cirkel	omtrek cirkel
10	...	...
...	56	...
25	...	...
...	...	112

E6 Hiernaast zie je een landingsplaats voor parachutisten. Met behulp van de cirkels moeten de parachutisten proberen precies in het midden te landen. De binnenste cirkel heeft een straal van 4 meter. Bij elke volgende cirkel wordt de straal 2 meter groter.

- Bereken de omtrek in meters van de binnenste cirkel. Rond af op één decimaal.
- Hoe groot is de omtrek van de tweede cirkel?
- Van welke cirkel is de omtrek ongeveer 63 meter?
- Stel dat je de landingsplaats met nog meer cirkels op dezelfde manier zou uitbreiden. Welk nummer staat er dan bij de cirkel met een omtrek van ongeveer 126 meter?

**Je kunt de oppervlakte van een cirkel berekenen.**

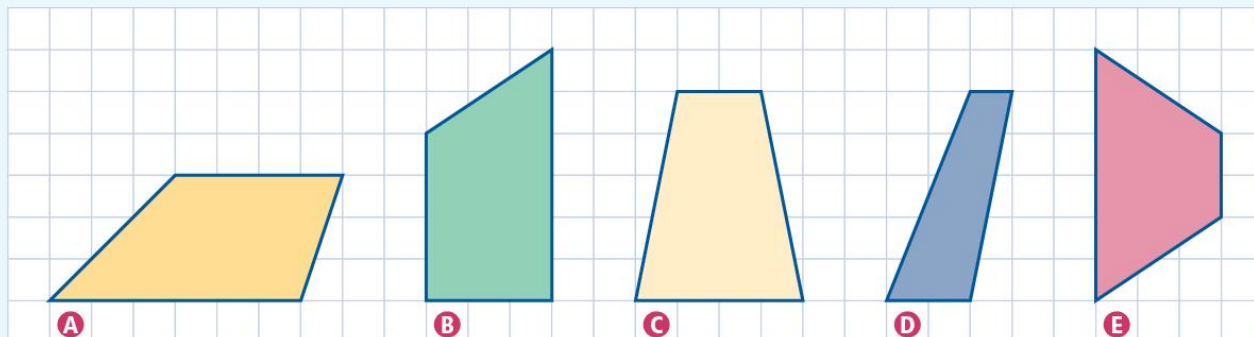
- E7**
- Bereken de oppervlakte van een cirkel met straal 9. Rond je antwoord af op één decimaal.
 - Van een andere cirkel is de diameter 24. Bereken ook van die cirkel de oppervlakte.
- E8** In het ronde verkeersbord zit een witte cirkel met daarin weer een zwarte rechthoek.
- Hoeveel cm is de straal van het hele verkeersbord?
 - Bereken in dm^2 de oppervlakte van het hele verkeersbord. Rond je antwoord af op twee decimalen.
 - Hoeveel dm^2 is de oppervlakte van het witte gedeelte en de zwarte rechthoek samen?
 - Bereken de oppervlakte van de rode rand in dm^2 .
 - Hoeveel dm^2 is de oppervlakte van het witte gedeelte? Rond je antwoord af op één decimaal.



Je leert

- wat een trapezium is
- hoe je de oppervlakte van een trapezium berekent

Deze paragraaf bereidt voor op klas 3 vwo.

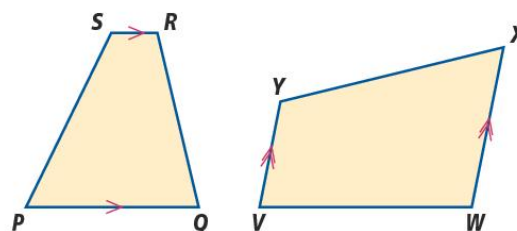


- 1 Welke eigenschap hebben de vierhoeken hierboven gemeenschappelijk?

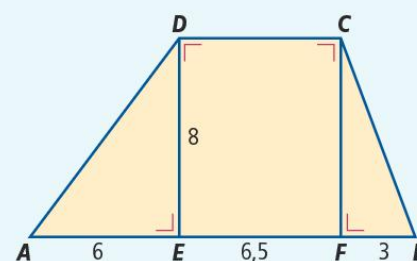
Theorie

Een vierhoek waarvan twee zijden evenwijdig aan elkaar lopen, heet een **trapezium**.

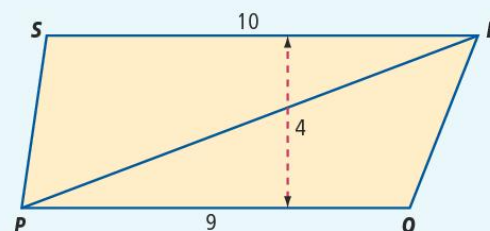
De vierhoeken $PQRS$ en $VWXY$ zijn voorbeelden van een trapezium.



- 2 a Welke zijden in vierhoek $ABCD$ lopen evenwijdig?
b Bereken de oppervlakte van trapezium $ABCD$.



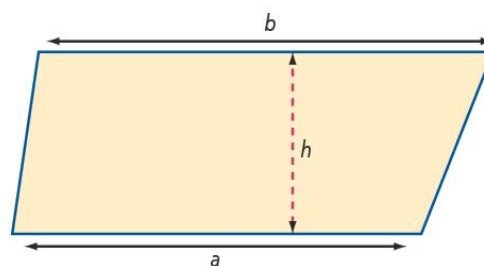
- 3 Trapezium $PQRS$ is verdeeld in twee driehoeken.
a Waarom is de hoogte van beide driehoeken gelijk aan 4?
b Bereken de oppervlakte van $\triangle PQR$ en van $\triangle PRS$.
c Hoe groot is de oppervlakte van trapezium $PQRS$?
d Volgens Bart kun je de oppervlakte van $PQRS$ ook berekenen met de formule *oppervlakte*
 $PQRS = \frac{1}{2} \times \text{hoogte} \times (PQ + RS)$.
Ga met een berekening na dat Bart gelijk heeft.



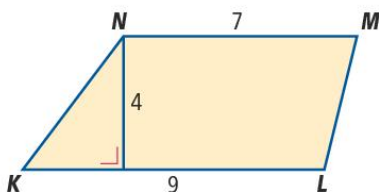
Theorie

Voor de oppervlakte A van een trapezium zijn de lengten a en b van de twee zijden die evenwijdig lopen en de hoogte h belangrijk.

Voor de oppervlakte A van een trapezium geldt $A = \frac{1}{2} \times a \times h + \frac{1}{2} \times b \times h$ of ook wel $A = \frac{1}{2} \times h \times (a + b)$.

**Voorbeeld**

Bereken de oppervlakte van trapezium $KLMN$.

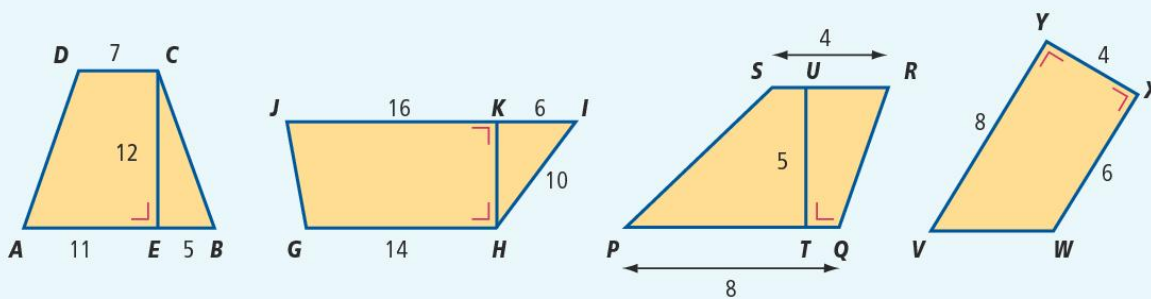
**Oplossing**

$KL = 9$, dus $a = 9$ en $MN = 7$, dus $b = 7$.

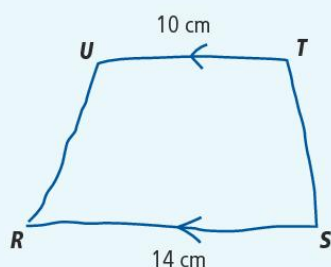
Er geldt verder $h = 4$.

$$\text{oppervlakte } KLMN = \frac{1}{2} \times 4 \times (9 + 7)$$

$$\text{oppervlakte } KLMN = 32$$



- 4 a Bereken de oppervlakte van trapezium $ABCD$.
 b Hoe groot is de oppervlakte van trapezium $GHIJ$?
 c Bereken de oppervlakte van trapezium $PQRS$.
 d Bereken de oppervlakte van trapezium $VWXY$.
- 5 a Hieronder zie je een schets van trapezium $RSTU$.
 De oppervlakte van het trapezium is 132 cm^2 .
 Bereken de hoogte van trapezium $RSTU$.



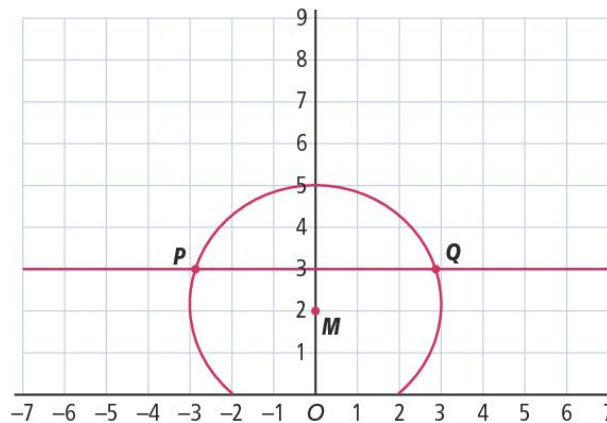
- b Van trapezium $VWXY$ is zijde VW evenwijdig aan zijde XY . Verder is $VW = 14$, $XY = 6$ en $\angle W = 90^\circ$.
 De oppervlakte van trapezium $VWXY$ is 60.
 Bereken de omtrek van trapezium $VWXY$.

Tussendoortje | Van cirkels naar ...

W Snijpunten tekenen

In het assenstelsel zijn de snijpunten P en Q van de cirkel met middelpunt $M(0, 2)$ en straal 3 met de horizontale lijn $y = 3$ getekend.

- Teken de snijpunten van de cirkel met middelpunt M en straal 4 met de lijn $y = 4$.
- Teken ook de snijpunten van de cirkel met middelpunt M en straal 5 met de lijn $y = 5$ tot en met de snijpunten van de cirkel met middelpunt M en straal 7 met de lijn $y = 7$.
- Teken tot slot de snijpunten van de cirkel met middelpunt M en straal 2 met de lijn $y = 2$ en het snijpunt van de cirkel met middelpunt M en straal 1 met de lijn $y = 1$.

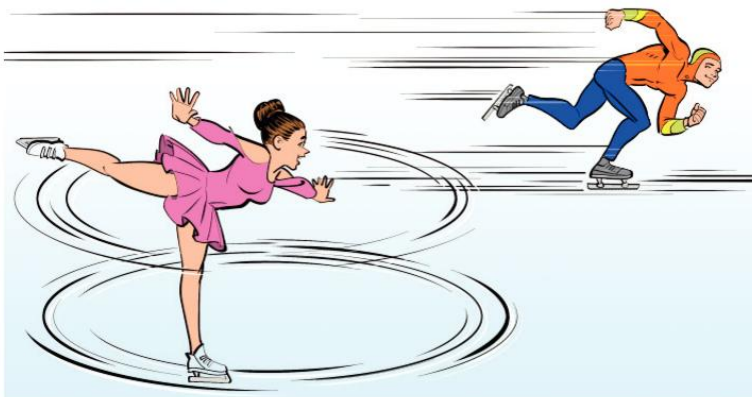


Punten verbinden

- Verbind de punten die je getekend hebt met een vloeiende lijn.
- Welke vorm heeft de grafiek die je hebt gekregen?
- Laat met een berekening zien dat het punt met coördinaten $(4, 5)$ op de grafiek ligt.
- Welke roosterpunten liggen nog meer op de grafiek?
- Ga na dat de getekende punten op de grafiek bij de formule $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ liggen.

Een ander middelpunt

- Neem nu het punt $N(0, 4)$ als middelpunt van de cirkels en teken op dezelfde manier de grafiek die zo ontstaat.



B

80 - ... + 1
-7w - 18

C

*

D

0,5 | 4,5

A

Teken $\angle P = 45^\circ$

Vaardigheden

4

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Metriek stelsel
- Statistiek
- Factor
- Formule en grafiek
- Wortels

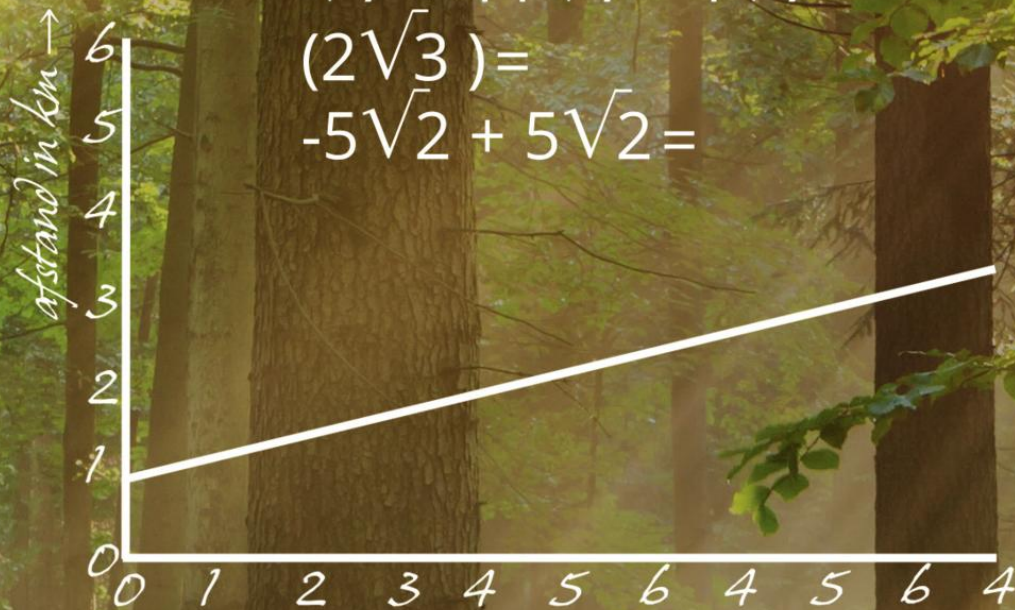
$$11h = 35$$

$$+3w = 16$$



$$\frac{1}{10} \text{ deel is } \dots\%$$

$$\frac{1}{5} \text{ deel is } \dots\%$$



$$3\sqrt{6} + 2\sqrt{6} =$$

$$-5\sqrt{5} \times \sqrt{6} =$$

$$\sqrt{7} + 11\sqrt{7} - 4\sqrt{7} =$$

$$(2\sqrt{3}) =$$

$$-5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} =$$

Metriek stelsel

Theorie

Bij het omrekenen van lengtematen kun je deze schema's gebruiken.



1 Vul in.

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a $17 \text{ m} = \dots \text{ cm}$ | d $43 \text{ cm} = \dots \text{ m}$ |
| b $2,5 \text{ km} = \dots \text{ m}$ | e $438 \text{ m} = \dots \text{ km}$ |
| c $12 \text{ cm} = \dots \text{ mm}$ | f $72 \text{ mm} = \dots \text{ m}$ |

Theorie

Bij het omrekenen van oppervlakttematen kun je deze schema's gebruiken.



2 Vul in.

- | | |
|--|---|
| a $6,4 \text{ m}^2 = \dots \text{ cm}^2$ | d $350\,000 \text{ m}^2 = \dots \text{ km}^2$ |
| b $0,85 \text{ km}^2 = \dots \text{ m}^2$ | e $84 \text{ dm}^2 = \dots \text{ m}^2$ |
| c $1,08 \text{ dam}^2 = \dots \text{ m}^2$ | f $65\,000 \text{ cm}^2 = \dots \text{ m}^2$ |

Theorie

Bij het omrekenen van inhoudsmaten kun je deze schema's gebruiken.

1 dm³ is gelijk aan 1 liter (L).



3 Vul in.

- | | |
|--|---|
| a $1,4 \text{ m}^3 = \dots \text{ dm}^3$ | d $450 \text{ L} = \dots \text{ m}^3$ |
| b $3 \text{ dm}^3 = \dots \text{ mm}^3$ | e $375 \text{ cm}^3 = \dots \text{ L}$ |
| c $0,004 \text{ m}^3 = \dots \text{ cm}^3$ | f $250\,000 \text{ mm}^3 = \dots \text{ L}$ |

Statistiek

Theorie

Bij het tekenen van een cirkeldiagram reken je eerst met een verhoudingstabel uit hoe groot de hoek van elke sector wordt.

Voorbeeld

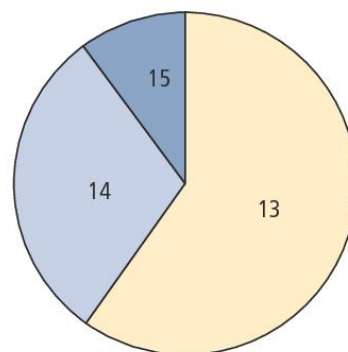
Van twintig leerlingen zijn twaalf leerlingen 13 jaar, zes leerlingen zijn 14 jaar en twee leerlingen zijn 15 jaar. Teken het bijbehorende cirkeldiagram.

Oplossing

<i>aantal leerlingen</i>	20	1	12	6	2
<i>aantal graden</i>	360	18	216	108	36

$\begin{array}{c} \text{ : 20} \quad \times 12 \quad \times 6 \quad \times 2 \end{array}$

De hoek van twaalf leerlingen van 13 jaar oud is 216° .
 De hoek van de zes leerlingen van 14 jaar oud is 108° .
 De hoek van de twee leerlingen van 15 jaar oud is 36° .



- 4 Teken bij de gegevens in de tabel een cirkeldiagram.

	voetbal	tennis	volleybal	hockey	geen sport
<i>aantal leerlingen</i>	376	224	300	220	320

- 5 Van een aantal lucifersdoosjes is geteld hoeveel lucifers ze bevatten. In de frequentietabel staat het resultaat van deze telling.

<i>aantal lucifers</i>	58	59	60	61	62	63	64	65
<i>aantal doosjes</i>	4	5	14	16	10	7	2	2

- Van hoeveel doosjes is het aantal lucifers geteld?
- Bereken het gemiddeld aantal lucifers per doosje.
- Welk aantal lucifers is de modus?
- Bereken de mediaan van het aantal lucifers.

Factor

- 6** Geef steeds de factor waarmee je de oude hoeveelheid moet vermenigvuldigen om de nieuwe hoeveelheid te berekenen.
- a** een toename van 23% **c** een toename van 0,8%
b een afname van 1,75% **d** een afname van 1,06%

- 7** **a** Een mp3-speler kost € 69,95 exclusief 21% btw. Hoeveel btw moet je betalen?
b Een wasmachine kost € 1.299,- inclusief 21% btw. Hoeveel btw moet je betalen?
c Een laptop kost € 1.045,- inclusief 21% btw. Bereken de prijs zonder btw.

- 8** **a** Onderzoek welke tabel bij exponentiële groei hoort.

A	t	0	1	2	3	4
	h	0,3	0,9	1,5	2,1	2,7

B	t	0	1	2	3	4
	h	16	24	36	54	81

C	t	0	1	2	3	4
	h	160	80	40	20	10

D	t	0	1	2	3	4
	h	73	65	57	49	41

- b** Stel bij elke tabel een bijbehorende formule op.

- 9** Het aantal konijnen van een bepaalde soort neemt al een langere tijd elk jaar af met 3%. Eind 2016 waren er nog 6400 konijnen.
- a** Hoeveel konijnen zijn er aan het eind van 2017?
b En hoeveel konijnen zijn er aan het eind van 2020?

Formule en grafiek

- 10** Schrijf de formules zonder haakjes.

- a** $w = 8(t + 3) + 2t$ **d** $h = (-3 + d)(8 - d) + 2d$
b $k = -4(-g - 6) - g$ **e** $y = (x - 5)(-x + 6) + x$
c $y = -(13 + 4x) + 13$ **f** $w = (4 - x)(x + 3) - 12$

- 11** Gegeven is de kwadratische formule $y = -x^2 + 4$.
 Bij $x = -1$ is de uitkomst $y = -(-1 \times -1) + 4 = -1 + 4$,
 dus $y = 3$.

a Vul de tabel verder in.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	...	...	...	...	3	...	...	...	...	...	...

b Teken een grafiek bij de formule.

Wortels

- 12** Bereken zonder rekenmachine. Schrijf 'kan niet' als je de wortel niet kunt uitrekenen.

- a** $\sqrt{81} =$ **d** $\sqrt{121} =$
b $-\sqrt{64} =$ **e** $\sqrt{10\,000} =$
c $\sqrt{-16} =$ **f** $-\sqrt{144} =$

- 13** De optelling $-3\sqrt{11} + 4\sqrt{15} + 4\sqrt{11}$ kun je korter schrijven als $\sqrt{11} + 4\sqrt{15}$ of als $4\sqrt{15} + \sqrt{11}$.
 Schrijf zo kort mogelijk. Schrijf anders 'kan niet korter'.

- a** $5\sqrt{23} + \sqrt{23} - 7\sqrt{23} =$ **c** $-\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - \sqrt{7} - \sqrt{2} =$
b $4\sqrt{11} + \sqrt{15} - 3\sqrt{17} =$ **d** $7\sqrt{17} + \sqrt{21} - 2\sqrt{21} =$

- 14** In het voorbeeld zie je hoe je $4\sqrt{3} \times 7\sqrt{2}$ korter schrijft.
 Je vermenigvuldigt eerst 4 met 7 en vervolgens $\sqrt{3}$ met $\sqrt{2}$.
 Schrijf zo kort mogelijk.

- a** $5\sqrt{2} \times 4\sqrt{11} =$ **c** $-\sqrt{5} \times 2\sqrt{3} =$
b $2\sqrt{32} \times 3\sqrt{2} =$ **d** $-\sqrt{2} \times 5\sqrt{50} =$

Voorbeeld

$$\begin{aligned} 4\sqrt{3} \times 7\sqrt{2} &= \\ 4 \times 7 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} &= \\ 28 \times \sqrt{6} &= 28\sqrt{6} \end{aligned}$$

- 15** $\sqrt{50}$ is te vereenvoudigen. Je krijgt dan
 $\sqrt{50} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.
 Vereenvoudig.

- a** $\sqrt{56}$ **c** $\sqrt{88}$
b $\sqrt{72}$ **d** $\sqrt{180}$





In dit hoofdstuk

In klas 1 heb je geleerd hoe je vergelijkingen oplost met behulp van de bordjesmethode. De variabele mag dan op één plaats in de vergelijking staan.

In dit hoofdstuk leer je hoe je vergelijkingen oplost waarin de variabele op meerdere plaatsen in de vergelijking voorkomt. Je kunt dan de bordjesmethode niet gebruiken.

Vervolgens leer je hoe je het oplossen van vergelijkingen gebruikt om de coördinaten van een snijpunt te berekenen van twee lijnen waarvan de formules gegeven zijn.

Tot slot leer je hoe je eenvoudig een correcte schets maakt van lijnen bij gegeven formules en hoe je die schets gebruikt om de uitkomsten van die formules met elkaar te vergelijken.

In hoofdstuk 11 van dit boek, en ook in veel hoofdstukken in klas 3, ga je nog meer vergelijkingen oplossen. Je maakt dan veel gebruik van de methode die je in dit hoofdstuk leert.

- V1 Met de formule $k = 1,25u + 0,50$ kun je het bedrag berekenen dat het parkeren van een auto in een parkeergarage kost. Hierin is k het bedrag in euro's en is u het aantal uren dat een auto geparkeerd is.
- Hoeveel kost het om een auto zeven uur te parkeren?
 - Teken een grafiek die bij de formule hoort.
 - Je betaalt een starttarief en een bedrag per uur. Hoe zie je het starttarief en het bedrag per uur terug in de formule? En in je grafiek?
 - Een andere parkeergarage rekent een starttarief van € 1,- en een bedrag van € 1,05 per uur. In welke garage ben je het voordeligst uit als je vier uur wilt winkelen?



Theorie

Een formule waarvan de grafiek een rechte lijn is, noem je een **lineaire formule**. In de lineaire formule $y = 2x - 10$ is het **hellingsgetal** het getal voor de variabele x . Het andere getal in de formule, het getal zonder variabele, is het **startgetal**. Dat getal geeft aan waar de grafiek de verticale as snijdt.

Je kunt het hellingsgetal en het startgetal ook uit een tabel halen. Het hellingsgetal is de vaste toename bij een stap van 1. Het startgetal vind je in de tabel onder de waarde 0.

$y = 2x - 10$
Het hellingsgetal is 2.
Het startgetal is -10.

Voorbeeld 1

Geef het startgetal, het hellingsgetal en een formule bij de tabel.

x	0	1	2	3	4
y	10	7,3	4,6	1,9	-0,8

Oplossing

In de bovenste rij staan opeenvolgende getallen. In de onderste rij is de verandering steeds gelijk, namelijk $-2,7$. Het startgetal is 10 en het hellingsgetal is $-2,7$. Een formule is $y = -2,7x + 10$.

Voorbeeld 2

Stel een formule op van een lijn door de punten $P(0, 5)$ en $Q(4, 7)$.

Oplossing

De toename van de x -coördinaat is $4 - 0 = 4$.
De toename van de y -coördinaat is $7 - 5 = 2$.
Het hellingsgetal is $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
Het startgetal is 5.
Een formule is dus $y = \frac{1}{2}x + 5$.

- V2 Geef van de formules het startgetal en het hellingsgetal.

- | | |
|------------------|--------------------|
| a $y = 7x - 8$ | d $k = 4d$ |
| b $m = -3t + 10$ | e $y = -x - 4$ |
| c $h = 100 - 7q$ | f $a = -1,54 + 2t$ |

- V3 a Laat zien dat bij beide tabellen een lineaire formule hoort.
 b Stel bij beide tabellen een lineaire formule op.
 c Een lijn gaat door de punten $(0, -4)$ en $(3, 11)$.
 Stel een formule op bij deze lijn.

A	x	0	2	4	6	8	10
	y	3	9	15	21	27	33

B	x	5	6	7	8	9	10
	y	3	9	15	21	27	33

- V4 Hiernaast zie je hoe Tim en Derk de formule $u = 6(3p + 5)$ zonder haakjes te schrijven. Schrijf de formules zo kort mogelijk door de gelijksoortige termen samen te nemen. Gebruik een vermenigvuldigtabel of werk met boogjes.

- a $k = 5 \times (2p + 1)$ d $y = 3(2x - 5) + 7x$
 b $m = -7 \times (5c + 3)$ e $q = 4r - 6(3r + 8)$
 c $d = -(7 - 4w)$ f $z = 2(3 + 8h) - 7h + 8$

							Tim						
							$u = 6(3p + 5)$						
							betekent $u = 6 \times (3p + 5)$						
							<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$3p$</td> <td>$+5$</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>$18p$</td> <td>$+30$</td> </tr> </table> dus $u = 18p + 30$	x	$3p$	$+5$	6	$18p$	$+30$
x	$3p$	$+5$											
6	$18p$	$+30$											

							Derk
							$u = 6 \times (3p + 5)$
							$u = 18p + 30$

Aanpak

Hoe los je een vergelijking op met bordjes?

- Schrijf zo mogelijk de vergelijking korter door gelijksoortige termen samen te nemen.
- Kijk goed waar je het bordje moet leggen. Dat is de term met de variabele erin.
- Reken uit wat er op het bordje moet staan.
- Bereken vervolgens de oplossing. Controleer je oplossing met de vergelijking.

Voorbeeld

Los op: $11a + 7a - 15 = 21$

Oplossing

- $18a - 15 = 21$
- $36 - 15 = 21$
- $18a = 36$
- $a = 2$

Controle

$11 \times 2 + 7 \times 2 - 15 = 21$, klopt!

- V5 Los de volgende vergelijkingen op.
- a $5x + 8 = 48$ d $123 = 30p - 37 + 10p$
 b $7b + 13 = 83$ e $12y + 75 = 123$
 c $125 - 7x - 2x = 80$ f $c + 215 - 7c = 140$
- V6 Gegeven zijn de twee formules $y = 4x - 2$ en $y = -2x + 7$.
- Bereken voor beide formules bij welke waarde van x de waarde van y gelijk is aan 18.
 - Teken de grafieken bij de formules in één assenstelsel.
 - Lees in de grafiek af bij welke waarde van x beide formules dezelfde uitkomst hebben.
 - Controleer je antwoord van opdracht c met een berekening.

Je leert

- wat de balansmethode is

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3—4—05—6—7—08
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8
- uitdagend: 1—2—3—5—6—8—U1—U2

Kees en Bart kopen op de markt beiden kiwi's en kersen. Kersen kosten € 1,50 per kilo. De kiwi's betaal je per stuk.

Bart koopt 14 kiwi's en 2 kilo kersen.

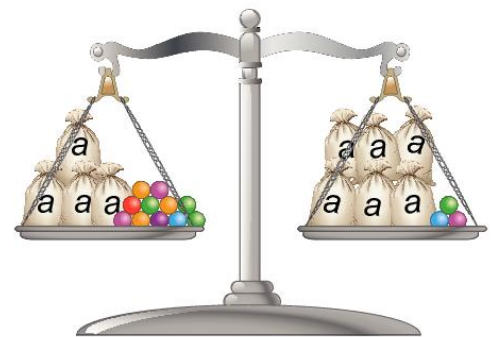
Kees koopt 8 kiwi's en 3 kilo kersen.

Bij het afrekenen blijkt dat ze evenveel moeten betalen.

- Zoek uit hoe duur één kiwi is.



- 1** Daan heeft een aantal zakjes met in elk zakje evenveel knikkers. Hij geeft Erik vier zakjes en elf losse knikkers. Zelf pakt hij zes zakjes en drie losse knikkers. Daan zegt tegen Erik: 'We hebben nu allebei evenveel knikkers. Weet jij hoeveel knikkers er in een zakje zitten?' Erik maakt een tekening bij de situatie.



- a** Erik zegt: 'Dan is twee zakjes en drie losse knikkers evenveel als elf losse knikkers'.

Leg uit waarom Erik gelijk heeft.

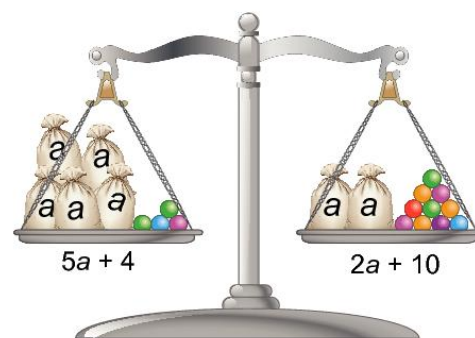
- b** Hoeveel knikkers zitten er dus in twee zakjes?
c Hoeveel knikkers heeft Daan in een zakje?

- 2** Fiona pakt het anders aan. Ze zegt: 'Ik noem het aantal knikkers in elk zakje a . Dan moet ik uitrekenen wanneer de uitkomst van $4a + 11$ gelijk is aan de uitkomst van $6a + 3$ '.

Ze schrijft vervolgens de vergelijking $4a + 11 = 6a + 3$ op.

- a** Leg uit waarom je deze vergelijking niet met de bordjesmethode kunt oplossen.
b Controleer je antwoord van opdracht 1c door het in de vergelijking van Fiona in te vullen.

- 3 Op de balans liggen zakjes met knikkers en losse knikkers. De balans is in evenwicht. De linkerkant en de rechterkant zijn dus even zwaar.
- Leg uit dat de vergelijking $5a + 4 = 2a + 10$ hierbij hoort.
 - Aan beide kanten van de balans worden nu twee zakjes met a knikkers weggehaald.
Teken een balans met wat er overblijft.
 - Waarom blijft de balans in evenwicht?
 - Welke vergelijking past bij de balans van opdracht b?
 - Haal nu aan beide kanten zoveel mogelijk losse knikkers weg. De balans moet wel in evenwicht blijven.
Welke vergelijking past nu bij de balans?
 - Los deze vergelijking op.
 - Vul het getal dat je voor a vond in de vergelijking $5a + 4 = 2a + 10$ in. Klopt je oplossing?



Theorie

Voor het oplossen van een lineaire vergelijking kun je gebruik maken van de **balansmethode**. Net als bij een balans doe je aan de linker- en aan de rechterkant van het gelijkteken van de vergelijking steeds hetzelfde.

Voorbeeld

Los de vergelijking $5a + 9 = 3a + 17$ op.

Oplossing

Denk aan de balans. Aan de linkerkant liggen 5 zakjes met a knikkers en nog 9 losse knikkers. Aan de rechterkant liggen 3 zakjes met a knikkers en nog 17 losse knikkers.

$$5a + 9 = 3a + 17$$

$$\textcircled{-3a} \quad \textcircled{-3a}$$

Aan beide kanten 3 zakjes met knikkers weggehaald.

$$2a + 9 = 17$$

$$\textcircled{-9} \quad \textcircled{-9}$$

Aan beide kanten 9 losse knikkers weggehaald.

$$2a = 8$$

$$a = 4$$

- 4 Jip lost de vergelijking $5a + 9 = 3a + 17$ uit het voorbeeld anders op. Hij haalt eerst aan beide kanten de negen losse knikkers weg en pas daarna aan beide kanten drie zakjes met knikkers.
Laat zien dat hij op die manier dezelfde oplossing vindt.

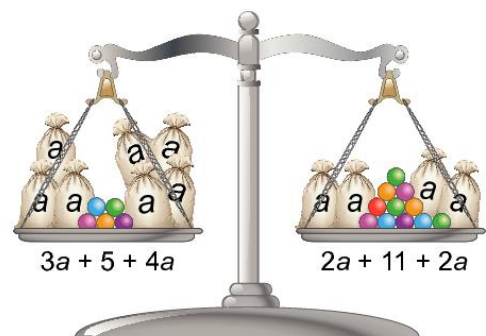
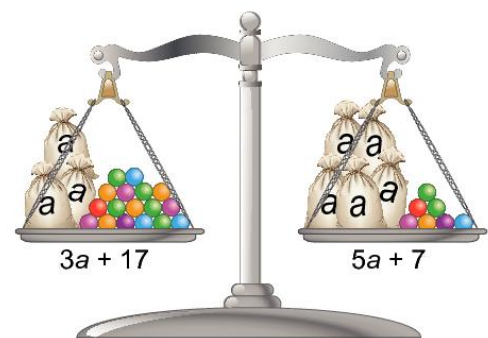
Ondersteunende route → maak opdracht 05

- 5 Los de vergelijkingen op de manier van het voorbeeld op de vorige bladzijde op. Denk aan de balans.

a $6a + 1 = 4a + 21$ c $8a + 2 = 7a + 30$
b $5a + 4 = 2a + 25$ d $5a + 3 = a + 51$

Het is niet zo dat bij een balans altijd het grootste aantal zakjes aan de linkerkant ligt. Ook als het grootste aantal zakjes aan de rechterkant ligt, kun je met de balansmethode de bijbehorende vergelijking oplossen.

- 6 De balans hiernaast is in evenwicht.
- Hoeveel zakjes kun je aan beide kanten maximaal weghalen zodat de balans in evenwicht blijft?
 - Welke vergelijking past nu bij de balans?
 - Hoeveel losse knikkers kun je aan beide kanten weghalen zodat de balans nog in evenwicht is?
 - Welke vergelijking past er bij de balans als je zoveel mogelijk losse knikkers hebt weggehaald?
 - Bereken hoeveel knikkers er in elk zakje zitten.
- 7 De balans hiernaast is in evenwicht. Bij de balans past de vergelijking $3a + 5 + 4a = 2a + 11 + 2a$.
- Schrijf de vergelijking korter door de gelijksoortige termen samen te nemen.
 - Los de vergelijking op.
 - Reken na of het totaal aantal knikkers aan beide kanten van de balans even groot is.



Ondersteunende route → maak opdracht 08

- 8 Los de vergelijkingen op. Schrijf de tussenstappen op.
- $14a + 8 = 10a + 24$
 - $a + 24 = 18 + 3a$
 - $6a + 5 = 2a + 17 + a$
 - $4a + 15 + 2a = 12a + 9$
 - $2a + 3 + 7a = 5a + 63$
 - $24a + 1 = 11a + 40$

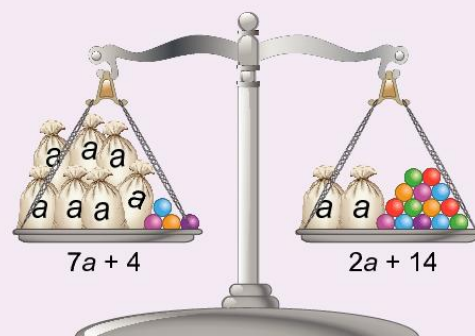
Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

- 05** Bij de balans hoort de vergelijking $7a + 4 = 2a + 14$.
- a** Haal aan beide kanten twee zakjes met a knikkers weg. Schrijf de vergelijking op die nu bij de balans past.
 - b** Haal aan beide kanten vier losse knikkers weg. Welke vergelijking hoort nu bij de balans?
 - c** Hoeveel knikkers zit er in een zakje?

Los de vergelijkingen op dezelfde manier op. Denk aan de balans.

- d** $5a + 1 = 3a + 31$
- f** $10a + 5 = 3a + 40$
- e** $7a + 8 = 4a + 29$
- g** $4a + 7 = a + 22$



- 08** Gegeven is de vergelijking $2a + 34 = 3a + 4 + 5a$.
- a** Schrijf de vergelijking korter door de gelijksoortige termen samen te nemen.
 - b** Denk aan een balans. Hoeveel zakjes kun je aan beide kanten maximaal weghalen zodat de balans in evenwicht blijft? Aan welke kant heb je dan nog zakjes staan?
 - c** Los de vergelijking verder op.

Los de vergelijkingen op.

- d** $12a + 20 = 30a + 2$
- g** $16a + 12 + 4a = 24a + 4$
- e** $9a + 4 = 28 + a$
- h** $4a + 3a + 9 = 2a + 54$
- f** $a + 3a + 13 = 2a + 27$
- i** $14a + 12 = 11a + 30$

Uitdagende opdrachten

- U1** Op een balans staan links drie zakjes met knikkers en 46 losse knikkers. Rechts staan vijf zakjes met knikkers en vier losse knikkers. De zakjes aan de rechterkant bevatten twee keer zoveel knikkers als de zakjes aan de linkerkant. De balans is in evenwicht. Bereken hoeveel knikkers een zakje aan de linkerkant bevat.

- U2** Bij de groenteman kosten 14 appels en drie bananen samen net zoveel als zes appels en acht bananen.
- a** Bereken hoeveel cent een appel kost als een banaan 40 cent kost.
 - b** Bereken hoeveel cent een banaan kost als een appel 30 cent kost.



- Je leert

• hoe je met de balansmethode vergelijkingen oplost
- Leerroutes

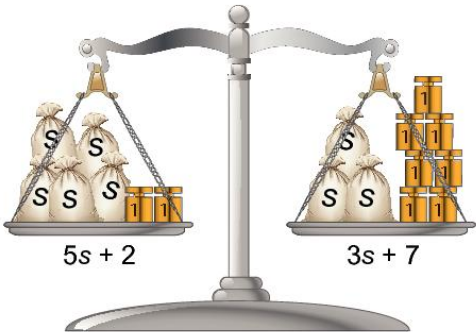
• ondersteunend: 9—10—011—12—13—14—15—016—17
 • doorlopend: 9—10—11—12—13—14—15—16—17
 • uitdagend: 9—10—11—12—14—16—17—U3—U4

Corinne laat een nieuwe cv-ketel installeren. Ze vraagt twee monteurs naar hun tarieven. Monteur A gebruikt de formule $b = 20 + 38t$ om het bedrag b in euro's te berekenen als er t uur gewerkt wordt. Monteur B gebruikt de formule $b = 40 + 30t$.

- Zoek uit bij welk aantal uur het niet uitmaakt wie ze inhuurt.



- 9 Op de balans staan acht zakjes suiker en negen gewichtjes van 1 kg. In elk zakje zit evenveel suiker. Het aantal kg suiker in een zakje noem je s .
- Schrijf de vergelijking op die bij deze balans hoort.
 - Haal aan beide kanten zoveel mogelijk gewichtjes weg zodat de balans nog in evenwicht is. Schrijf de vergelijking op die nu bij de balans hoort.
 - Haal aan beide kanten zoveel mogelijk zakjes weg zodat de balans nog in evenwicht is. Welke vergelijking hoort nu bij de balans?
 - Hoeveel kg suiker zit er in één zakje?



Vergelijkingen oplossen doe je met de balansmethode. De oplossing kan een natuurlijk getal zijn, maar ook een breuk, een decimaal getal of een negatief getal.

- 10 Mia wil de vergelijking $4x - 8 = -2x + 16$ oplossen. Hoewel ze bij deze vergelijking met negatieve getallen niet kan denken aan zakjes op een balans, gebruikt ze toch de balansmethode door links en rechts hetzelfde te doen.
- Mia vindt het handig om aan beide kanten $2x$ op te tellen. Wat krijg je als je $2x$ bij $-2x$ optelt?
 - Op het blaadje zie je hoe Mia het opschrijft. Wat schrijft ze onder de vergelijking $6x - 8 = 16$?
 - Vul het blaadje verder in.
 - Controleer je oplossing door die links en rechts van het gelijkteken in de vergelijking $4x - 8 = -2x + 16$ in te vullen. Klopt je oplossing?

	Mia		
	$4x - 8 = -2x + 16$		
	$+ 2x$	$+ 2x$	
	$6x - 8 = 16$		
	...	...	
	$6x = \dots$		
	$x = \dots$		

Aanpak

Hoe los je een vergelijking op waarin de variabele aan beide kanten van het gelijkteken staat?

- 1 Zorg ervoor dat de variabele nog maar aan één kant van het gelijkteken staat. Haal dus aan beide kanten van het gelijkteken hetzelfde eraf of tel hetzelfde erbij op.
- 2 Je houdt dan een vergelijking over met de variabele aan één kant van het gelijkteken. Deze vergelijking kun je op twee manieren oplossen.
 - Doe aan beide kanten van het gelijkteken hetzelfde.
 - Of gebruik bordjes.
- 3 Controleer je oplossing.

Voorbeeld

Los op: $6 + p = -2p + 8$

Oplossing

$$1 \quad 6 + p = -2p + 8$$

$$+ 2p \quad + 2p$$

$$2 \quad 6 + 3p = 8$$

$$-6 \quad -6$$

$$3p = 2$$

$$p = \frac{2}{3}$$

2 Met een bordje:

$$6 + 3p = 8$$

$$6 + 2 = 8$$

$$3p = 2$$

$$p = \frac{2}{3}$$

- 3 Invullen in $6 + p$ geeft $6 + \frac{2}{3} = 6\frac{2}{3}$ en invullen in $-2p + 8$ geeft $-2 \times \frac{2}{3} + 8 = 6\frac{2}{3}$. Klopt.

Ondersteunende route → maak opdracht 011

- 11 Los de vergelijkingen op.
 - a $8a + 3 = 3a + 13$
 - b $9 - 3b = 10 - 5b$
 - c $2x - 14 = 10 - 2x$
 - d $5m + 17 = -2m - 18$
 - e $5x + 13 = 22 - x$
 - f $8t + 25 = 5t - 2$
- 12 Marijke en Andrew gaan de vergelijking $-4x + 3 = -6x + 9$ oplossen. Marijke wil links en rechts $4x$ optellen. Andrew wil links en rechts $6x$ optellen.
 - a Laat zien dat zij allebei dezelfde oplossing krijgen.
 - b Welke manier heeft jouw voorkeur?
 - c Controleer door invullen of de oplossing klopt.
- 13 Kristel lost de vergelijking uit opdracht 12 op een nog andere manier op. Zij trekt als eerste links en rechts 3 af. Op het blaadje zie je het begin van haar berekening. Maak de berekening af en laat zien dat je op deze manier ook de juiste oplossing krijgt.
- 14 Los de vergelijkingen op.
 - a $12p - 3 = -9p + 11$
 - b $6s - 15 = 75$
 - c $10k - 5 = 88k + 34$
 - d $5x - 15 = 71 + 3x$
 - e $80 + 5a = 92 + 11a$
 - f $2x + 15 = 6x + 25$

	Kristel		
•	$-4x + 3 = -6x + 9$		
•	$-3 \quad -3$		
•	$-4x \quad = -6x + 6$		
•	$+ 6x \quad + 6x$		
	$\dots = \dots$		

- 15** Jorik wil de vergelijking $2(5 - x) = 15x - 3(2x + 4)$ oplossen. Hij begint met het wegwerken van de haakjes. Op het blaadje zie je welke vergelijking hij dan krijgt. Daarna gaat hij de gelijksoortige termen samennemen.
- Welke vergelijking krijgt Jorik na het samennemen van gelijksoortige termen?
 - Los de vergelijking verder op.

	Jorik			
	$2(5 - x) = 15x - 3(2x + 4)$			
	$10 - 2x = 15x - 6x - 12$			
	$10 - 2x = \dots - 12$			
	$\dots = \dots$			

Theorie

Om een vergelijking te kunnen oplossen met de balansmethode moet je de vergelijking soms eerst vereenvoudigen door haakjes weg te werken en gelijksoortige termen samen te nemen.

Voorbeeld

Los op: $8(x - 8) = 12x + 5(x + 7)$

Oplossing

$8x - 64 = 12x + 5x + 35$	haakjes weggewerkt
$8x - 64 = 17x + 35$	$12x$ en $5x$ samengenomen
$-64 = 9x + 35$	links en rechts $- 8x$
$-99 = 9x$	links en rechts $- 35$
$x = -11$	links en rechts $: 9$

controle: $8 \times (-11 - 8) = 8 \times -19 = -152$
 $12 \times -11 + 5 \times (-11 + 7) = -132 + -20 = -152$, klopt.

Ondersteunende route → maak opdracht 016

- 16** Los de vergelijkingen op.
- $2(x + 8) + 9 = 5x + 7$
 - $3a - 5(2a - 1) = -2$
 - $2(3p + 6) - 4p = 6 - 2p$
 - $3x - 15 + 7x = 5(x - 9)$
- 17** Los de vergelijkingen op.
- $6p + 5(7 - p) = 10(p + 2) - 12$
 - $5(2k + 3) = 2(k + 7) - 15 + 4k$
 - $25 - (6 - p) + 7p = 3 + 8(2p + 1)$
 - $28 - 3(x + 6) = -2(3x - 5) + 4$

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

- 011** Je gaat de vergelijking $3p + 9 = -2p - 1$ oplossen.
- Om ervoor te zorgen dat de variabele p aan één kant van het $=$ -teken staat, kun je links en rechts $2p$ optellen.
Schrijf de vergelijking op die je zo krijgt.
 - Om de vergelijking verder te vereenvoudigen, trek je links en rechts 9 af.
Schrijf de vergelijking op die je zo krijgt.
 - Los de vergelijking verder op.

	$3p + 9 = -2p - 1$	
	$+ 2p$	$+ 2p$
	$\dots + \dots = \dots$	
	-9	-9
	$\dots = \dots$	
	$p = \dots$	

Los de volgende vergelijkingen op.

- d** $9p + 5 = 2p - 16$ **g** $5 - 8x = 3x - 17$
e $14 - 2a = 25 + 9a$ **h** $7m + 16 = 24 - m$
f $4x + 24 = 30 - 4x$ **i** $13u - 48 = 3 - 4u$

- 016** Hiernaast is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $2(3a - 4) + a = 3(a - 1) - 13$.
- Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.
 - In stap 2 worden de gelijksoortige termen samengenomen.
Maak de vergelijking in stap 2 af.
 - Leg uit wat er in stap 3 is gebeurd.
 - Los de vergelijking verder op.

	$2(3a - 4) + a = 3(a - 1) - 13$	
	$6a - 8 + a = 3a - 3 - 13$	(1)
	$7a - 8 = \dots$	(2)
	$4a - 8 = \dots$	(3)
	$4a = \dots$	(4)
	$a = \dots$	(5)

Los de volgende vergelijkingen op.

- e** $3(2a - 1) + a = 11$ **g** $19 - 7m = 2(4m + 2)$
f $8x + 2(5 + 4x) = 2x - 4$ **h** $4 - 3p = 15 - 2(p + 4)$

Uitdagende opdrachten

- U3** Hiernaast zie je de tarievenlijst van sportcentrum Fitness. Nynke heeft een kortingskaart omdat dat voor haar het voordeligst is.
Hoe vaak per jaar gaat Nynke minimaal trainen en hoe vaak maximaal?

TARIEVENLIJST	
jaarkaart	€ 400,-
kortingskaart	€ 120,- + € 4,- per keer
los kaartje	€ 8,-

- U4** Gegeven is de vergelijking $3(a \times p + 4) - 1 = a(p - 1) + 10$.
- Neem $a = 2$ en los de vergelijking op.
 - Neem $p = 0$. Welke vergelijking krijg je dan?
 - Los de vergelijking van opdracht b op.
 - Waarom kun je voor a niet het getal 0 kiezen?

Je leert

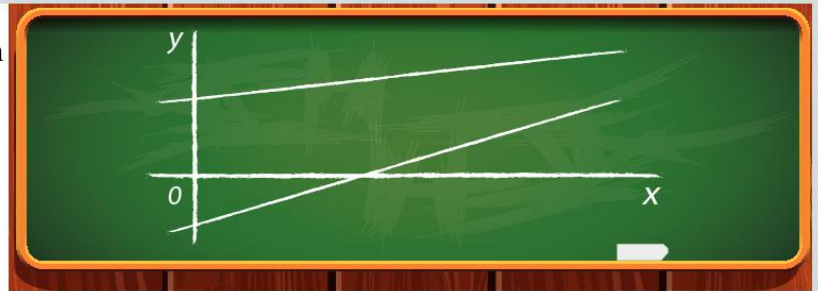
- hoe je van twee lijnen de coördinaten van het snijpunt uitrekent

Leerroutes

- ondersteunend: 18—019—19—20—021—21—22
- doorlopend: 18—19—20—21—22—23—24
- uitdagend: 18—20—21—22—23—24—U5

De docent tekent op het bord de grafieken bij de formules $y = \frac{1}{2}x + 6$ en $y = x - 2$. De grafieken snijden elkaar buiten het bord.

- Zoek uit of de grafieken elkaar snijden links van $x = 15$, rechts van $x = 15$ of precies bij $x = 15$.

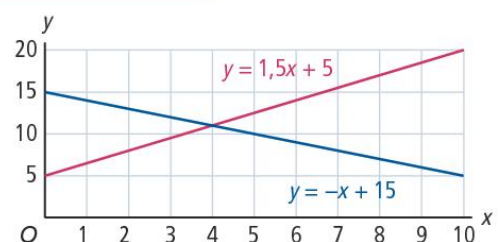


- 18** Een recreatiepark heeft twee verschillende abonnementen. Een gewoon abonnement kost € 55,- per jaar en je betaalt dan € 5,50 per bezoek. Een premium abonnement kost € 107,- per jaar maar dan betaal je slechts € 2,25 per bezoek.
- Stel een formule op voor de kosten bij een gewoon abonnement. Neem a voor het aantal bezoeken en b voor het bedrag in euro's.
 - Stel ook een formule op voor een premium abonnement.
 - Teken de grafieken die bij de formules horen in één assenstelsel. Neem op de horizontale as de waarden 0 tot 20 met stapgrootte 2.
 - Welk aantal bezoeken hoort er bij het snijpunt van de grafieken? Controleer je antwoord door het aantal in beide formules in te vullen.
 - Welke betekenis heeft het snijpunt voor de twee abonnementen?

Theorie

Twee formules kun je met elkaar vergelijken door bij beide formules een grafiek te tekenen. In het **snijpunt** van de twee grafieken hebben beide formules dezelfde uitkomst. Op de verticale as kun je die uitkomst aflezen. Op de horizontale as kun je aflezen bij welke waarde je die uitkomst krijgt.

Voorbeeld

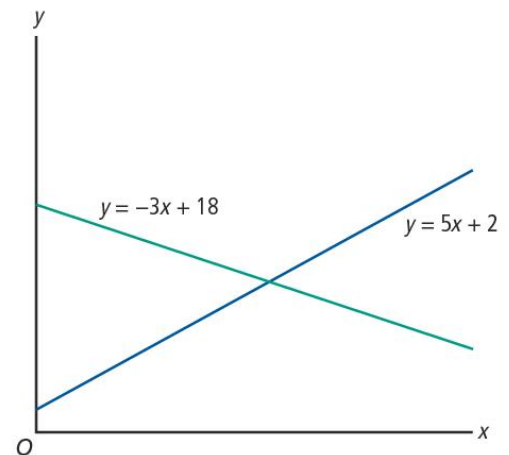


Bij $x = 4$ hebben beide formules uitkomst $y = 11$.

Ondersteunende route → maak opdracht 019

- 19** Gegeven zijn de formules $y = 2x - 7$ en $y = -3x + 18$.
- Teken in één figuur de grafieken bij beide formules.
Neem voor x de getallen 0 tot en met 10.
 - Lees de coördinaten af van het snijpunt van de grafieken.
 - Vul de x -coördinaat in beide formules in en controleer of je antwoord klopt.
 - Voer de opdrachten a, b en c ook uit voor de formules $y = -2x + 6$ en $y = \frac{1}{2}x - 4$.

- 20** Het snijpunt van de twee lineaire grafieken hiernaast is niet af te lezen.
- Leg uit waarom je met de vergelijking $5x + 2 = -3x + 18$ de x -coördinaat van het snijpunt kunt berekenen.
 - Bereken de x -coördinaat van het snijpunt door de vergelijking op te lossen.
 - Bereken de y -coördinaat van het snijpunt door de gevonden x -coördinaat in te vullen bij $y = 5x + 2$.
 - Vul de gevonden x -coördinaat ook in bij $y = -3x + 18$.
 - Geven de berekeningen van opdrachten c en d hetzelfde antwoord? Wat kun je hieruit concluderen?



Aanpak

Hoe bereken je de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij twee lineaire formules?

- Schrijf de bijbehorende vergelijking op.
- Bereken de x -coördinaat van het snijpunt door de vergelijking op te lossen.
- Bereken de y -coördinaat door de berekende x -coördinaat in één van de formules in te vullen.
- Controleer het gevonden punt door die x -coördinaat ook in de andere formule in te vullen.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de grafieken bij de formules $y = -2x + 7$ en $y = x - \frac{1}{2}$.

Oplossing

- De bijbehorende vergelijking is $-2x + 7 = x - \frac{1}{2}$
- $7 = 3x - \frac{1}{2}$
 $3x = 7\frac{1}{2}$ dus $x = 2\frac{1}{2}$
- Invullen in $y = -2x + 7$ geeft $y = -2 \times 2\frac{1}{2} + 7 = 2$ dus $S(2\frac{1}{2}, 2)$.
- Controleer. Invullen in $y = x - \frac{1}{2}$ geeft $2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2$. Klopt.

Ondersteunende route → maak opdracht 021

- 21** Bereken bij elk paar lineaire formules de coördinaten van het snijpunt S van de grafieken.

a $y = -3x + 6$ en $y = 2x - 14$

b $y = 17x - 13$ en $y = 5x - 19$

c $y = 3x + 15$ en $y = 23 - 5x$

d $y = -x + 18$ en $y = -4x - 3$

- 22** De grafiek bij de lineaire formule $y = 7$ is een horizontale lijn. Het snijpunt van de grafieken bij de formules $y = 7$ en $y = \frac{1}{2}x + 1$ ligt buiten de tekening.

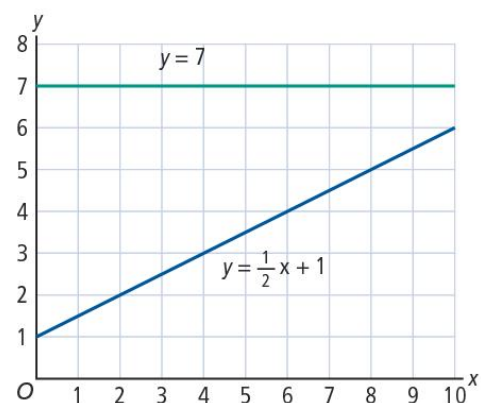
a Hoe groot is de y -coördinaat van het snijpunt?

b Om de x -coördinaat van het snijpunt uit te rekenen, moet je de vergelijking $\frac{1}{2}x + 1 = 7$ oplossen. Bereken de x -coördinaat van het snijpunt.

c Bereken bij elk paar lineaire formules de coördinaten van het snijpunt S van de grafieken

A $y = -3x + 18$ en $y = -6$

B $y = 100$ en $y = 5x + 35$



- 23** Bereken bij elk paar lineaire formules de coördinaten van het snijpunt S van de grafieken

a $y = 9 - 3x$ en $y = 15$

b $y = \frac{1}{2}x + 20$ en $y = 3x$

c $y = -2\frac{1}{2}x + 6$ en $y = 1\frac{1}{2}x - 10$

- 24** Hiernaast zijn twee lineaire grafieken getekend. Lijn l gaat door de punten $(0, 30)$ en $(2, 40)$. Lijn m gaat door de punten $(0, 5)$ en $(5, 45)$. Het snijpunt van beide grafieken is niet te zien in deze tekening.

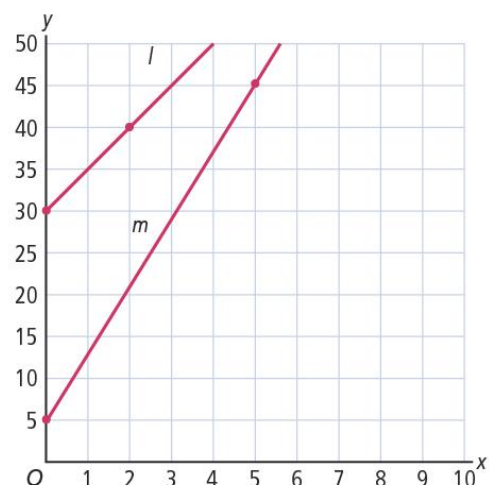
a Bereken het hellingsgetal van lijn l .

b Wat is het startgetal van lijn l ?

c Stel bij lijn l een formule op.

d Stel ook bij lijn m een formule op.

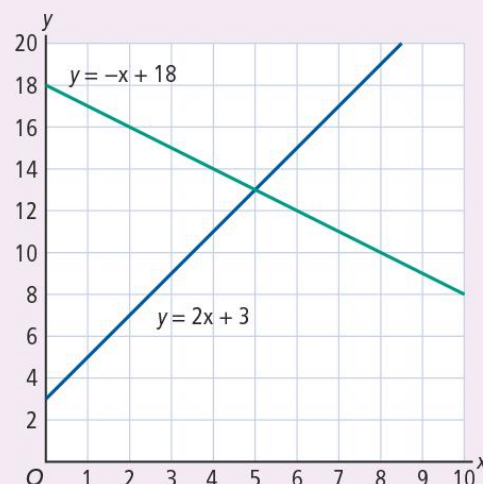
e Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.



Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

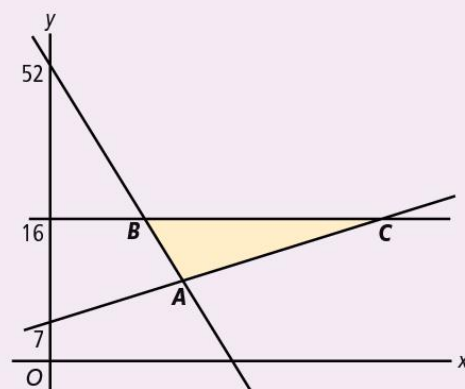
- 019** Je ziet de grafieken bij de lineaire formules $y = 2x + 3$ en $y = -x + 18$. De grafieken lijken elkaar te snijden bij $x = 5$.
- Lees de y -coördinaat van het snijpunt af.
 - Om te controleren of de coördinaten van het snijpunt goed zijn afgelezen, vul je $x = 5$ bij beide formules in. Welke waarde van y geeft de formule $y = 2x + 3$ als je $x = 5$ invult?
 - En welke waarde van y geeft de formule $y = -x + 18$ als je $x = 5$ invult?
 - Leg uit waarom je bij de opdrachten b en c dezelfde waarde van y gevonden moet hebben.
 - Heb je bij opdracht a de juiste y -coördinaat afgelezen?



- 021** Gegeven zijn de formules $y = -2x + 8$ en $y = 3x - 17$. Je gaat de coördinaten van het snijpunt van de bijbehorende grafieken berekenen.
- Met de vergelijking $-2x + 8 = 3x - 17$ kun je de x -coördinaat van het snijpunt berekenen. Los deze vergelijking op.
 - Bereken de y -coördinaat van het snijpunt door de gevonden x -coördinaat in te vullen bij $y = -2x + 8$.
 - Vul ter controle de gevonden x -coördinaat ook in bij de formule $y = 3x - 17$. Krijg je dezelfde y -coördinaat als bij opdracht b?

Uitdagende opdrachten

- U5** De grafieken bij de lineaire formules $y = -6x + 52$ en $y = 0,25x + 7$ snijden elkaar in punt A . Verder snijden de bijbehorende grafieken de horizontale lijn $y = 16$ in de punten B en C .
- Bereken de coördinaten van elk van de punten A , B en C .
 - Bereken de lengte van zijde BC van driehoek ABC .
 - Bereken de oppervlakte van driehoek ABC .

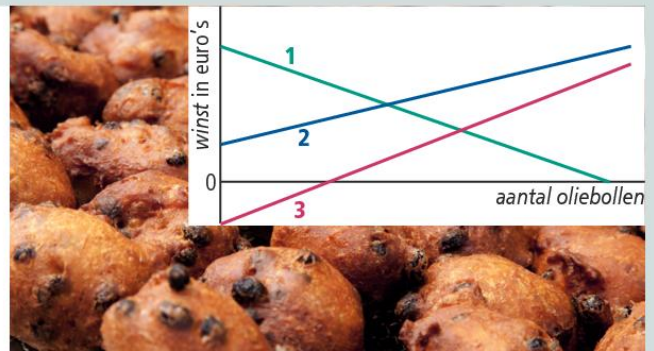


Je leert • hoe je een lijn bij een formule schetst in een assenstelsel

Leerroutes • ondersteunend: 25—26—27—028—29—30—031—31
 • doorlopend: 25—26—27—28—29—30—31—32
 • uitdagend: 25—27—28—29—31—32—U6—U7

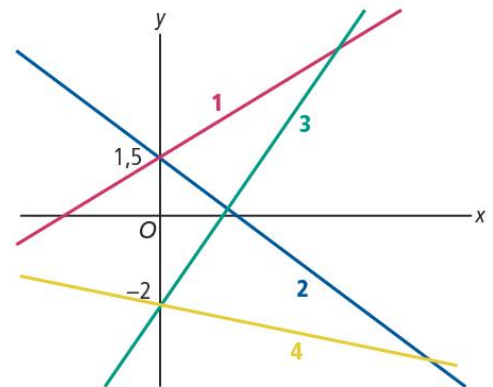
Mark heeft oliebolletjes gemaakt en verkoopt ze op de oudejaarsmarkt. Hij verkoopt de oliebolletjes voor € 1,25 per stuk. Vooraf bedenkt hij hoeveel winst hij zal maken als hij een bepaald aantal oliebolletjes verkocht heeft.

- Welke van de drie grafieken geeft het verband weer tussen het aantal verkochte oliebolletjes en de winst?



25 Gegeven is de formule $y = 1,5x - 2$. Julian is benieuwd hoe de grafiek bij deze formule eruit ziet.

- Maak een tabel bij de formule en teken de grafiek. Neem voor x de waarden -4 tot en met 6 .
- Kari zegt: 'Als je wilt weten hoe de grafiek bij de formule eruit ziet, hoef je geen tabel te maken. Aan het startgetal zie ik waar de grafiek de y -as snijdt en aan het hellingsgetal zie ik of de grafiek stijgt of daalt.' Welke van de lijnen in de schets hiernaast kan bij de formule $y = 1,5x - 2$ passen? Waarom?



Theorie

Bij een lineaire formule teken je de grafiek door eerst een tabel bij de formule te maken. Je kunt bij een lineaire formule ook een schets maken van de grafiek. Bij het maken van de schets maak je gebruik van het startgetal en het hellingsgetal in de formule.

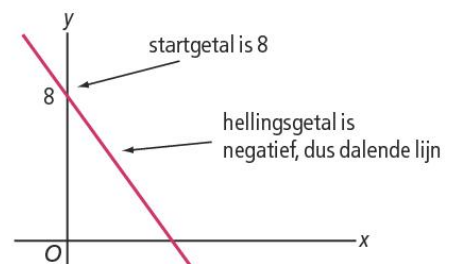
- > Uit het startgetal maak je op in welk punt de lijn de verticale as snijdt.
- > Uit het hellingsgetal maak je op of de grafiek een stijgende of dalende lijn is.

Voorbeeld

Lijn l is de grafiek bij de formule $y = -3x + 8$. In welk punt snijdt de lijn de verticale as? Is de lijn stijgend of dalend?

Oplossing

Het startgetal is 8, dus lijn l snijdt de verticale as in $(0, 8)$. Het hellingsgetal -3 is negatief, dus lijn l is een dalende lijn.



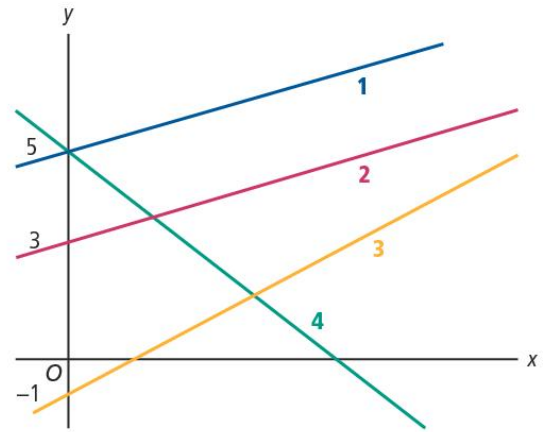
- 26** Geef van de volgende formules de coördinaten van het snijpunt van de bijbehorende grafiek met de y -as. Geef ook aan of de bijbehorende grafiek stijgend of dalend is.

- a** $y = -6x + 18$ **c** $y = 0,1x + 5$
b $y = 3,5x - 20$ **d** $y = 15 - x$

- 27** De geschetste lijnen zijn de grafieken bij de vier formules:

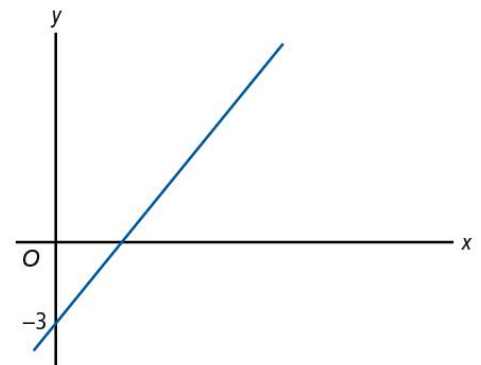
- A** $y = 3x - 1$ **C** $y = 2x + 3$
B $y = 2x + 5$ **D** $y = -4x + 5$

- a** De formules B en D hebben beide startgetal 5. Welke twee lijnen horen bij een formule met startgetal 5?
b Welke van de twee lijnen hoort bij formule D? Leg je antwoord uit.
c Welke lijn hoort bij formule A? Leg uit waarom.
d De lijnen 1 en 2 zijn evenwijdig. Hoe zie je dat aan de formules die bij deze lijnen horen?



Ondersteunende route → maak opdracht 028

- 28** De schets hiernaast past bij de formule $y = 2x - 3$.
a Leg uit dat de schets ook bij de formule $y = 4x - 3$ kan passen, maar niet bij de formule $y = 2x - 4$ en ook niet bij de formule $y = -2x - 3$.
b Maak zelf zo'n schets bij de volgende formules.
A $y = 2x + 3$ **C** $y = 9 - 4x$
B $y = -\frac{1}{2}x - 1$ **D** $y = x - 4$

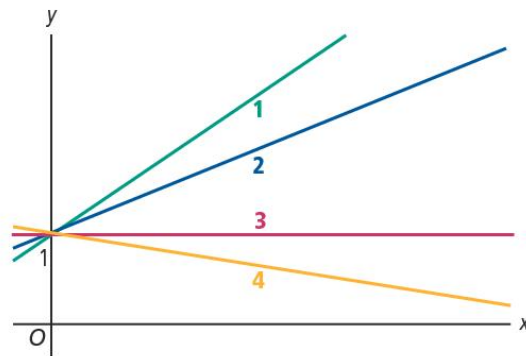


- 29** Gegeven zijn de formules $y = 3x - 2$ en $y = 5 - x$.
a Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij de formules.
b Schets de grafieken bij de formules in één assenstelsel.
c Leg met je schets uit welke van de twee formules de grootste uitkomst heeft bij $x = 2$.

30 De geschetste lijnen zijn de grafieken bij de vier formules:

- A $y = 1 + 2x$ C $y = 3x + 1$
 B $y = 1$ D $y = -x + 1$

- a** De lijnen snijden de verticale as allemaal in hetzelfde punt.
 Hoe zie je dat in de vier formules?
b Lijn 1 loopt steiler omhoog dan lijn 2.
 Wat betekent dat voor de hellingsgetallen van lijn 1 en lijn 2?
c Geef bij elke lijn de juiste formule.

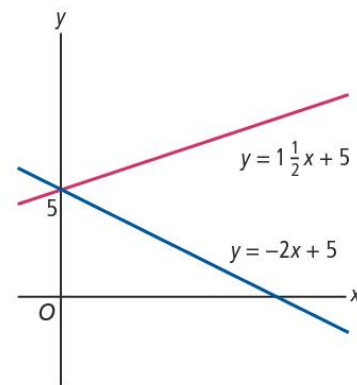


Als je de grafieken gaat schetsen van twee lineaire formules met twee verschillende positieve hellingsgetallen, dan schets je de grafiek met het grootste hellingsgetal het steilst.

Ondersteunende route → maak opdracht O31

31 Hiernaast zijn de grafieken geschetst bij de lineaire formules $y = 1\frac{1}{2}x + 5$ en $y = -2x + 5$.
W Schets in dezelfde figuur de grafieken van de formules:

- A $y = 3x + 5$ D $y = -x - 3$
 B $y = -1\frac{1}{2}x + 5$ E $y = 10$
 C $y = 4x - 3$ F $y = x + 10$



- 32** Gegeven zijn de formules $y = 1\frac{1}{2}x - 2$ en $y = x + 3$.
a Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij de formules.
b Schets de grafieken bij de formules in één assenstelsel.
c Leg met je schets uit welke van de twee formules de grootste uitkomst heeft bij $x = 12$.

Uitdagende route → maak opdracht U6 en U7

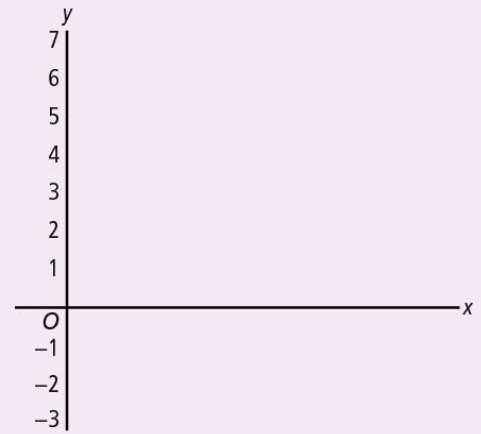
Ondersteunende opdrachten

028 Je gaat een schets maken van de grafiek bij de formule $y = -3x + 5$.

- Hoe groot is het startgetal bij deze formule? Door welk punt op de y -as moet de grafiek dus gaan?
- Is het hellingsgetal van de grafiek negatief of positief? Is de grafiek dus stijgend of dalend?
- Gebruik je antwoorden van de opdrachten a en b om de grafiek te schetsen bij de formule $y = -3x + 5$.

Maak een schets bij de volgende formules.

- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| d $y = 3x - 6$ | f $y = -0,1x + 5$ |
| e $y = x + 3$ | g $y = -8x - 4$ |

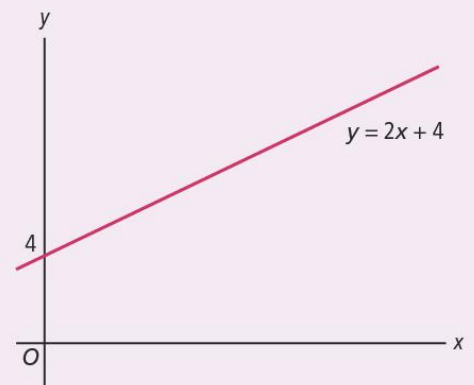


031 Je ziet een schets van de grafiek bij de formule $y = 2x + 4$.

W

Je gaat in hetzelfde assenstelsel de grafieken schetsen van de formules $y = 3x + 4$, $y = 5x + 4$ en $y = -x + 4$.

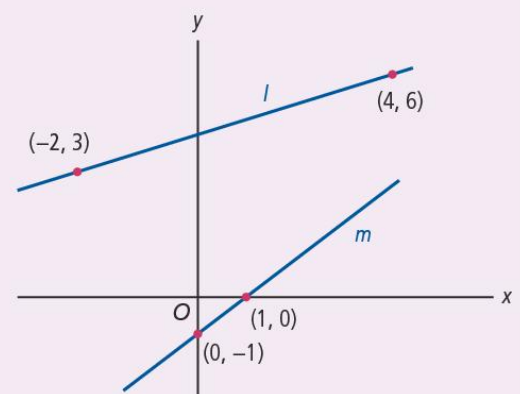
- De grafiek bij de formule $y = 3x + 4$ snijdt de verticale as ook in het punt $(0, 4)$.
Hoe zie je aan het hellingsgetal dat deze grafiek steiler loopt dan de al geschetste lijn?
- Schets de grafiek bij de formule $y = 3x + 4$.
- De grafiek bij de formule $y = 5x + 4$ snijdt de verticale as ook in het punt $(0, 4)$.
Hoe zie je aan het hellingsgetal dat deze grafiek steiler loopt dan twee geschetste lijnen? Schets deze grafiek.
- Waarom hoort bij de formule $y = -x + 4$ een dalende lijn? Schets ook deze lijn in hetzelfde assenstelsel.



Uitdagende opdrachten

U6 In de figuur hiernaast ligt het snijpunt van de lijnen l en m buiten de schets. Bereken de coördinaten van het snijpunt.

U7 Gegeven zijn de formules $y = -2x + 8$ en $y = x - 7$. De grafieken bij deze formules vormen samen met de y -as een driehoek. Bereken de oppervlakte van deze driehoek.



Je leert

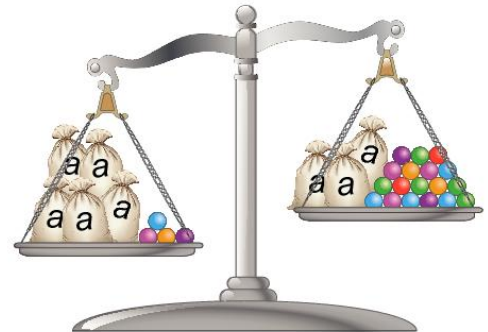
- wat een ongelijkheid is
- hoe je een ongelijkheid oplost met grafieken

Leerroutes

- ondersteunend: 33—34—35—36—037—038—39
- doorlopend: 33—34—35—36—37—38—39
- uitdagend: 33—34—35—36—37—39—U8

Op de balans staan links vijf zakjes met knikkers en 4 losse knikkers. Rechts staan drie zakjes en 18 losse knikkers. De zakjes bevatten allemaal evenveel knikkers. Je ziet dat de balans niet in evenwicht is.

- Is het in deze situatie mogelijk dat de zakjes vier knikkers bevatten? En acht?
- Zoek uit hoeveel knikkers de zakjes in deze situatie kunnen bevatten.



33 Een reclameballon bevat 200 kg heliumgas. Door kleine lekjes ontsnapt er elk uur 2,5 kg heliumgas uit de ballon. De formule voor de hoeveelheid heliumgas h in kg na een tijd van u uur is $200 - 2,5u = h$.

- Na hoeveel uur zit er 175 kg heliumgas in de ballon?
- Hans wil weten wanneer er minder dan 175 kg heliumgas in de ballon zit. Hij schrijft zijn vraag op als $200 - 2,5u < 175$.
Leg uit hoe hij hier aan komt.
- Laat zien dat $u = 50$ een antwoord op de vraag van Hans is.
- Geef nog vijf antwoorden op de vraag van Hans.

Theorie

Als je wilt weten bij welke waarden van u geldt $200 - 2,5u < 150$ dan los je een **ongelijkheid** op. Bij een ongelijkheid is er niet één getal als oplossing, maar zijn er meer getallen mogelijk. Wanneer je als oplossing van een ongelijkheid krijgt: 'alle getallen groter dan 20', dan noteer je dat als $u > 20$.

Voorbeeld

De vergelijking $200 - 2,5u = 150$ heeft als oplossing $u = 20$.

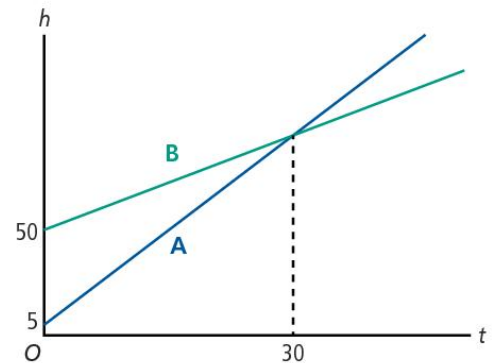
De ongelijkheid $200 - 2,5u < 150$ heeft als oplossing $u > 20$.

34 Geef van de volgende uitdrukkingen aan of het een vergelijking is of een ongelijkheid.

- $20p + 350 = 900$
- $12,5 + 8m > 87,5$
- $300 - 9x < 120$
- $1000 - 75t = 400$

- 35** De zwembaden A en B worden bijgevuuld. Bij zwembad A geldt de formule $h = 3t + 5$, met h de hoogte van het water in cm en t de tijd in minuten na het opendraaien van de kraan. Voor zwembad B geldt de formule $h = 1,5t + 50$.

- Bereken voor $t = 20$ in welk zwembad het water op dat moment hoger staat.
- Is $t = 20$ een oplossing van de ongelijkheid $3t + 5 > 1,5t + 50$ of van de ongelijkheid $3t + 5 < 1,5t + 50$?
- In de schets zie je de grafieken bij de formules. Hoe zie je aan de formules dat de grafiek bij $h = 3t + 5$ steiler moet lopen dan die bij $h = 1,5t + 50$?
- Lees uit de grafieken af of $t = 15$ een oplossing is van de ongelijkheid $3t + 5 > 1,5t + 50$.
- Lees uit de grafieken af wat de oplossing is van de ongelijkheid $3t + 5 > 1,5t + 50$.



Als je twee formules A en B met elkaar gaat vergelijken, dan kun je daarvoor de grafieken gebruiken. Waar de grafiek bij A hoger ligt dan de grafiek bij B zijn de uitkomsten bij formule A groter dan die bij formule B.

- 36** In deze opdracht ga je de ongelijkheid $19 - 2x < x + 1$ oplossen met behulp van grafieken bij de formules $y = 19 - 2x$ en $y = x + 1$.
- Bij deze ongelijkheid hoort de vergelijking $19 - 2x = x + 1$. Los deze vergelijking op.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.
 - Schets in één figuur de grafieken bij de formules $y = 19 - 2x$ en $y = x + 1$.
 - Voor welke waarden van x ligt de grafiek bij $y = 19 - 2x$ lager dan die bij $y = x + 1$?
 - Welke oplossing heeft de ongelijkheid $19 - 2x < x + 1$?

Aanpak

Hoe los je een ongelijkheid op met grafieken?

- Stel de vergelijking op die bij de ongelijkheid past.
- Los deze vergelijking op en bereken de coördinaten van het snijpunt.
- Teken of schets in één figuur de bijbehorende grafieken.
- Lees uit de bijbehorende grafieken de oplossing van de ongelijkheid af.

Voorbeeld

Los op: $x + 10 > 2x + 2$

Oplossing

1 $x + 10 = 2x + 2$

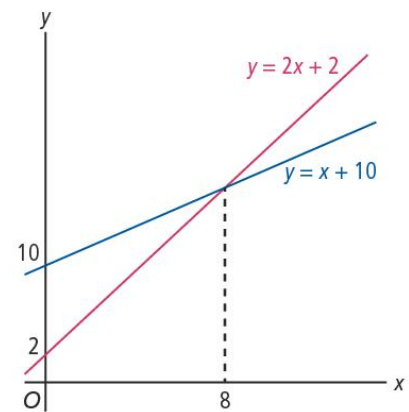
2 $10 = x + 2$

$8 = x$ ofwel $x = 8$

Invullen geeft $y = 8 + 10 = 18$. Het snijpunt is $(8, 18)$.

3 De grafiek bij $y = 2x + 2$ is een stijgende lijn die de y -as snijdt in $(0, 2)$. De grafiek bij $y = x + 10$ is ook stijgend, maar minder snel dan de andere lijn, want het hellingsgetal 1 is kleiner dan het hellingsgetal 2. De lijn snijdt de y -as in $(0, 10)$.

4 Links van $x = 8$ ligt de grafiek bij $y = x + 10$ hoger dan de grafiek bij $y = 2x + 2$. De oplossing van de ongelijkheid is $x < 8$.



Ondersteunende route → maak opdracht 037

37 Los de ongelijkheden op.

a $4x - 7 < 2x + 8$

d $x - 10 > 6x$

b $6 - 8x > -3x - 9$

e $6 - 4x > 21 + x$

c $-18 + 5x > 12 + 2x$

f $2x + 16 < 13 - x$

Ondersteunende route → maak opdracht 038

38 Bij de ongelijkheid $-2x + 3 > 11$ schets je de grafiek bij de formule $y = -2x + 3$ en de horizontale lijn $y = 11$.

a Los de ongelijkheid $-2x + 3 > 11$ op.

b Los de ongelijkheid $6x - 10 < 2$ op.

39 Mevrouw Van Dijk wil haar tuin laten opknappen. Zij heeft hiervoor twee offertes laten opmaken. Tuiniersbedrijf Saarloos vraagt € 55,- per uur werk en een vast bedrag van € 120,-. Tuiniersbedrijf Bos vraagt slechts € 48,50 per uur werk maar een wat hoger vast bedrag van € 211,-.

a Mevrouw Van Dijk vraagt zich af bij welke aantallen uren Bos goedkoper is dan Saarloos.

Welke ongelijkheid hoort hierbij: $55u + 120 < 48,5u + 211$ of $55u + 120 > 48,5u + 211$? Hierbij is u het aantal uren dat er aan de klus gewerkt moet worden.

b Los de ongelijkheid op. Bij welke aantallen uren werk raad je mevrouw Van Dijk aan om de klus door tuiniersbedrijf Bos te laten doen?

Uitdagende route → maak opdracht U8

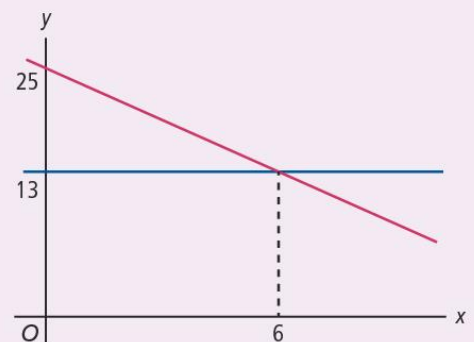
Ondersteunende opdrachten

- 037** Je gaat de ongelijkheid $-3x + 18 > x - 2$ oplossen.
- Los de vergelijking $-3x + 18 = x - 2$ op en bereken de coördinaten van het snijpunt.
 - Schets in één figuur de grafieken bij de formules $y = -3x + 18$ en $y = x - 2$. Geef in je figuur ook de oplossing van opdracht a aan.
 - Voor welke waarden van x ligt de grafiek bij $y = -3x + 18$ hoger dan die bij $y = x - 2$?
 - Schrijf de oplossing van de ongelijkheid op.

Los de volgende ongelijkheden op.

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| e $4x + 5 > x + 14$ | h $8x + 3 < -2x + 33$ |
| f $7x - 13 < 5 - 2x$ | i $2x - 7 < 8x + 2$ |
| g $-5x + 33 > -22 + 6x$ | j $-4x + 12 > x - 3$ |

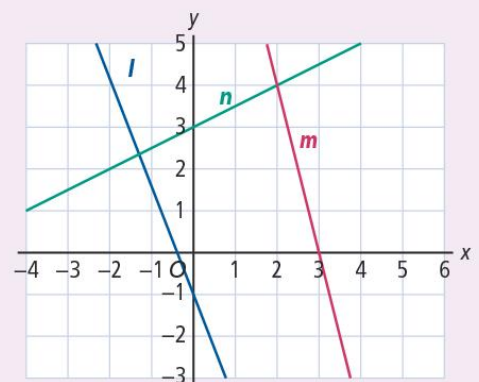
- 038** Je gaat de ongelijkheid $-2x + 25 > 13$ oplossen.
- Los de vergelijking $-2x + 25 = 13$ op.
 - De grafiek bij de formule $y = -2x + 25$ is een dalende lijn die de y -as snijdt in het punt $(0, 25)$. De grafiek bij de formule $y = 13$ is een horizontale lijn die de y -as snijdt in $(0, 13)$.
Waar ligt de grafiek bij de formule $y = -2x + 25$ hoger dan de grafiek bij de formule $y = 13$? Links of rechts van $x = 6$?
 - Lees uit de schets de oplossing af van de ongelijkheid.
 - Los de ongelijkheid $8x + 10 > 34$ op.
 - Los ook de ongelijkheid $15 - 3x < 9$ op.

**Uitdagende opdrachten**

- U8** De grafieken horen bij de drie lineaire formules

$$y = \frac{1}{2}x + 3, y = -2\frac{1}{2}x - 1 \text{ en } y = 12 - 4x.$$

- Welke grafiek hoort bij de formule $y = \frac{1}{2}x + 3$?
- Geef ook van de twee andere grafieken de bijbehorende formule.
- Voor welke waarden van x geldt $12 - 4x < \frac{1}{2}x + 3$?
- Los op $-2\frac{1}{2}x - 1 > 12 - 4x$.
- Los ook op $12 - 4x > 10$.



40 Twee watervaten worden gevuld. Bij vat A hoort de formule $W = 2,5m + 12$. Bij vat B hoort de formule $W = 2,75m + 3$. Hierin is W het aantal liters water en is m de tijd in minuten.

- Welk vat bevat er bij de start van het vullen al de meeste liters water?
- Stel een vergelijking op waarmee je kunt berekenen na hoeveel minuten de vaten evenveel water bevatten.
- Los de vergelijking van opdracht b op.
- Beide vaten kunnen 200 liter water bevatten. Welk vat is het eerst vol? Gebruik je antwoorden van de opdrachten a en c.

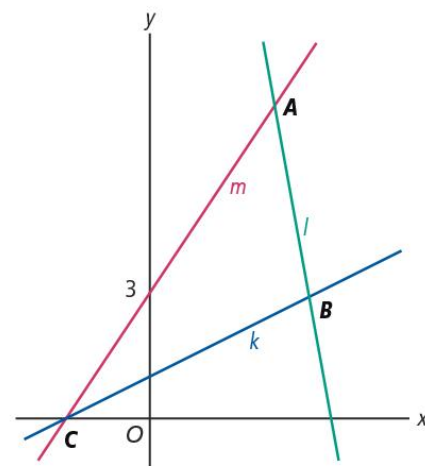
41 In het assenstelsel zijn de grafieken getekend bij drie lineaire formules. De drie grafieken snijden elkaar in de punten A, B en C.

Lijn k is de grafiek bij de formule $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Lijn l is de grafiek bij de formule $y = -4\frac{1}{2}x + 21$.

Lijn m gaat behalve door punt C ook door het punt $(0, 3)$.

- Bereken de coördinaten van punt B.
- Lijn k snijdt de x -as in punt C. Leg uit waarom je de coördinaten van punt C kunt berekenen door de vergelijking $\frac{1}{2}x + 1 = 0$ op te lossen.
- Welke coördinaten heeft punt C?
- Geef de formule die bij lijn m hoort.
- Bereken de coördinaten van punt A.



42 Los de ongelijkheden op.

- $6 - 2x > x - 9$
- $19 - x < 5x + 3$
- $4x - 3 > 8 + 6x$

43 Gegeven zijn de drie formules:

A: $y = 10 - x$, B: $y = 3x$ en C: $y = 4 + \frac{1}{2}x$.

- Teken in één assenstelsel de grafieken bij de drie formules.
- Bereken de coördinaten van de drie snijpunten.
- Voor welke waarden van x geeft formule A kleinere uitkomsten dan formule B, maar grotere uitkomsten dan formule C?

- 44** Een bedrijf verkoopt flessen frisdrank van anderhalve liter. Voor de winst w in euro's bij een verkoop van a flessen geldt de formule $w = 0,50a - 30\,000$.
- Hoe zie je de vaste kosten in de formule terug?
 - Hoeveel flessen frisdrank moeten er verkocht worden om meer dan € 12.500,- winst te maken?
 - Een ander bedrijf maakt flessen frisdrank van twee liter. De vaste kosten hierbij zijn € 42.500,-. Per verkochte fles maakt het bedrijf € 0,65 winst. Het bedrijf wil weten bij welke aantallen verkochte flessen van twee liter meer dan € 12.500,- winst gemaakt wordt.
Schrijf de ongelijkheid op die bij deze vraag hoort.
 - Los de ongelijkheid van opdracht c op.
- 45** Bij de voetbalwedstrijden van team C1 van Z.O.B. zorgen de ouders voor extra vervoer. In het busje van de coach is altijd plaats voor vijf spelers. Daarnaast is er bij elke meerijsende ouder plaats voor drie spelers.
- Stel een vergelijking op waarmee je het aantal meerijsende ouders a kunt berekenen als er 13 spelers in team C1 zitten en los deze vergelijking op.
 - Hoeveel ouders moeten er meerijden?
 - Voor een toernooi neemt de coach van team C1 ook de spelers van team C2 mee. In totaal gaan er 27 spelers mee. Hoeveel ouders moeten er nu meerijden?



- 46** Los de vergelijkingen op en vul de oplossingen op de juiste plaats in.

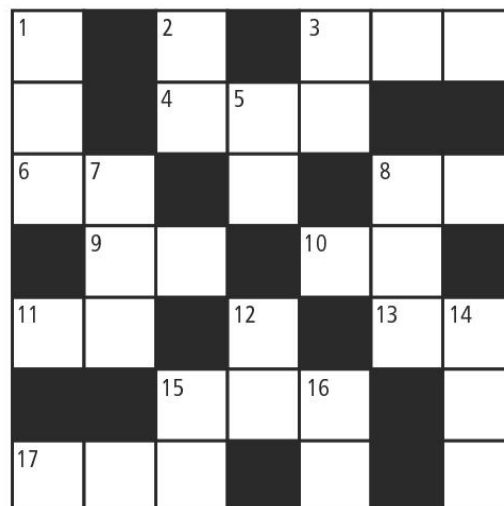
W

horizontaal

- $\frac{1}{10}a = 50$
- $2x - 11 = 4x - 253$
- $12a + 12 = 8a + 60$
- $40 - d = 3$
- $4p - 3 = 149$
- $3f + 9 = 4f - 47$
- $2(3r + 1) = 62$
- $-x - 10 = -2x + 22$
- $20 - 6r = 3r - 1132$
- $3(p - 7) = 594$

verticaal

- $2(5 - b) = -272$
- $13 + 4c = 44 + 3c$
- $2d - 7 = 95$
- $2\frac{1}{2}x - 12 = 4x - 51$
- $-225 = -1\frac{1}{2}(2g - 310)$
- $\frac{1}{3}k - 78 = 43$
- $-w - 1 = -3w + 43$
- $b + 19 = 310$
- $121x - 15 = 1800$
- $-3x + 93 = -2x + 11$



Theorie

Balansmethode

Voor het oplossen van een lineaire vergelijking kun je gebruik maken van de balansmethode. Net als bij een balans doe je aan de linker- en aan de rechterkant van het gelijkteken van de vergelijking steeds hetzelfde.

- S1** In elk van de zakken op de balans zitten a knikkers.
- Hoeveel zakken kun je links en rechts maximaal weghalen, zo dat de balans nog wel in evenwicht is?
 - Hoeveel losse knikkers kun je links en rechts maximaal weghalen, zo dat de balans nog in evenwicht is?
 - Hoeveel knikkers zitten er in een zak?



Theorie

Snijpunt

Twee formules kun je met elkaar vergelijken door bij beide formules een grafiek te tekenen. In het snijpunt van de twee grafieken hebben beide formules dezelfde uitkomst.

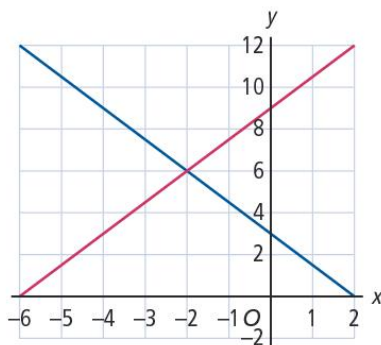
Op de verticale as kun je die uitkomst aflezen. Op de horizontale as kun je aflezen bij welke waarde je die uitkomst krijgt.

Voorbeeld

De grafieken horen bij de formules $y = 1,5x + 9$ en $y = 3 - 1,5x$.

Bij $x = -2$ hebben beide formules uitkomst $y = 6$.

Het snijpunt is $(-2, 6)$.



- S2** Gegeven zijn de formules $y = -3x + 9$ en $y = 2x + 4$.
- Teken in één figuur bij beide formules een grafiek.
 - Lees de coördinaten van het snijpunt af.

Theorie**Ongelijkheid**

Bij een ongelijkheid vergelijk je twee formules en vraag je je af bij welke waarden de ene formule grotere (of kleinere) uitkomsten geeft dan de andere.

Bij een ongelijkheid is er niet één getal als oplossing, maar zijn er meer getallen mogelijk.

De oplossing van een ongelijkheid noteer je bijvoorbeeld als $x > 14$ of $x < -3$.

Voorbeeld

De vergelijking $8x - 3 = 10x + 5$ heeft als oplossing $x = -4$.

De ongelijkheid $8x - 3 > 10x + 5$ heeft als oplossing $x < -4$.

- S3** Hieronder staat links een aantal vergelijkingen en ongelijkheden en rechts de oplossingen.
Zoek uit welke oplossing bij welke vergelijking of ongelijkheid hoort.

- | | |
|------------------|----------------------|
| A $2x + 10 = 17$ | 1 $x > 8$ |
| B $3x - 4 > 20$ | 2 $x = 3\frac{1}{2}$ |
| C $15 - 6x = -9$ | 3 $x = 4$ |
| D $7x + 35 < 21$ | 4 $x < -2$ |

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking oplossen waarin de variabele aan beide kanten van het gelijkteken staat.

- 1 Zorg ervoor dat de variabele nog maar aan één kant van het gelijkteken staat. Haal dus aan beide kanten van het gelijkteken hetzelfde eraf of tel hetzelfde erbij op.
- 2 Je houdt dan een vergelijking over met de variabele aan één kant van het gelijkteken. Deze vergelijking kun je op twee manieren oplossen.
 - Doe aan beide kanten van het gelijkteken hetzelfde.
 - Of gebruik bordjes.
- 3 Controleer je oplossing.

Voorbeeld

Los op $-3a + 20 = 5a + 4$.

Oplossing

$$1 \quad -3a + 20 = 5a + 4$$

$$+ 3a \quad + 3a$$

$$2 \quad 20 = 8a + 4$$

$$-4 \quad -4$$

$$16 = 8a$$

$$a = 2$$

- 3 Invullen in $-3a + 20$ geeft $-3 \times 2 + 20 = 14$ en invullen in $5a + 4$ geeft $5 \times 2 + 4 = 14$. Klopt.

- S4** Los de vergelijkingen op.

- a $8p + 12 = 3p - 3$
- b $12 - 3a = 4a + 5$

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten berekenen van het snijpunt van de grafieken bij twee lineaire formules.

- 1 Schrijf de bijbehorende vergelijking op.
- 2 Bereken de x -coördinaat van het snijpunt door de vergelijking op te lossen.
- 3 Bereken de y -coördinaat door de berekende x -waarde in één van de twee formules in te vullen.
- 4 Controleer het gevonden snijpunt door die x -coördinaat ook in de andere formule in te vullen.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de grafieken bij de formules $y = -x + 5$ en $y = 2x + 1$.

Oplossing

- 1 $-x + 5 = 2x + 1$
- 2 $5 = 3x + 1$
 $3x = 4$
 $x = 1\frac{1}{3}$
- 3 Invullen in $y = -x + 5$ geeft
 $y = -1\frac{1}{3} + 5 = 3\frac{2}{3}$ dus $S(1\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3})$
- 4 Controleren in $y = 2x + 1$ geeft
 $y = 2 \times 1\frac{1}{3} + 1 = 3\frac{2}{3}$. Klopt.

S5 Bereken bij elk paar lineaire formules de coördinaten van het snijpunt S van de grafieken.

- a $y = -3x + 8$ en $y = 7x + 3$
- b $y = 15x + 3$ en $y = 11x - 17$

Vaardigheid

Je kunt een lijn bij een formule schetsen in een assenstelsel.

- > Uit het startgetal lees je af in welk punt de lijn de verticale as snijdt.
- > Uit het hellingsgetal lees je af of de grafiek een stijgende of dalende lijn is. Bij stijgende lijnen geldt: hoe groter het hellingsgetal, hoe steiler de grafiek.

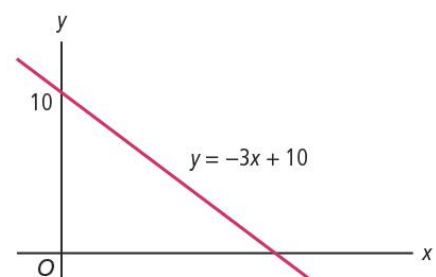
Voorbeeld

Schets de grafiek bij de formule $y = -3x + 10$.

Oplossing

Het startgetal is 10, dus de grafiek snijdt de verticale as in $(0, 10)$.

Het hellingsgetal is negatief, dus de grafiek is dalend.



S6 Schets een grafiek bij de formules.

- a $y = \frac{1}{2}x + 15$
- b $y = -x - 2$

Vaardigheid**Je kunt een ongelijkheid oplossen met grafieken.**

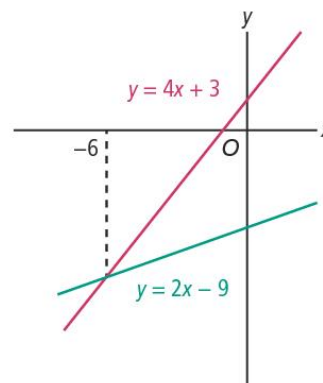
- 1 Stel de vergelijking op die bij de ongelijkheid past.
- 2 Los deze vergelijking op en bereken de coördinaten van het snijpunt.
- 3 Teken of schets de bijbehorende grafieken.
- 4 Lees uit de bijbehorende grafieken de oplossing van de ongelijkheid op.

Voorbeeld

Los op: $4x + 3 > 2x - 9$

Oplossing

- 1 $4x + 3 = 2x - 9$
- 2 $2x + 3 = -9$
 $2x = -12$ dus $x = -6$
 $y = 4 \times -6 + 3 = -24 + 3$ dus $y = -21$
- 3 De grafiek bij $y = 4x + 3$ is een stijgende lijn die de y -as snijdt in het punt $(0, 3)$. De grafiek bij $y = 2x - 9$ is een stijgende lijn die de y -as snijdt in het punt $(0, -9)$.
 De schets staat hiernaast.
- 4 Rechts van $x = -6$ ligt de grafiek bij $y = 4x + 3$ hoger dan de grafiek bij $y = 2x - 9$.
 De oplossing van de ongelijkheid is $x > -6$.



S7 Los de ongelijkheden op.

- a $-8x + 4 < 2x + 24$
- b $12 - 3x > 4x - 16$

T1 Los de vergelijkingen op.

- a** $3q - 10 = -2q + 30$
- b** $3p + 12 = 6(2p - 4)$
- c** $4(x + 3) + 2x = 3x - 15$
- d** $3 - 6t = -5t + 2(t - 9)$

T2 Een tropisch zwemparadijs heeft voor kinderen vanaf twaalf jaar twee verschillende tarieven.

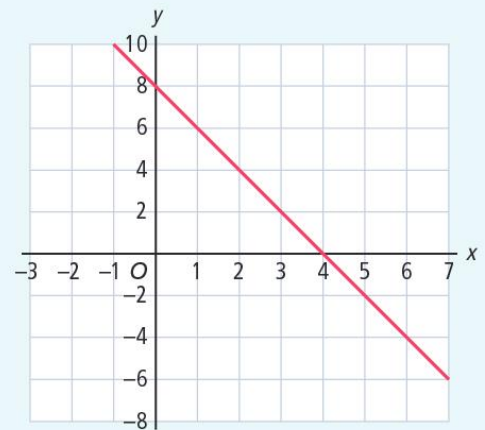
- a** Bereken voor beide tarieven de kosten van zes bezoeken van twee uur.
- b** Voor het bovenste tarief geldt de formule $k = 8a$. Hierin is k de kosten in euro's en a het aantal bezoeken.
Stel voor het onderste tarief ook een formule op.
- c** Teken in één assenstelsel de grafieken die bij de formules horen. Neem horizontaal de getallen 0 tot 20.
- d** Bij hoeveel bezoeken maakt het niet uit welk tarief je gebruikt?



T3 In het assenstelsel is een grafiek getekend bij de lineaire formule $y = 8 - 2x$.

W

- a** Teken in hetzelfde assenstelsel een grafiek bij de formule $y = 2x + 4$.
- b** Geef een ongelijkheid waarmee je kunt berekenen voor welke waarden van x de formule $y = 8 - 2x$ grotere uitkomsten geeft dan de formule $y = 2x + 4$.
- c** Los deze ongelijkheid op.
- d** Gegeven is de formule $y = 10$.
Bereken bij welke waarden van x de formule $y = 2x + 4$ grotere uitkomsten geeft dan de formule $y = 10$.



T4 Gegeven zijn de formules $b = -4a + 20$ en $b = 2a + 4$.

- a** Bereken de coördinaten van het snijpunt van de bijbehorende grafieken.
- b** Voor welke waarden van a geeft de formule $b = -4a + 20$ kleinere uitkomsten dan de formule $b = 2a + 4$?

- T5** Gegeven zijn de formules $y = 8 - 2x$ en $y = -3x + 14$.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij de formules.
 - Schets in één assenstelsel de grafieken bij de formules.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek bij de formule $y = -3x + 14$ met de horizontale as.
- T6** Meneer Duin koopt zijn drinkwater bij Vitens. Hij betaalt bij dit bedrijf € 1,28 per m^3 . Per jaar komt daar nog een vaste bedrag van € 26,- bij.
Meneer Duin krijgt een aanbieding van het bedrijf Aquapuur. Daar betaalt hij € 1,24 per m^3 water. Het vaste bedrag is wel wat hoger, namelijk € 50,- per jaar. Bij welke aantallen m^3 water raad je meneer Duin aan om in te gaan op dit aanbod?
- T7** Los de ongelijkheden op.
- $-2\frac{1}{2}x + 3 > -2$
 - $95 - 20x > 5x - 30$
 - $4x + 15 < 6x + 57$
- T8** Twee Engelse bedrijven Car-rent en Sprint verhuren auto's. Car-rent vraagt tien Engelse ponden (£ 10) en verder £ 0,20 per km. Sprint vraagt £ 7 en verder £ 0,22 per km. Sprint gebruikt de formule $b = 7 + 0,22a$. Hierin is a het aantal kilometers en b het bedrag in Engelse ponden.
- Geef een formule voor het bedrag dat Car-rent rekent.
 - Stel een vergelijking op om het snijpunt te berekenen van de bijbehorende grafieken.
 - Los de vergelijking van opdracht b op.
 - Schets de grafieken bij de formules in één assenstelsel.
 - Bij welke afstanden is het voordeliger om bij Sprint te huren?



Je kunt een vergelijking oplossen waarin de variabele aan beide kanten van het gelijkteken staat.

E1 Los de vergelijkingen op.

a $5x + 6 = 7x + 2$

e $3q + 4 = 21q - 5$

b $9x + 10 = 34 + x$

f $13h + 41 = h - 49$

c $4x + 9 = 7x$

g $y + 137 = 15y - 339$

d $7x + 4 = 8x + 3$

h $-3r + 3 = 2r - 32$

E2 Los de vergelijkingen op.

a $2(x + 2) = 3x - 9$

d $3(2t - 3) = 2(3 - 2t)$

b $\frac{1}{2}a - 12 = -2(a - 9)$

e $\frac{1}{2}p - 8 = -2(p + 4)$

c $6(2k + 2) = -4(k + 5)$

f $b - 6(3 - 2b) = 9b$

Je kunt de coördinaten berekenen van het snijpunt van de grafieken bij twee lineaire formules.

E3 Gegeven zijn de lineaire formules $y = 9 - 2x$ en $y = 1\frac{1}{2}x + 2$.

a Teken in één figuur de grafieken bij deze formules.

Neem voor x en y de getallen 0 tot en met 10.

b Lees de coördinaten af van het snijpunt van de grafieken.

c Vul de x -coördinaat in beide formules in en controleer of je antwoord klopt.

d Geef de vergelijking waarmee je de x -coördinaat van het snijpunt kunt berekenen en los deze vergelijking op.

E4 Bereken bij elk paar lineaire formules de coördinaten van het snijpunt van de bijbehorende grafieken.

a $y = -2x + 1$ en $y = x - 5$

b $y = 5 - 3x$ en $y = 2x - 10$

c $y = 18x - 5$ en $y = 35x - 73$

Je kunt een lijn bij een formule schetsen in een assenstelsel.

E5 Schets in één assenstelsel de lijnen bij de formules.

a $y = -2x + 5$

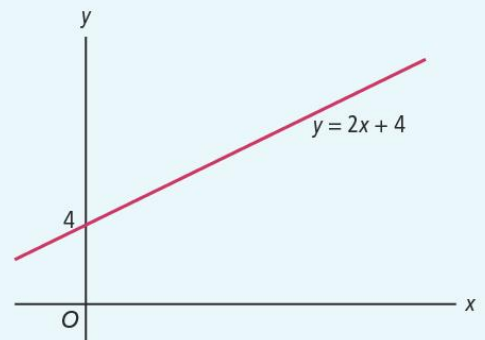
b $y = -4 + 1,5x$

c $y = 5x - 13$

d $y = 10$

- E6** De lijn bij de formule $y = 2x + 4$ is geschetst.
W Schets in dezelfde figuur de lijnen bij de volgende formules.

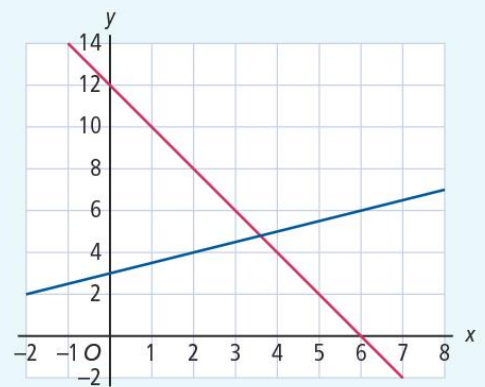
- A $y = 3x + 4$
 B $y = x + 4$
 C $y = -2x + 4$
 D $y = 2x - 4$
 E $y = -4$



Je kunt een ongelijkheid oplossen met grafieken.

- E7** Gegeven zijn de formules $y = 3x + 5$ en $y = 2x + 18$.
 a Schets de grafieken bij de formules in één figuur.
 b Bereken de coördinaten van het snijpunt.
 c Leg uit hoe je in je schets kunt zien dat de formule $y = 3x + 5$ bij $x = 10$ een kleinere uitkomst heeft dan de formule $y = 2x + 18$.
 d Los de ongelijkheid $3x + 5 < 2x + 18$ op.

- E8** De grafieken horen bij de lineaire formules $y = -2x + 12$ en $y = 0,5x + 3,75$.
 a Welke formule hoort bij de blauwe lijn?
 b Lees uit de grafieken af welke van de twee formules bij $x = 2$ de grootste uitkomst heeft.
 c Bereken de coördinaten van het snijpunt.
 d Anouk vraagt zich af bij welke waarden van x de formule $y = 0,5x + 3,75$ grotere uitkomsten heeft dan de formule $y = -2x + 12$.
 Welke ongelijkheid hoort hierbij? Schrijf ook de oplossing van de ongelijkheid op.



- E9** Los de ongelijkheden op.
- | | |
|-------------------------------------|---------------------|
| a $7x - 6 > 8$ | d $-4x + 4 > 20$ |
| b $7x - 3 > 4x + 9$ | e $8x - 44 < 0$ |
| c $\frac{2}{3}x - 2 < \frac{1}{3}x$ | f $4 - 3x > 2x + 2$ |

Je leert

- hoe je formules herleidt
- wat substitueren is

Deze paragraaf bereidt voor op klas 3 vwo.

- 1** Romée doet graag aan aerobics en aan hardlopen. Zij zorgt er elke week voor dat zij 1500 calorieën verbrandt. Met aerobics verbrandt zij gemiddeld 6 calorieën per minuut en bij het hardlopen gemiddeld 12 calorieën per minuut.
- a** Hoeveel calorieën verbrandt Romée op een dag dat zij 25 minuten aerobics doet en 20 minuten hardloopt?
- b** Noem s het aantal minuten dat Romée aerobics heeft gedaan en h het aantal minuten dat zij heeft hardgelopen. Voor het verband tussen s en h geldt $6s + 12h = 1500$. Leg deze formule uit.
- c** Je kunt de formule $6s + 12h = 1500$ herschrijven naar een formule waarmee je direct s kunt berekenen als je h weet. Hiernaast zie je hoe dat in zijn werk gaat. Leg uit hoe je aan het getal 250 komt.
- d** Bereken s als $h = 93$.
- e** Herschrijf de formule $6s + 12h = 1500$ ook naar een formule van de vorm $h = \dots - \dots s$.

●	$6s + 12h = 1500$			
●	$6s = 1500 - 12h$	links en rechts	$- 12h$	
●	$s = 250 - 2h$	links en rechts : 6		
●	of ook $s = -2h + 250$			

Theorie

Met de formule $3q + 5p = 60$ kun je niet direct q berekenen als je p weet. Je kunt de formule wel **herleiden** tot een formule waarmee je wel direct q kunt berekenen als je p weet. In het voorbeeld is de formule herleid tot $q = -1\frac{2}{3}p + 20$. In deze formule is q **uitgedrukt in** p .

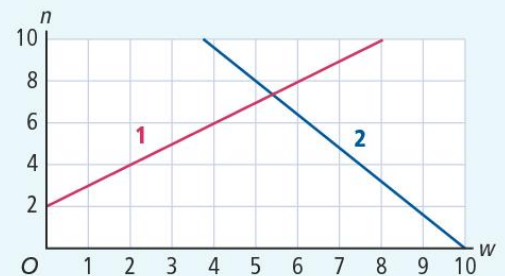
Voorbeeld

Gegeven is de formule $3q + 5p = 60$.
Druk q uit in p .

Oplossing

$$\begin{aligned}
 3q + 5p &= 60 \\
 3q &= 60 - 5p && \text{(links en rechts } - 5p) \\
 q &= 20 - 1\frac{2}{3}p && \text{(links en rechts : 3)} \\
 \text{of ook } q &= 1\frac{2}{3}p + 20
 \end{aligned}$$

- 2** Herleid de formules waarbij je b uitdrukt in a .
- a** $2b - 9a = 24$ **d** $b - 6 + 5a = 0$
- b** $6b + 4a = 15$ **e** $500a - 250b = 750$
- c** $4a - b + 18 = 0$ **f** $2(b - 3) + 5a = 8$
- 3** De grafieken horen bij de formules $8w + 5n = 80$ en $n - w = 2$.
- a** Om de coördinaten van het snijpunt te berekenen kun je bij beide formules n in w uitdrukken. Herleid de formules waarbij je n uitdrukt in w .
- b** Bereken de coördinaten van het snijpunt.



- 4 Druk bij elk paar formules y uit in x en bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.
- a $3x + y = 28$ en $y = 18 - x$
- b $5x - y = 10$ en $-3x + 5y = -17$
- 5 Met de formule $a = 500t$ kan een fabrikant uitrekenen hoeveel apparaten a hij na t weken heeft verkocht. Voor de kosten k in euro's van het produceren van a apparaten gebruikt de fabrikant de formule $k = 7a + 800$.
- a Hoeveel apparaten zijn er na 13 weken verkocht?
- b Gebruik je antwoord van opdracht a om te berekenen hoeveel euro de kosten bedragen na 13 weken.
- c Tot welk bedrag zijn de kosten opgelopen na 25 weken?
- d Om een formule te vinden waarmee je de kosten k uitdrukt in het aantal weken t vul je de formule $a = 500t$ in bij de formule $k = 7a + 800$. Hiernaast zie je hoe dat gaat.
Controleer met de formule je antwoord van opdracht c.

	$k = 7a + 800$			
		$a = 500t$		
	$k = 7 \times 500t + 800$, dus			
	$k = 3500t + 800$			

Theorie

In een formule kun je een variabele vervangen door een andere formule. Je noemt dit **substitueren**. Vaak is het nodig daarbij haakjes te gebruiken. Na het substitueren vereenvoudig je zo mogelijk de formule.

Voorbeeld

Gegeven zijn de formules $b = 5t + 8$ en $t = -3p + 2$.

Substitueer $t = -3p + 2$ in $b = 5t + 8$ en vereenvoudig het resultaat.

Oplossing

$$b = 5t + 8$$

$$t = -3p + 2$$

$$b = 5(-3p + 2) + 8$$

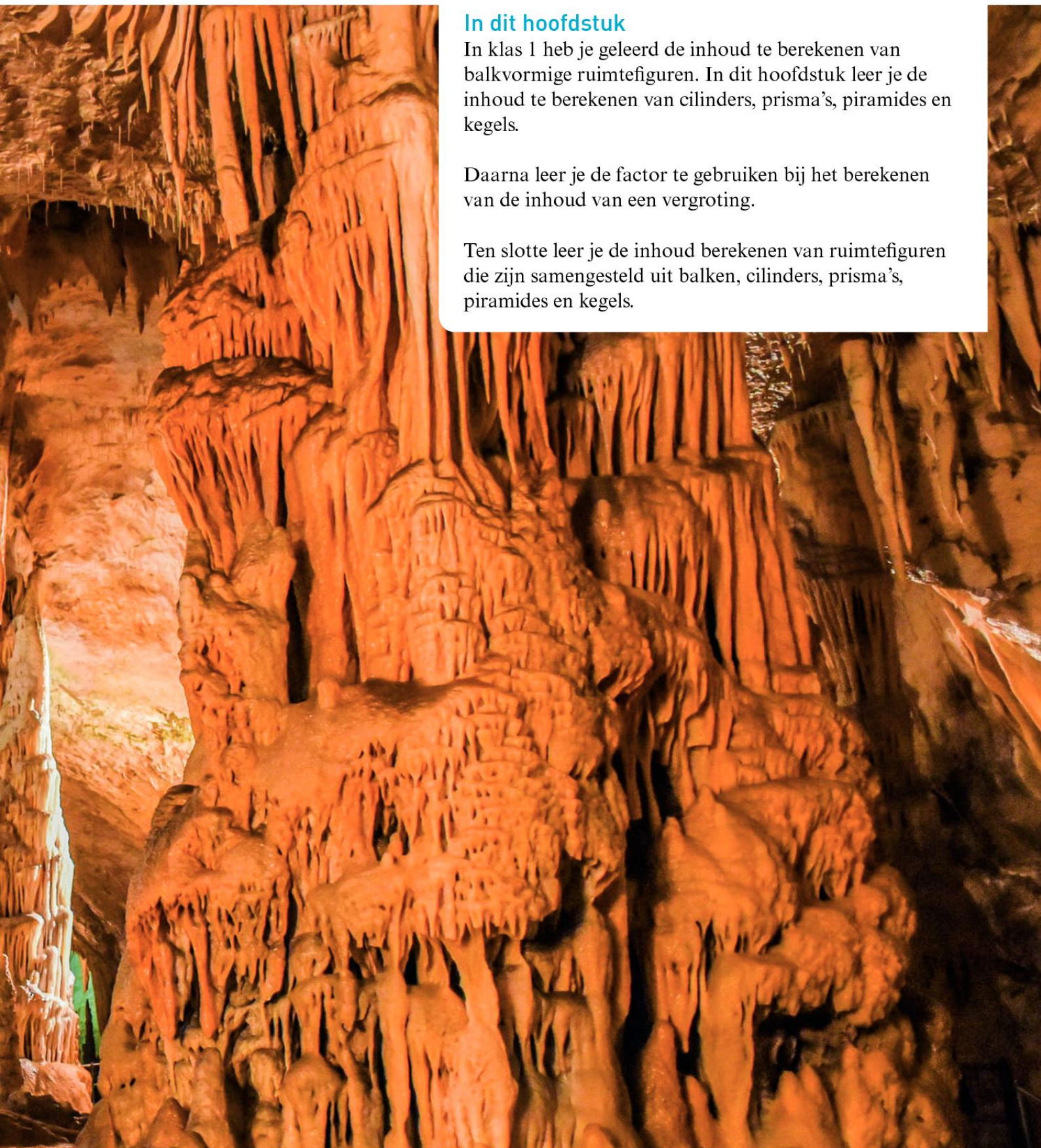
$$b = -15p + 10 + 8$$

$$b = -15p + 18$$

- 6 Substitueer formule B in formule A en vereenvoudig het resultaat.
- a A: $b = 6 + 3t$ en B: $t = 34 + 8p$
- b A: $b = -7t + 34$ en B: $t = 7 - 2p$
- c A: $y = 8 - 2t$ en B: $t = 5x$
- d A: $p = 4a + 64$ en B: $a = 8 - 5q$



Ruimtemeetkunde 10

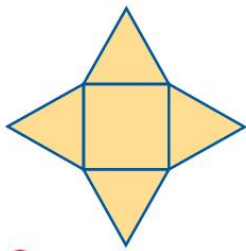


In dit hoofdstuk

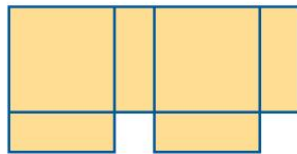
In klas 1 heb je geleerd de inhoud te berekenen van balkvormige ruimtefiguren. In dit hoofdstuk leer je de inhoud te berekenen van cilinders, prisma's, piramides en kegels.

Daarna leer je de factor te gebruiken bij het berekenen van de inhoud van een vergroting.

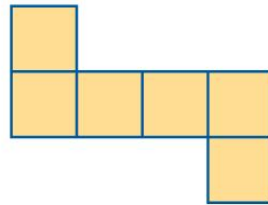
Ten slotte leer je de inhoud berekenen van ruimtefiguren die zijn samengesteld uit balken, cilinders, prisma's, piramides en kegels.



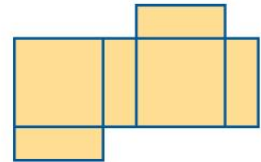
A



B



C



D

- V1
- Welke van de figuren is de uitslag van een kubus?
 - En welke is de uitslag van een piramide?
 - Leg uit welke van de figuren geen uitslag kan zijn van een ruimtefiguur.
 - Welke ruimtefiguur hoort bij de overgebleven uitslag?

Theorie

Bij het omrekenen van de **oppervlaktematen** km^2 , hm^2 , dam^2 , m^2 , dm^2 , cm^2 en mm^2 kun je de schema's hieronder gebruiken.



Bij het omrekenen van **inhoudsmaten** m^3 , dm^3 , cm^3 en mm^3 kun je de schema's hieronder gebruiken. Soms moet je daarbij $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$ gebruiken.



Voorbeeld 1

$24 \text{ km}^2 = \dots \text{ m}^2$
 Kijk naar **km^2** en ga naar **m^2** .
 Je gaat drie stappen naar rechts.
 $24 \times 100 \times 100 \times 100 = 24\,000\,000$
 Dus $24 \text{ km}^2 = 24\,000\,000 \text{ m}^2$.

Voorbeeld 2

$3,5 \text{ mm}^3 = \dots \text{ dm}^3$
 Kijk naar **mm^3** en ga naar **dm^3** .
 Je gaat twee stappen naar links.
 $3,5 : 1000 : 1000 = 0,000\,003\,5$
 Dus $3,5 \text{ mm}^3 = 0,000\,003\,5 \text{ dm}^3$.

Voorbeeld 3

$0,05 \text{ L} = \dots \text{ cm}^3$
 $0,05 \text{ L}$ is gelijk aan $0,05 \text{ dm}^3$.
 Van **dm^3** naar **cm^3** is één stap naar rechts. $0,05 \times 1000 = 50$
 Dus $0,05 \text{ L} = 50 \text{ cm}^3$.

V2 Vul in.

- | | |
|--|--|
| a $7 \text{ m}^2 = \dots \text{ dm}^2$ | f $3500 \text{ cm}^3 = \dots \text{ dm}^3$ |
| b $3500 \text{ cm}^2 = \dots \text{ dm}^2$ | g $0,48 \text{ m}^3 = \dots \text{ dm}^3$ |
| c $0,48 \text{ m}^2 = \dots \text{ cm}^2$ | h $23\,000 \text{ cm}^3 = \dots \text{ m}^3$ |
| d $0,05 \text{ m}^2 = \dots \text{ mm}^2$ | i $49 \text{ dm}^3 = \dots \text{ L}$ |
| e $0,94 \text{ km}^2 = \dots \text{ m}^2$ | j $0,08 \text{ L} = \dots \text{ cm}^3$ |

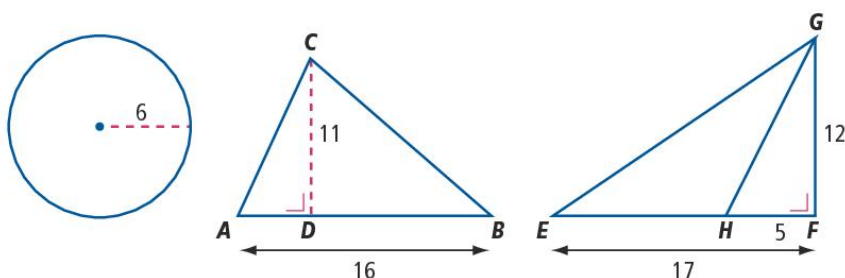
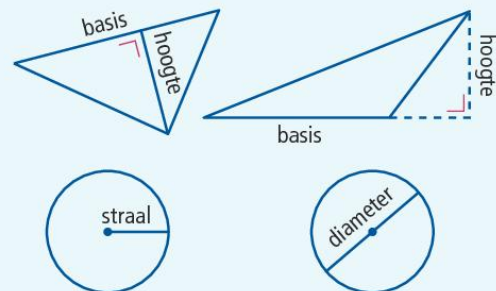
- V3 Een aquarium heeft de vorm van een balk. Het aquarium is 40 cm lang en 30 cm breed. De hoogte is 35 cm.
- Bereken de inhoud van dit aquarium in cm^3 .
 - Geef de inhoud van dit aquarium in liters.
 - In het aquarium zit tot 5 cm onder de rand water. Hoeveel liter water zit er in het aquarium?

Theorie

De **oppervlakte van een driehoek** bereken je met de formule $\text{oppervlakte} = \text{basis} \times \text{hoogte} : 2$. Of korter $A = b \times h : 2$ of ook wel $A = \frac{1}{2} \times b \times h$.

De **oppervlakte van een cirkel** bereken je met de formule $\text{oppervlakte} = \pi \times \text{straal} \times \text{straal}$. Of korter $A = \pi \times r^2$.

De **omtrek van een cirkel** bereken je met de formule $\text{omtrek} = \pi \times \text{diameter}$. Of korter $P = \pi \times d$.



- V4
- Bereken van de cirkel de oppervlakte. Rond je antwoord af op één decimaal.
 - Bereken van de cirkel ook de omtrek.
 - Bereken de oppervlakte van driehoek ABC .
 - Hoe groot is de oppervlakte van driehoek EFG ?
 - Op zijde EF ligt punt H met $EF = 5$. Bereken de oppervlakte van driehoek EHG .
- V5 Een ronde vijver heeft een diameter van 20 meter.
- Bereken hoeveel meter de omtrek van de vijver is. Rond je antwoord af op één decimaal.
 - Bereken hoeveel m^2 de oppervlakte van de vijver is. Rond je antwoord af op helen.

Je leert

- hoe je de inhoud van een balk en de inhoud van een cilinder berekent
- hoe je de inhoudsmaten L, dL, cL en mL omrekent

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3—04—4—5—6—07—8
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8—9
- uitdagend: 1—2—3—5—6—7—9—U1—U2

Het pakje appelsap en het blikje frisdrank hebben allebei dezelfde hoogte en dezelfde inhoud. Van het pakje appelsap passen er precies 12 in een doos.

- Passen er ook 12 blikjes frisdrank in die doos?



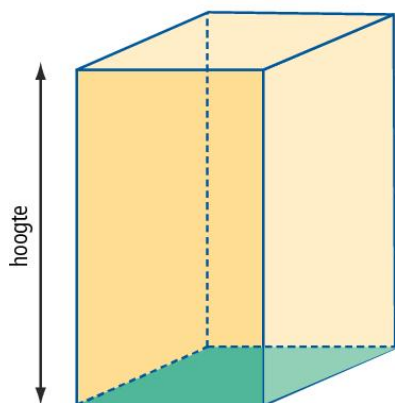
1 De balk hieronder heeft een bodem van 5 dm bij 6 dm.

a Bereken de oppervlakte van het grondvlak in dm^2 .

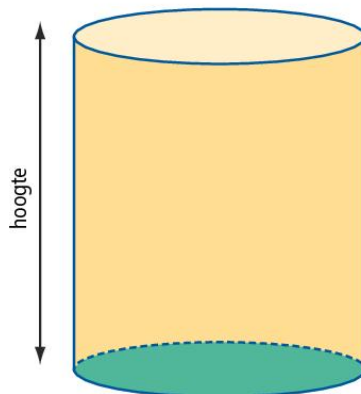
b De hoogte van de balk is 11 dm.

Bereken de inhoud van de balk in dm^3 door de oppervlakte van het grondvlak te vermenigvuldigen met de hoogte.

c Hoeveel liter is de inhoud van de balk?



balk



cilinder

2 De balk uit opdracht 1 en de cilinder rechts zijn precies even hoog, hebben een even groot grondvlak en hebben ook dezelfde inhoud.

Laat met een berekening zien dat je de inhoud van de cilinder ook kunt berekenen door de oppervlakte van het grondvlak te vermenigvuldigen met de hoogte.

Theorie

De **inhoud van een balk** en de **inhoud van een cilinder**

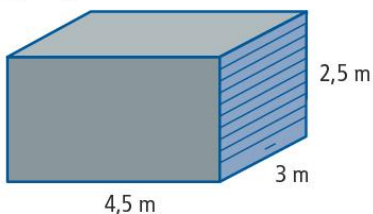
kun je berekenen met de formule

inhoud = oppervlakte grondvlak $\times$ hoogte.

Of korter $I = G \times h$.

Voorbeeld 1

Bereken hoeveel m^3 de inhoud van de garagebox is.

**Oplossing**

De garagebox heeft de vorm van een balk.

De oppervlakte van het grondvlak van de balk is $4,5 \times 3 = 13,5 \text{ m}^2$.

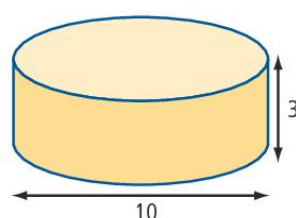
De inhoud van de balk is

$$13,5 \times 2,5 = 33,75 \text{ m}^3.$$

De garagebox heeft een inhoud van $33,75 \text{ m}^3$.

Voorbeeld 2

Bereken de inhoud van de cilinder. Rond je antwoord af op twee decimalen.

**Oplossing**

De straal is $10 : 2 = 5$.

De oppervlakte van het grondvlak is

$$\pi \times 5^2 = \pi \times 25.$$

De inhoud van de cilinder is

$$\pi \times 25 \times 3 \approx 235,62.$$

- 3** In voorbeeld 2 bereken je de oppervlakte van het grondvlak met $\pi \times 25$.
Waarom moet je verder rekenen met $\pi \times 25$ en niet eerst uitrekenen hoeveel $\pi \times 25$ bij benadering is?

Ondersteunende route → maak opdracht 04

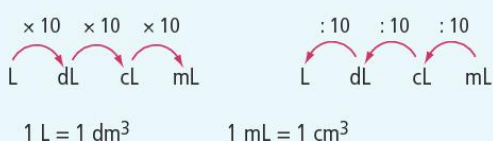
- 4** **a** Een cilinder heeft een diameter van 6 en een hoogte van 12.
Bereken de inhoud van de cilinder. Rond af op twee decimalen.
- b** Een balk met een vierkant grondvlak heeft een breedte van 5 en een hoogte van 8.
Bereken de inhoud van de balk.
- 5** Van een cilinder is de diameter 6 en de hoogte 8.
Van een tweede cilinder is de diameter 8 en de hoogte 6.
Welke van de twee cilinders heeft de grootste inhoud?

- 6 Hiernaast zie je een maatbeker van een halve liter.
- Hoeveel milliliter is volgens de maatbeker een halve liter?
 - Waar is volgens de maatbeker 500 cm^3 gelijk aan?
 - Vul in: $1 \text{ mL} = 1 \dots$
 - Een melkpakje heeft de vorm van een balk van 4 cm bij 5 cm bij 10 cm.
Hoeveel cm^3 is de inhoud van dit melkpakje? En hoeveel milliliter?



Theorie

Voor het omrekenen van de **inhoudsmaten L, dL, cL en mL** kun je de schema's hieronder gebruiken.



Voorbeeld

$0,05 \text{ m}^3 = \dots \text{ cL}$
 $0,05 \text{ m}^3$ is gelijk aan $50\,000 \text{ cm}^3$.
 $50\,000 \text{ cm}^3$ is gelijk aan $50\,000 \text{ mL}$.
 Van **mL** naar **cL** is één stap naar links. $50\,000 : 10 = 5000$
 Dus $0,05 \text{ m}^3 = 5000 \text{ cL}$.

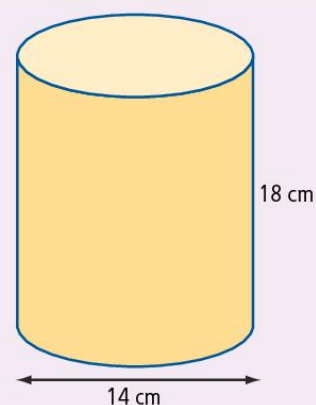
Ondersteunende route → maak opdracht 07

- 7 Vul in.
- | | |
|---|--|
| a $1,5 \text{ dm}^3 = \dots \text{ L}$ | d $65 \text{ cm}^3 = \dots \text{ mL}$ |
| b $375 \text{ cL} = \dots \text{ dL}$ | e $4,5 \text{ L} = \dots \text{ dL}$ |
| c $4050 \text{ cm}^3 = \dots \text{ L}$ | f $850 \text{ cL} = \dots \text{ L}$ |
- 8
- Een pak sap heeft de vorm van een balk. De oppervlakte van het grondvlak van het pak is 40 cm^2 . De hoogte van het pak is 25 cm.
Laat met een berekening zien dat er 1 L sap in dit pak past.
 - Van een ander pak is de oppervlakte van het grondvlak 60 cm^2 . De hoogte van dit pak is ook 25 cm.
Bereken de inhoud in liters van dit pak.
- 9 Een frisdrankblikje heeft een diameter van 6 cm en een hoogte van 11 cm.
Laat met een berekening zien of in dit frisdrankblikje 25 cL, 31 cL of 33 cL past.

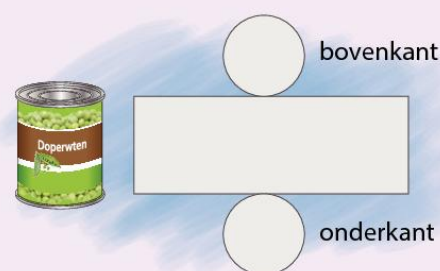
Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

- 04** Een cilinder heeft een diameter van 14 cm en een hoogte van 18 cm.
- Welke vorm heeft het grondvlak van de cilinder?
 - Geef de straal van het grondvlak.
 - Bereken de oppervlakte van het grondvlak van de cilinder.
 - Bereken de inhoud in cm^3 van de cilinder met de formule $I = G \times h$. Rond je antwoord af op twee decimalen.
- 07**
- Vul in: van L naar cL ga je twee stappen naar rechts, dus $8 \text{ L} = 8 \times \dots \times \dots = \dots \text{ cL}$.
 - $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$ dus $430 \text{ cm}^3 = 430 \text{ mL}$.
Vul in: van mL naar L ga je drie stappen naar links, dus $430 \text{ cm}^3 = 430 \text{ mL} = 430 : \dots : \dots : \dots = \dots \text{ L}$.
Vul in.
 - $6 \text{ dm}^3 = \dots \text{ cL}$
 - $25 \text{ dL} = \dots \text{ dm}^3$
 - $8,5 \text{ cm}^3 = \dots \text{ cL}$
 - $2300 \text{ cm}^3 = \dots \text{ dL}$
 - $0,5 \text{ L} = \dots \text{ cm}^3$
 - $3 \text{ m}^3 = \dots \text{ cL}$

**Uitdagende opdrachten**

- U1** Van een pak bronwater is de inhoud 1,5 L. Het grondvlak van het pak is een vierkant en de hoogte van dit pak is 25 cm. Bereken de lengte van de zijde van het grondvlak. Geef je antwoord in cm en rond af op één decimaal.
- U2** Een conservenblik heeft de vorm van een cilinder met een diameter van 10 cm. De hoogte van dit conservenblik is 11 cm.
- Bereken de inhoud van het conservenblik. Rond je antwoord af op hele cm^3 .
 - Hoeveel cm^2 blik is er nodig om dit conservenblik te maken? Rond je antwoord af op hele cm^2 .



Je leert

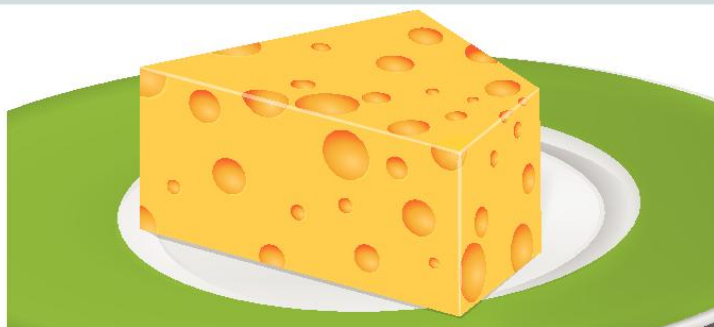
- wat een prisma is
- hoe je de inhoud van een prisma berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 10—11—012—13—014—14—15
- doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16
- uitdagend: 11—12—13—14—16—U3—U4

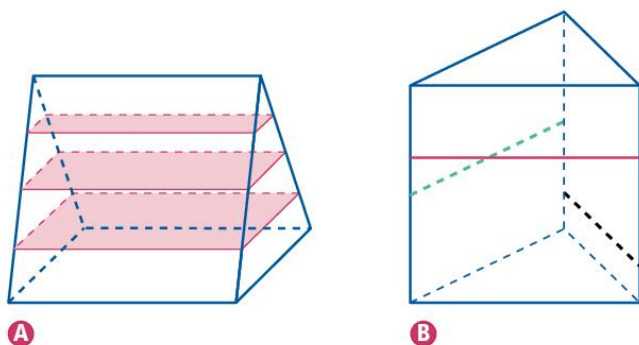
Femke is aan het picknicken met drie vrienden en heeft een stuk kaas dat ze wil verdelen.

- Hoe kan ze dat stuk kaas hiernaast handig verdelen zodat iedereen precies evenveel krijgt?



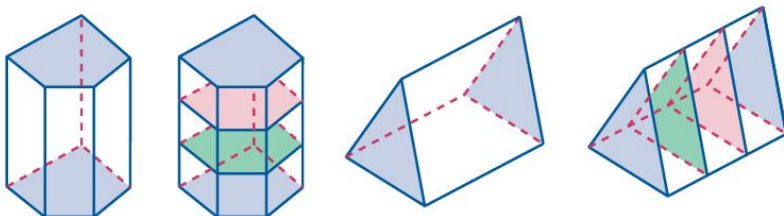
10 In ruimtefiguur A hieronder hebben het linker en het rechter grensvlak dezelfde vorm en grootte.

- Welke vorm hebben de overige grensvlakken?
- Ruimtefiguur A is evenwijdig aan het onderste grensvlak een aantal keer doorgesneden. Hebben de snijvlakken die zo ontstaan allemaal dezelfde vorm en grootte? Licht je antwoord toe.



11 Door ruimtefiguur A te kantelen ontstaat ruimtefiguur B.

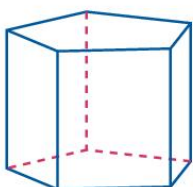
- W**
- Ruimtefiguur B wordt langs het rode lijnstuk horizontaal, dus evenwijdig aan het grondvlak doorgesneden. Geef het snijvlak aan in de tekening.
 - Teken het snijvlak evenwijdig aan het grondvlak langs het zwarte lijnstuk.
 - Teken ook het horizontale snijvlak langs het groene lijnstuk.
 - Wat valt je op als je de drie snijvlakken met elkaar vergelijkt?



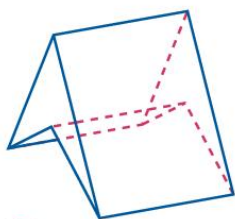
Theorie

De ruimtefiguren hierboven noem je **prisma's**. In een prisma hebben het grondvlak en het bovenvlak dezelfde vorm en grootte. De in de prisma's blauw gekleurde vlakken zijn de grondvlakken en de bovenvlakken. De overige grensvlakken van een prisma zijn rechthoeken. Als je een prisma evenwijdig aan het grondvlak een aantal keer doorsnijdt, dan hebben alle **doorsneden** dezelfde vorm en grootte als het grondvlak en het bovenvlak.

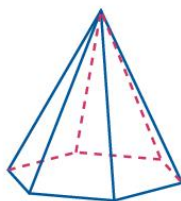
Ondersteunende route → maak opdracht 012



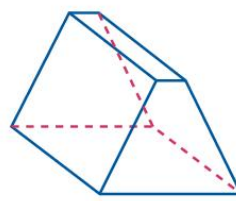
A



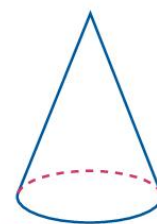
B



C



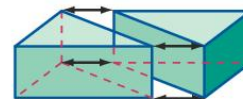
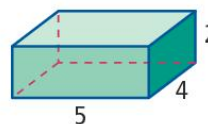
D



E

- 12** a Schrijf van elke ruimtefiguur op of het een prisma is.
W b Kleur in elk prisma het grondvlak.
 c Waarom kan een piramide geen prisma zijn?
 d Welke van de volgende ruimtefiguren zijn geen prisma?
 A cilinder C bol
 B balk D kubus

- 13** a Bereken de inhoud van de balk.
 b De balk wordt in twee even grote prisma's verdeeld. Hoe groot is de inhoud van één van de prisma's?
 c Bereken de oppervlakte van het grondvlak van één prisma.
 d Laat zien dat je de inhoud van één prisma kunt berekenen door de oppervlakte van het grondvlak te vermenigvuldigen met de hoogte.

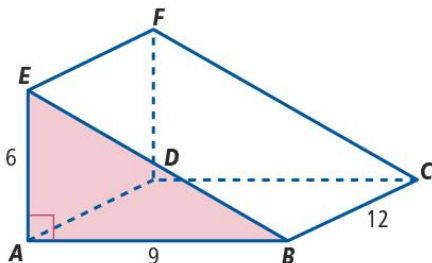


Theorie

De **inhoud van een prisma** kun je berekenen met de formule $\text{inhoud} = \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte}$.
Of korter $I = G \times h$.

Voorbeeld

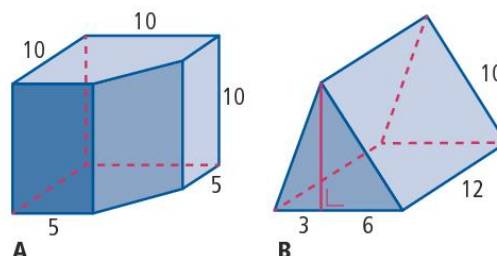
Bereken de inhoud van het prisma.

**Oplossing**

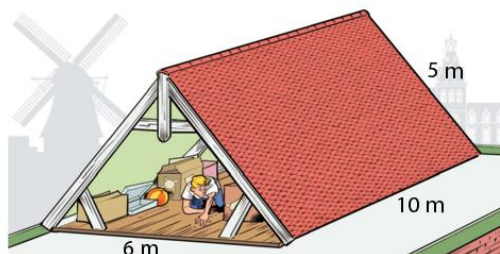
Driehoek ABE is het grondvlak van het prisma.
De oppervlakte van het grondvlak is $\frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$.
De hoogte van het prisma is 12.
De inhoud van het prisma $27 \times 12 = 324$.

Ondersteunende route → maak opdracht 014

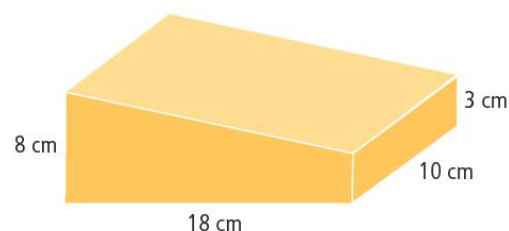
- 14**
- a Leg uit waarom rechthoek $ABCD$ in het voorbeeld niet het grondvlak van het prisma kan zijn.
 - b Ruimtefiguur A is een kubus waarvan een hoek is afgesneden.
Bereken de inhoud van ruimtefiguur A.
 - c Bereken de inhoud van ruimtefiguur B.



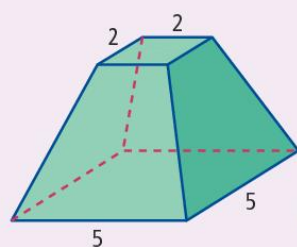
- 15** Hiernaast zie je een tekening van een zolder. De vloer van de zolder is 6 meter breed en 10 meter lang. Elk dakdeel is 5 meter lang.
- a Bereken de hoogte van de zolder.
 - b Bereken de inhoud van de zolder.



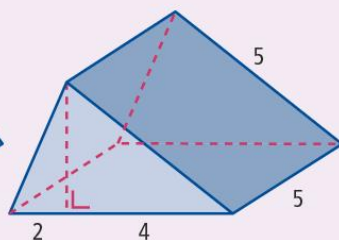
- 16** Een kaasboer snijdt voor een klant van een stuk oude kaas af. Het stuk kaas heeft de vorm van een prisma. Kaas van deze soort weegt 1,2 gram per cm^3 .
- a Bereken hoeveel gram kaas de klant krijgt.
 - b De kaas kost € 15,50 per kg.
Bereken hoeveel euro de klant voor de kaas moet betalen.

**Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4**

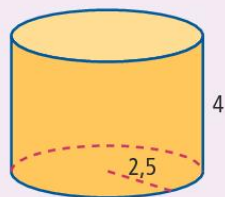
Ondersteunende opdrachten



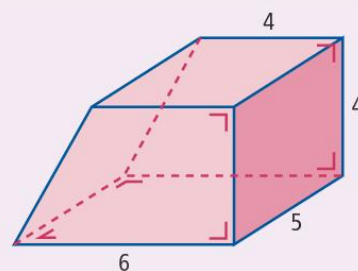
A



B



C

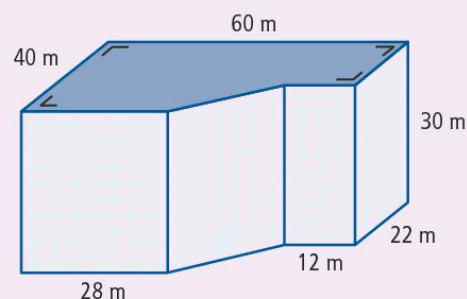


D

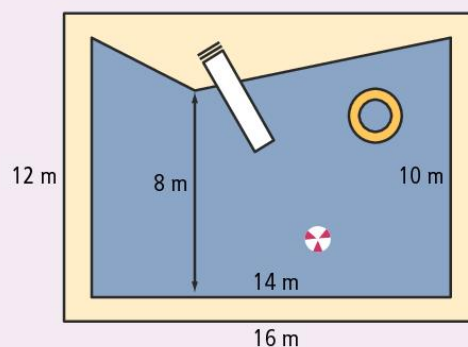
- 012
- Welke ruimtefiguren kun je zo doorsnijden dat de doorsneden dezelfde vorm en grootte hebben?
 - Bij welke van deze ruimtefiguren worden twee grensvlakken met gelijke vorm en grootte met elkaar verbonden door rechthoeken?
 - Welke van deze ruimtefiguren zijn prisma's?
 - Waarom kan een kegel geen prisma zijn?
- 014
- Toon met de stelling van Pythagoras aan dat de hoogte van het grondvlak van ruimtefiguur B gelijk is aan 3.
 - Bereken de oppervlakte van dat grondvlak.
 - Bereken de inhoud van ruimtefiguur B.
 - Bereken ook de inhoud van ruimtefiguur D.

Uitdagende opdrachten

- U3 Door uit een balk een hap weg te nemen is het ontwerp voor een flatgebouw ontstaan. Bereken de inhoud van het flatgebouw in m^3 .



- U4 Hiernaast zie je een bovenaanzicht van een zwembad. Als het zwembad tot de rand wordt gevuld, past er 315 000 liter water in. Het zwembad is overal even diep. Bereken hoeveel meter diep dit zwembad is.

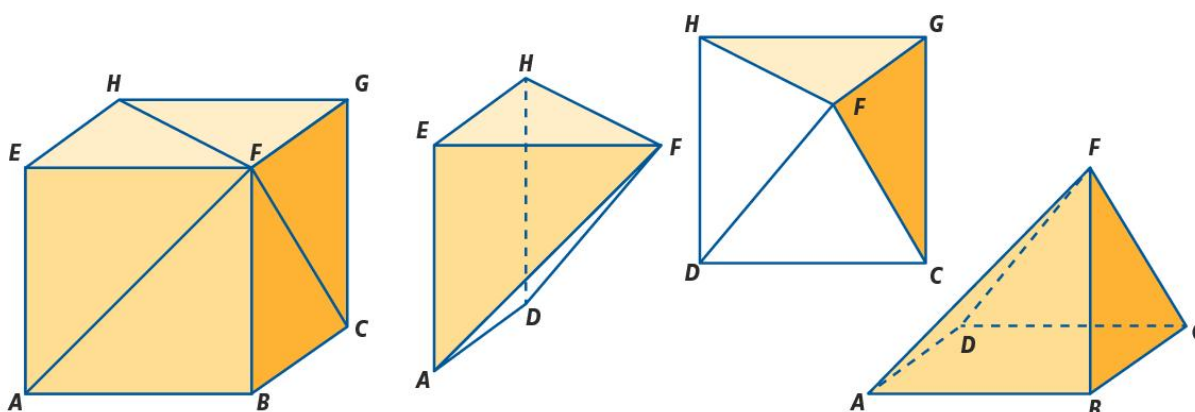


Je leert • hoe je de inhoud van een piramide en de inhoud van een kegel berekent

Leerroutes • ondersteunend: 17—018—18—19—21
 • doorlopend: 17—18—19—20—21
 • uitdagend: 17—18—19—20—U5

Kim vult een kegelvormige beker tot de rand met water. Omdat de beker bijna overstroomt, giet ze het water toch maar over in een leeg glas. De breedte en de hoogte van dit glas zijn gelijk aan die van de kegelvormige beker.

- Voor welk deel zal het glas met water gevuld zijn, denk je voor $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ of $\frac{2}{3}$ deel?



17 Een kubus met ribben van 6 cm wordt in drie gelijke stukken verdeeld.

- Hoe heet de ruimtefiguur $F.ABCD$?
- Leg uit dat de inhoud van ruimtefiguur $F.ABCD$ gelijk is aan $\frac{1}{3}$ deel van de inhoud van kubus $ABCD.EFGH$.
- Leg uit dat je de inhoud van ruimtefiguur $F.ABCD$ kunt berekenen met de formule

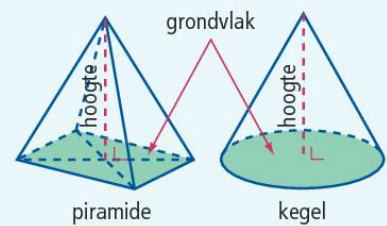
$$\text{inhoud} = \frac{1}{3} \times \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte}.$$
- Hoe groot is de inhoud van ruimtefiguur $F.ADHE$?

Theorie

De **inhoud van een piramide** en de **inhoud van een kegel** kun je berekenen met de formule

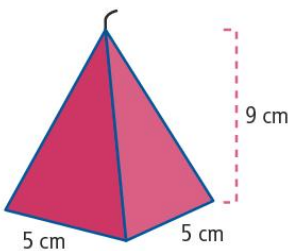
$$\text{inhoud} = \frac{1}{3} \times \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte}.$$

$$\text{Of korter } I = \frac{1}{3} \times G \times h.$$

**Voorbeeld 1**

Een kaars heeft de vorm van een piramide met een rechthoekig grondvlak.

Bereken de inhoud van de kaars in cm^3 .

**Oplossing**

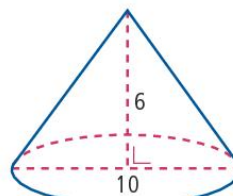
De oppervlakte van het grondvlak is $5 \times 5 = 25 \text{ cm}^2$.

De inhoud van de kaars is

$$\frac{1}{3} \times 25 \times 9 = 75 \text{ cm}^3.$$

Voorbeeld 2

Bereken de inhoud van de kegel. Rond je antwoord af op helen.

**Oplossing**

Het grondvlak is een cirkel met straal $10 : 2 = 5$.

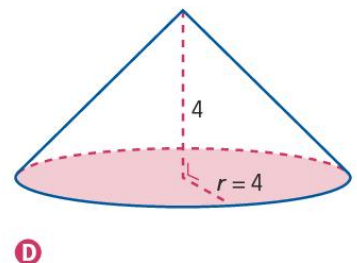
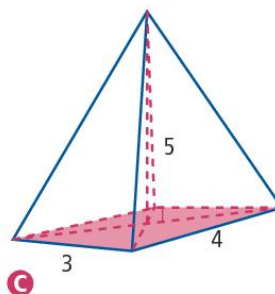
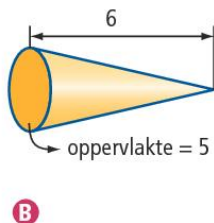
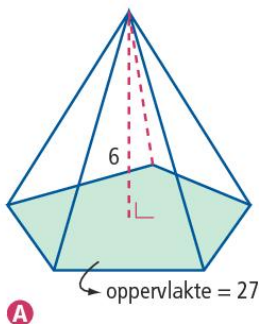
De oppervlakte van het grondvlak is

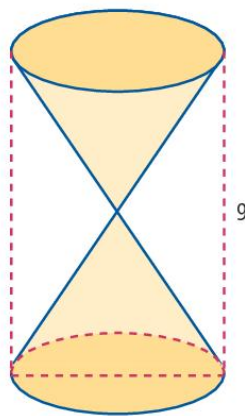
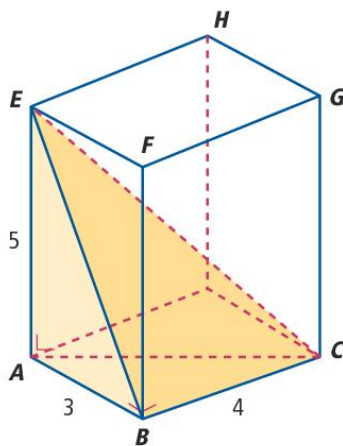
$$\pi \times 5^2 = \pi \times 25.$$

$$\text{De inhoud van de kegel is } \frac{1}{3} \times \pi \times 25 \times 6 \approx 157.$$

Ondersteunende route → maak opdracht 018

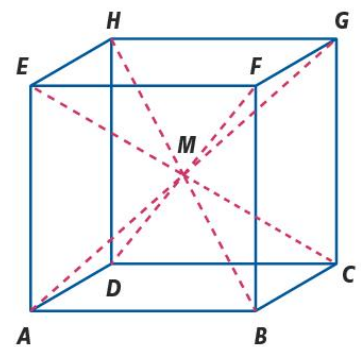
- 18**
- a Bereken de inhoud van de ruimtefiguren A en B.
 - b Het grondvlak van ruimtefiguur C is een rechthoek. Bereken de inhoud van ruimtefiguur C.
 - c Bereken de inhoud van ruimtefiguur D. Rond af op één decimaal.





- 19**
- In balk $ABCD.EFGH$ bevindt zich de piramide $E.ABC$. Bereken de inhoud van de piramide.
 - De rechter ruimtefiguur bestaat uit twee even grote kegels. Bereken de inhoud van deze ruimtefiguur. Rond je antwoord af één decimaal.

- 20** Een kubus heeft ribben met een lengte van 12.
- Punt M ligt precies in het midden van de kubus.
- Hoe groot is de inhoud van piramide $M.ABCD$?
 - Hoeveel van deze piramiden passen in de kubus?

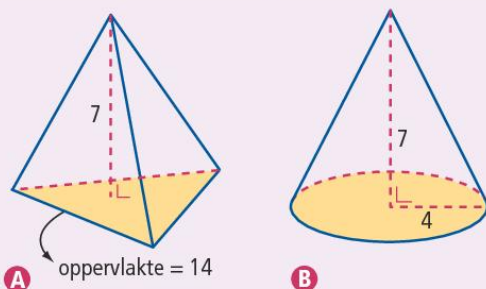


- 21** Op een winkelcentrum in Melbourne is een kegelvormig glazen dak gebouwd. De hoogte van het dak is 84 meter. Het grondvlak is een cirkel met een diameter van 80 meter. Bereken de inhoud van dit glazen dak in m^3 . Rond af op helen.

Uitdagende route → maak opdracht U5

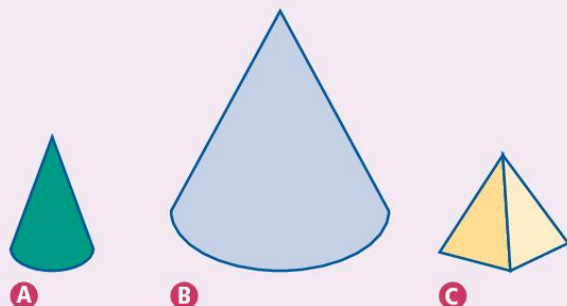


Ondersteunende opdrachten



- 018**
- Wat voor ruimtefiguur is figuur A? En figuur B?
 - Bereken de inhoud van figuur A met de formule $\text{inhoud} = \frac{1}{3} \times \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte}$.
 - Bereken de oppervlakte van het grondvlak van ruimtefiguur B.
 - Bereken de inhoud van ruimtefiguur B. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Uitdagende opdrachten



- U5**
- Van kegel A is de inhoud 198 cm^3 . De oppervlakte van het grondvlak is 66 cm^2 . Bereken de hoogte in cm van deze kegel.
 - Van kegel B is de diameter van het grondvlak 18 cm. De inhoud van de kegel is $1696,5 \text{ cm}^3$. Bereken de hoogte van deze kegel.
 - Van piramide C met een vierkant grondvlak is de inhoud 90 cm^3 . De piramide is 7,5 cm hoog. Hoeveel cm zijn de zijden van het grondvlak?

Je leert • hoe je de factor gebruikt voor het berekenen van oppervlakte en inhoud

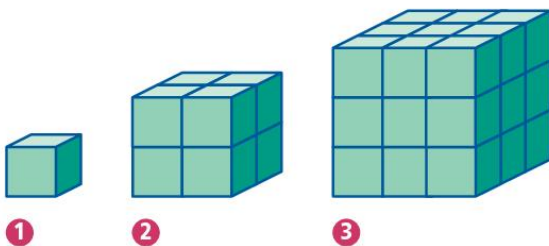
Leerroutes • ondersteunend: 22—23—24—025—25—26—027—28
 • basis: 22—23—24—25—26—27—28—29
 • uitdagend: 22—23—24—25—27—28—29—U6

Femke probeert een ballon op te blazen. Na vijf keer blazen heeft de ballon een diameter van 30 cm. Ze wil de ballon nog groter hebben en blaast net zolang door totdat de diameter twee keer zo groot is geworden.

- Hoe vaak moet Femke in totaal blazen: tien keer, twintig keer of veertig keer?



- 22** Een foto heeft zijden van 12 cm en 15 cm. Om van de foto een poster te maken, worden de zijden met vier vermenigvuldigd.
- Bereken de afmetingen van de zijden van de poster.
 - Bereken de oppervlakte van de foto.
 - Bereken ook de oppervlakte van de poster.
 - Vul in: De oppervlakte van de poster is ... keer zo groot als de oppervlakte van de foto.
- 23** Hieronder staat een rij kubussen die allemaal gebouwd zijn van dezelfde houten kubusjes met ribben van 1 cm.



- a** Vul de tabel verder in.

nummer	ribbe in cm	oppervlakte in cm^2	inhoud in cm^3
1	1	...	...
2	...	...	...
3	...	...	...

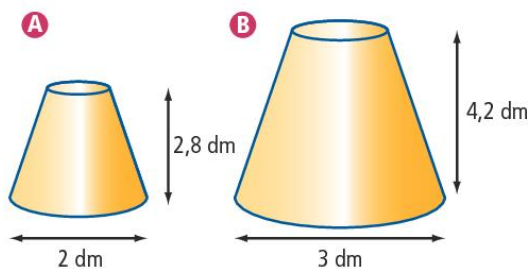
- b** Als je deze rij kubussen voortzet, hoe groot zijn dan de oppervlakte en de inhoud van de 10e kubus uit de rij?

Theorie

Wanneer de afmetingen van een figuur met een factor k worden **vergroot**, dan wordt de oppervlakte van die figuur k^2 keer zo groot. De inhoud wordt dan k^3 keer zo groot.

Voorbeeld

Ruimtefiguur B is een vergroting van ruimtefiguur A. De oppervlakte van ruimtefiguur A is 13 dm^2 en de inhoud is $4,8 \text{ dm}^3$. Bereken de oppervlakte in dm^2 en de inhoud in dm^3 van ruimtefiguur B.

**Oplossing**

De afmetingen zijn vergroot met de factor $3 : 2 = 4,2 : 2,8 = 1,5$.

De oppervlakte wordt dan $1,5^2 = 2,25$ keer zo groot.

De oppervlakte van ruimtefiguur B is $13 \times 2,25 = 29,25 \text{ dm}^2$.

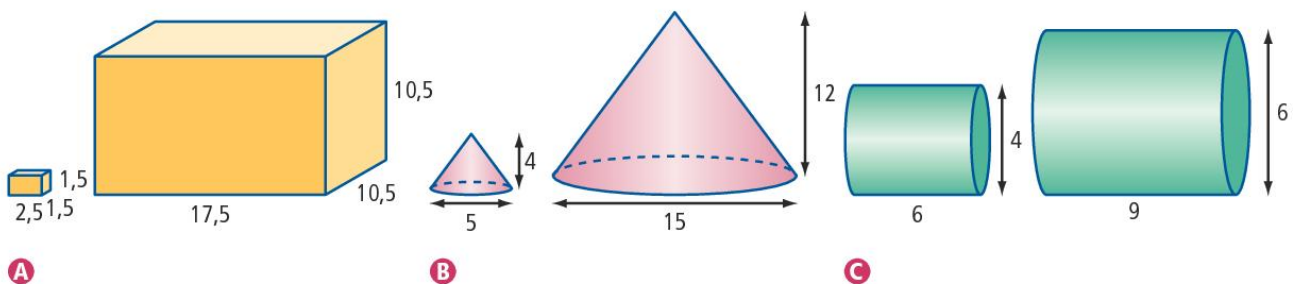
De inhoud wordt dan $1,5^3 = 3,375$ keer zo groot.

De inhoud van ruimtefiguur B is $4,8 \times 3,375 = 16,2 \text{ dm}^3$.

- 24** Van ruimtefiguur A uit het voorbeeld wordt nu een vergroting gemaakt waarbij alle afmetingen drie keer zo groot worden. Bereken de oppervlakte in dm^2 en de inhoud in dm^3 van de vergroting van de ruimtefiguur.

Ondersteunende route → maak opdracht 025

- 25** Van de ruimtefiguren hieronder is de rechter figuur steeds een vergroting van de linker figuur. Beantwoord voor de vergrotingen bij A, B en C de volgende vragen.



- Met welke factor is de lengte vermenigvuldigd?
- Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte?
- Hoeveel keer zo groot is de inhoud?

- 26** Een kegelvormig ijsje is 15 cm hoog. De straal van de grondcirkel is 3 cm. De fabrikant beweert dat er in de verpakking 14 cL ijs zit.
- Controleer met een berekening of de fabrikant gelijk heeft.
 - De fabrikant beweert: 'Als ik de afmetingen van de verpakking met de factor 1,2 vermenigvuldig, dan past er meer dan twee keer zoveel ijs in.'
Laat zien dat de bewering van de fabrikant niet klopt.



Ondersteunende route → maak opdracht 027

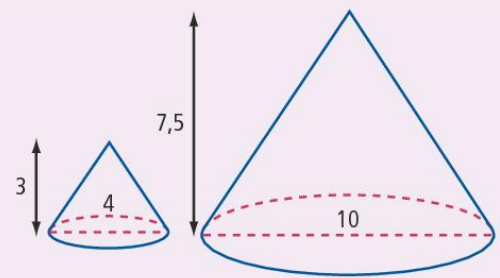
- 27** Een doos heeft een inhoud van 240 dm^3 en een oppervlakte van 236 dm^2 .
- Van deze doos wordt een vergroting gemaakt waarvan alle afmetingen half keer zo groot zijn.
Hoe groot is de oppervlakte deze vergroting?
 - En hoe groot is de inhoud?
- 28**
- Als bij een vergroting de oppervlakte 9 keer zo groot wordt dan worden de afmetingen 3 keer zo groot, want $\dots^2 = \dots$.
Maak de berekening af.
 - Als bij een vergroting de inhoud 8 keer zo groot wordt, dan worden de afmetingen 2 keer zo groot, want $\dots^3 = \dots$.
Maak de berekening af.
 - Bij een vergroting van een kubus wordt de oppervlakte 36 keer zo groot.
Hoeveel keer zo groot worden de ribben?
 - Bij een vergroting van een cilinder wordt de inhoud 64 keer zo groot.
Hoeveel keer zo groot wordt de hoogte?
- 29** Veel verfblikken zijn vergrotingen van elkaar. Een blik voor 1 liter verf heeft een diameter van 11 cm en is 11,5 cm hoog. Voor de productie van zo'n literblik is 588 cm^2 blik nodig.
- Er is een kleiner verfblik waarvan de afmetingen de helft zijn van die van het literblik.
Hoeveel liter verf kan er in dit kleinere verfblik?
 - Hoeveel cm^2 blik is er nodig voor de productie van dit kleinere verfblik?
 - Er is ook een blik waar 27 liter verf in kan.
Bereken de diameter en de hoogte van dit blik.



Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

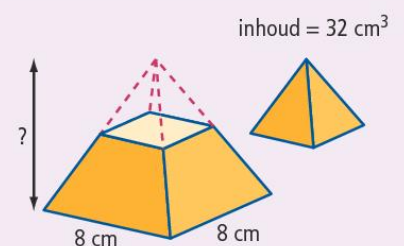
- 025** De rechte kegel is een vergroting van linker kegel.
- Toon aan dat de factor gelijk is aan 2,5.
 - Vul in.
De oppervlakte van de rechte kegel is $\dots^2 = \dots$ keer zo groot als die van de linker kegel.
 - Vul in.
De inhoud is $\dots^3 = \dots$ keer zo groot.
 - Een andere kegel, met hoogte 6, is ook een vergroting van de linker kegel.
Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van deze kegel in vergelijking met de kleine kegel?
 - En hoeveel keer zo groot is de inhoud?



- 027** Van een balk is het grondvlak 12 cm bij 8 cm en is de hoogte 7 cm.
- Bereken de oppervlakte in cm^2 van de balk.
 - Bereken de inhoud in cm^3 van de balk.
 - Van een kleinere balk zijn de afmetingen de helft van deze balk.
Met welke factor moet je afmetingen van de balk vermenigvuldigen om de afmetingen van de kleinere balk te krijgen?
 - Met welk getal moet je de oppervlakte van deze balk vermenigvuldigen om de oppervlakte van de kleinere balk te krijgen?
 - Met welk getal moet je de inhoud van deze balk vermenigvuldigen om de inhoud van de kleinere balk te krijgen?
 - Gebruik de antwoorden van opdracht d en opdracht e om de oppervlakte en de inhoud van de kleinere balk te berekenen.

Uitdagende opdrachten

- U6** Een grote piramide heeft een vierkant grondvlak met zijden van 8 cm. Precies op de helft van de opstaande ribben wordt deze piramide doormidden gesneden. Er ontstaat zo een kleine piramide met een inhoud van 32 cm^3 .
Bereken de hoogte van de grote piramide.



Je leert • hoe je de inhoud van een samengestelde ruimtefiguur berekent

Leerroutes • ondersteunend: 30—031—32—33—034—34—35
 • doorlopend: 30—31—32—33—34—35—36
 • uitdagend: 30—31—32—33—34—35—U7

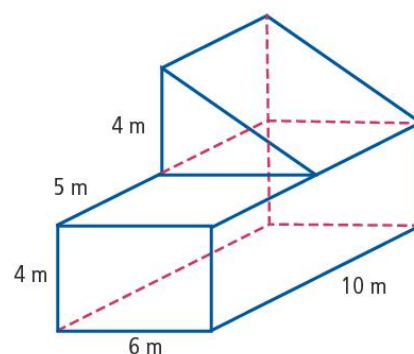
Hiernaast zie je de Rock and Roll Hall of Fame in de Amerikaanse stad Cleveland.

- Welke ruimtefiguren herken je in dit gebouw?



30 Een ruimtefiguur is samengesteld uit een balk en een prisma.

- Bereken de inhoud van de balk.
- Bereken ook de inhoud van het prisma.
- Hoe groot is de inhoud van de ruimtefiguur?



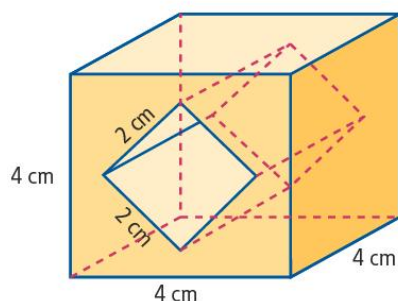
Aanpak

Hoe bereken je de inhoud van een samengestelde ruimtefiguur?

- Verdeel de samengestelde ruimtefiguur in delen waarvan je de inhoudsformules kent.
- Bereken van de verschillende delen de inhoud.
- Tel de inhoud van de verschillende delen bij elkaar op of trek ze van elkaar af.

Voorbeeld

In een kubus met ribben van 4 cm is een gat gemaakt in de vorm van een balk. Bereken de inhoud van deze ruimtefiguur.



Oplossing

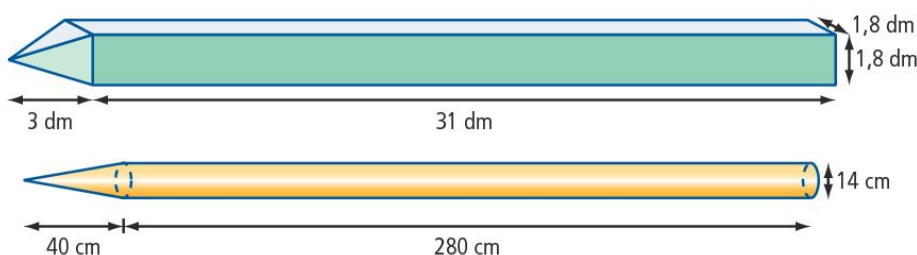
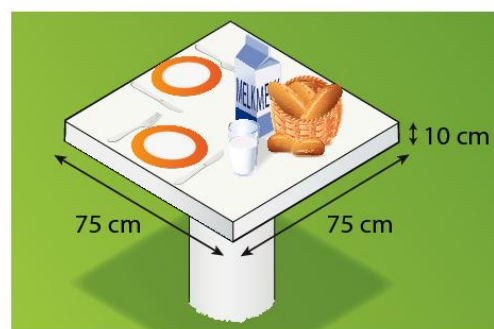
- De ruimtefiguur is op te delen in een kubus en een balk.
- De inhoud van de kubus is $4 \times 4 \times 4 = 64 \text{ cm}^3$.
De inhoud van de balk is $2 \times 2 \times 4 = 16 \text{ cm}^3$.
- De inhoud van de ruimtefiguur is $64 - 16 = 48 \text{ cm}^3$.

Ondersteunende route → maak opdracht 031

- 31** De stolpboerderij kun je opdelen in een balk en een piramide.
De balk heeft een vierkant grondvlak van 12 meter bij 12 meter en is 2,5 meter hoog. De totale hoogte van de stolpboerderij is 10 meter.
Hoeveel m^3 is de inhoud van de stolpboerderij?



- 32** Een buitentafel is helemaal gemaakt van beton.
- De tafelpoot is een cilinder met een hoogte van 65 cm en een diameter van 30 cm.
Hoeveel cm^3 is de inhoud van de tafelpoot? Rond verstandig af.
 - Hoeveel liter beton is er gebruikt voor deze buitentafel?

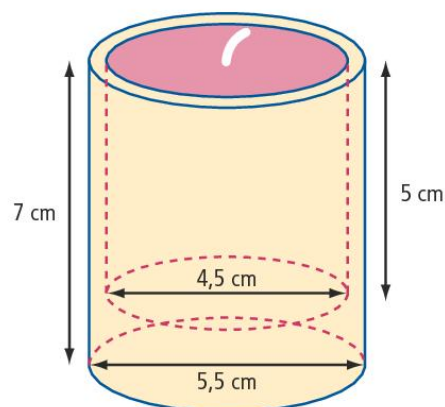


- 33**
- De bovenste paal is samengesteld uit een balk en een piramide.
Bereken de inhoud van de bovenste paal in liters.
 - Uit welke twee ruimtefiguren is de onderste paal samengesteld?
 - Bereken de inhoud van de onderste paal in liters.
Rond af op één decimaal.

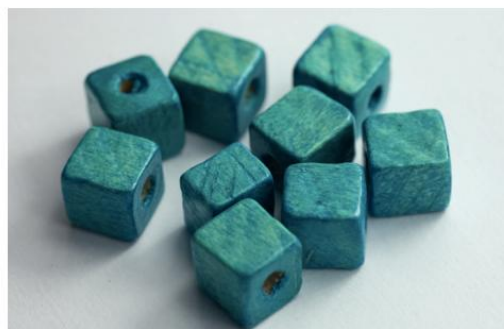
Ondersteunende route → maak opdracht 034

- 34** Een houten kaarsenstandaard heeft een hoogte van 7 cm en een diameter van 5,5 cm.

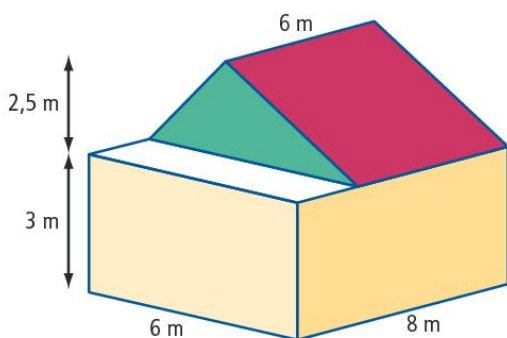
- a** De kaarsenstandaard wordt gevuld met kaarsvet. Hoeveel cm^3 kaarsvet zit er in?
- b** Bereken uit hoeveel cm^3 hout de kaarsenstandaard bestaat.



- 35** Hiernaast zie je enkele kunststof kralen. Deze kralen hebben de vorm van een kubus met zijden van 1 cm. De gaten in het midden hebben een diameter van 4 mm. Het gewicht van 1 cm^3 kunststof is 0,91 gram. Bereken hoeveel gram één kraal weegt. Rond je antwoord af op twee decimalen.



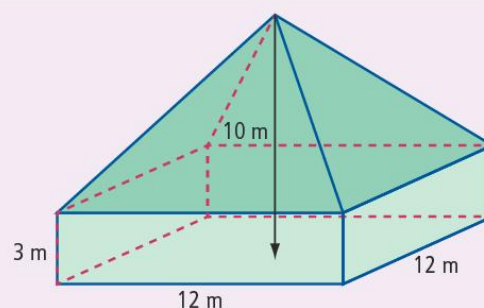
- 36** Bereken de totale inhoud van het huis in m^3 .



Uitdagende route → maak opdracht U7

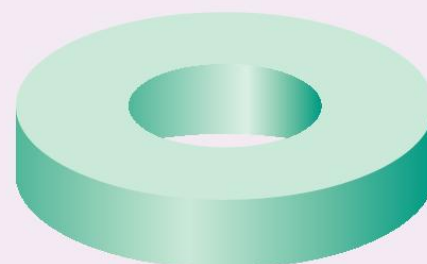
Ondersteunende opdrachten

- 031** Hiernaast zie je een ontwerp voor een stolpboerderij. De stolpboerderij kun je opdelen in een balk en een piramide. De balk heeft een vierkant grondvlak van 12 meter bij 12 meter en is 3 meter hoog. De totale hoogte van de boerderij is 10 meter.



- Bereken de inhoud van de balkvormige onderkant van de boerderij in m^3 .
- Hoe hoog is het piramidevormige dak?
- Bereken de inhoud van het piramidevormige dak in m^3 .
- Hoeveel m^3 is de inhoud van de stolpboerderij?

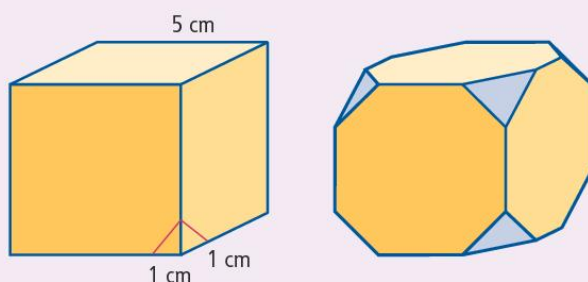
- 034** Een metalen schijf heeft een dikte van 1 cm en een diameter van 8 cm. In de schijf is een gat met een diameter van 4 cm geboord, waardoor een ring ontstaat.



- De schijf is opgebouwd uit twee cilinders. Bereken de inhoud van de buitenste cilinder.
- Bereken de inhoud van de binnenste cilinder.
- Trek de inhoud van de binnenste cilinder af van de inhoud van de buitenste cilinder. Geef je antwoord in hele mm^3 .
- Wat is de betekenis van je antwoord bij opdracht c?

Uitdagende opdrachten

- U7** Van een kubus met ribben van 5 cm wordt bij elk hoekpunt op 1 cm van het hoekpunt een stukje afgezaagd.
- Welke vorm hebben de afgezaagde stukjes?
 - Bereken de inhoud in cm^3 van de ruimtefiguur die zo ontstaat.





- 37** Op de linker foto zie je de piramide van Cheops. Op de rechter foto zie je een schaalmodel van de piramide van Cheops op schaal 1 : 1000.

Het schaalmodel heeft een grondvlak van 23 cm bij 23 cm en een hoogte van 15 cm.

- Bereken de inhoud van het schaalmodel in cm^3 .
- Hoeveel keer groter is de hoogte van de piramide van Cheops dan de hoogte van het schaalmodel?
- Bereken de inhoud van de piramide van Cheops in m^3 .

- 38** De afmetingen van een munt van 50 cent kun je vinden door de afmetingen van een munt van 10 cent met de factor 1,25 te vermenigvuldigen.

- Een munt van 10 cent is 2 mm dik.
Bereken de dikte van een munt van 50 cent.
- De inhoud van een munt van 10 cent is 565 mm^3 .
Bereken de inhoud van een munt van 50 cent.
- Beide munten zijn van hetzelfde materiaal gemaakt.
Het gewicht van een munt van 50 cent is 7,8 gram.
Hoeveel gram weegt een munt van 10 cent?

- 39** De verpakking van een extra grote Toblerone reep heeft een driehoekige grondvlak met een breedte van 12 cm en een hoogte van 11 cm. De verpakking is 78 cm lang.

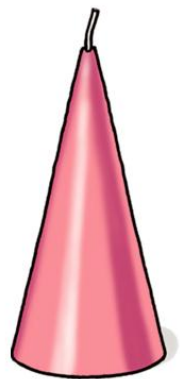
- Bereken de inhoud van de verpakking in cm^3 .
- Een normale Toblerone reep heeft een verpakking met afmetingen die drie keer zo klein zijn als die van de extra grote verpakking.
Hoeveel keer past de inhoud van de normale reep in de inhoud van de extra grote reep?
- De verpakking van de extra grote Toblerone reep bestaat uit 2784 cm^2 karton.
Bereken uit hoeveel cm^2 karton de verpakking van een normale Toblerone reep bestaat.



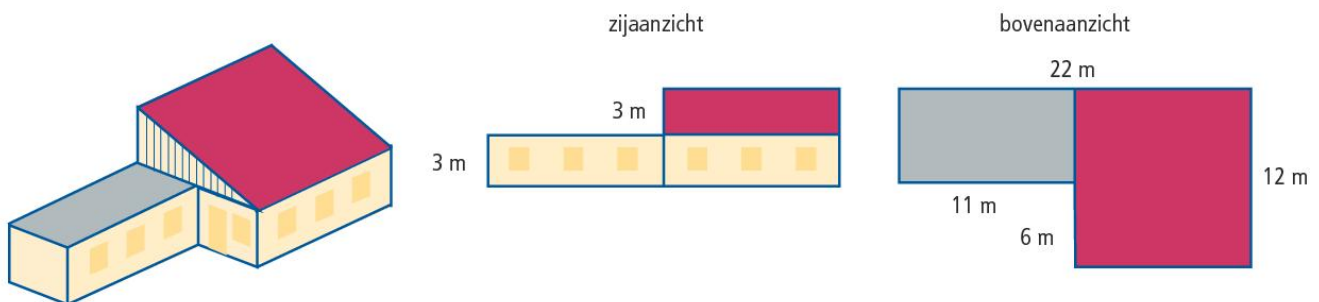
- 40** Een pakje vruchtensap heeft de vorm van een balk.
Het grondoppervlak van het pakje is 5 cm bij 5 cm.
Er kan precies 5 dL in het pakje.
- Bereken de hoogte van het pakje.
 - De inhoud en hoogte van het pakje zijn even groot als die van het cilindervormig pakje ernaast.
Hoe groot is de oppervlakte van het grondvlak van het cilindervormig pakje?
 - Bereken de diameter van het cilindervormig pakje.
Geef je antwoord in cm, afgerond op één decimaal.
 - Bereken van het balkvormige pakje vruchtensap hoeveel cm^2 er nodig is voor de verpakking.



- 41** Vul in.
- $0,08 \text{ m}^3 = \dots \text{ L}$
 - $2,8 \text{ dL} = \dots \text{ mL}$
 - $3,5 \text{ dm}^3 = \dots \text{ cL}$
 - $45 \text{ cL} = \dots \text{ cm}^3$
 - $3,05 \text{ L} = \dots \text{ cL}$
 - $7600 \text{ mL} = \dots \text{ L}$
- 42** Een kegelvormige kaars is 15 cm hoog en heeft een grondvlak met een straal van 3 cm.
- Bereken de inhoud van de kaars. Rond af op een geheel aantal cm^3 .
 - Hoeveel cL is dat?
 - Er is ook een kaars in cilindervorm te koop die aan de onderkant precies even breed is als de kegelvormige kaars. De inhoud van beide kaarsen is gelijk.
Hoe hoog is die kaars?



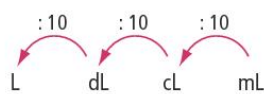
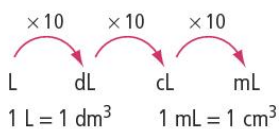
- 43** Hieronder zie je de afbeelding van een huis en twee aanzichten van het huis.
- Welke ruimtefiguren herken je in het huis?
 - Bereken de inhoud in m^3 van het huis.



Theorie

Inhoudsmaten L, dL, cL en mL

Bij het omrekenen van inhoudsmaten L, dL, cL en mL kun je de schema's hieronder gebruiken.



Voorbeeld

$$450 \text{ cL} = \dots m^3$$

Van cL naar L zijn twee stappen naar links. $450 : 10 : 10 = 4,5$

Dus 450 cL is gelijk aan 4,5 L.

4,5 L is gelijk aan $4,5 dm^3$.

4,5 dm^3 is gelijk aan $0,0045 m^3$.

Dus $450 \text{ cL} = 0,0045 m^3$.

S1 Vul in.

a $27 dm^3 = \dots L$

d $3175 cm^3 = \dots L$

b $1250 \text{ cL} = \dots L$

e $9,4 L = \dots mm^3$

c $49 cm^3 = \dots mL$

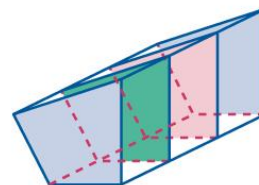
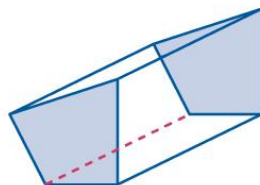
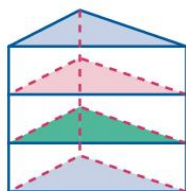
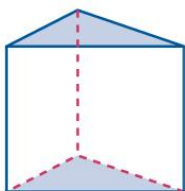
f $685 \text{ cL} = \dots cm^3$

Theorie

Prisma's en doorsneden

De ruimtefiguren hieronder noem je prisma's. In een prisma hebben het grondvlak en het bovenvlak dezelfde vorm en grootte. De overige grensvlakken van een prisma zijn rechthoeken.

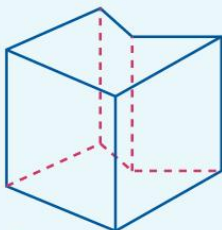
Als je een prisma evenwijdig aan het grondvlak een aantal keer doorsnijdt, dan hebben alle doorsneden dezelfde vorm en grootte als het grondvlak en het bovenvlak.



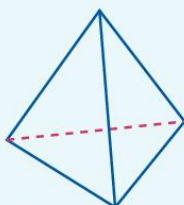
S2 a Schrijf van elke ruimtefiguur hieronder op of het een prisma is.

W

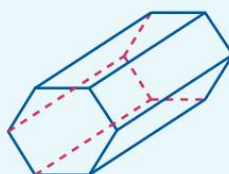
b Kleur in elk prisma het grondvlak.



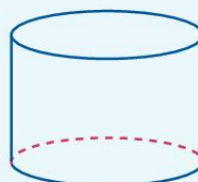
A



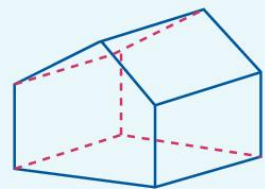
B



C



D



E

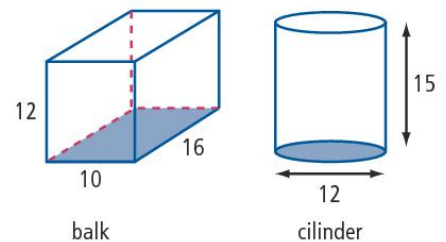
Vaardigheid

Je kunt de inhoud van een balk en de inhoud van een cilinder berekenen.

De inhoud van een balk en de inhoud van een cilinder kun je berekenen met de formule

inhoud = oppervlakte grondvlak $\times$ hoogte.

Of korter $I = G \times h$.

**Voorbeeld 1**

Bereken de inhoud van de balk hierboven.

Oplossing

De oppervlakte van het grondvlak is

$$10 \times 16 = 160.$$

De inhoud van de balk is

$$160 \times 12 = 1920.$$

Voorbeeld 2

Bereken de inhoud van de cilinder hierboven.

Rond af op helen.

Oplossing

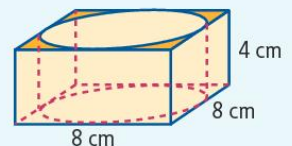
Het grondvlak is een cirkel met straal $12 : 2 = 6$.

De oppervlakte van het grondvlak is $\pi \times 6^2 = \pi \times 36$.

De inhoud van de cilinder is $\pi \times 36 \times 15 \approx 1696$.

S3 In een balk past precies een cilinder.

- Bereken de inhoud van de balk in cm^3 .
- Bereken ook de inhoud van de cilinder. Rond je antwoord af op hele cm^3 .

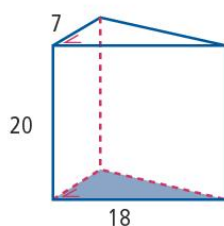
**Vaardigheid**

Je kunt de inhoud van een prisma berekenen.

De inhoud van een prisma kun je berekenen met de formule *inhoud = oppervlakte grondvlak $\times$ hoogte*. Of korter $I = G \times h$.

Voorbeeld

Bereken de inhoud van het prisma.

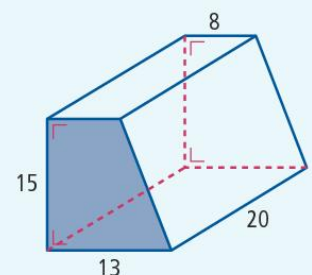
**Oplossing**

Het grondvlak van het prisma is een rechthoekige driehoek.

De oppervlakte van het grondvlak is $18 \times 7 : 2 = 63$.

De inhoud van het prisma is $63 \times 20 = 1260$.

- S4**
- Maak een schets van het grondvlak van het prisma en bereken de oppervlakte van dit grondvlak.
 - Bereken de inhoud van het prisma.



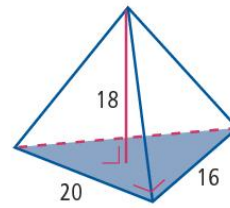
Vaardigheid

Je kunt de inhoud van een piramide en de inhoud van een kegel berekenen.

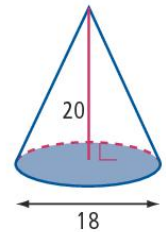
De inhoud van een piramide en de inhoud van een kegel kun je berekenen met de formule

$$\text{inhoud} = \frac{1}{3} \times \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte}.$$

$$\text{Of korter } I = \frac{1}{3} \times G \times h.$$



piramide



kegel

Voorbeeld 1

Bereken de inhoud van de piramide hierboven.

Oplossing

Het grondvlak van de piramide is een rechthoekige driehoek. De oppervlakte van het grondvlak is $20 \times 16 : 2 = 160$.

De inhoud van de piramide is

$$\frac{1}{3} \times 160 \times 18 = 960.$$

Voorbeeld 2

Bereken de inhoud van de kegel hierboven. Rond af op helen.

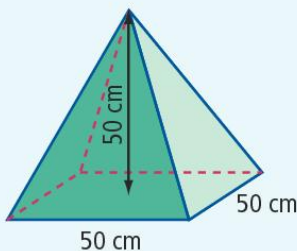
Oplossing

Het grondvlak is een cirkel met straal $18 : 2 = 9$.

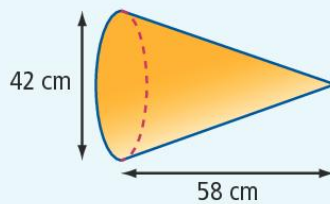
De oppervlakte van het grondvlak is $\pi \times 9^2 = \pi \times 81$.

De inhoud van de kegel is $\frac{1}{3} \times \pi \times 81 \times 20 \approx 1696$.

- S5** Bereken de inhoud van de ruimtefiguren hieronder. Rond je antwoorden af op hele cm^3 .



A



B

Vaardigheid

Je kunt de factor gebruiken voor het berekenen van oppervlakte en inhoud.

Wanneer de afmetingen van een figuur met een factor k worden vergroot, dan wordt de oppervlakte van die figuur k^2 keer zo groot. De inhoud wordt dan k^3 keer zo groot.

Voorbeeld

Een piramide heeft een oppervlakte van 208 cm^2 en een inhoud van 192 cm^3 . De afmetingen van de piramide worden vergroot met de factor 3.

Bereken de oppervlakte en de inhoud van de vergroting.

Oplossing

De oppervlakte van de vergroting is $208 \times 3^2 = 1872 \text{ cm}^2$.

De inhoud van de vergroting is $192 \times 3^3 = 5184 \text{ cm}^3$.

- S6** Op het postkantoor kun je dozen kopen waarin je spullen kunt versturen. De maten van twee van die dozen zijn 15 cm bij 20 cm bij 8 cm en 45 cm bij 60 cm bij 24 cm.
- De grote doos is een vergroting van de kleine doos. Hoe groot is de factor?
 - Vul in.
oppervlakte grote doos = ... $\times$ *oppervlakte kleine doos*.
 - Vul in.
inhoud grote doos = ... $\times$ *inhoud kleine doos*.
 - Van een andere doos is de inhoud 8 keer zo groot als die van de kleine doos. Hoeveel keer zo groot zijn de afmetingen dan?
 - Welke afmetingen heeft deze doos?
 - En welke oppervlakte heeft deze doos?



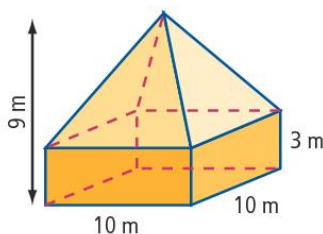
Vaardigheid

Je kunt de inhoud van een samengestelde ruimtefiguur berekenen.

- Verdeel de samengestelde ruimtefiguur in delen waarvan je de inhoudsformules kent.
- Bereken van de verschillende delen de inhoud.
- Tel de inhoud van de verschillende delen bij elkaar op of trek ze van elkaar af.

Voorbeeld

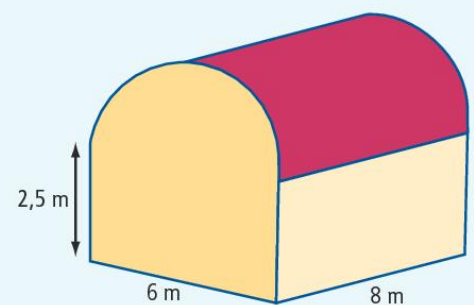
Bereken de inhoud van het huis.

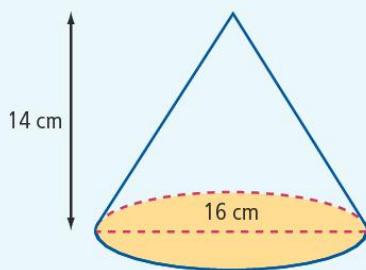


Oplossing

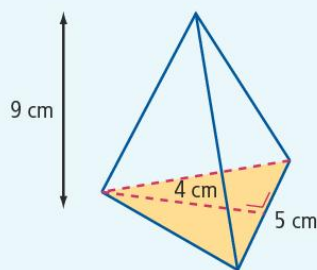
- Het huis bestaat uit een balk en een piramide.
- De inhoud van de balk is $10 \times 10 \times 3 = 300 \text{ m}^3$.
De inhoud van de piramide is $\frac{1}{3} \times 10 \times 10 \times 9 = 300 \text{ m}^3$.
- De inhoud van het huis is $300 + 300 = 600 \text{ m}^3$.

- S7** Een loods heeft de vorm van een balk met daarop een halve cilinder.
Bereken de inhoud van de loods in m^3 .

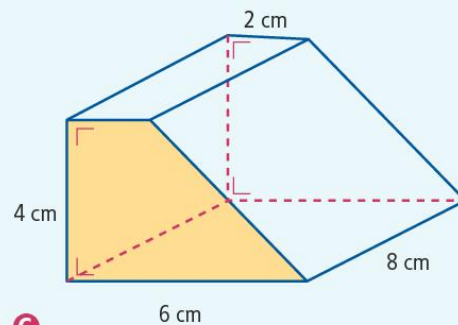




A

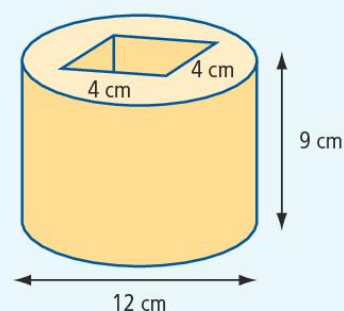


B

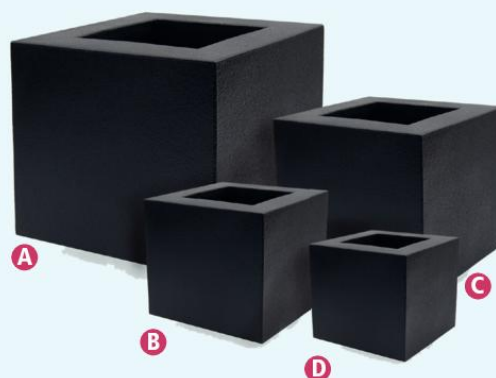


C

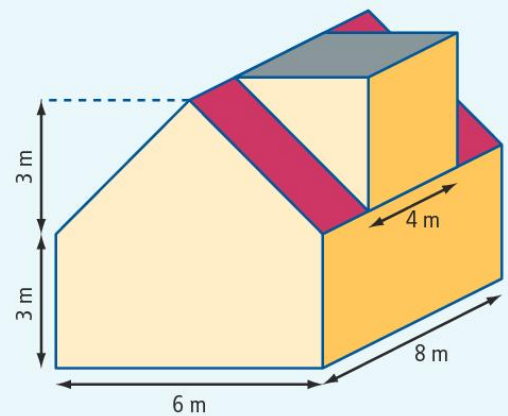
- T1**
- Geef van elke ruimtefiguur de wiskundige naam.
 - Bereken de inhoud van ruimtefiguur A in cm^3 . Rond af op een geheel getal.
 - Bereken de inhoud van ruimtefiguur B in cm^3 .
 - Bereken de inhoud van ruimtefiguur C in cm^3 .
- T2** Een ruimtefiguur bestaat uit een cilinder met een gat. Het gat heeft de vorm van een balk en loopt door de hele cilinder heen. Bereken de inhoud in cm^3 van de ruimtefiguur. Rond je antwoord af op twee decimalen.



- T3** Vul in.
- $6,5 \text{ dm}^3 = \dots \text{ L}$
 - $110 \text{ cm}^3 = \dots \text{ mL}$
 - $475 \text{ cL} = \dots \text{ L}$
 - $3365 \text{ cm}^3 = \dots \text{ L}$
 - $11,2 \text{ L} = \dots \text{ dL}$
 - $225 \text{ cL} = \dots \text{ dL}$
- T4** De kubusvormige bloempotten hiernaast zijn vergrotingen van elkaar. De bloempotten hebben van klein naar groot een breedte van 25 cm, 30 cm, 40 cm en 50 cm.
- Van welke bloempot is de inhoud 8 keer zo groot dan de inhoud van de kleinste bloempot? Verklaar je antwoord.
 - De inhoud van kleinste bloempot is 15 liter. Bereken de inhoud in liters van de andere drie bloempotten. Rond af op helen.
 - Jasmijn wil bij alle vier de bloempotten de zijvlakken schilderen. Bij de kleinste bloempot is dit een oppervlakte van 2500 cm^2 . Bereken hoeveel cm^2 ze in totaal moet schilderen.

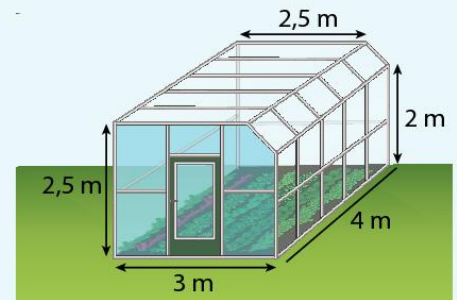


- T5** Een huis heeft een dak met daarop een dakkapel.
- Welke ruimtefiguur herken je in de dakkapel?
 - Bereken de inhoud van de dakkapel in m^3 .
 - Hoeveel m^3 is de totale inhoud van het huis inclusief de dakkapel?



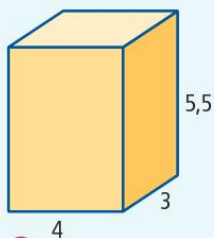
- T6** Een maatschepje heeft de vorm van een kegel met hoogte van 3 cm. Het grondvlak heeft een diameter van 3 cm.
- Bereken de inhoud in cm^3 van het maatschepje.
 - Hoeveel afgestreken maatschepjes passen in een cilindervormig blikje met een diameter van 6 cm en een hoogte van 6 cm?

- T7** Bob wil radiatoren plaatsen in zijn plantenkas. Het aantal radiatoren is afhankelijk van de inhoud van de plantenkas. Daarom wil hij de inhoud van de plantenkas weten.
- Bereken de inhoud van de plantenkas.
 - Per 15 m^3 inhoud in de plantenkas is één radiator nodig.
Bereken het aantal radiatoren dat nodig is.

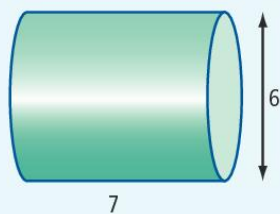


- T8** Een tunneltent is de helft van een cilinder met diameter 3,4 meter. De tunneltent heeft een lengte van 7 meter.
- Bereken de inhoud van de tunneltent in m^3 . Rond je antwoord af op één decimaal.
 - Van de tent wordt een model gemaakt op schaal 1 : 25. Bereken de inhoud van dit schaalmodel in cm^3 . Rond af op een geheel getal.





A



B

Je kunt de inhoud van een balk en de inhoud van een cilinder berekenen.

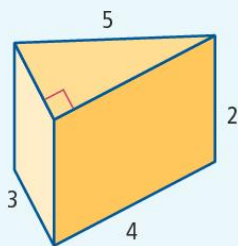
- E1 Hierboven zie je een balk en een cilinder.
- Bereken van de balk de oppervlakte en de inhoud.
 - Bereken van de cilinder de inhoud. Rond af op een geheel getal.

- E2 Een frisdrankblikje heeft de vorm van een cilinder. De diameter is 5 cm en de hoogte is 13 cm.
- Bereken de inhoud van dit blikje. Rond je antwoord af op hele cL.
 - Een ander blik bevat 5 dL frisdrank en is even hoog. Bereken de diameter in cm van dit blik. Rond je antwoord af op één decimaal.

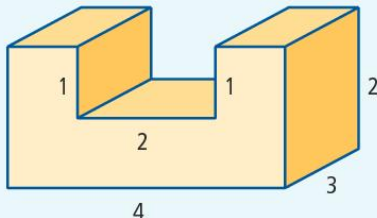


Je kunt de inhoud van een prisma berekenen.

- E3 Bereken de inhoud van de twee prisma's.



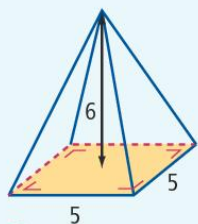
A



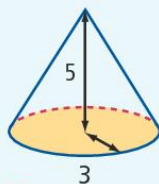
B

Je kunt de inhoud van een piramide en de inhoud van een kegel berekenen.

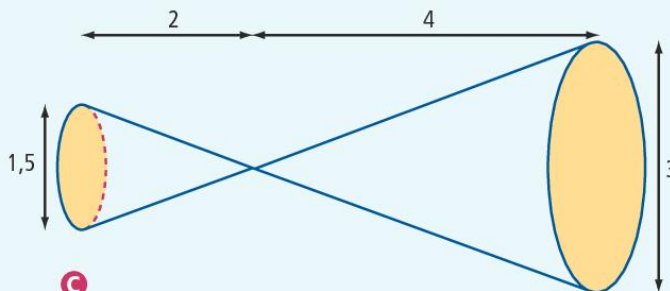
- E4 Bereken de inhoud van elk van de ruimtefiguren. Rond je antwoorden zo nodig af op één decimaal.



A



B



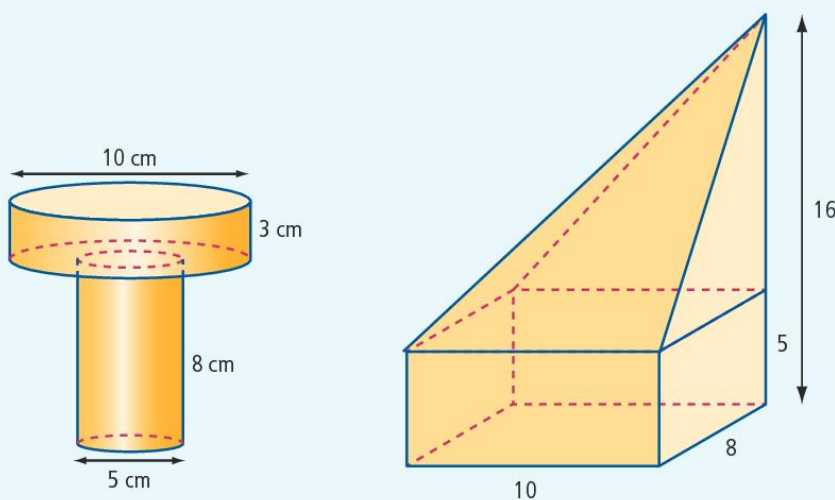
C

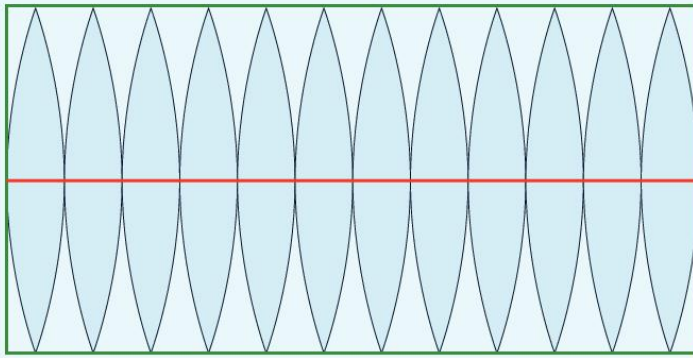
Je kunt de factor gebruiken voor het berekenen van oppervlakte en inhoud.

- E5** Van een kleine kist is de lengte 50 cm, de breedte 45 cm en de hoogte 30 cm.
- Bereken de inhoud van de kleine kist in cm^3 .
 - Van de kleine kist wordt een grote versie gemaakt. De breedte van de grote kist wordt 180 cm.
Met welk getal moet je de inhoud van de kleine kist vermenigvuldigen om de inhoud van de grote kist te vinden?
 - Bereken de inhoud van de grote kist in cm^3 .
 - Reken na dat je voor het verven van de buitenkant van de kleine kist voor ongeveer 1 m^2 verf nodig hebt.
 - Voor hoeveel m^2 heb je dan voor de grote kist verf nodig?
- E6** Van een ontwerp van een huis is op schaal 1 : 20 een maquette gemaakt.
- Hoeveel keer zo groot zijn de afmetingen in werkelijkheid?
 - En hoeveel keer zo groot is de inhoud in werkelijkheid?
 - De inhoud van de maquette is $66\,000 \text{ cm}^3$.
Hoeveel m^3 wordt de inhoud van het huis in werkelijkheid?
 - Het totale glasoppervlak van het huis wordt 65 m^2 .
Hoeveel cm^2 glas is er in de maquette verwerkt?

Je kunt de inhoud van een samengestelde ruimtefiguur berekenen.

- E7**
- Linksonder zie je een eenvoudige regenmeter.
Bereken de inhoud van deze regenmeter. Rond je antwoord af op hele cL.
 - De ruimtefiguur rechtsonder is opgebouwd uit een balk en een piramide.
Bereken de inhoud van de ruimtefiguur.

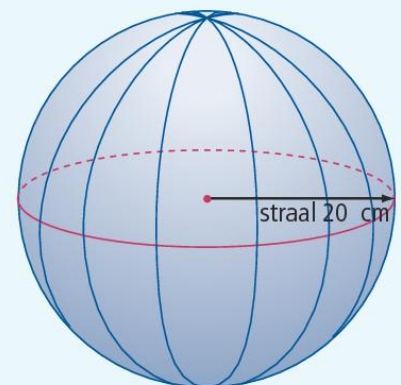




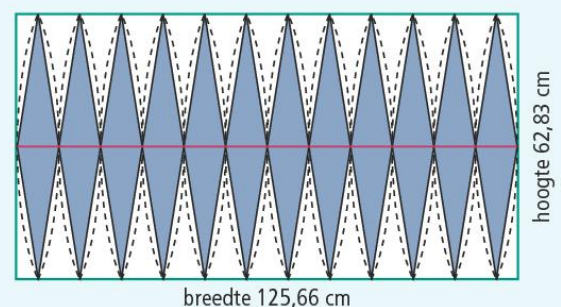
Om een globe te maken werd de wereldkaart vroeger op een speciale manier op papier afgedrukt. Linksboven zie je een model dat hierbij gebruikt werd. De kaart werd afgedrukt in het blauwe gedeelte van het model. Vervolgens werd het model uitgesneden en op een bol geplakt. Rechtsboven zie je een oude globe die op deze manier in elkaar gezet is.

Je gaat in deze verdieping het model linksboven gebruiken om de oppervlakte van een bol te benaderen.

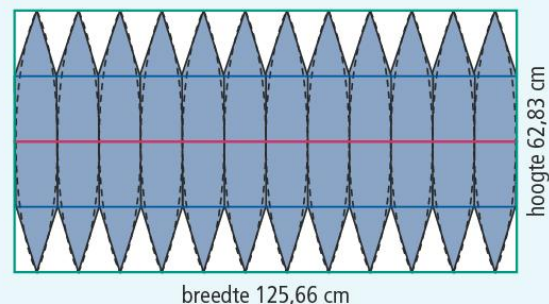
- 1 Een bol heeft een straal van 20 cm.
 - a De rode lijn in het model linksboven zie je hiernaast terug op de bol. De bol wordt doormidden gesneden langs de rode lijn. Welke vorm heeft deze doorsnede?
 - b Hoe groot is de diameter van deze doorsnede?
 - c Bereken de lengte van de rode lijn.
 - d Rondom het model is een groene rechthoek getekend. Waarom is de breedte van de rechthoek ongeveer 125,66 cm en de hoogte van de rechthoek de helft daarvan?
 - e Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van de groene rechthoek dan ongeveer? Rond af op hele cm^2 .



- 2 De oppervlakte van de bol met een straal van 20 cm is te benaderen met het model dat je hiernaast ziet. De gebogen lijnen in het model linksboven op deze bladzijde zijn hierin vervangen door rechte lijnen.
 - a Waarom is de oppervlakte van het blauwe gedeelte gelijk aan de helft van de oppervlakte van de groene rechthoek?
 - b Bereken van het model hiernaast de oppervlakte van het blauwe gedeelte. Rond af op hele cm^2 .
 - c Is deze oppervlakte groter of kleiner dan de oppervlakte van de bol?



- 3 De oppervlakte van de bol kun je ook benaderen met het model hiernaast.
- Waarom is de oppervlakte van het blauwe gedeelte gelijk aan $\frac{3}{4}$ deel van de oppervlakte van de groene rechthoek?
 - Bereken van het model hiernaast de oppervlakte van het blauwe gedeelte. Rond je antwoord af op hele cm^2 .
 - Is deze oppervlakte groter of kleiner dan de oppervlakte van de bol?
 - Schat de oppervlakte van de bol met behulp van de twee modellen uit opdracht 2 en opdracht 3.

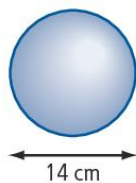


De oppervlakte A van een bol met straal r bereken je met de formule $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$.

Voor de inhoud I van een bol met straal r geldt de formule $I = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.

Voorbeeld

Een bol heeft een diameter van 14 cm.
Bereken de oppervlakte van de bol in hele cm^2 en de inhoud van de bol in hele cm^3 .



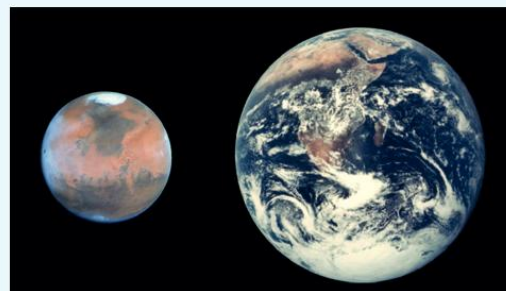
Oplossing

De straal van de bol is $14 : 2 = 7 \text{ cm}$.

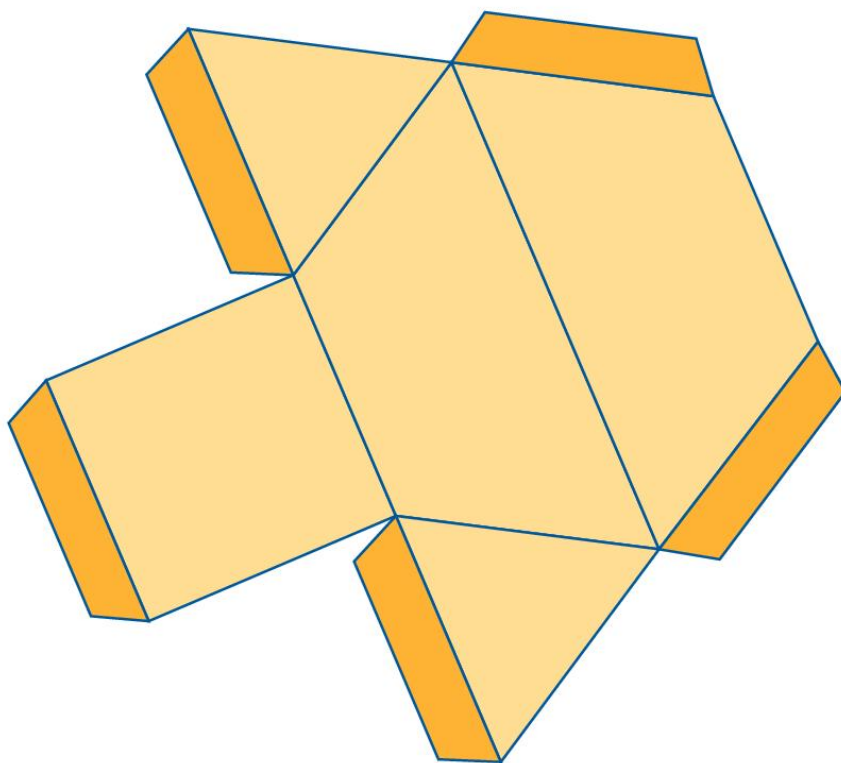
De oppervlakte van de bol is $4 \times \pi \times 7^2 \approx 616 \text{ cm}^2$.

De inhoud van de bol is $\frac{4}{3} \times \pi \times 7^3 \approx 1437 \text{ cm}^3$.

- 4
- Gebruik bovenstaande formules van de bol om de oppervlakte en de inhoud te berekenen van een bol met een straal van 20 cm. Rond af op helen.
 - Als de straal van deze bol twee keer zo groot wordt, hoeveel keer zo groot wordt de oppervlakte dan?
 - En hoeveel keer zo groot wordt de inhoud dan?
- 5 De aarde heeft een straal van ongeveer 6400 km.
- Bereken hoeveel km de lengte van de evenaar is.
 - Bereken hoeveel km^2 de oppervlakte van de aarde is.
 - De planeet Mars is een stuk kleiner dan de aarde. De straal is iets meer dan de helft de straal van de aarde, namelijk ongeveer 3300 km. Bereken de oppervlakte van Mars.
 - Bereken de inhoud van de aarde in km^3 en de inhoud van Mars in km^3 .



Tussendoortje | Het geheim van de sfinx



W De uitslag

De zijden van de driehoeken en het vierkant in de uitslag zijn allemaal even lang.

- Ga na dat de verhouding van de oppervlakte van het vierkant en de oppervlakte van de driehoek gelijk is aan $4 : \sqrt{3}$.
- Knip de uitslag twee keer uit en maak gebruik van de plakranden om de uitslagen in elkaar te zetten.

De ruimtefiguur

Met de twee ruimtefiguren die je nu gekregen hebt, kun je één ruimtefiguur maken.

- Welke ruimtefiguur krijg je dan?
- Hoe groot is de verhouding van de oppervlakte van die ruimtefiguur en de oppervlakte van een driehoek in de uitslag?



In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Tijd
- Procenten
- Vergelijkingen
- Formules en grafieken
- Meetkunde

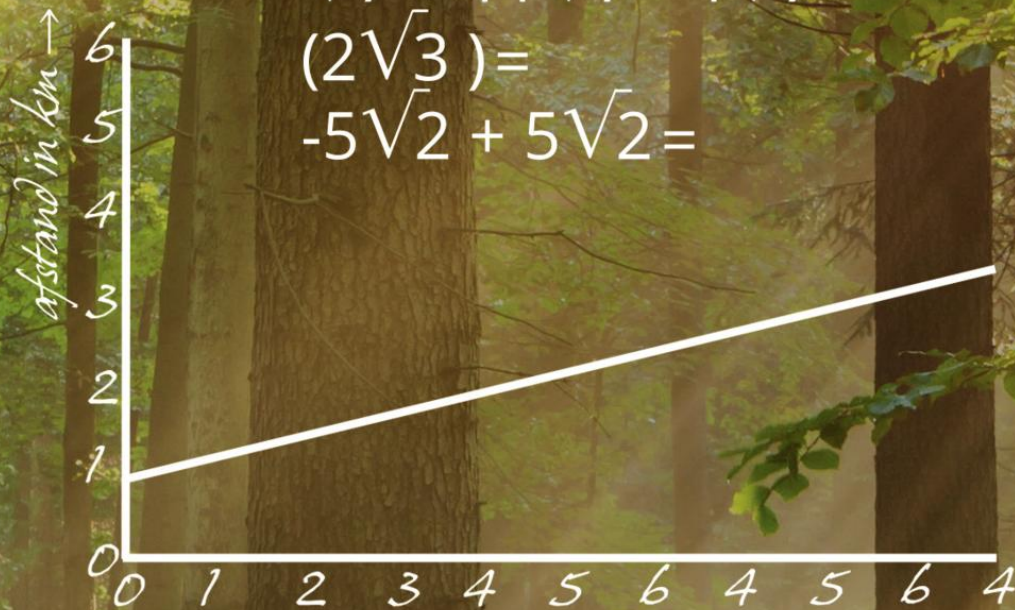
$$11h = 35$$

$$+3w = 16$$



$$\frac{1}{10} \text{ deel is } \dots\%$$

$$\frac{1}{5} \text{ deel is } \dots\%$$



$$3\sqrt{6} + 2\sqrt{6} =$$

$$-5\sqrt{5} \times \sqrt{6} =$$

$$\sqrt{7} + 11\sqrt{7} - 4\sqrt{7} =$$

$$(2\sqrt{3}) =$$

$$-5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} =$$

Tijd

- 1
 - a De trein vertrekt om 7.53 uur en komt aan om 9.11 uur.
Hoeveel minuten duurt de treinreis?
 - b De bus komt om 7.25 uur aan in Madrid. Bij elkaar heeft de reis elf uur en drie kwartier geduurd.
Hoe laat is de bus vertrokken?

Theorie

Bij het noteren van tijden wordt gebruikt gemaakt van een punt, maar ook van een komma. De notaties betekenen niet hetzelfde.

3.50 uur betekent 3 uur en 50 minuten. Tussen de uren en minuten wordt dus een punt gebruikt.

Er geldt $3.50 \text{ uur} = 3 \times 60 + 50 = 230 \text{ minuten}$.

3,5 uur is hetzelfde als $3\frac{1}{2}$ uur.

Dus geldt $3,5 \text{ uur} = 180 + 30 = 210 \text{ minuten}$.

- 2
 - a Hoeveel minuten is 2,25 uur?
 - b En hoeveel minuten is 6,8 uur?
 - c Hoeveel minuten is 1.38 uur?
 - d En hoeveel minuten is 2.40 uur?

Procenten

Theorie

Als een aantal met 6% toeneemt, betekent dat een verandering van 100% naar 106%.

Om uit te rekenen hoeveel je dan hebt, kun je vermenigvuldigen met $\frac{106}{100} = 1,06$.

Voorbeeld

Een afname van 2% betekent een verandering van 100% naar 98%.

De factor daarbij is $\frac{98}{100} = 0,98$.

- 3 Welke factor hoort bij de volgende veranderingen?
 - a toename met 7%
 - b afname met 13%
 - c afname met 0,81%
 - d toename met 1,4%
- 4
 - a Een printer kost € 120,- maar je krijgt 15% korting.
Hoeveel moet je voor deze printer betalen?
 - b Bij een aanbieding krijg je 30% korting op alle laptops.
Een laptop is nu te koop voor € 420,-.
Hoeveel kostte deze laptop eerst?

Vergelijkingen**5** Los de vergelijkingen op.

- a** $3x - 8 = -4x + 6$ **e** $1 - 2w = 4(w - 5)$
b $2m - 13 = 8 - m$ **f** $-(a - 4) = -16 + 4a$
c $4p + 3 = 18 - p$ **g** $23 + 2(x + 3) = 4x$
d $-3b + 24 = 16 - b$ **h** $17 + 2(y - 4) = 19$

6 Bereken bij elk paar lineaire formules de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.

- a** $y = 2x + 8$ en $y = 6x - 12$
b $y = 7 - x$ en $y = x + 1$
c $y = 4 - 3x$ en $y = 2x - 1$
d $y = -\frac{1}{2}x + 4$ en $y = -3\frac{1}{2}x + 19$

Formules en grafieken**7** Schrijf de formules zonder haakjes.

- a** $m = 5(p + 4)$ **e** $y = 4(2x + 5) - 4$
b $k = 6(3 - w)$ **f** $q = -3(a - 2) + 7a$
c $y = -2(3x + 7)$ **g** $h = 7t + 2(8 - 3t)$
d $d = -(4x - 9)$ **h** $a = -15p - 3(6 - 2p)$

8 Schrijf de formules zonder haakjes.

- a** $m = (w + 8)(w + 3)$
b $y = (x - 5)(x + 1)$
c $u = (2p + 1)(3p - 2)$
d $y = (x + 8)(x - 3) - 5$
e $h = (5 + t)(t - 4) - 2t$
f $k = (4a - 9)(9a - 4) - 36$

- 9 Eén van de drie tabellen hoort bij een exponentieel verband, de andere tabellen horen bij lineaire verbanden. Stel bij elke tabel een bijbehorende formule op.

A

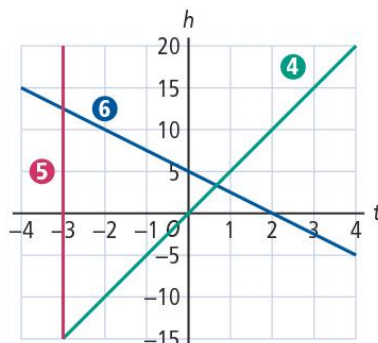
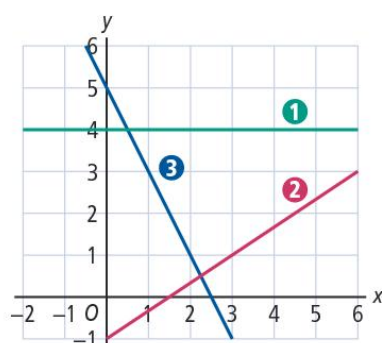
x	0	1	2	3
y	-7	-5,8	-4,6	-3,4

B

t	-3	0	3	6
k	11	5	-1	-7

C

t	1	2	3	4	5
h	3	6	12	24	48



Voorbeeld

x	0	1	2	3
y	7	10	13	16

$\xrightarrow{+3} \quad \xrightarrow{+3} \quad \xrightarrow{+3}$

Bij deze tabel hoort een lineair verband. De formule is $y = 3x + 7$.

t	0	1	2	3
w	8	12	18	27

$\xrightarrow{\times 1,5} \quad \xrightarrow{\times 1,5} \quad \xrightarrow{\times 1,5}$

Bij deze tabel hoort een exponentieel verband. De formule is $w = 8 \times 1,5^t$.

- 10 a Stel bij elke lijn een formule op.
b Bij welke lijn hoort een recht evenredig verband?

Theorie

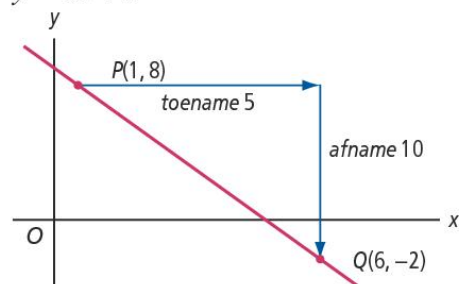
Bij het opstellen van een formule voor een lijn door twee punten is het handig om eerst een schets te maken.

Voorbeeld

Stel een formule op voor de lijn door de punten $P(1, 8)$ en $Q(6, -2)$.

Oplossing

$$y = ax + b$$



$$\text{hellingsgetal} = \frac{-2 - 8}{6 - 1} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$y = -2x + b$$

$$x = 1 \text{ en } y = 8 \text{ invullen}$$

$$8 = -2 \times 1 + b$$

$$8 = -2 + b$$

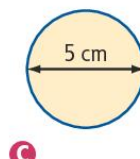
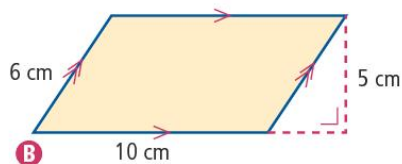
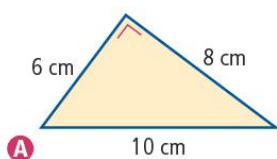
$$b = 10$$

$$\text{De formule is } y = -2x + 10.$$

- 11**
- Stel een formule op voor de lijn door de punten $A(1, -3)$ en $B(7, 15)$.
 - Stel een formule op voor de lijn door de punten $C(3, 19)$ en $D(7, -1)$.
 - Stel een formule op voor de lijn door de punten $E(3, 16)$ en $F(23, 6)$.

Meetkunde

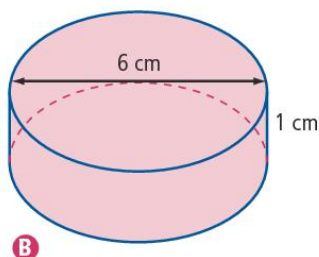
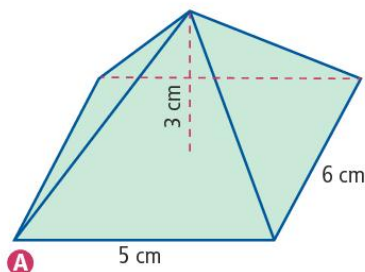
- 12**
- Bereken de oppervlakte van de figuren. Rond indien nodig af op twee decimalen.
 - Bereken in twee decimalen nauwkeurig de omtrek van de cirkel.



- 13** Bereken met de gegevens van de driehoeken de lengte van de onbekende zijde.

- $\triangle PQR$ met $PQ = \sqrt{40}$, $QR = 11$ en $\angle P = 90^\circ$
- $\triangle ABC$ met $AC = 7$, $BC = 12$ en $\angle C = 90^\circ$

- 14** Bereken de inhoud van de ruimtefiguren. Rond zo nodig je antwoord af op twee decimalen.





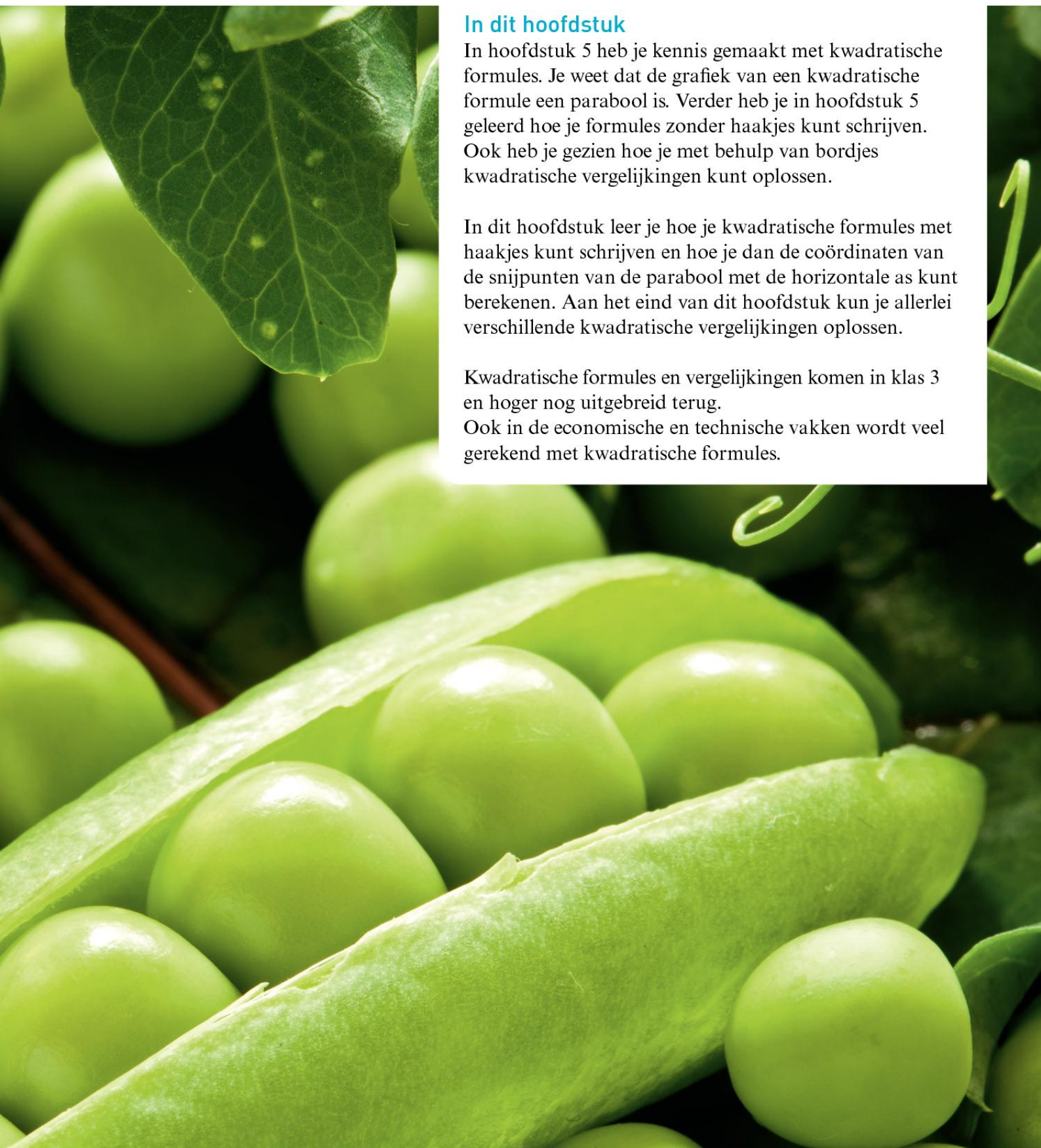
In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 5 heb je kennis gemaakt met kwadratische formules. Je weet dat de grafiek van een kwadratische formule een parabool is. Verder heb je in hoofdstuk 5 geleerd hoe je formules zonder haakjes kunt schrijven. Ook heb je gezien hoe je met behulp van bordjes kwadratische vergelijkingen kunt oplossen.

In dit hoofdstuk leer je hoe je kwadratische formules met haakjes kunt schrijven en hoe je dan de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de horizontale as kunt berekenen. Aan het eind van dit hoofdstuk kun je allerlei verschillende kwadratische vergelijkingen oplossen.

Kwadratische formules en vergelijkingen komen in klas 3 en hoger nog uitgebreid terug.

Ook in de economische en technische vakken wordt veel gerekend met kwadratische formules.



V1 Schrijf de volgende formules korter.

a $a = 3x + 4x$

d $p = 3x \cdot 4x$

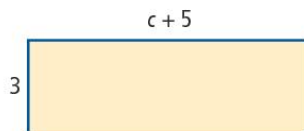
b $b = 2 + x - 2x$

e $q = 2 \cdot x \cdot -2x$

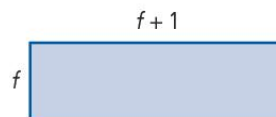
c $a = 4 + 5 + x + x$

f $r = 4 \cdot 5 \cdot x \cdot x$

V2 Geef voor elke rechthoek hieronder voor de oppervlakte een formule met haakjes en een formule zonder haakjes.



A



B

Theorie

De formule $A = x(x - 6)$ kun je zonder haakjes schrijven. Je krijgt dan de formule $A = x^2 - 6x$.

Om een formule zonder haakjes te schrijven kun je een **vermenigvuldigtabel** gebruiken.

Voorbeeld

Schrijf de formule $b = 2(a + 8)$ zonder haakjes

Oplossing

$\times$	a	$+8$
2	$2a$	$+16$

$$b = 2a + 16$$

V3 Om de haakjes weg te werken bij de formule $P = -3(t + 4)$ kun je een vermenigvuldigtabel gebruiken.

a Het keerteken in de vermenigvuldigtabel zie je niet meteen terug in de formule.

Waar zou je het keerteken in de formule kunnen plaatsen?

b Schrijf de formule $P = -3(t + 4)$ zonder haakjes.

c Je kunt de haakjes ook wegwerken met boogjes.

Vul in wat er op de puntjes komt te staan.

Krijg je met beide methoden dezelfde uitkomst?

d Werk de haakjes weg bij de formule $y = 8(a - 5)$.

vermenigvuldigtabel

$\times$	t	$+4$
-3	$-3t$	-12

boogjes

$P = -3(t + 4) = \dots + \dots$

V4 Schrijf de formules zonder haakjes.

a $w = b(b - 3)$

d $y = -p(-4 - p)$

b $d = -5(8 - c)$

e $g = 1,5k(4k - 1)$

c $y = 2x(x + 4)$

f $v = -10g(2 - 0,5g)$

Aanpak**Hoe schrijf je een formule met dubbele haakjes zonder haakjes?**

- 1 Maak een vermenigvuldigtabel. Plaats de ene factor verticaal en de andere factor horizontaal.
- 2 Werk de vermenigvuldigingen uit.
- 3 Neem de gelijksoortige termen samen.

Voorbeeld

Schrijf de formule $b = (a + 3)(a - 8)$ zonder haakjes.

Oplossing

1

×	a	-8
a	...	...
$+3$	...	...

2

×	a	-8
a	a^2	$-8a$
$+3$	$+3a$	-24

3 $b = a^2 + 3a - 8a - 24$
 $b = a^2 - 5a - 24$

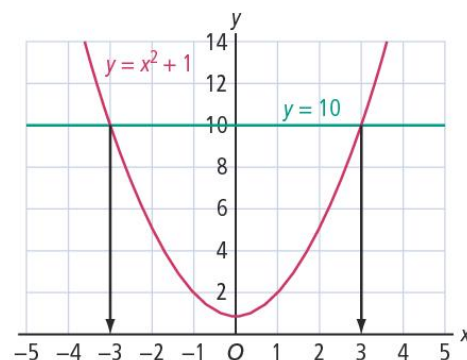
V5 Schrijf de formules zonder haakjes.

- a** $y = (x + 4)(x + 5)$ **d** $y = (x - 7)^2$
b $y = (2x + 1)(x + 1)$ **e** $y = (1 - x)(1 - 2x)$
c $y = (4x + 3)(3x - 1)$ **f** $y = (x + 9)(x - 9)$

$(x - 7)^2$ is hetzelfde als
 $(x - 7)(x - 7)$.

V6 De rode grafiek hoort bij de formule $y = x^2 + 1$ en de groene horizontale lijn hoort bij de formule $y = 10$.

- a** Hoeveel snijpunten heeft de parabool met de lijn $y = 10$?
b Geef de oplossingen van de vergelijking $x^2 + 1 = 10$.
c Lees uit de grafiek de oplossingen van de vergelijking $x^2 + 1 = 2$ af.
d Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^2 + 1 = 1$?
e En hoeveel oplossingen heeft $x^2 + 1 = 0$?



V7 Hiernaast zie je hoe Ellen de vergelijking $p^2 - 6 = 19$ met bordjes heeft opgelost. Los de vergelijkingen op.

- a** $p^2 + 4 = 20$ **d** $(p + 3)^2 = 49$
b $2p^2 = 0$ **e** $p^2 - 2 = 7$
c $p^2 + 33 = 8$ **f** $(p + 2)^2 = 0$

					Ellen
•	$p^2 - 6 = 19$				
•	$25 - 6 = 19$				
•	$p^2 = 25$				
•	$p = 5$ of $p = -5$				

Je leert

- wat priemfactoren zijn
- hoe je een formule ontbindt in factoren

Leerroutes

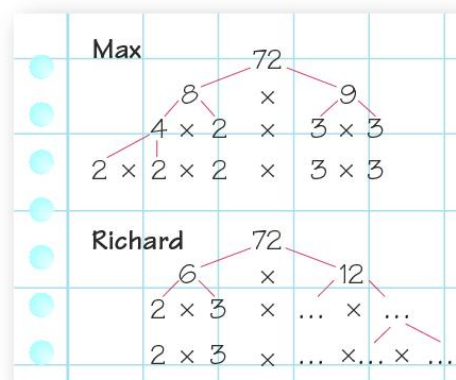
- ondersteunend: 1—02—3—4—05—5—6—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8
- uitdagend: 1—2—3—5—6—8—U1—U2

Brian en Natasja spelen een spel met de kaarten hiernaast. Brian kiest zoveel kaarten als hij wil, vermenigvuldigt de getallen op deze kaarten met elkaar en vertelt Natasja de uitkomst daarvan. Natasja probeert daarna te raden welke kaarten Brian heeft gekozen.

- Brian heeft als uitkomst 24. Welke kaarten kan Natasja aanwijzen?
- Op hoeveel manieren kan Brian de uitkomst 20 krijgen?



- 1 De leerlingen van klas 2A krijgen de opdracht om het getal 72 als product van zoveel mogelijk factoren te schrijven. De factoren moeten gehele getallen groter dan 1 zijn. Hiernaast zie je hoe Max en Richard dit aanpakken.
- Waarom kan Max er niet nog meer factoren van maken?
 - Controleer dat het product van de factoren bij hem weer 72 is.
 - Laat zien dat Richard dezelfde factoren vindt als hij doorgaat op de manier van Max.
 - Zijn al deze factoren priemgetallen? Leg je antwoord uit.

**Theorie**

Een getal als 60 kun je schrijven als product van **factoren**. Deze factoren zijn delers van 60 groter dan 1. Je kunt een getal schrijven als product van zoveel mogelijk factoren. Deze factoren zijn dan alle priemgetallen en heten daarom **priemfactoren**.

Voorbeeld 1

60 geschreven als product van factoren
bijvoorbeeld: $60 = 2 \times 30$
of $60 = 3 \times 4 \times 5$
of $60 = 12 \times 5$

Voorbeeld 2

60 geschreven als product van zoveel mogelijk factoren:
 $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}$
priemfactoren

Ondersteunende route → maak opdracht 02

2 Schrijf de getallen als product van priemfactoren.

- a 42 d 900
b 240 e 56
c 105 f 124

3 Hiernaast zie je hoe je de formule $b = 12a^2$ kunt schrijven als product van zoveel mogelijk factoren. Schrijf de volgende formules op dezelfde manier als product van zoveel mogelijk factoren.

- a $p = 14q$ d $w = 90v^2$
b $k = 25q^2$ e $c = 144d$
c $y = 42x^2$ f $g = 63b$

$$b = 12 \cdot a^2$$

$$2 \times 2 \times 3 \quad a \times a$$

$$b = 2 \times 2 \times 3 \times a \times a$$

4 Gegeven is de formule $r = 24x^2$.

- a Schrijf het getal 24 als product van priemfactoren.
b Schrijf de formule $r = 24x^2$ als product van zoveel mogelijk factoren.
c Je kunt de formule $r = 24x^2$ op meerdere manieren schrijven als product van twee factoren. Kies uit het lijstje hiernaast welke juist zijn.

- A $r = 2x \cdot 12x$
B $r = 3 \cdot 8x$
C $r = 6x \cdot 4x$
D $r = 12 \cdot 12x^2$

Theorie

De rechterkant van een formule kun je vaak schrijven als product van twee of meer factoren. Deze factoren kunnen gehele getallen zijn maar er kunnen ook variabelen in voorkomen. Dit heet **ontbinden in factoren**.

Vaak kun je op meerdere manieren ontbinden in factoren.

Voorbeeld

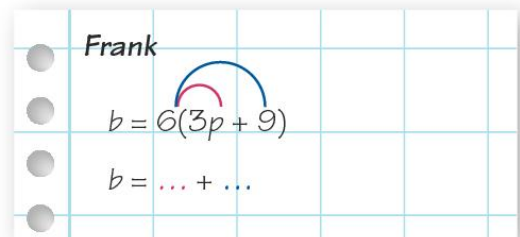
De rechterkant van de formule $y = 12x^2$ kun je ontbinden in factoren.

Als product van zoveel mogelijk factoren: $y = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x$

Als product van twee factoren, bijvoorbeeld: $y = 6x \cdot 2x$ of $y = 3x^2 \cdot 4$.

Ondersteunende route → maak opdracht 05

- 5** Gegeven is de formule $k = 42m^2$.
- a** Schrijf deze formule als product van zoveel mogelijk factoren.
 - b** Schrijf de formule $k = 42m^2$ op vier verschillende manieren als product van twee factoren.
 - c** Schrijf de formule $g = 60t^2$ op drie verschillende manieren als product van twee factoren.
- 6** Vul in.
- a** De formule $y = 27x^2$ kun je schrijven als $y = \dots \cdot 3x$
 - b** De formule $y = -15x^2$ kun je schrijven als $y = -5x \cdot \dots$
 - c** De formule $y = 72x^2$ kun je schrijven als $y = -3 \cdot \dots$
- 7** Verbind elke formule in het linker rijtje aan een formule in het rechter rijtje die hetzelfde is.
- | | |
|----------------|----------------------|
| A $y = 32x^2$ | 1 $y = 16 \cdot 2x$ |
| B $y = 12x^2$ | 2 $y = 4 \cdot 8x^2$ |
| C $y = 32x$ | 3 $y = 6x \cdot -2x$ |
| D $y = -12x^2$ | 4 $y = 3x \cdot 4x$ |
- 8** Gegeven is de formule $b = 18p + 54$.
- a** Frank heeft deze formule met haakjes geschreven als $b = 6(3p + 9)$. Werk de haakjes weg en laat zien dat deze formule hetzelfde is als de formule $b = 18p + 54$.
 - b** Er zijn nog meer manieren om de formule $b = 18p + 54$ met haakjes te schrijven. Kies de juiste manieren.
- | | |
|--------------------|-------------------|
| A $b = 2(9p + 27)$ | C $b = 3(p + 18)$ |
| B $b = 9(p + 27)$ | D $b = 18(p + 3)$ |



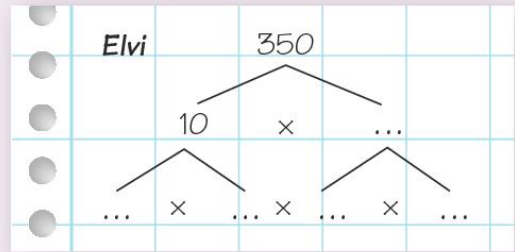
Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

- 02** Elvi gaat het getal 350 ontbinden in zoveel mogelijk factoren. Hiernaast is een begin gemaakt van het schema.
- Vul dit schema verder in.
 - Vul in: $350 = \dots \times \dots \times \dots \times \dots$
 - Waarom heten deze factoren priemfactoren?

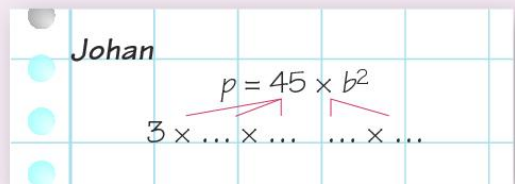
Schrijf de volgende getallen als product van priemfactoren.

- d 46 f 495
e 108 g 284



- 05** Johan schrijft de formule $p = 45b^2$ als product van zoveel mogelijk factoren. Hij maakt het schema hiernaast.

- Vul het schema van Johan verder in.
- Vul in: $p = 3 \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots$
- Hij schrijft nu de formule $p = 45b^2$ op verschillende manieren als product van twee factoren.
 - $p = 9 \cdot 5b^2$
 - $p = 3b \cdot 15b$
 - $p = 5b^2 \cdot 9b^2$
 Eén van deze formules is niet juist. Welke?
- Geef nog een andere manier om de formule $p = 45b^2$ te ontbinden in twee factoren.

**Uitdagende opdrachten**

- U1** Welke natuurlijke getallen kun je niet ontbinden in twee priemfactoren of meer?
Leg je antwoord uit.

- U2** Verbind elke formule in het linker rijtje aan een formule in het rechter rijtje die hetzelfde is.

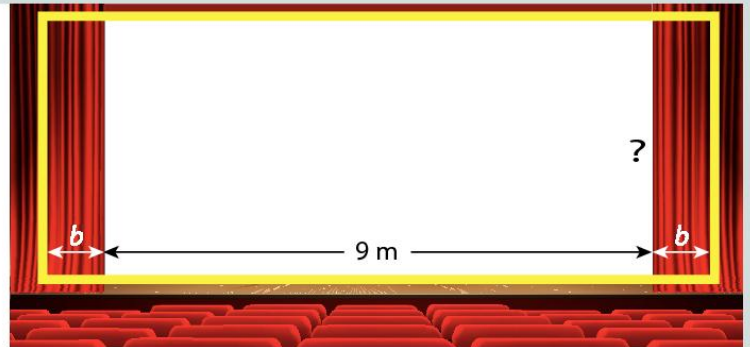
- | | |
|-------------------|-----------------|
| A $y = 2(2x + 2)$ | 1 $y = -2x - 8$ |
| B $y = -2(x + 4)$ | 2 $y = 4x + 4$ |
| C $y = 4(2x + 1)$ | 3 $y = 2x - 4$ |
| D $y = 2(x - 2)$ | 4 $y = 8x + 4$ |

Je leert • hoe je een tweeterm ontbindt in factoren

Leerroutes • ondersteunend: 9—10—11—012—12—13—014—15
• doorlopend: 9—10—11—12—13—14—15—16
• uitdagend: 9—11—12—13—15—16—U3—U4

Een bioscoopscherm wordt aan beide zijden geflankeerd door een gordijn van b meter breed. De oppervlakte van de gele rechthoek is gelijk aan $A = 8b + 36$.

- Hoe hoog is het bioscoopscherm?



- 9 Gegeven is de formule $b = 5(3a + 4)$.
- Schrijf deze formule zonder haakjes.
 - Sanne heeft bij een andere formule de haakjes weggewerkt. Ze krijgt als antwoord $b = 21a + 14$.
Uit welke twee termen bestaat deze formule?
 - Ga na dat je beide termen door 7 kunt delen.
 - Zet het getal 7 links in de onderste vermenigvuldigtabel en vul deze verder in.
 - Vul in: de formule $b = 21a + 14$ kun je schrijven als $b = 7(\dots + \dots)$.

×	3a	+4
5	...	...
×	...	...
...	21a	+14

Theorie

De rechterkant van de formule $y = 10x + 15$ is een **tweeterm**. Beide termen $10x$ en 15 zijn deelbaar door 5. Deze **gemeenschappelijke factor** kun je buiten haakjes halen. Je krijgt dan $y = 5(2x + 3)$. Daarmee is de rechterkant van de formule ontbonden in twee factoren.

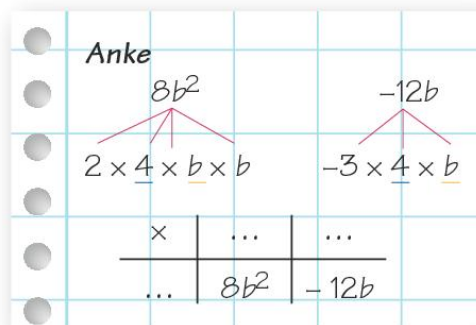
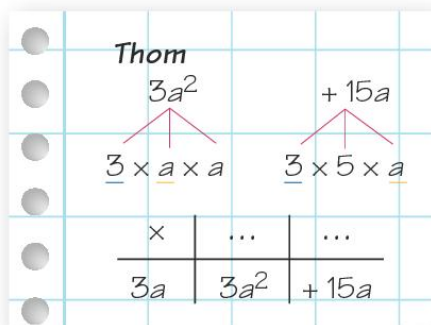
Voorbeeld

$$b = 8a - 28$$

$$4 \times 2a \quad 4 \times 7$$

Beide termen zijn deelbaar door 4.
Je kunt de formule schrijven als $b = 4(2a - 7)$.

- 10 Benthe beweert dat je de formule $b = 8a - 28$ ook kunt ontbinden in $b = 2(4a - 14)$.
- Werk de haakjes weg en laat zien dat ze gelijk heeft.
 - Waarin verschilt de ontbinding van Benthe van die in het voorbeeld?



- 11** Thom gaat de formule $y = 3a^2 + 15a$ ontbinden in factoren. Hij zoekt eerst de grootste gemeenschappelijke factor van de termen $3a^2$ en $+ 15a$.
- Welke grootste gemeenschappelijke factor vindt hij zo?
 - Vul de vermenigvuldigtabel verder in.
 - Schrijf de formule $y = 3a^2 + 15a$ in de vorm $y = \dots(\dots + \dots)$.
 - Anke ontbindt de formule $y = 8b^2 - 12b$ in factoren. Geef de grootste gemeenschappelijk factor van de termen $8b^2$ en $-12b$.
 - Vul de vermenigvuldigtabel verder in.
 - Schrijf de rechterkant van de formule $y = 8b^2 - 12b$ als een product van twee factoren.

Aanpak

Hoe ontbind je een tweeterm in factoren?

- Zoek de grootste gemeenschappelijke factor van beide termen.
- Maak een vermenigvuldigtabel, vul de twee termen en de gevonden factor in.
- Vul de ontbrekende factoren in.
- Schrijf de tweeterm als een product van twee factoren.

Voorbeeld

Ontbind de tweeterm in de formule $h = 32a - 12a^2$ in factoren.

$$4a \times 8 \quad 4a \times -3a$$

Oplossing

- De grootste gemeenschappelijke factor is $4a$.

- | | | |
|----------|-------|----------|
| $\times$ | ... | ... |
| $4a$ | $32a$ | $-12a^2$ |

- | | | |
|----------|-------|----------|
| $\times$ | 8 | $-3a$ |
| $4a$ | $32a$ | $-12a^2$ |

- Dit geeft de formule $h = 4a(8 - 3a)$.

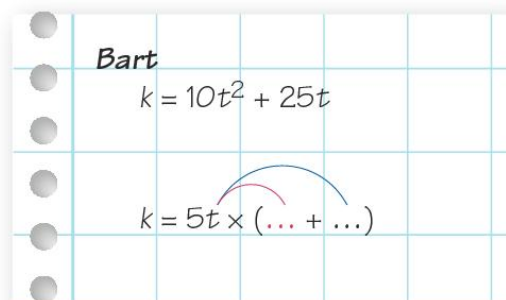
Ondersteunende route → maak opdracht 012

12 Ontbind de tweetermen in de formules in factoren.

- a $n = a^2 + 7a$ d $j = 8t - 12$
 b $b = h^2 - 15h$ e $k = 27p^2 + 18p$
 c $q = 15 + 45b$ f $y = 56x + 28x^2$

13 Op het blaadje zie je hoe Bart een formule ontbindt.

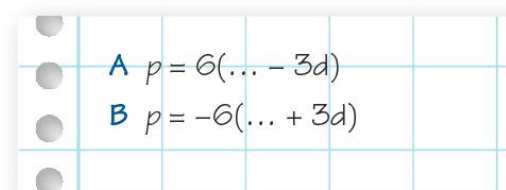
- a Leg uit dat de grootste gemeenschappelijke factor van de beide termen $5t$ is.
 b Bart zet deze factor alvast voor de haakjes. Voor het rode boogje geldt $5t \times \dots = 10t^2$. Voor het blauwe boogje geldt $5t \times \dots = 25t$. Wat komt er op de puntjes te staan?
 c Schrijf de formule $k = 10t^2 + 25t$ in de vorm $k = \dots(\dots + \dots)$.



Ondersteunende route → maak opdracht 014

14 Op het blaadje is op twee manieren een begin gemaakt om de tweeterm in de formule $p = 12 - 18d$ te ontbinden.

- a Maak beide ontbindingen af.
 b Bij welke ontbinding is er een negatieve factor gebruikt?
 c Laat zien door de haakjes weg te werken dat de ontbinding $p = -6(3d - 2)$ ook juist is.



Theorie

Bij het ontbinden van tweetermen in een formule kun je soms ook een negatieve factor gebruiken.

Voorbeeld

Je kunt de formule $b = 16t - 24t^2$ ontbinden als $b = 8t(2 - 3t)$ maar ook als $b = -8t(-2 + 3t)$. Je kunt ook schrijven $b = -8t(3t - 2)$.

15 Ontbind de formules en gebruik een negatieve factor.

- a $p = -7q + 21$ c $y = -5x^2 + 15x$
 b $r = -6s - 4$ d $d = -12k + 36k^2$

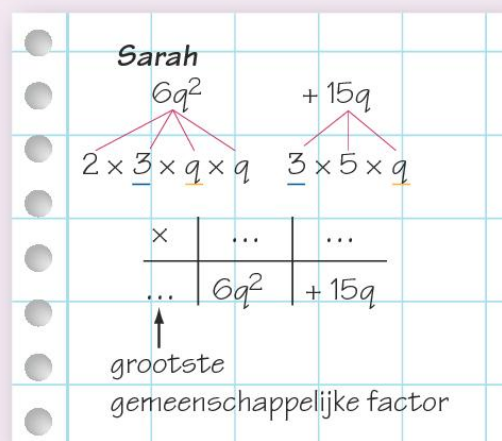
16 Ontbind de formules in factoren.

- a $c = 32h^2 - 24$ c $u = 23s - 230s^2$
 b $n = 18a^2 + 24a$ d $b = -39k^2 - 65k$

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

- O12** Sarah gaat de formule $b = 6q^2 + 15q$ ontbinden in factoren.
- Uit welke twee termen bestaat deze formule?
 - Sarah maakt bij beide termen een schema om de grootste gemeenschappelijke factor te vinden. Zet deze factor in de vermenigvuldigtabel.
 - Vul de vermenigvuldigtabel verder in.
 - Vul in: de formule $b = 6q^2 + 15q$ kun je ontbinden als $b = \dots(2q + \dots)$.



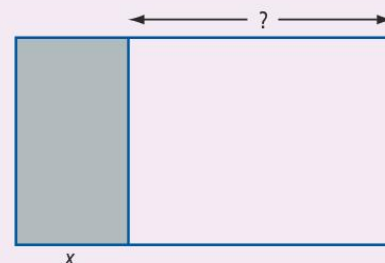
- O14** Vermenigvuldigtabel 1 hoort bij de formule $p = -12b + 30$.
- Vul deze vermenigvuldigtabel verder in.
 - Vul in: de formule met haakjes is $p = -6(\dots - \dots)$.
 - Bij vermenigvuldigtabel 2 hoort de formule $k = -28a^2 - 8a$. Zet op dezelfde manier als hierboven een negatieve factor links in de vermenigvuldigtabel.
 - Vul de vermenigvuldigtabel bij $k = -28a^2 - 8a$ verder in en schijf de formule op met haakjes.

×	...	...
-6	-12b	+30

×	...	...
...	-28b^2	-8a

Uitdagende opdrachten

- U3** Een weiland is verdeeld in twee stukken. De totale oppervlakte A in m^2 wordt gegeven door de formule $A = 2x^2 + 80x$, met x in meters. Bereken de lengte van het stuk dat aangegeven is met het vraagteken.



- U4**
- Vul in: de formule $y = 14x^2 + \dots$ kan ontbonden worden in $y = \dots(2x + 3)$.
 - Vul in: de formule $y = \dots - 56x$ kan ontbonden worden in $y = 8x(\dots - 3x)$.

Je leert • hoe je een drieterm ontbindt in factoren

Leerroutes • ondersteunend: 17—18—019—19—20—21—22—023—24—25
 • doorlopend: 17—18—19—20—21—22—23—24—25
 • uitdagend: 17—18—19—21—22—23—25—U5—U6

De wiskundeleraar schrijft op het bord met een raadsel op welke datum hij jarig is.

- Op welke datum is de leraar jarig?

De dag met de maand
opgeteld is 19.
De dag vermenigvuldigd
met de maand is 78.



- 17** Voor de totale oppervlakte A van de rechthoek kun je een formule met haakjes en een formule zonder haakjes maken.

- Vul op de puntjes gehele getallen in zodat de oppervlakten kloppen.
- De formule met haakjes is $A = (x + \dots)(x + \dots)$.
- De formule zonder haakjes is $A = x^2 + 5x + 3x + \dots$
- Schrijf deze formule korter door de $5x$ en $3x$ samen te nemen.

	x	$\dots$
x	x^2	$5x$
$\dots$	$3x$	$\dots$

Theorie

De rechterkant van de formule $y = x^2 + 8x + 12$ is een **drieterm**. Ook een formule met een drieterm kun je schrijven als een product van factoren. Dit heet ontbinden en je schrijft dan de formule met dubbele haakjes.

Voorbeeld

De formule $y = x^2 + 8x + 12$ kun je ontbinden in factoren.
 Je krijgt dan $y = (x + 6)(x + 2)$
 of $y = (x + 2)(x + 6)$.

- 18** Bij de formule $y = (x + 7)(x + 2)$ hoort vermenigvuldigtabel 1.

- Schrijf de formule $y = (x + 7)(x + 2)$ zonder haakjes.
- Bram heeft bij een andere formule de haakjes weggewerkt. Hij krijgt als antwoord $y = x^2 + 5x + 6$. Uit welke drie termen bestaat deze formule?
- Vermenigvuldigtabel 2 hoort bij de formule van Bram. Leg uit dat je op de puntjes $+2$ en $+3$ moet invullen.
- Vul vermenigvuldigtabel 2 verder in.
- De formule $y = x^2 + 5x + 6$ kun je schrijven als $y = (x + \dots)(x + \dots)$.

1

$\times$	x	$+2$
x	$\dots$	$\dots$
$+7$	$\dots$	$\dots$

2

$\times$	x	$\dots$
x	x^2	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$+6$

samen $+5x$

Ondersteunende route → maak opdracht 019

- 19** Om de formule $y = x^2 + 7x + 10$ in factoren te ontbinden, kun je gebruik maken van het overzicht. Je zoekt dan naar twee getallen waarvan het product +10 is.
- Vul in het overzicht bij elk tweetal getallen de som in.
 - Naar welke som moet je zoeken?
 - Welke twee getallen horen bij deze som?
 - Schrijf de formule $y = x^2 + 7x + 10$ in de vorm $y = (x + \dots)(x + \dots)$ door de twee gevonden getallen in te vullen op de puntjes.

product	getallen	som
+10	1 en 10	...
+10	-1 en -10	...
+10	2 en 5	...
+10	-2 en -5	...

Aanpak

Hoe ontbind je een drieterm in factoren?

- Stel vast naar welk product en welke som je zoekt.
- Maak een overzicht van alle mogelijkheden waarmee je het gezochte product kunt krijgen.
- Kijk bij welke getallen de gezochte som hoort.
- Schrijf de drieterm als een product van twee factoren.

Voorbeeld

Ontbind de drieterm in de formule $y = x^2 + 6x + 8$ in factoren.

Oplossing

- 1** Het product is +8 en de som is +6.

2

product	getallen	som
+ 8	1 en 8	+ 9
+ 8	-1 en -8	- 9
+ 8	2 en 4	+ 6
+ 8	-2 en -4	- 6

- 3** Met de getallen 2 en 4 vind je het product 8 en de som 6.

- 4** De formule wordt $y = (x + 2)(x + 4)$.

- 20** Het overzicht uit het voorbeeld kun je ook gebruiken om de formule $y = x^2 - 6x + 8$ in factoren te ontbinden.
- Leg uit waarom dit overzicht nu weer te gebruiken is.
 - Naar welke som ga je nu zoeken?
 - Welke twee getallen horen bij deze som?
 - Schrijf de formule $y = x^2 - 6x + 8$ met haakjes.

21 Ontbind de drietermen in de formules in factoren. In het overzicht is een begin gemaakt waarbij het product +12 is.

- a** $y = x^2 + 7x + 12$ **d** $y = x^2 - 13x + 12$
b $y = x^2 + 13x + 12$ **e** $y = x^2 - 7x + 12$
c $y = x^2 - 8x + 12$ **f** $y = x^2 + 8x + 12$

product	getallen	som
+12	1 en 12	...
+12	-1 en -12	...
+12	2 en 6	...
+12	-2 en ...	...
...	...	...
...	...	...

22 Ontbind de formules in factoren. Voor de onderdelen a, b en c heb je één overzicht nodig waarbij het product +18 is.

- a** $p = q^2 + 9q + 18$ **d** $r = d^2 + 14d + 24$
b $h = t^2 - 11t + 18$ **e** $v = c^2 - 11c + 30$
c $f = w^2 + 19w + 18$ **f** $y = a^2 + 14a + 45$

Ondersteunende route → maak opdracht 023

23 Om de drieterm in de formule $y = x^2 + 2x - 80$ te kunnen ontbinden, is in het overzicht hiernaast een begin gemaakt.

- a** Waarom staat het getal -80 in de eerste kolom?
b Vul het overzicht verder in.
c Hoe groot moet de som zijn van de twee getallen waar je naar zoekt? Waar zie je dat terug in de drieterm?
d Ontbind de formule $y = x^2 + 2x - 80$ in factoren.

product	getallen	som
-80	1 en -80	-79
-80	-1 en 80	79
-80	2 en -40	...
-80	-2 en ...	...
...	...	...
...	...	...

24 Ramses gaat de formule $k = t^2 + 12t + 36$ ontbinden.

- a** Welke getallen geven het product +36 en som +12?
b Vul het blaadje van Ramses verder in.
c Ontbind op dezelfde manier de volgende formules.

- A** $d = a^2 + 6a + 9$ **C** $g = b^2 - 2b + 1$
B $p = q^2 - 14q + 49$ **D** $y = x^2 - 18x + 81$

Ramses					
$k = (t + \dots)(t + \dots)$					
ofwel korter:					
$k = (t + \dots)^2$					

25 Ontbind in factoren.

- a** $y = x^2 + 6x - 7$ **d** $y = x^2 + 22x + 121$
b $y = x^2 + 3x - 10$ **e** $y = x^2 - x - 72$
c $y = x^2 - 19x + 70$ **f** $y = x^2 + x - 2$

Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

Ondersteunende opdrachten

- 019** Jos gaat de drieterm in $y = x^2 + 7x + 10$ schrijven als een product van factoren in de vorm $y = (x + \dots)(x + \dots)$. Hij gebruikt daarbij de vermenigvuldigtabel hiernaast.
- Waarom vult Jos eerst het getal +10 rechtsonder in?
 - Leg uit dat linksonder en rechtsboven de getallen +2 en +5 komen.
 - Vul de vermenigvuldigtabel verder in.
 - Ontbind de drieterm van $y = x^2 + 7x + 10$ in factoren.

$\times$	x	+5
x	x^2	...
+2	...	+10

samen +7x

- 023** Om de drieterm in de formule $y = x^2 - 2x - 24$ te kunnen ontbinden, is in het overzicht hiernaast een begin gemaakt.
- Vul het overzicht verder in.
 - Voor welke twee getallen is de som gelijk aan -2?
 - Vul deze twee getallen nu in bij $y = (x + \dots)(x - \dots)$.
 - Maak nu een overzicht bij de formule $y = x^2 + 2x - 15$. Bij product schrijf je het getal -15 en bij de som zoek je het getal 2.
 - Ontbind de drieterm in de formule $y = x^2 + 2x - 15$ in factoren en schrijf in de vorm $y = (x + \dots)(x - \dots)$.
 - Ontbind ook $y = x^2 - 14x - 15$ in factoren.

product	getallen	som
-24	1 en -24	-23
-24	-1 en 24	23
-24	2 en -12	...
-24	-2 en ...	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...
...	-4 en ...	...

Uitdagende opdrachten

- U5** Op de formule hiernaast is een inktvlek gevallen. De term met x is onleesbaar geworden. Geef zes mogelijke ontbindingen van de formule $y = x^2 \dots x - 18$.

- U6** Bij het ontbinden van de formule $h = 72 - 17t + t^2$ is het handig eerst de drieterm anders te schrijven. Je zet dan het kwadraat voorop en het getal 72 als laatste.
- Hoe ziet de formule er uit als je de volgorde zo aanpast?
 - Ontbind deze formule in factoren.
 - Ontbind de volgende formules in factoren, let daarbij op de volgorde van de termen.
- A $b = a^2 - 24 - 2a$ C $y = 9 + c^2 - 6c$
 B $k = 20 + 9u + u^2$ D $h = t^2 - 30 - t$

Je leert

- hoe je met ontbinden in factoren een vergelijking oplost
- hoe je de snijpunten van een parabool met de horizontale as vindt

Leerroutes

- ondersteunend: 26—27—28—029—30—31—032—33
- doorlopend: 26—27—28—29—30—31—32—33
- uitdagend: 26—27—29—30—32—33—U7—U8

Kies in de figuur een route van links naar rechts. Je komt dan langs vijf getallen. Al deze getallen vermenigvuldig je met elkaar.

- Wanneer levert een route het product 0 op?



26 Om de vergelijking $(a - 2)(a + 1) = 0$ op te lossen, kun je voor a telkens een waarde invullen en controleren of de uitkomst dan 0 wordt.

- Is $a = 0$ een oplossing? Is $a = 1$ een oplossing?
- Ga na dat $a = 2$ een oplossing is door de waarde 2 in te vullen in de vergelijking.
- Ga na dat $a = -1$ een oplossing is door de waarde -1 in te vullen in de vergelijking.
- Leg uit wat er met de factoren van de vergelijking gebeurt wanneer je een gevonden oplossing invult.

Theorie

Het product van twee factoren is nul als ten minste één van de factoren nul is.

Wanneer dus een vergelijking geschreven is in de vorm $A \times B = 0$, dan kun je de oplossingen vinden door de vergelijkingen $A = 0$ en $B = 0$ op te lossen.

Voorbeeld

Los op: $3x(2x - 4) = 0$

Oplossing

$$3x = 0 \text{ of } 2x - 4 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 2x = 4$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2$$

27 De vergelijking $(x - 4)(x - 1) = 0$ kun je oplossen met $A \times B = 0$.

- Uit welke twee factoren bestaat de linkerkant van de vergelijking?
- Eén van de oplossingen vind je door $x - 4 = 0$ op te lossen. Met welke andere vergelijking vind je de tweede oplossing?
- Geef de oplossingen van de vergelijking $(x - 4)(x - 1) = 0$.

	$(x+2)(x-7) = 0$
	$x+2 = 0$ of $x-7 = 0$
	$x = \dots$ of $x = \dots$

	$(2m-4)(m+7) = 0$
	$2m-4 = 0$ of $\dots = 0$
	$2m = \dots$ of $\dots$
	$\dots$ of $\dots$

	$3k(k+4) = 0$
	$3k = 0$ of $\dots = 0$
	$\dots$ of $\dots$

- 28** Bij de vergelijkingen is een begin gemaakt met het oplossen.
Los de vergelijkingen verder op.

Ondersteunende route → maak opdracht 029

- 29** Los de vergelijkingen op. Schrijf het op zoals in opdracht 28.

- a** $4a(a+5) = 0$ **d** $(12d-4)(3-d) = 0$
b $(b+2)(b-3) = 0$ **e** $x(2x-7) = 0$
c $(p+4)(4-2p) = 0$ **f** $(4q+8)(2q-5) = 0$

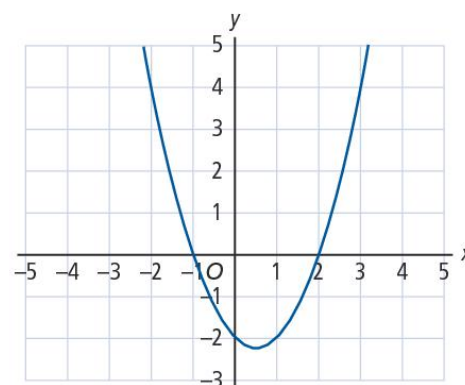
- 30** De vergelijking $c^2 + 7c - 8 = 0$ staat nog niet in de goede vorm om deze meteen op te kunnen lossen. Door de linkerkant van deze vergelijking te ontbinden, krijg je wel de gewenste vorm $A \times B = 0$.

- a** Hiernaast is een begin gemaakt.
Los de vergelijking verder op.
b Los ook de volgende vergelijkingen op deze manier op.

- A** $x^2 + 8x + 12 = 0$ **C** $p^2 + p - 72 = 0$
B $4b^2 + 14b = 0$ **D** $10q^2 - 26q = 0$

- 31** Bij de grafiek hoort de formule $y = x^2 - x - 2$.
a Bij welke waarden van x snijdt deze grafiek de x -as?
b Deze waarden van x kun je ook berekenen door de vergelijking $x^2 - x - 2 = 0$ op te lossen.
Welk getal heb je dan in de formule ingevuld voor y ?
c Schrijf de vergelijking $x^2 - x - 2 = 0$ in de vorm $A \times B = 0$ door de linkerkant te ontbinden in factoren.
d Laat zien dat je dezelfde waarden voor x krijgt voor de snijpunten met de horizontale as, door deze vergelijking verder op te lossen.

	$c^2 + 7c - 8 = 0$
	$(c+8)(c-1) = 0$
	$c+8 = 0$ of $c-1 = 0$
	$c = \dots$ of $c = \dots$



Theorie

De coördinaten van de snijpunten van een grafiek met de horizontale as bereken je door in de formule voor y de waarde 0 in te vullen. Je krijgt dan een vergelijking. Het is soms nodig deze eerst in de vorm $A \times B = 0$ te schrijven door te ontbinden in factoren. Door deze vergelijking op te lossen, vind je de x -waarde(n) van de snijpunten van de grafiek met de horizontale as.

Voorbeeld

Bereken bij welke waarden van x de grafiek van $y = x^2 + x - 30$ de horizontale as snijdt.

Oplossing

$$x^2 + x - 30 = 0$$

$$(x + 6)(x - 5) = 0$$

$$x + 6 = 0 \text{ of } x - 5 = 0$$

$$x = -6 \text{ of } x = 5$$

De grafiek van $y = x^2 + x - 30$ snijdt de horizontale as bij $x = -6$ en $x = 5$.

voor y de waarde 0 ingevuld ontbonden in factoren
 $A = 0$ of $B = 0$

Ondersteunende route → maak opdracht 032

- 32** Bereken van elke kwadratische formule bij welke waarden van x de bijbehorende grafiek de horizontale as snijdt.

a $y = 3x(2x - 1)$

e $y = x^2 - 5x - 24$

b $y = (3x - 9)(1 - x)$

f $y = 8x - 2x^2$

c $y = (x + 3)(x - 7)$

g $y = x^2 + 5x + 4$

d $y = -4x(18 - 9x)$

h $y = x^2 - 12x - 13$

- 33** Gegeven is de formule $y = (x - 3)^2$. Saher wil weten waar de parabool bij deze formule de horizontale as snijdt.

a Welke vergelijking gaat Saher daarvoor oplossen?

b Schrijf deze vergelijking in de vorm

$$(x - \dots)(x - \dots) = 0.$$

c Los deze vergelijking op.

d Leg uit waarom er maar één oplossing is.

Dus hoeveel snijpunten heeft de parabool met de x -as?

e Saher kan de vergelijking $(x - 3)^2 = 0$ ook oplossen door een bordje op $x - 3$ te leggen.

Laat zien dat hij zo dezelfde oplossing vindt.

Uitdagende route → maak opdracht U7 en U8

Ondersteunende opdrachten**O29** Los de vergelijkingen op.

a $(2t - 8)(t + 3) = 0$

b $3k(4k - 16) = 0$

$2t - 8 = 0$ of $t + 3 = 0$

$3k = 0$ of $4k - 16 = \dots$

$2t = \dots$ of $t = \dots$

$k = \dots$ of $4k = \dots$

$t = \dots$ of $t = \dots$

$k = \dots$ of $k = \dots$

Los de volgende vergelijkingen op dezelfde manier op.

c $(2h + 4)(h - 5) = 0$

e $(2b + 1)(12 - 3b) = 0$

d $4g(1 - g) = 0$

f $-3d(4d - 4) = 0$

O32 Milou berekent bij welke waarden van x de grafiek van de formule $y = x^2 + 2x - 48$ de horizontale as snijdt.**a** Ze vult daarom $y = 0$ in bij de formule.

Ze krijgt dan $x^2 + 2x - 48 = \dots$

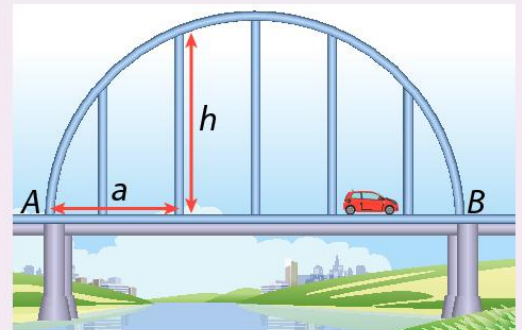
b Deze vergelijking heeft nog niet de vorm $A \times B = 0$.

Ze ontbindt nu de drieterm in de vergelijking.

Milou krijgt dan $(x + \dots)(x - \dots) = 0$.

c Los deze vergelijking op, hiernaast is een begin gemaakt.**d** Vul in: de grafiek van $y = x^2 + 2x - 48$ snijdt de horizontale as bij $x = \dots$ en $x = \dots$.

Milou			
	$x^2 + 2x - 48 = \dots$		
	$(x + \dots)(x - \dots) = 0$		
	$x + \dots = 0$ of $x - \dots = 0$		
	$x = \dots$ of $x = \dots$		

Uitdagende opdrachten**U7** De hoogte van de boog van de brug kun je berekenen met de formule $h = 2a - \frac{1}{40}a^2$. Hierin is h de hoogte in meters en a de afstand in meters vanaf punt A.**a** Bereken de hoogte van de brug als $a = 20$.**b** Leg uit hoe je de vergelijking $2a - \frac{1}{40}a^2 = 0$ kunt gebruiken om de afstand AB te berekenen.**c** Los de vergelijking van opdracht b op.**d** Hoeveel meter is de afstand AB ?**U8** De parabool met de formule $y = x^2 - x - p$ snijdt de horizontale as in twee punten.Eén punt heeft de coördinaten $(3, 0)$.**a** Geef de coördinaten van het andere snijpunt met de horizontale as.**b** Welke waarde heeft p in de formule?

Je leert • hoe je een kwadratische vergelijking oplost

Leerroutes • ondersteunend: 34—035—35—36—037—38
• doorlopend: 34—35—36—37—38—39
• uitdagend: 34—35—36—37—38—U9

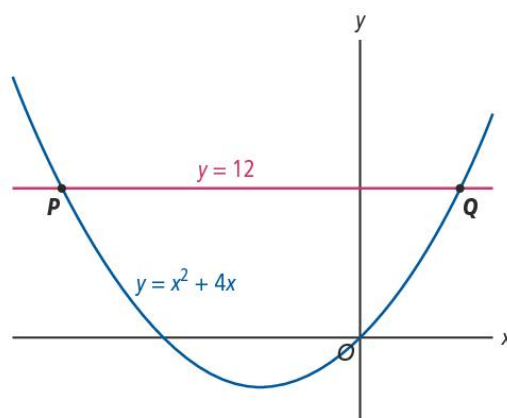
Op het schoolbord zie je zes vergelijkingen.
Twee ervan hebben dezelfde oplossingen.

- Zoek uit welke twee dat zijn.

$$\begin{array}{ll} x(x-2) = 24 & (x+6)(x-4) = 0 \\ (x-3)(x-4) = 0 & (x+4)(x-6) = 0 \\ (x-1)(x-6) = 0 & (x+6)(x+1) = 0 \end{array}$$

34 De horizontale lijn $y = 12$ snijdt de grafiek bij de formule $y = x^2 + 4x$ in de punten P en Q . Om de x -coördinaten van deze twee punten te berekenen, ga je de vergelijking $x^2 + 4x = 12$ oplossen.

- Waarom staat de vergelijking $x^2 + 4x = 12$ nog niet in de goede vorm om deze op te kunnen lossen?
- Leg uit dat je de vergelijking $x^2 + 4x = 12$ ook kunt schrijven als $x^2 + 4x - 12 = 0$.
- Los de vergelijking $x^2 + 4x - 12 = 0$ op door deze in de vorm $A \times B = 0$ te schrijven.
- Vul in: de coördinaten van de punten P en Q zijn $P(\dots, 12)$ en $Q(\dots, 12)$.



Theorie

Kwadratische vergelijkingen staan niet altijd in een vorm waarin je door ontbinden in factoren een oplossing kunt vinden. Je moet dan eerst **op nul herleiden**.

Dat betekent dat je links en rechts van het gelijkteken hetzelfde erbij doet of eraf haalt zodat je aan één kant van de vergelijking het getal nul krijgt.

Voorbeeld 1

Los op: $p^2 - 2p = 24$

Oplossing

$$p^2 - 2p - 24 = 0$$

$$(p-6)(p+4) = 0$$

$$p-6 = 0 \text{ of } p+4 = 0$$

$$p = 6 \text{ of } p = -4$$

op nul herleid

ontbonden in factoren

$$A = 0 \text{ of } B = 0$$

Voorbeeld 2

Los op: $q^2 - 17q = -60$

Oplossing

$$q^2 - 17q + 60 = 0$$

$$(q-5)(q-12) = 0$$

$$q-5 = 0 \text{ of } q-12 = 0$$

$$q = 5 \text{ of } q = 12$$

op nul herleid

ontbonden in factoren

$$A = 0 \text{ of } B = 0$$

Ondersteunende route → maak opdracht 035

- 35** Los de volgende vergelijkingen op door ze eerst op nul te herleiden en daarna te ontbinden in factoren.

a $t^2 - 9t = 22$ **d** $d^2 - 5d = -6$
b $a^2 + 2a = 35$ **e** $p^2 + 5p = -4$
c $b^2 - 8b = 9$ **f** $x^2 - 2x = 8$

- 36** **a** Je kunt een vergelijking met bordjes oplossen als in de vergelijking de variabele maar één keer voor komt. In vergelijking C zie je de variabele maar één keer. In welke andere vergelijking is dat ook het geval? Los deze twee vergelijkingen op met bordjes.
- b** Eén vergelijking is al ontbonden en staat in de vorm $A \times B = 0$. Los deze vergelijking op.
- c** Herleid de overgebleven vergelijkingen zo nodig eerst op nul.
- d** Twee vergelijkingen hebben nu een tweeterm. Ontbind deze en los de vergelijkingen verder op.
- e** De overgebleven vergelijking is een drieterm. Ontbind deze ook en los verder op.

●	A	$3p^2 - 9p = 0$			
●	B	$(q+1)(5q-8) = 0$			
●	C	$x^2 + 5 = 86$			
●	D	$k^2 - 2k = 8$			
●	E	$p^2 = -5p$			
●	F	$2b^2 - 18 = 0$			

Aanpak

Hoe los je een kwadratische vergelijking op?

- 1 Kijk of je de vergelijking kunt oplossen met bordjes.
- 2 Indien dat niet mogelijk is, herleid dan de vergelijking op nul.
- 3 Ontbind de tweeterm of drieterm van de vergelijking in factoren.
- 4 Los de vergelijking verder op met de regel:
als $A \times B = 0$, dan geldt $A = 0$ of $B = 0$.

Voorbeeld 1

Los op: $(x+6)^2 = 49$

Oplossing

Je kunt een bordje leggen.

1 $(x+6)^2 = 49$
 $7^2 = 49$ en $(-7)^2 = 49$
 $x+6 = 7$ of $x+6 = -7$
 $x = 1$ of $x = -13$

Voorbeeld 2

Los op: $3x^2 = 18x$

Oplossing

Op nul herleiden en ontbinden.

2 $3x^2 - 18x = 0$ (tweeterm)
3 $3x(x-6) = 0$
4 $3x = 0$ of $x-6 = 0$
 $x = 0$ of $x = 6$

Voorbeeld 3

Los op: $x^2 + 7x = 18$

Oplossing

Op nul herleiden en ontbinden.

2 $x^2 + 7x - 18 = 0$ (drieterm)
3 $(x-2)(x+9) = 0$
4 $x-2 = 0$ of $x+9 = 0$
 $x = 2$ of $x = -9$

Ondersteunende route → maak opdracht 037

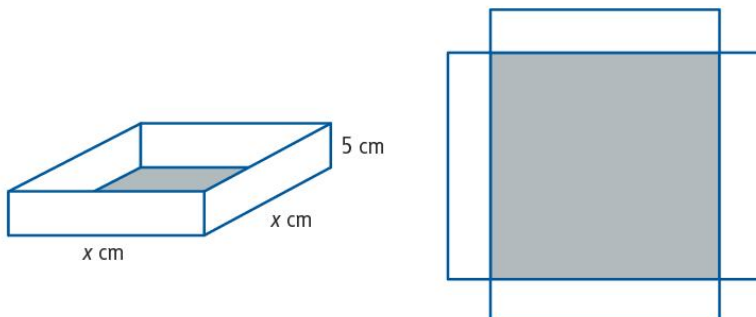
37 Los de vergelijkingen op.

- | | |
|--------------------------------|----------------------------|
| a $2n^2 = 50$ | e $(x - 2)^2 = 64$ |
| b $g^2 - 3g = 4$ | f $p^2 + 6p = 91$ |
| c $5d^2 - 15d = 0$ | g $b^2 = 9b$ |
| d $(k + 6)(2k + 6) = 0$ | h $q^2 - 18q = -81$ |

38 Job gaat de vergelijking $x(x - 2) = 8$ oplossen. Hij zegt: 'Dan geldt $x = 8$ of $x - 2 = 8$ '.

- Laat zien dat de oplossingen die Job zo vindt niet juist zijn.
- Welke denkfout heeft hij gemaakt?
- Om de vergelijking wel op te kunnen lossen, werk je de haakjes weg en haal je aan beide kanten er 8 af. Geef de vergelijking die je dan krijgt.
- Ontbind deze vergelijking en los verder op.
- Los ook de vergelijking $(x - 2)(x + 3) = 14$ op.

39 De bodem van het doosje is een vierkant met zijden van x cm. De hoogte is 5 cm. Naast het doosje zie je de uitslag.



- Bereken de oppervlakte van de uitslag als $x = 12$.
- Leg uit dat de oppervlakte van de uitslag A in cm^2 gegeven wordt door de formule $A = x^2 + 20x$.
- De oppervlakte van de uitslag van een doosje is 300 cm^2 . Los de vergelijking $x^2 + 20x = 300$ op om voor dit doosje de waarde van x te berekenen.
- Welke oplossing heeft géén betekenis voor het doosje?
- Geef de afmetingen van het doosje.

Uitdagende route → maak opdracht U9

Ondersteunende opdrachten

035

a Vul in.

$$p^2 - 4p = 12$$

$$p^2 - 4p - \dots = 0$$

$$(p + \dots)(p - \dots) = 0$$

$$p + \dots = 0 \text{ of } p - \dots = 0$$

$$p = \dots \text{ of } p = \dots$$

op nul herleid

ontbonden in factoren

$$A = 0 \text{ of } B = 0$$

b Los onderstaande vergelijkingen op dezelfde manier op.

$$q^2 + 13q = -30$$

$$q^2 + 13q + \dots = 0$$

$$(q + \dots)(q + \dots) = 0$$

$$q = \dots \text{ of } q = \dots$$

$$d^2 + d = 6$$

$$d^2 + d - \dots = 0$$

$$(d + \dots)(d - \dots) = 0$$

$$d = \dots \text{ of } d = \dots$$

037

De drie vergelijkingen op het blaadje ga je op verschillende manieren oplossen.

a Los vergelijking I op door een bordje te leggen op $k - 4$.

b Vergelijkingen II is al ontbonden en op nul herleid.

Los deze op met de regel: als $A \times B = 0$, dan geldt

$$A = 0 \text{ of } B = 0.$$

c Bij vergelijking III ga je eerst op nul herleiden.

Je krijgt dan de vergelijking $x^2 - 3x - \dots = 0$.

Ontbind nu in factoren en los verder op.

Los de volgende vergelijkingen op.

d $4x^2 = 14x$

e $(4h - 8)(h + 3) = 0$

f $5k^2 - 35k = 0$

g $p^2 + 3p = 28$

h $(d + 3)^2 = 16$

i $q^2 + 12q = -36$

I $(k - 4)^2 = 64$

II $(3g + 6)(g - 1) = 0$

III $x^2 - 3x = 40$

Uitdagende opdrachten

U9

Bij het oplossen van de vergelijking $x^2 + 22 = 13x$, herleid je eerst op nul door aan beide kanten $13x$ eraf te halen.

Je zet dan de drie termen meteen in de goede volgorde.

a Hoe ziet de vergelijking er dan uit?

b Ontbind nu in factoren en geef de oplossingen.

c Los de vergelijkingen op dezelfde manier op.

A $a^2 + 16 = -10a$

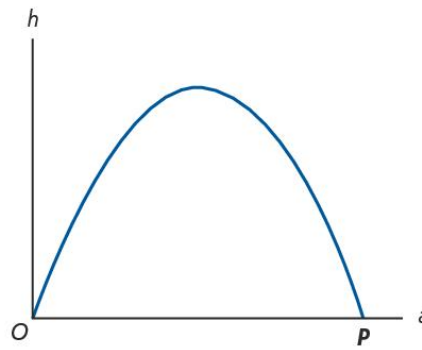
B $p^2 - 5 = 4p$

C $d^2 + 27 = 12d$

D $25 + x^2 = 10x$

d Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken bij de formules $y = x^2 + 6$ en $y = 5x$.

	$x^2 + 22 = 13x$	
	$x^2 - \dots + 22 = 0$	
	$(x - \dots)(x - \dots) = 0$	
	$x = \dots \text{ of } x = \dots$	



- 40** In Reykjavik is een fontein met de vorm van een parabool. De hoogte van de fontein kun je berekenen met de formule $h = 4a - 0,2a^2$. Hierin is h de hoogte in dm en a de afstand in dm vanaf punt O .
- Bereken de hoogte van de fontein als $a = 5$.
 - De lengte OP van de fontein kun je berekenen door de vergelijking $4a - 0,2a^2 = 0$ op te lossen.
Los deze vergelijking op en geef de lengte van OP .
 - Bereken de maximale hoogte van de fontein.
- 41** Los de vergelijkingen op.
- $x^2 - 9x + 14 = 0$
 - $5x^2 + 20 = 100$
 - $15x^2 = 6x$
 - $x^2 - x = 30$
 - $(x - 2)^2 = 144$
 - $(x - 3)(x + 5) = 9$
- 42** De prijs van een puntzak friet heeft invloed op het aantal verkochte puntzakken. Bij een lage prijs wordt er veel friet verkocht, bij een hoge prijs weinig. Het aantal verkochte puntzakken friet kan berekend worden met de formule $A = 1000 - 200p$. Hierin is A het aantal puntzakken friet per dag en p de prijs in euro's.
- Hoeveel puntzakken friet worden er verkocht als de prijs € 2,- is?
 - Wat is de prijs geweest als ze op een dag 460 puntzakken hebben verkocht?
 - De prijs van friet was op een dag € 2,50.
Hoeveel euro's bedroeg de opbrengst van de verkoop?
 - Laat zien dat je de opbrengst O kunt berekenen met de formule $O = 1000p - 200p^2$.
 - Bij welke prijzen p is de opbrengst gelijk aan nul?
 - Bij welke prijs verdient de eigenaar het meest?
Bereken in dat geval de opbrengst van de verkoop.



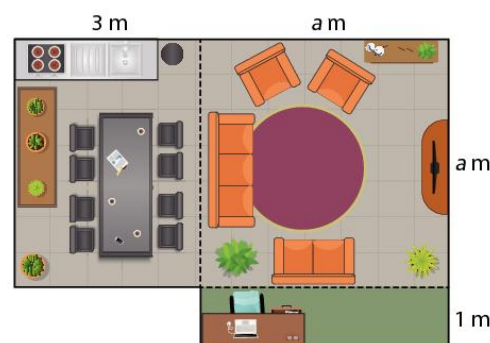
- 43** In een competitie spelen alle teams twee keer tegen elk ander team, een keer thuis en een keer uit. In het speelschema zie je welke wedstrijden er gespeeld gaan worden als er vier teams meedoen.
- a** Waarom staan er vier rode kruizen in het speelschema?
 - b** Hoeveel wedstrijden worden er in totaal gespeeld bij vier teams?
 - c** De formule om het aantal wedstrijden W te berekenen is $W = t^2 - t$, waarbij t het aantal teams is. Leg uit waarom deze formule juist is.
 - d** In de eredivisie voetbal spelen 18 teams. Bereken het totaal aantal wedstrijden in de eredivisie gedurende één seizoen competitie.
 - e** Bij een hockeycompetitie worden er volgens dit speelschema in totaal 56 wedstrijden gespeeld. Maak een vergelijking om te berekenen hoeveel teams er meedoen en los deze op.

speelschema bij 4 teams

uit	A	B	C	D
thuis	X			
A		X		
B			X	
C				X
D				

- 44** Een glashandel moet een ruit van 15 m^2 leveren. De breedte van de ruit moet twee meter minder zijn dan de lengte van de ruit.
- Leg uit dat de oppervlakte A in m^2 van de ruit gelijk is aan $A = l(l - 2)$. Hierbij is l de lengte van de ruit in m.
 - Stel de vergelijking op bij een oppervlakte van 15 m^2 .
 - Los deze vergelijking op.
 - Hoe lang en hoe breed wordt de ruit?

- 45** De kamer waarvan de plattegrond is getekend, bestaat uit een vierkant met daaraan twee rechthoeken.
- a** Bereken de oppervlakte van deze kamer als $a = 7$.
 - b** De oppervlakte van deze kamer is 32 m^2 .
Leg uit dat je de lengte a kunt berekenen met de vergelijking $a^2 + 4a = 32$.
 - c** Los deze vergelijking op.
 - d** Leg uit waarom één van de twee oplossingen geen betekenis heeft.



Theorie

Factoren en priemfactoren

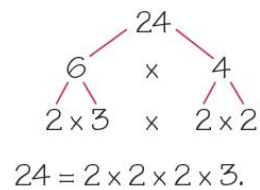
Een getal als 60 kun je schrijven als product van factoren.

Deze factoren zijn dan delers van 60 groter dan 1.

Wanneer je een getal schrijft als product van zoveel mogelijk factoren, dan zijn al deze factoren priemgetallen en heten daarom priemfactoren.

Voorbeeld

Ontbind 24 in priemfactoren.



S1 Schrijf de getallen als product van priemfactoren.

- a 54
- b 110
- c 95

Theorie

Een formule ontbinden in factoren

De rechterkant van een formule kun je vaak schrijven als product van twee of meer factoren. Deze factoren kunnen gehele getallen zijn maar er kunnen ook variabelen in voorkomen. Dit heet ontbinden in factoren. Vaak kun je op meerdere manieren ontbinden in factoren.

Voorbeeld

De rechterkant van de formule $y = 42x^2$ kun je ontbinden in $y = 6x \cdot 7x$ of $y = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot x \cdot x$ of $y = 6x^2 \cdot 7$ of $y = 3 \cdot 14 \cdot x^2$.

S2 Vul in.

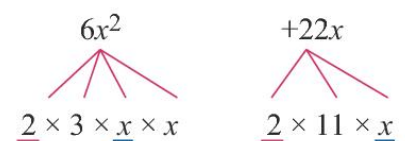
- a De formule $y = 32x^2$ kun je schrijven als $y = \dots \cdot 8x$
- b De formule $y = -48x^2$ kun je schrijven als $y = 12x \cdot \dots$
- c De formule $y = 30x^2$ kun je schrijven als $y = -5 \cdot \dots$

Theorie

Tweeterm, gemeenschappelijke factor en drieterm

De rechterkant van de formule $y = 6x^2 + 22x$ is een tweeterm. Van de twee termen $6x^2$ en $22x$ is $2x$ een gemeenschappelijke factor. De formule kun je daarom met haakjes schrijven als $y = 2x(3x + 11)$.

De rechterkant van de formule $y = x^2 + 3x - 10$ is een drieterm. Deze formule kun je met dubbele haakjes schrijven als $y = (x + 5)(x - 2)$.



- S3** Gegeven is de formule $p = 10q^2 - 15q$.
- Uit welke twee termen bestaat de rechterkant van de formule $p = 10q^2 - 15q$?
 - Waarom is $5q$ een gemeenschappelijke factor van de twee termen?
 - Schrijf de formule als $p = 5q(2q - \dots)$.

- S4** Gegeven is de formule $y = x^2 - 6x + 8$.
- Uit welke drie termen bestaat de rechterkant van de formule $y = x^2 - 6x + 8$?
 - Vul de vermenigvuldigtabel in en ga na dat de formule $y = (x - 4)(x - 2)$ hetzelfde is als $y = x^2 - 6x + 8$.

$\times$	x	-2
x	...	...
-4	...	...

Vaardigheid

Je kunt een tweeterm ontbinden in factoren.

- 1 Zoek de grootste gemeenschappelijke factor van beide termen.
- 2 Maak een vermenigvuldigtabel, vul de twee termen en de gevonden factor in.
- 3 Vul de ontbrekende factoren in.
- 4 Schrijf de tweeterm als een product van twee factoren.

Voorbeeld

Ontbind de tweeterm in de formule $k = 35b^2 - 15b$ in factoren.

$$\begin{array}{cc} & \swarrow \quad \searrow \\ 35b^2 & -15b \\ 5b \times 7b & 5b \times -3 \end{array}$$

Oplossing

- 1 De grootste gemeenschappelijke factor is $5b$.

2

$\times$	...	...
$5b$	$35b^2$	$-15b$

3

$\times$	$7b$	-3
$5b$	$35b^2$	$-15b$

- 4 Dit geeft de formule $k = 5b(7b - 3)$.

- S5** Ontbind de formules in factoren.

- $p = 3q^2 + 9q$
- $f = -49d - 14d^2$
- $y = 6x^2 - 15x$

Vaardigheid

Je kunt een drieterm ontbinden in factoren.

- 1 Stel vast naar welk product en welke som je zoekt.
- 2 Maak een overzicht van alle mogelijkheden waarmee je het gezochte product kunt krijgen.
- 3 Kijk bij welke getallen de gezochte som hoort.
- 4 Schrijf de drieterm als een product van twee factoren.

Voorbeeld 1

Ontbind de drieterm in de formule $y = x^2 - 3x - 10$ in factoren.

Oplossing

- 1 Het product is -10 , de som is -3 .

product	getallen	som
-10	1 en -10	-9
-10	-1 en 10	$+9$
-10	2 en -5	-3
-10	-2 en 5	$+3$

- 3 Met de getallen 2 en -5 krijg je het gezochte product en de gezochte som.
- 4 $y = (x + 2)(x - 5)$

Voorbeeld 2

Ontbind de drieterm in de formule $y = x^2 - 6x + 9$ in factoren.

Oplossing

- 1 Het product is $+9$, de som is -6 .

product	getallen	som
$+9$	1 en 9	10
$+9$	-1 en -9	-10
$+9$	3 en 3	6
$+9$	-3 en -3	-6

- 3 Met de getallen -3 en -3 krijg je het gezochte product en de gezochte som.
- 4 $y = (x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2$

S6 Ontbind de formules in factoren.

- a $a = p^2 + 5p + 6$ c $j = m^2 - 16m + 64$
 b $y = x^2 + 8x - 9$ d $h = x^2 - 5x - 84$

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking van de vorm $A \times B = 0$ oplossen.

Het product van twee factoren is nul als ten minste één van de factoren nul is.

Wanneer dus een vergelijking geschreven is in de vorm $A \times B = 0$, dan kun je de oplossingen vinden door de vergelijkingen $A = 0$ en $B = 0$ op te lossen.

Voorbeeld

De oplossing van de vergelijking $(2k - 16)(k + 3) = 0$ is
 $2k - 16 = 0$ of $k + 3 = 0$
 $2k = 16$ of $k = -3$
 $k = 8$ of $k = -3$

S7 Los de vergelijkingen op.

- a $(p + 3)(p - 3) = 0$ c $(g + 4)(9 - g) = 0$
 b $k(k - 4) = 0$ d $(2t + 5)(0,5t + 4) = 0$

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een grafiek met de horizontale as berekenen.

De coördinaten van de snijpunten van een grafiek met de horizontale as kun je berekenen als je in een formule voor y de waarde 0 invult. Je krijgt dan een vergelijking. Door deze vergelijking op te lossen, vind je de x -waarde(n) van de snijpunten van de grafiek met de horizontale as.

Voorbeeld

Bereken bij welke waarden van x de grafiek van $y = x^2 + 5x + 6$ de horizontale as snijdt.

Oplossing

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + 3)(x + 2) = 0$$

$$x + 3 = 0 \text{ of } x + 2 = 0$$

$$x = -3 \text{ of } x = -2$$

De grafiek van $y = x^2 + 5x + 6$ snijdt de horizontale as bij $x = -3$ en $x = -2$.

S8 Bereken voor elke formule bij welke waarden van x de bijbehorende grafiek de horizontale as snijdt.

a $y = x^2 + 15x + 56$ **c** $y = x^2 - 2x - 80$

b $y = (x + 4)(3x - 9)$ **d** $y = x^2 - 14x + 48$

Vaardigheid

Je kunt een kwadratische vergelijking oplossen.

- 1 Kijk of je de vergelijking kunt oplossen met bordjes.
- 2 Indien dat niet mogelijk is, herleid dan de vergelijking op nul.
- 3 Ontbind de tweeterm of drieterm die in de vergelijking staat in factoren.
- 4 Los de vergelijking verder op met de regel:
als $A \times B = 0$, dan geldt $A = 0$ of $B = 0$.

Voorbeeld 1

Los op: $(x + 2)(4x - 5) = 0$

Oplossing

De vergelijking is al ontbonden en op nul herleid.

4 $x + 2 = 0$ of $4x - 5 = 0$
 $x = -2$ of $4x = 5$
 dus $x = -2$ of $x = 1\frac{1}{4}$

Voorbeeld 2

Los op: $(x - 4)^2 = 25$

Oplossing

Je kunt een bordje leggen.

1 $(x - 4)^2 = 25$
 $5^2 = 25$ en $(-5)^2 = 25$
 $x - 4 = 5$ of $x - 4 = -5$
 $x = 9$ of $x = -1$

Voorbeeld 3

Los op: $x^2 = -3x$

Oplossing

Op nul herleiden en ontbinden.

2 $x^2 + 3x = 0$ (tweeterm)
3 $x(x + 3) = 0$
4 $x = 0$ of $x + 3 = 0$
 dus $x = 0$ of $x = -3$

S9 Los de kwadratische vergelijkingen op.

a $-3x(x + 60) = 0$ **d** $(x - 8)^2 = 100$

b $x^2 + x - 6 = 0$ **e** $x^2 = 6x$

c $3x^2 = 27$ **f** $x^2 - 4x = -4$

- T1**
- a** Schrijf het getal 42 als product van priemfactoren.
 - b** Schrijf de formule $y = 42x^2$ als product van zoveel mogelijk factoren.
 - c** Vul in: de formule $y = 42x^2$ kun je schrijven als $y = 3x \cdot \dots$
 - d** Schrijf de formule $y = 42x^2$ als product van drie factoren.

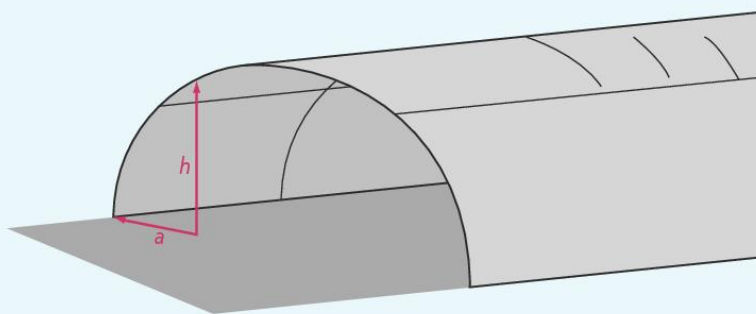
- T2** Kies bij elke formule in het linker rijtje de juiste ontbinding in factoren in het rechter rijtje.

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------|
| A $p = q^2 - 4q$ | 1 $p = 2(2 - q)$ |
| B $p = 4 - 2q$ | 2 $p = 2q \cdot -4q$ |
| C $p = q^2 - 6q + 8$ | 3 $p = q(q - 4)$ |
| D $p = -8q^2$ | 4 $p = (q - 2)(q - 4)$ |

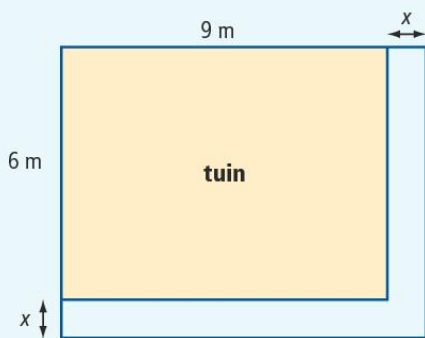
- T3** Ontbind de formules in factoren.

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| a $y = 81x + 18$ | e $y = x^2 + 9x + 20$ |
| b $y = x^2 + 5x$ | f $y = x^2 - 14x + 45$ |
| c $y = 21x^2 - 7x$ | g $y = x^2 - x - 42$ |
| d $y = 18x - 12x^2$ | h $y = x^2 - 8x + 16$ |

- T4** Een tunnel heeft de vorm van een parabool. De hoogte van de tunnel kun je berekenen met de formule $h = 4a - a^2$. Hierin is a de horizontale afstand in meters vanaf de zijkant en h de hoogte in meters.



- a** Laat zien dat op één meter vanaf de zijkant van de tunnel de hoogte drie meter is.
- b** Bij welke waarden van a is de hoogte nul meter?
- c** Hoe breed is de tunnel?



T5 Je ziet de plattegrond van een tuin. Deze tuin is 9 m lang en 6 m breed. De tuin wordt aan twee zijden uitgebreid met een strook van x meter.

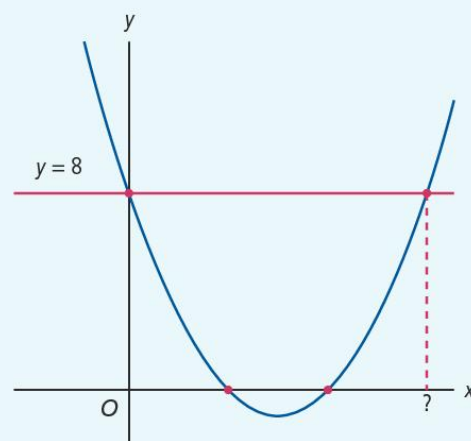
- Bereken de totale oppervlakte van de tuin als $x = 3$.
- Leg uit dat de nieuwe oppervlakte van de tuin A in m^2 gegeven wordt door de formule $A = x^2 + 15x + 54$.
- Na de uitbreiding is de oppervlakte van de tuin 88 m^2 . Stel een vergelijking op om de waarde van x te berekenen en los deze vergelijking op.
- Geef de nieuwe afmetingen van de tuin.

T6 Los de vergelijkingen op.

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| a $a^2 + 9a + 18 = 0$ | f $(11 - t)^2 = 144$ |
| b $(p + 2)^2 = 0$ | g $b^2 + 10b = 24$ |
| c $3g^2 + 9g = 0$ | h $100 - d^2 = 19$ |
| d $(1 - k)(4k - 16) = 0$ | i $3h^2 = 6h$ |
| e $3t(3 - 0,5t) = 0$ | j $(q - 5)(q + 6) = 26$ |

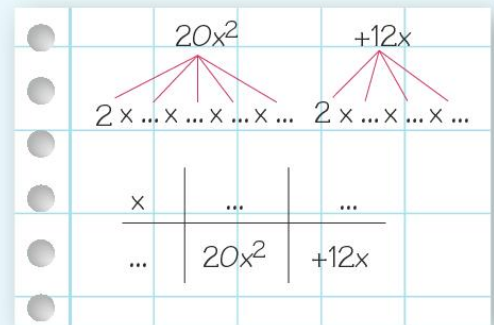
T7 Bij de parabool hoort de formule $y = x^2 - 6x + 8$.

- Bereken bij welke waarden van x de parabool de horizontale as snijdt.
- Los de vergelijking $x^2 - 6x + 8 = 8$ op.
- Bij welke waarden van x snijdt de parabool de lijn $y = 8$?



Je kunt een tweeterm ontbinden in factoren.

- E1** Gegeven is de formule $y = 20x^2 + 12x$.
- Uit welke twee termen bestaat deze formule?
 - Vul de schema's hiernaast verder in om de grootste gemeenschappelijke factor te vinden.
 - Vul de vermenigvuldigtabel verder in.
 - Vul in: de formule $y = 20x^2 + 12x$ kun je ontbinden in $y = \dots(\dots + \dots)$.



- E2** Ontbind de tweetermen in de formules in factoren.

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a $y = 8x^2 + 4x$ | e $y = 9x^2 - 108x$ |
| b $y = 16x^2 + 24x$ | f $y = -52x^2 + 4x$ |
| c $y = 20x^2 + 10x$ | g $y = 14x - 49$ |
| d $y = 20x^2 + 18x$ | h $y = -2x + 3x^2$ |

Je kunt een drieterm ontbinden in factoren.

- E3** Vul de ontbrekende waarden in bij de twee vermenigvuldigtabelen.

A	$\times$	x	$\dots$
	x	x^2	$-8x$
	$+3$	$\dots$	$\dots$

B	$\times$	$\dots$	-8
	x	x^2	$\dots$
	$\dots$	$\dots$	$+8$

- E4** Om de drieterm in de formule $y = x^2 - 16x + 15$ te kunnen ontbinden is een begin gemaakt in het overzicht.

- Vul het overzicht verder in.
- Voor welke twee getallen is de som gelijk aan -16 ?
- Vul deze getallen in bij $y = (x - \dots)(x - \dots)$
- Ontbind ook de drieterm in de formule $y = x^2 + 8x + 15$ in factoren.

product	getallen	som
$+15$	1 en 15	$\dots$
$+15$	-1 en $\dots$	$\dots$
$+15$	3 en $\dots$	$\dots$
$+15$	$\dots$ en $\dots$	$\dots$

- E5** Ontbind de drietermen in de formules in factoren.

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| a $a = p^2 + 5p + 6$ | e $y = g^2 + 11g + 10$ |
| b $c = r^2 + 8r + 16$ | f $h = x^2 - 5x - 84$ |
| c $d = x^2 - 10x + 9$ | g $j = m^2 - 17m + 72$ |
| d $f = q^2 - 9q + 18$ | h $y = x^2 - 40x + 400$ |

Je kunt een vergelijking van de vorm $A \times B = 0$ oplossen.

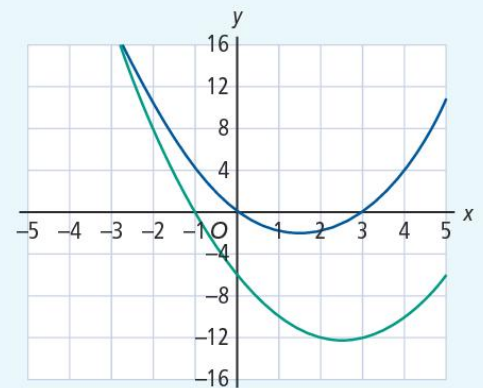
E6 Los de vergelijkingen op.

- a** $(k + 2)(k + 5) = 0$ **d** $(4q - 3)(2q - 6) = 0$
b $(p + 5)^2 = 0$ **e** $(6 - 3x)(7x + 77) = 0$
c $(3x - 21)(4 - x) = 0$ **f** $4a(12 - 3a) = 0$

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een grafiek met de horizontale as berekenen.

E7 Bij de blauwe grafiek hoort de formule $y = x^2 - 3x$.

- a** Los de vergelijking $x^2 - 3x = 0$ op.
b Hoe zie je de oplossingen van de vergelijking $x^2 - 3x = 0$ terug in de grafiek?
c Bij de groene grafiek hoort de formule $y = x^2 - 5x - 6$. Geef de vergelijking waarmee je de x -waarden van de snijpunten van deze grafiek met de horizontale as kunt berekenen.
d Los de vergelijking van opdracht c op.
e Geef de coördinaten van de snijpunten van de groene parabool met de horizontale as.



Je kunt een kwadratische vergelijking oplossen.

E8 De vier vergelijkingen ga je oplossen met hulp.

- a** Los vergelijking I op met bordjes.
b Vergelijking II is al op nul herleid. Ontbind deze tweeterm in factoren en los verder op.
c Vergelijking III moet eerst op nul herleid worden. Ontbind dan de drieterm in factoren en los verder op.
d Vergelijking IV is al ontbonden en op nul herleid. Los deze op met de regel: uit $A \times B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$.

- | | |
|-----|------------------------|
| I | $50 - 2x^2 = 0$ |
| II | $20x^2 - 8x = 0$ |
| III | $x^2 - 5x = 14$ |
| IV | $(4 - 2x)(3x + 6) = 0$ |

E9 Los de vergelijkingen op.

- a** $-3x(x + 60) = 0$ **e** $(x - 8)^2 = 400$
b $14x^2 = 21x$ **f** $300 - 8x^2 = 100$
c $x^2 + 11x + 10 = 0$ **g** $x^2 - 4x = -4$
d $x^2 + x = 6$ **h** $x^2 - 15 = -2x$

Theorie

De Babyloniërs leefden ongeveer 3000 jaar geleden in een gebied dat nu tot Irak behoort maar destijds Mesopotamië heette. Uit kleitabletten die daar gevonden zijn, blijkt dat ze zich toen al bezig hielden met wiskunde. Ze gebruikte daarbij het zogenaamde spijkerschrift. De Babyloniërs gebruikten andere symbolen dan de cijfers die wij nu kennen. Voor ingewikkelde berekeningen gebruikten ze tabellen. Ze hadden bijvoorbeeld kleitabletten met tafels van vermenigvuldiging en met tabellen van kwadraten.



5	a-rá	1	5
	a-rá	2	10
	a-rá	3	15
	a-rá	4	20
	a-rá	5	25
	a-rá	6	30
	a-rá	7	35
	a-rá	8	40
	a-rá	9	45
	a-rá	10	50
	a-rá	20	100
	a-rá	30	150
	a-rá	40	200
	a-rá	50	250

- 1 Het kleitablet laat één zijde zien. Ernaast staat de vertaling. Uit de regelmaat van de tabel is op te maken dat het de tafel van vijf betreft.
- Wat betekent het woord a-rá?
 - De Babyloniërs berekenden 39×5 door 45 en 150 bij elkaar op te tellen.
Leg met de tabel uit hoe ze aan deze berekening komen.
 - Bereken op dezelfde manier 17×5 en 47×5 .
 - Welke notatie gebruiken wij voor 6 a-rá 6?

Theorie

Naast tabellen met de tafels van 2 tot en met 9 hadden de Babyloniërs ook tabellen met de kwadraten. Omdat ze bij het rekenen gebruik maakten van veelvouden van 60, vind je op kleitabletten tabellen met de kwadraten van 1 tot en met 59.

n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2
1	1	11	121	21	441	31	961	41	1681	51	2601
2	4	12	144	22	484	32	1024	42	1764	52	2704
3	9	13	169	23	529	33	1089	43	1849	53	2809
4	16	14	196	24	576	34	1156	44	1936	54	2916
5	25	15	225	25	625	35	1225	45	2025	55	3025
6	36	16	256	26	676	36	1296	46	2116	56	3136
7	49	17	289	27	729	37	1369	47	2209	57	3249
8	64	18	324	28	784	38	1444	48	2304	58	3364
9	81	19	361	29	841	39	1521	49	2401	59	3481
10	100	20	400	30	900	40	1600	50	2500		

- 2 Op een kleitablet is een berekening van een product ontcijferd. Hieronder zie je de vertaling met daarnaast de rekenstappen die er gebruikt zijn.

Gevraagd: $17 \times 29 =$

Oplossing: $17 + 29 = 46$

$$46 \times 46 = 2116$$

$$17 \times 17 = 289 \text{ en } 29 \times 29 = 841$$

$$289 + 841 = 1130$$

$$2116 - 1130 = 986$$

De helft van 986 is 493.

De uitkomst van 17×29 is 493.

Hoe vind je het product van twee getallen?

1 Tel de twee getallen bij elkaar op.

2 Neem van de som het kwadraat.

3 Neem van beide getallen het kwadraat en tel ze bij elkaar op.

4 Neem de uitkomst van stap 2 en trek daar de uitkomst van stap 3 vanaf.

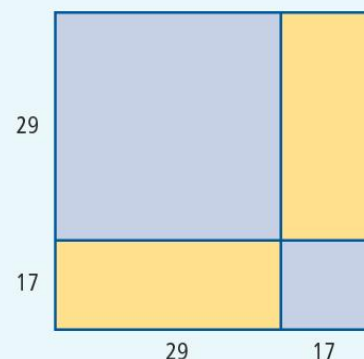
5 Neem van het verschil de helft en je hebt het gezochte product.

- a Controleer met je rekenmachine de uitkomst van 17×29 .
- b Bereken op de manier hierboven 13×24 . Maak daarbij gebruik van de tabel met kwadraten. Controleer je antwoord met je rekenmachine.
- c Maak opdracht b ook voor 12×29 en voor 46×13 .

Theorie

De Babyloniërs gebruikten een lijst met rekenstappen om een berekening uit te voeren. Zo'n lijst met rekenstappen noem je een algoritme.

- 3 De meetkundige redenering van 17×29 gaat als volgt.
- a Leg met het plaatje uit wat de meetkundige betekenis is van het product van de getallen 17 en 29.
 - b Kijk nog eens naar stap 2 in het algoritme bij opdracht 2. Welke meetkundige betekenis heeft de uitkomst bij stap 2?
 - c Leg uit dat je met stap 3 van het algoritme de oppervlakte van de blauwe vierkanten samen berekent.
 - d Welke oppervlakte bereken je met stap 4?
 - e Ga na dat stap 5 de uitkomst van 17×29 oplevert.



- 4 Je kunt ook met algebra aantonen dat je voor elk tweetal getallen a en b het product $a \times b$ kunt berekenen met de gegeven rekenstappen van opdracht 2.
- a Na stap 1 krijg je $a + b$ en na stap 2 krijg je $(a + b)^2$. Laat zien dat stap 3 en stap 4 leiden tot $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$.
 - b Werk de haakjes weg en laat zien dat $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ te vereenvoudigen is tot $2ab$.
 - c Pas op de uitkomst $2ab$ nog stap 5 toe. Heb je nu aangetoond dat dit algoritme goed werkt?

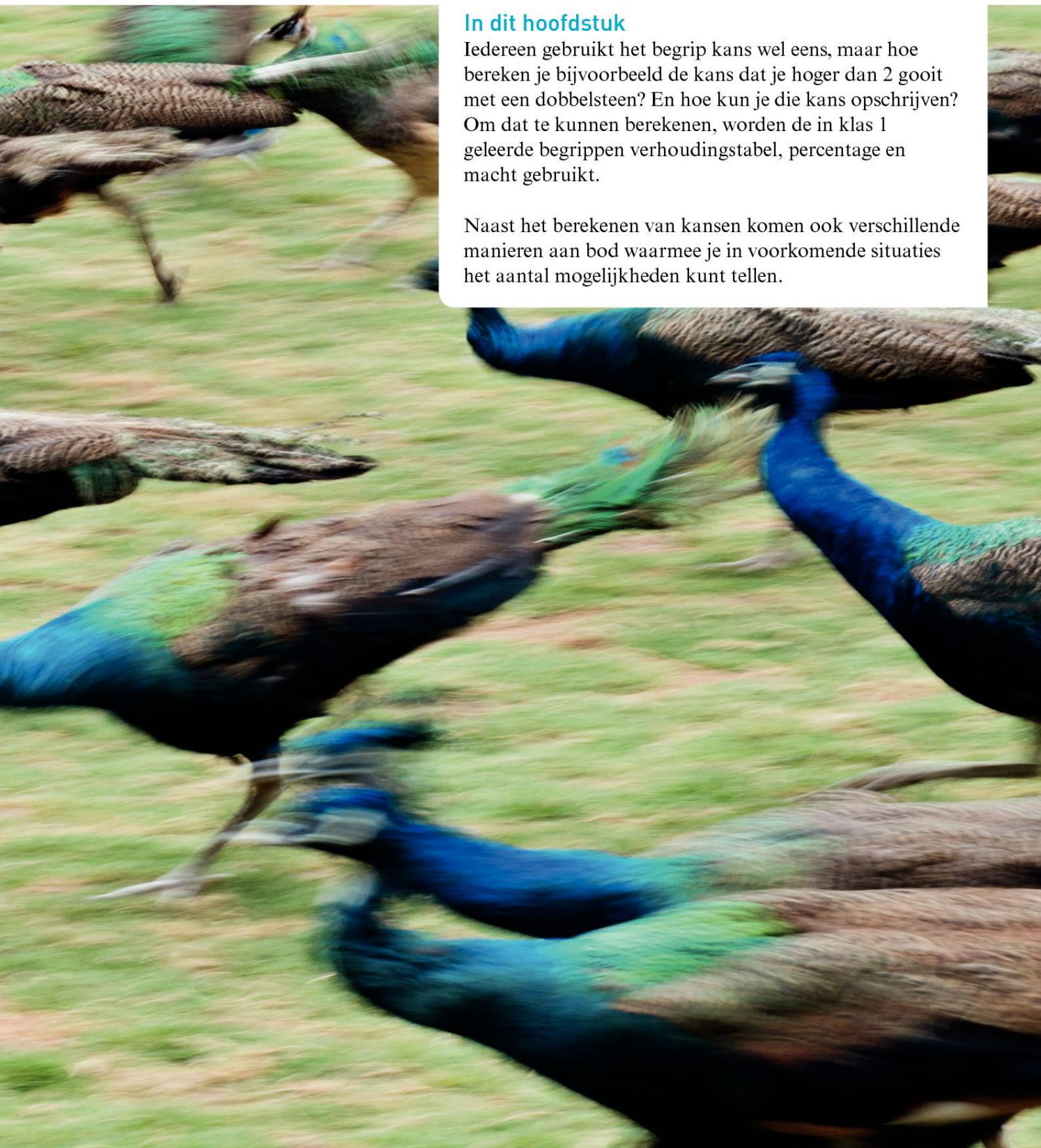


Kijk op kans 12

In dit hoofdstuk

Iedereen gebruikt het begrip kans wel eens, maar hoe bereken je bijvoorbeeld de kans dat je hoger dan 2 gooit met een dobbelsteen? En hoe kun je die kans opschrijven? Om dat te kunnen berekenen, worden de in klas 1 geleerde begrippen verhoudingstabel, percentage en macht gebruikt.

Naast het berekenen van kansen komen ook verschillende manieren aan bod waarmee je in voorkomende situaties het aantal mogelijkheden kunt tellen.



- V1 a Van iedere twaalf mannen is er gemiddeld één kleurenblind.
Ga met een verhoudingstabel na hoeveel procent van de mannen kleurenblind is. Rond af op één decimaal.
- b Van iedere duizend vrouwen zijn er gemiddeld vier kleurenblind.
Hoeveel procent van de vrouwen is kleurenblind?
- c In 2015 woonden in Nederland ongeveer 16,9 miljoen mensen.
Hoeveel kleurenblinde mannen denk je dat er toen in Nederland woonden?
- d En hoeveel kleurenblinde vrouwen?

<i>aantal mannen</i>	12	1
<i>percentage</i>	100	

Aanpak**Hoe bereken je percentages met een verhoudingstabel?**

- 1 Maak een tabel. Zet linksboven aantal en daaronder percentage.
- 2 Vul het totale aantal in en zet het percentage 100 eronder.
- 3 Vul het gegeven aantal in en ga boven in de tabel via 1 naar het aantal.
- 4 Bereken de ontbrekende getallen.
- 5 Schrijf het antwoord op de vraag op.

Voorbeeld

Op een school zitten 950 leerlingen.
Er zijn 38 leerlingen ziek.
Hoeveel procent is dat?

Oplossing

1	<i>aantal leerlingen</i>	...	...	...
	<i>percentage</i>	...	...	...
2	<i>aantal leerlingen</i>	950	...	...
	<i>percentage</i>	100	...	...

		$: 950$	$\times 38$	
3	<i>aantal leerlingen</i>	950	1	38
	<i>percentage</i>	100	...	...
4	<i>aantal leerlingen</i>	950	1	38
	<i>percentage</i>	100	0,105...	4
		$: 950$	$\times 38$	

- 5 Dus 4% van de leerlingen is ziek.

- V2 Op de school van Aline komen de leerlingen lopend, op de fiets, met de bus of met de auto naar school. Van alle leerlingen komt 78% lopend of op de fiets naar school.
- a Hoeveel procent komt met de bus of met de auto?
- b Op de school van Aline zitten 1160 leerlingen. Er komen 12 leerlingen met de auto.
Hoeveel procent van de leerlingen komt met de auto?
- c En hoeveel procent van de leerlingen komt met de bus?

Theorie

Soms wil je een **breuk als een percentage** schrijven. Om een breuk als percentage te schrijven, moet je de breuk eerst omschrijven naar een breuk met noemer 100 of 1000, maar bij **handige percentages** weet je snel welke breuk erbij hoort. Sommige **breuken** kun je **vereenvoudigen** door de teller en de noemer door hetzelfde getal te delen.

Voorbeeld 1

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{10} \text{ deel} = 10\% & \frac{1}{4} \text{ deel} = 25\% \\ \frac{1}{5} \text{ deel} = 20\% & \frac{1}{8} \text{ deel} = 12\frac{1}{2}\% \\ \frac{1}{3} \text{ deel} = 33\frac{1}{3}\% & \frac{3}{4} \text{ deel} = 75\% \\ \frac{1}{2} \text{ deel} = 50\% & \frac{2}{3} \text{ deel} = 66\frac{2}{3}\% \end{array}$$

Voorbeeld 2

Schrijf $\frac{9}{20}$ als een percentage.

Oplossing

$$\frac{9}{20} = \frac{45}{100}$$

Dus $\frac{9}{20}$ is 45%.

Voorbeeld 3

Vereenvoudig $\frac{8}{12}$.

Oplossing

Je kunt 8 en 12 allebei door 4 delen, dus $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

- V3** a Schrijf de breuken $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{11}{25}$, $\frac{4}{125}$ en $\frac{17}{20}$ als een percentage.
- b Vereenvoudig de breuken $\frac{6}{18}$, $\frac{13}{26}$, $\frac{24}{84}$, $\frac{42}{105}$, $\frac{375}{1000}$ en $\frac{51}{68}$.
- V4** a Schrijf op voor welke vermenigvuldiging 2^5 een korte schrijfwijze is en bereken de uitkomst.
- b Schrijf $5 \times 5 \times 5$ korter en bereken de uitkomst.
- c Schrijf $5 \times 5 \times 5 \times 6 \times 6$ korter en bereken de uitkomst.
- V5** Je kunt het getal 394 876 in de standaardvorm schrijven als $3,95 \times 10^5$.
Schrijf in de standaardvorm. Rond daarbij het voorste getal af op twee decimalen.
- a 56 332 c 389 607
- b 4 468 644 d 123 456 789
- V6** Bereken.
- a $4^5 =$ d $3^7 =$
- b $10^6 =$ e $7^3 =$
- c $12^4 =$ f $2^{18} =$
- V7** De som van 3 en 4 is $3 + 4 = 7$ en het product is $3 \times 4 = 12$.
Bereken de som en het product van 2 en 8, 3 en 9, en 1 en 5.

- hoe je een kans op verschillende manieren opschrijft

- ondersteunend: 1-2-3-4-05-6-7-08-8
- doorlopend: 1-2-3-4-5-6-7-8-9
- uitdagend: 1-3-4-5-6-8-9-U1-U2

Dagelijks kijk je naar de weersverwachting en naar de vooruitzichten. Daar kan bijvoorbeeld staan dat de neerslagkans voor maandag 40% is.

- Wat betekent dat precies?

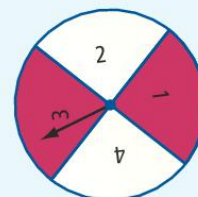
- 3** Vincent heeft vijftig keer met een dobbelsteen gegooid. In de tabel staan de resultaten.

<i>aantal ogen</i>	1	2	3	4	5	6
<i>aantal keer</i>	5	8	9	8	6	14
<i>percentage</i>	...	...	...	...	...	...

- a** In hoeveel procent van de worpen heeft Vincent met de dobbelsteen 6 gegooid?
- b** Vul de tabel verder in.
- c** Vincent denkt dat de dobbelsteen niet goed is. Waarom zou Vincent dat denken?
- d** Ben jij het met Vincent eens?
- 4**
- a** Latoya gooit vier keer achter elkaar 6 met een dobbelsteen. Ze zegt: 'De kans is nu wel heel klein dat ik de vijfde keer weer 6 gooi.'
Ben je het met Latoya eens?
- b** Lieke gooit honderd keer met een dobbelsteen. Hoe vaak ongeveer zal Lieke naar verwachting 6 gooien: 6 keer, 17 keer, 42 keer of 50 keer? Leg uit waarom je dat denkt.

Theorie

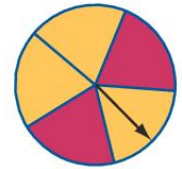
Van de kanstol hiernaast zijn alle vier sectoren even groot. Dat de pijl na het draaien met de kanstol bijvoorbeeld een 3 aanwijst, heeft een **kans** van 1 op 4. Je kunt ook zeggen dat de kans gelijk is aan $\frac{1}{4}$ of 25%.



Ondersteunende route → maak opdracht 05

- 5**
- a** Vul in: De kans dat Thirza met de kanstol hierboven een even getal draait is ... op ... en dat is ... procent.
- b** Schrijf de kans dat Thirza geen 4 draait als breuk.
- c** Thirza wil net zo lang met de kanstol draaien tot ze vijfentwintig keer 4 heeft gedraaid.
Hoeveel keer moet Thirza naar verwachting draaien?

- 6 Je trekt willekeurig één van de getallen 1 tot en met 20. Schrijf de volgende kansen als ... op ... en als breuk.
- De kans dat je het getal 13 trekt.
 - De kans dat je een getal trekt dat deelbaar is door 5.
 - De kans dat je een getal trekt dat kleiner is dan 10.
- 7 Een kanstol is verdeeld in vijf even grote sectoren.
- Hoeveel procent is de kans dat je een rode sector draait?
 - Hoeveel procent is de kans dat je een gele sector draait?
 - Hoeveel procent is de som van de kansen van opdracht a en b?



Theorie

Als je bij een kansprobleem van alle mogelijkheden de kansen bij elkaar optelt, dan komt er altijd 100% uit.

Voorbeeld

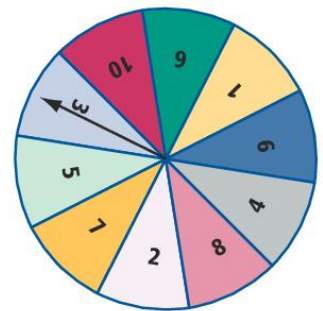
In een doos zitten 5 rode, 3 gele en 2 blauwe ballen. Bij het trekken van één bal uit deze doos horen de volgende kansen.

kleur	rood	geel	blauw
kans	50%	30%	20%

Tel je de kansen bij elkaar op, dan geeft dat 100%.

Ondersteunende route → maak opdracht O8

- 8 Een kanstol is verdeeld in tien even grote segmenten.
- Is de kans dat je met de kanstol het getal 8 draait even groot als de kans dat je het getal 3 draait?
 - Waarom is de som van de kans dat je het getal 8 draait en de kans dat je het getal 3 draait *niet* 100%?
 - Hoeveel procent is de kans dat je een getal groter dan 7 draait?
 - Is de som van de kans dat je een getal groter dan 5 draait en de kans dat je een getal kleiner dan 5 draait 100%?
- 9 Volgens het CBS is de kans dat in een jaar een willekeurige Nederlander slachtoffer van een misdrijf wordt ongeveer $\frac{1}{5}$.
- Waarom kun je niet zeggen dat bij 1 op 5 leerlingen uit jouw klas dat zo is?
 - Wat verwacht je dat dit betekent voor de 40 000 inwoners van Dronten?



Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

- 05** Van de kanstol zijn alle vijf sectoren even groot.
- Vul in: Op de kanstol staan ... even getallen. De kans dat je met de kanstol een even getal draait is ... op ... en dat is ... procent.
 - Vul in: De kans dat je geen 5 draait is ... op ... en als een breuk geschreven is dat ...
 - Vul een breuk in: De kans dat je 1 draait is ...
 - Maaïke draait dertig keer met de kanstol. Hoe vaak, ongeveer, zal ze 1 draaien?
 - Hamid wil net zo lang met de kanstol draaien tot hij twintig keer 3 heeft gedraaid. Hoeveel keer moet Hamid naar verwachting draaien?



- 08** In een doos zitten 15 rode, 20 witte, 25 blauwe en 40 oranje ballen. Je trekt willekeurig één bal uit de doos.
- Hoeveel ballen zitten er in totaal in de doos?
 - Hoeveel procent is de kans dat je een rode bal trekt?
 - En hoeveel procent is de kans dat je geen rode bal trekt?
 - Is de som van de kans dat je een rode bal trekt, de kans dat je een blauwe bal trekt en de kans dat je een oranje bal trekt samen 100%? Licht je antwoord toe.

Uitdagende opdrachten

- U1** In een doosje zitten rode, witte, blauwe en oranje kralen. Als Lih-Mei willekeurig een kraal uit het doosje pakt, dan is de kans op een rode kraal 10% en de kans op een witte kraal 26%. De kans op een blauwe kraal, is drie keer zo groot als de kans op een oranje kraal. Hoe groot is de kans dat Lih-Mei een blauwe kraal pakt?

- U2** Bij het gooien met twee dobbelstenen wordt de som van het aantal ogen op de dobbelstenen geteld. In de tabel zie je de bijbehorende kansen.

som van de ogen	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
kans in %	2,8	5,6	8,3	11,1	13,9	16,7	13,9	11,1	8,3	5,6	2,8

- Bereken hoe groot de kans is dat de som van de ogen meer dan 7 is.
- Hoe vaak zal naar verwachting de som van de ogen 6 zijn, als je 800 keer met twee dobbelstenen zou gooien?
- Verklaar waarom de kans dat de som van de ogen 3 is, even groot is als de kans dat de som van de ogen 11 is.

- Je leert** • hoe je een kans berekent
- Leerroutes** • ondersteunend: 10–11–012–12–13–14–15–016
 • doorlopend: 10–11–12–13–14–15–16–17
 • uitdagend: 11–12–13–14–15–17–U3–U4

Je vraagt de eerste jongen die uit de bioscoop komt wanneer hij jarig was.

- Is de kans dat hij op een woensdag jarig was even groot als de kans dat hij op een donderdag jarig was? Waarom?
- En is de kans dat hij in februari jarig was even groot als de kans dat hij in maart jarig was?



- 10** **a** Bij het trekken van een knikker uit een vaas met rode en witte knikkers is de kans op een rode knikker $\frac{3}{4}$. Hoeveel rode en hoeveel witte knikkers kunnen er in de vaas zitten? Geef drie verschillende mogelijkheden.
- b** Roy, Nadya en Ingeborg schrijven de kans $\frac{3}{4}$ als percentage.
 Ga na of ze alle drie hetzelfde percentage vinden.

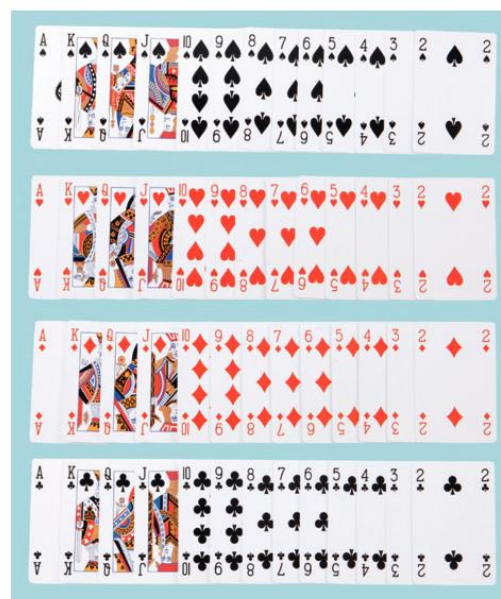
	Roy
Ik gebruik handige percentages. Er geldt	
$\frac{1}{4} = 25\%$, dus $\frac{3}{4} = \dots\%$.	

	Nadya
Ik schrijf de breuk met noemer 100. Dat geeft	
$\frac{3}{4} = \frac{\dots}{100} = \dots\%$.	

	Ingeborg
Ik maak een tabel.	
aantal	4 1 3
percentage	100

- c** Schrijf als percentage. Rond zo nodig af op één decimaal.
- A $\frac{4}{5}$ C $\frac{5}{8}$
 B $\frac{2}{7}$ D $\frac{7}{12}$

- 11**
- Rachel trekt zonder te kijken een kaart uit een volledig kaartspel. Ze zegt: 'Het kan een harten worden of géén harten. De kans dat ik een harten trek en de kans dat ik géén harten trek zijn dus allebei 50%.'
Ben je het eens met Rachel? Waarom?
 - Zara zegt: 'Er zijn 52 kaarten, waarvan 13 klaveren. De kans op het trekken van een klaveren is gelijk aan $\frac{1}{4}$.'
Ben je het met Zara eens? Leg je antwoord uit.
 - Vul in: De kans op een aas is ... op ...
 - Schrijf de kans op een aas als breuk en vereenvoudig die.
 - Hoeveel procent is de kans op een aas? Rond af op één decimaal.



Aanpak

Hoe bereken je een kans?

- Tel eerst het totaal aantal mogelijkheden.
- Tel daarna hoeveel mogelijkheden voldoen aan de gestelde eis.
- Schrijf de gevraagde kans in de vorm ... op ..., of als breuk, of als percentage. Vereenvoudig de breuk als dat mogelijk is. Rond het percentage zo nodig verstandig af.

Voorbeeld

Hoe groot is de kans dat je met een dobbelsteen hoger dan 4 gooit?

Oplossing

- Een dobbelsteen heeft zes kanten.
- Twee kanten zijn hoger dan 4.

3 De gevraagde kans is 2 op 6 of $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

<i>aantal</i>	6	2
<i>percentage</i>	100	33,33...

of ongeveer 33,3%.

Ondersteunende route → maak opdracht 012

- 12**
- Hoeveel procent is de kans dat je met een dobbelsteen 2 gooit?
 - Hoe groot is de kans dat je met een dobbelsteen hoger dan 2 gooit? Schrijf je antwoord als breuk en als percentage.
 - Bereken de kans in procenten dat je lager dan 6 gooit.
 - Stel dat duizend mensen met een dobbelsteen gooien.
Hoeveel mensen daarvan gooien naar verwachting lager dan 6?

- 13** Een loterij met 200 000 loten heeft 36 grote prijzen.
Hoe groot is de kans dat op een lot een grote prijs valt?
Schrijf je antwoord als breuk en als percentage.
- Als je een kans uitrekent in procenten en je moet daarbij afronden, kun je er voor kiezen om af te ronden op één decimaal. Als een kans heel erg klein is, kun je niet op één decimaal afronden en gebruik je meer decimalen.
- 14**
- a** In een gewoon jaar zitten 365 dagen.
Hoeveel procent is in een gewoon jaar de kans dat de eerste persoon die je tegenkomt op 29 oktober jarig is?
Rond af op vier decimalen.
 - b** En hoeveel procent is die kans in een schrikkeljaar?
 - c** Van de 47 016 inwoners van Zutphen worden er vijf op hun verjaardag speciaal in het zonnetje gezet.
Hoeveel procent is die kans voor iedere inwoner?
- 15** Een school houdt een loterij voor een goed doel. De loten hebben de nummers 101, 102, 103 tot en met 600. Alle loten worden verkocht. Op één lot valt een prijs van € 100,-.
- a** Joppe koopt één lot.
Hoeveel procent is de kans dat Joppe de prijs van € 100,- wint?
 - b** Sasja koopt alle loten met de nummers 526 en hoger.
Bereken hoeveel procent kans Sasja heeft om de prijs van € 100,- te winnen.



Ondersteunende route → maak opdracht 016

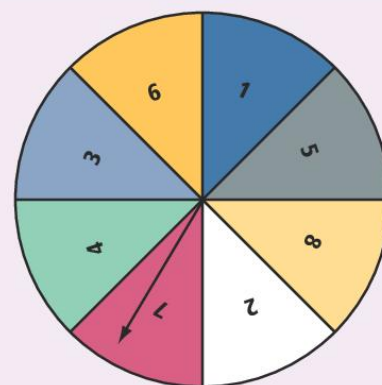
- 16** Charissa trekt een kaart uit een volledig kaartspel.
- a** Hoeveel procent is de kans dat Charissa ruiten 6 trekt?
 - b** Hoeveel procent is de kans dat ze een 5 trekt?
 - c** En hoe groot is de kans dat ze geen 5 trekt?
 - d** Waarom is de som van de kans dat Charissa een 5 trekt en de kans dat ze geen 5 trekt 100%?
- 17** In een trommel zitten 19 rode, 13 oranje en 22 gele snoepjes. Je pakt willekeurig een snoepje uit de trommel.
- a** Hoeveel procent is de kans op een geel snoepje?
 - b** Hoeveel procent is de kans dat het snoepje niet rood is?

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

- O12** Een kanstol is in acht even grote sectoren verdeeld.
- a** Gebruik de tabel om uit te rekenen hoeveel procent de kans is dat na draaien de pijl het getal 6 aanwijst.

aantal segmenten	8	1
percentage	100	...



- b** Op hoeveel sectoren staat een getal hoger dan 6?
- c** Hoe groot is de kans dat de pijl een getal hoger dan 6 aanwijst? Schrijf je antwoord als breuk en als percentage.
- d** Bereken de kans in procenten dat de pijl een getal lager dan 8 aanwijst.

- O16** Sjors trekt een kaart uit een volledig kaartspel.
- a** Hoeveel kaarten zitten er in een volledig kaartspel?
En op hoeveel van die kaarten staat klaveren heer?
- b** Hoeveel procent is de kans dat Sjors klaveren heer trekt?
- c** Op hoeveel kaarten staat een 8?
- d** Hoeveel procent is de kans dat hij een 8 trekt?
- e** En hoe groot is de kans dat hij geen 8 trekt?
- f** Waarom is de som van de kans dat Sjors een 8 trekt en de kans dat hij geen 8 trekt 100%?

Uitdagende opdrachten

- U3** In de tabel heeft Cynthia bijgehouden hoe vaak ze met haar dobbelsteen 1, 2, 3, 4, 5 en 6 heeft gegooid. Helaas is er op de tabel een vlek gekomen. Hoe vaak denk je dat Cynthia in totaal met haar dobbelsteen heeft gegooid? Verklaar je antwoord.

aantal ogen	1	2	3	4	5	6
aantal keer	38	42	45	36		

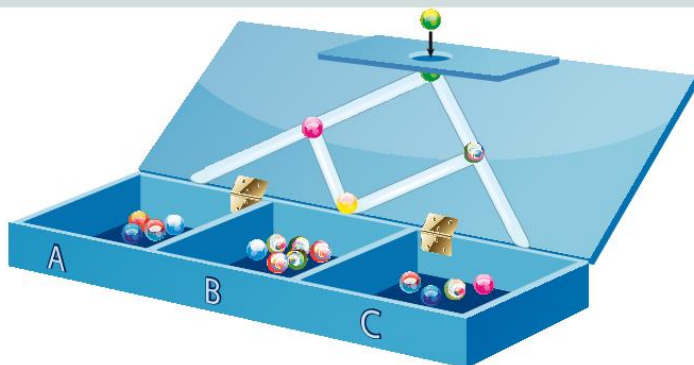
- U4** Maaïke beweert: 'Als ik later twee kinderen krijg, dan kunnen dat twee meisjes, twee jongens, of één jongen en één meisje zijn. De kans dat ik één jongen en één meisje krijg, is dus 1 op 3 of $\frac{1}{3}$.' Volgens Ilona is die kans $\frac{1}{2}$.
Leg uit waarom Ilona gelijk heeft.

Je leert • hoe je een boomdiagram gebruikt

Leerroutes • ondersteunend: 18—19—020—20—21—22—023
• doorlopend: 18—19—20—21—22—23—24
• uitdagend: 18—19—20—22—23—24—U5

Joël heeft een spel gemaakt. Een knikker die hij bij de pijl loslaat, komt in bakje A, bakje B of bakje C.

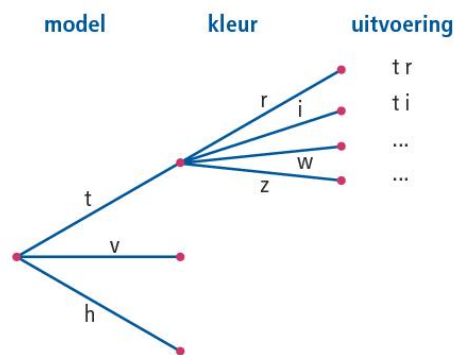
- Langs hoeveel verschillende routes kan een knikker in bakje A komen? En in bakje B?
- Joël laat 100 knikkers bij de pijl los. Hoe zullen deze knikkers zich ongeveer over de bakjes verdelen?



18 Een auto wordt verkocht in drie uitvoeringen: tweedeurs, vierdeurs en hatchback. Elke uitvoering is in de vier kleuren rood, ivoor, wit en zilver te krijgen.

W

- Hiernaast is een begin gemaakt van een schema waarin alle uitvoeringen worden weergegeven. Maak het schema verder af.
- Hoeveel verschillende uitvoeringen zijn er mogelijk?
- Alle uitvoeringen kunnen geleverd worden met een dieselmotor of met een benzinemotor. Hoeveel verschillende uitvoeringen zijn er dan in totaal?



Theorie

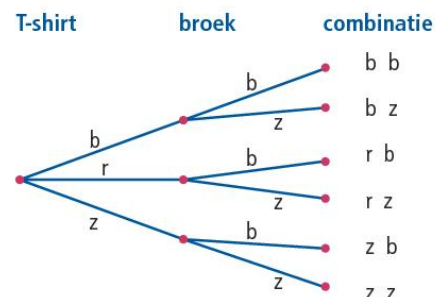
Om alle mogelijkheden bij een probleem te kunnen tellen, maak je vaak gebruik van een **boomdiagram**. Boven het boomdiagram komt te staan wat er te kiezen valt. Bij de **takken** komt te staan waaruit je daarbij kunt kiezen.

Voorbeeld

In de kast van Gerard liggen een blauw, een rood en een zwart T-shirt. Verder liggen er nog een blauwe en een zwarte broek. Gerard pakt zonder te kijken een T-shirt en een broek. Hoeveel verschillende combinaties zijn er mogelijk?

Oplossing

Gerard pakt een T-shirt en een broek, dus die komen boven het boomdiagram. De kleuren komen bij de takken. Het aantal verschillende combinaties is $3 \times 2 = 6$.



- 19**
- In hoeveel combinaties in het voorbeeld op de vorige bladzijde komt de kleur zwart voor?
 - Bij hoeveel van de combinaties hebben het T-shirt en de broek dezelfde kleur?
 - In hoeveel combinaties komt de kleur rood niet voor?
 - Hoe verandert het boomdiagram als er vier broeken, een blauwe, een zwarte, een grijze en een witte, in de kast liggen?
 - Hoeveel verschillende combinaties zijn er dan mogelijk?

Ondersteunende route → maak opdracht 020

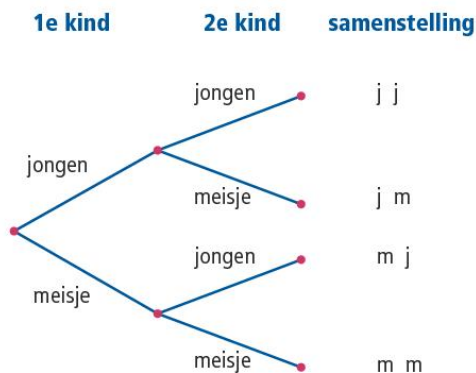
- 20** Hockeyclub Oranje-Rood speelt altijd in een oranje shirt of een rood shirt. Voor een broek hebben ze de keuze uit de kleuren oranje, rood, zwart of wit.

- Om uit te zoeken hoeveel combinaties er zijn, ga je een boomdiagram tekenen.
Begint dat boomdiagram met twee takken waar shirt en broek bij komt te staan of met twee takken waar oranje en rood bij komt te staan?
- Teken het boomdiagram voor de verschillende combinaties van shirt en broek.
- In hoeveel combinaties komen de clubkleuren oranje en rood samen voor?
- Sokken zijn er in de kleuren oranje, rood en zwart. In hoeveel verschillende combinaties van shirt, broek en sokken kan hockeyclub Oranje-Rood spelen?



- 21** In het boomdiagram zie je alle mogelijke samenstellingen bij een gezin met twee kinderen.

- Bereken hoe groot de kans is dat de kinderen in een gezin met twee kinderen van hetzelfde geslacht zijn.
- Teken een boomdiagram bij een gezin met drie kinderen.
- Hoeveel verschillende samenstellingen zijn er bij een gezin met drie kinderen?
- Hoeveel procent is de kans dat alle kinderen in een gezin met drie kinderen van hetzelfde geslacht zijn?
- Bereken de kans dat in een gezin met drie kinderen het eerste kind en het derde kind een jongen is.
- Er wordt een onderzoek gedaan onder 2000 gezinnen met drie kinderen.
Hoeveel gezinnen met minstens één meisje zullen daarbij naar verwachting bij zijn?



- 22** Op een school zijn de leerlingen verplicht één taal en één maatschappijvak te kiezen. De talen zijn Fries, Frans, Duits en Spaans en de maatschappijvakken zijn aardrijkskunde, geschiedenis en maatschappijleer.
- a** Je gaat hierbij een deel van een boomdiagram tekenen. Begint dat boomdiagram met twee takken waar taal en maatschappijvak bij komt te staan of met vier takken waar Fries, Frans, Duits en Spaans bij komt te staan?
 - b** Teken een deel van het boomdiagram voor de verschillende combinaties.
 - c** Hoeveel verschillende combinaties zijn er mogelijk?
 - d** Jorge wil geen Spaans en geen maatschappijleer kiezen. Hoeveel verschillende combinaties zijn er voor Jorge mogelijk?
 - e** Stel dat alle 132 leerlingen op deze school willekeurig een combinatie kiezen. Hoeveel leerlingen zullen dan Duits kiezen? En hoeveel geschiedenis? Geef ook de bijbehorende percentages.
 - f** En hoeveel van de 132 leerlingen zullen dan Fries en geschiedenis kiezen? Hoeveel procent is dat?

Ondersteunende route → maak opdracht O23

- 23** Diana krijgt een nieuwe keuken. Ze heeft de keuze uit koelkasten van € 800,-, € 900,- en € 950,-, vriezers van € 750,- en € 900,- en vaatwassers van € 550,- en € 650,-.
- a** Hoeveel euro is ze daarvoor minimaal kwijt?
 - b** Teken een boomdiagram en noteer achter elke combinatie hoeveel euro Diana daarvoor kwijt is.
 - c** Voor welke combinaties van koelkast, vriezer en vaatwasser is ze € 2.250,- kwijt?
 - d** Stel dat Diana willekeurig een koelkast, een vriezer en een vaatwasser bestelt. Hoeveel procent is de kans dat ze daarvoor dan minder dan € 2.400,- kwijt is?
- 24**
- a** Joan gooit met een geldstuk van 10 cent, een van 20 cent en een van 50 cent. Bereken hoeveel procent de kans is dat er drie keer munt boven komt te liggen.
 - b** Joan wil 1000 keer met deze drie geldstukken gooien. Bij hoeveel worpen komt er naar verwachting twee keer munt en één keer kop te liggen? Zet je berekening erbij.

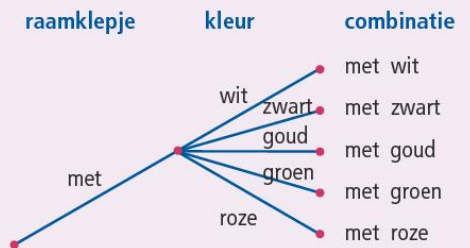
Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

020
W

Voor de Samsung Galaxy S6 smartphone zijn hoesjes met en zonder raamklepje te koop. De kleuren waaruit gekozen kan worden zijn wit, zwart, goud, groen en roze.

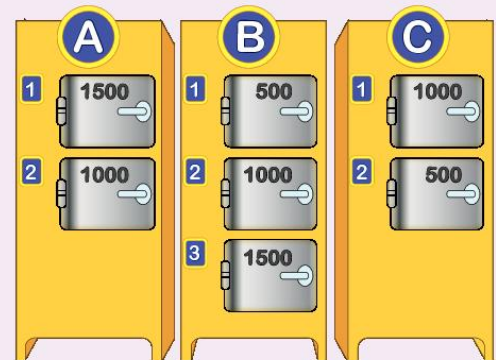
- Maak het boomdiagram bij de verschillende combinaties hiernaast verder af.
- Hoeveel verschillende combinaties zijn er mogelijk?
- In hoeveel combinaties komt de kleur wit voor?
- Hoeveel combinaties zijn er zonder raamklepje, of waar de kleur goud in zit?



023

De winnares van een quiz mag drie deuren openen. Eerst mag ze een deur uit rij A kiezen, daarna een deur uit rij B en ten slotte een deur uit rij C. Het prijzengeld krijgt ze door de bedragen bij elkaar op te tellen. De winnares kan niet zien welke bedragen achter de deuren staan.

- Ga na dat de combinatie A2-B2-C2 een prijzengeld van € 2.500,- geeft.
- Teken een boomdiagram en noteer achter elke combinatie het bijbehorende prijzengeld.
- Welke combinatie geeft een prijzengeld van € 2.000,-?
- Is de kans op een prijzengeld van € 2.500,- even groot als de kans op een prijzengeld van € 3.000,-? Licht toe!

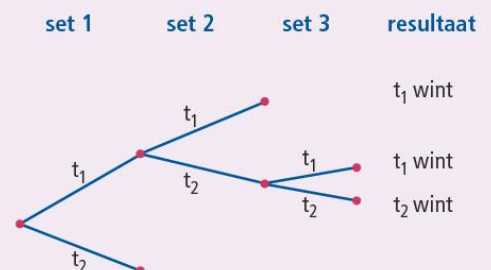


Uitdagende opdrachten

U5
W

Bij tennis worden bij de dames maximaal drie sets gespeeld. De winnares van een wedstrijd is degene die twee sets wint.

- Waarom zijn er niet $2 \times 2 \times 2 = 8$ wedstrijdverlopen mogelijk?
- In een boomdiagram kun je alle mogelijke manieren waarop een tenniswedstrijd kan verlopen weergeven. Hiernaast staat een deel daarvan. Maak het boomdiagram verder af.
- Hoeveel verschillende wedstrijdverlopen zijn er mogelijk?
- Clara zegt: 'In het boomdiagram wint t_1 even vaak als t_2 . Dus de kans dat t_1 een tenniswedstrijd wint is 50% en de kans dat t_2 een tenniswedstrijd wint is ook 50%.' Ben jij het met Clara eens?
- Bij de heren worden maximaal vijf sets gespeeld. De winnaar van een wedstrijd is degene die drie sets wint. Hoeveel verschillende wedstrijdverlopen zijn er mogelijk? Waarom is het niet nodig hierbij het hele boomdiagram te tekenen?



Je leert • hoe je het aantal verschillende mogelijkheden met een macht berekent

Leerroutes • ondersteunend: 25—26—027—27—28—29—30—31
• doorlopend: 25—26—27—28—29—30—31—32
• uitdagend: 25—26—27—28—29—31—U6—U7

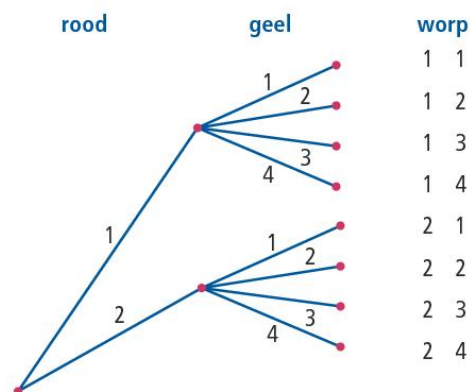
Guus moet bij een spelletje 2 gooien. Hij kan kiezen tussen het gooien met twee viervlaksdobbelstenen waarbij het aantal ogen wordt opgeteld, of met één gewone (zesvlaks)dobbelsteen.

- Kan Guus bij het spelletje het best met twee viervlaksdobbelstenen of met één gewone dobbelsteen gooien?



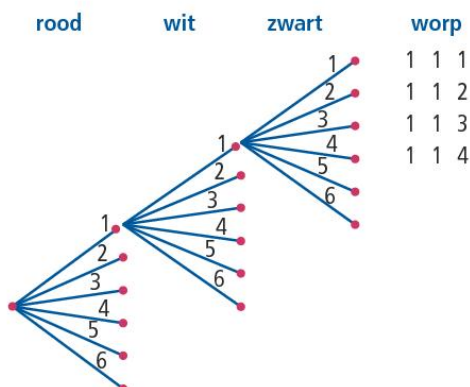
25 Met een viervlaksdobbelsteen kun je 1, 2, 3 of 4 gooien.
W Chuck gooit met een rode en een gele viervlaksdobbelsteen en begint er een boomdiagram bij te maken.

- Maak het boomdiagram verder af.
- Hoeveel verschillende worpen zijn er mogelijk?
- Hoeveel procent is de kans dat Chuck met beide viervlaksdobbelstenen 2 gooit?
- Hoe groot is de kans dat Chuck met beide dobbelstenen geen 3 gooit? Schrijf je antwoord als breuk.
- Hoe groot is de kans dat Chuck minstens één 4 gooit? Schrijf je antwoord als breuk en als percentage.
- Stel dat je met een rode en een gele gewone (zesvlaks) dobbelsteen gooit.
Hoeveel verschillende worpen zijn er dan mogelijk?



26 Hiernaast staat een deel van een boomdiagram bij het gooien met een rode, een witte en een zwarte dobbelsteen.

- Waarom is het niet nodig het hele boomdiagram te tekenen om het aantal verschillende worpen te vinden?
- Leg uit dat er bij het gooien met de drie dobbelstenen $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ verschillende worpen mogelijk zijn.
- Hoeveel worpen zijn er waarbij je met alle drie de dobbelstenen 4 gooit?
- Hoeveel procent is de kans dat je met alle drie de dobbelstenen 4 gooit? Rond af op twee decimalen.
- Hoe groot is de kans dat je met alle drie de dobbelstenen een gelijk aantal ogen gooit?



Theorie

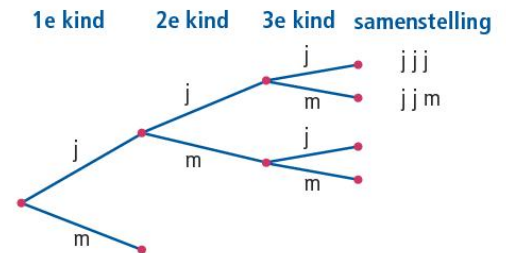
Bij veel problemen waarbij je het aantal mogelijkheden moet tellen, hoort een boomdiagram waarbij uit elk punt evenveel takken vertrekken. Bij elk punt wordt dan dezelfde keuze gemaakt. Het aantal verschillende mogelijkheden kun je dan met een **macht** berekenen. Soms is het niet nodig om daarbij het hele boomdiagram te tekenen.

Voorbeeld

Hoeveel verschillende samenstellingen zijn er bij een gezin met drie kinderen?

Oplossing

Hiernaast staat het begin van een boomdiagram met de verschillende samenstellingen bij een gezin met drie kinderen. Daaraan kun je zien dat er $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ verschillende samenstellingen zijn.



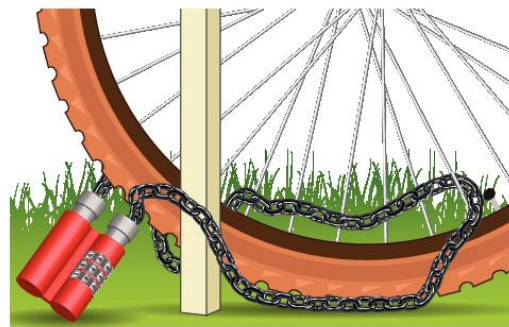
- 27**
- Hoeveel verschillende samenstellingen zijn er bij een gezin met vier kinderen mogelijk?
 - Is de kans dat de kinderen bij een gezin met vier kinderen allemaal jongens zijn groter of kleiner dan bij een gezin met drie kinderen? Leg je antwoord uit.
 - Schrijf alle samenstellingen op bij een gezin met vier kinderen met drie jongens en één meisje.
 - Bereken hoeveel procent de kans daarop is.

Ondersteunende route → maak opdracht 028

- 28** Je gooit vijf keer met een geldstuk. Je krijgt dan een rijtje, bijvoorbeeld het rijtje *kop kop munt munt kop*.
- Hoeveel verschillende rijtjes van kop en munt zijn er mogelijk?
 - In hoeveel rijtjes is alleen kop gegooit?
 - Hoe groot is de kans dat je vijf keer kop gooit?
 - Hoeveel verschillende rijtjes met vier keer kop zijn er?
 - Hoe groot is de kans dat je vier keer kop gooit?
Schrijf je antwoord als breuk.
- 29** Als je bij het gooien met drie dobbelstenen alleen let of het aantal ogen even of oneven is, kun je bij het berekenen van kansen een eenvoudig boomdiagram tekenen. Bereken de kans dat het aantal ogen op elk van de dobbelstenen even is.

- 30** Met de juiste cijfercode kun je een cijferslot openmaken. Voor elk van de drie cijfers van het cijferslot zijn er tien mogelijkheden, namelijk 0, 1, 2, ..., 8 en 9.

- a** Hoeveel verschillende cijfercodes zijn er met een dergelijk cijferslot mogelijk?
- b** Hoe groot is de kans dat iemand in één keer de juiste cijfercode raadt?



- 31** In een vaas zitten drie balletjes, één met de letter A, één met de letter D en één met de letter R. Bono pakt zonder te kijken een balletje uit de vaas, schrijft de letter op en gooit het balletje terug in de vaas. Dit doet hij drie keer achter elkaar. Hij krijgt zo een 'woord' van drie letters.

- a** Hoeveel verschillende 'woorden' van drie letters kan hij op deze manier krijgen?
- b** Bij al deze 'woorden' zitten vijf goede Nederlandse woorden: AAR, ARA, DAR, DRA en RAD. Hoeveel procent is de kans dat Bono een goed Nederlands woord opschrijft?
- c** Er zitten ook drie Nederlandse namen bij: AAD, ADA en ARD. Hoe groot is de kans dat Bono een van deze Nederlandse namen opschrijft? Schrijf je antwoord als breuk.
- d** De rest bestaat uit onzinwoorden zoals ADR. Bereken de kans dat Bono een onzinwoord opschrijft.



- 32** **a** Vanaf 1973 tot 1978 kwamen op het kenteken van een auto twee cijfers, twee letters en weer twee cijfers. Neem aan dat alle 26 letters van het alfabet gebruikt werden.

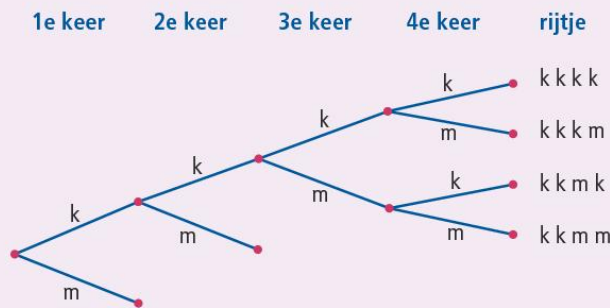
Hoeveel verschillende kentekens kon je op deze manier maximaal maken?

- b** Vanaf 1978 tot 1991 kwamen op het kenteken van een auto twee letters, twee cijfers en weer twee letters. Bereken het aantal verschillende kentekens dat op deze manier maximaal te maken was.
- c** José beweert dat door de verandering in 1978 het totaal aantal verschillende kentekens meer dan zeven keer zo groot is geworden. Controleer met een berekening of José gelijk heeft.



Uitdagende route → maak opdracht U6 en U7

Ondersteunende opdrachten



028 Hierboven staat het begin van een boomdiagram bij het vier keer na elkaar gooien met een geldstuk.

- Hoeveel verschillende rijtjes van kop en munt zijn er mogelijk?
- Hoe groot is de kans dat je vier keer kop gooit? Schrijf je antwoord als breuk.
- Hoeveel verschillende rijtjes met drie keer kop zijn er? Schrijf die rijtjes op.
- Hoe groot is de kans dat je drie keer kop gooit?

Uitdagende opdrachten

U6 a Hoe groot is bij een gezin met vijf kinderen de kans dat alle vijf de kinderen van hetzelfde geslacht zijn?

- b** Bereken hoeveel procent kans er is op één jongen en vier meisjes in een gezin met vijf kinderen.

U7 In 2008 stond een artikel in de krant dat in het nieuwe kenteken voor auto's in het midden drie letters kwamen.

- a** Bereken hoeveel verschillende kentekens met de combinatie twee cijfers - drie letters - één cijfer te maken waren.
- b** Bouwbedrijf VBK schreef een verzoek aan het ministerie om alle kentekens met de lettervolgorde VBK aan dit bedrijf toe te kennen.
Als dit verzoek zou worden ingewilligd, hoeveel voertuigen kon het bedrijf dan maximaal van een kenteken voorzien?
- c** Meneer Schaap kocht in 2009 een nieuwe auto.
Hoe groot was de kans dat het kenteken begon met een 8 en eindigde met een 8?



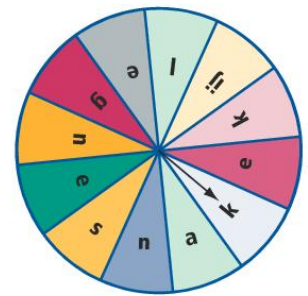
Veendam - De Rijkswegdienst voor het Wegverkeer (RDW) geeft sinds maandag kentekens uit met een nieuwe cijfer-letter-combinatie. De sinds 1951 gebruikte combinatie van driemaal twee letters of cijfers gaat de komende jaren langzaam maar zeker verdwijnen uit het straatbeeld. De nieuwe kentekens hebben twee cijfers, gevolgd door drie letters en weer een cijfer.

- 33** Bij een loterij zijn 10 000 loten verkocht. Er is één hoofdprijs van € 5.000,-. Verder zijn er vijf prijzen van € 1.000,- en vijfhonderd prijzen van € 100,-.

- Valesca heeft één lot gekocht.
Hoeveel procent kans is er dat ze een prijs wint?
- Anoushka heeft ook één lot gekocht.
Hoeveel procent is de kans dat ze geen prijs wint?
- De organisatie van de loterij wil geen verlies lijden.
Hoeveel moet één lot dan minstens kosten?

- 34** Een kanstol is verdeeld in twaalf even grote sectoren.

- Is de kans op het draaien van een e met deze kanstol gelijk aan de kans op het draaien van een a?
- Bereken bij iedere letter op deze kanstol hoeveel procent de kans is dat je die letter draait. Rond je antwoorden af op hele procenten.
- Tel de percentages die je bij opdracht b vond bij elkaar op en leg uit waarom je niet op 100% uitkomt.



- 35** Na tien keer werpen met een normaal geldstuk heeft Carola één keer kop en negen keer munt gegoooid.

- Carola denkt dat de kans dat ze bij de volgende worp kop gooit veel groter dan 50% is.
Waarom denkt ze dat? Ben jij het met haar eens?
- Carola gooit nog 16 keer. In totaal gooit ze dus 26 keer.
Waarom is het onwaarschijnlijk dat ze daarna in totaal 13 keer kop en 13 keer munt zal hebben gegoooid?
- Schat hoeveel keer kop en hoeveel keer munt ze naar verwachting na die 26 worpen zal hebben.

- 36** In Nederland zijn ongeveer 25 miljoen pinpassen in omloop. Bij elke pinpas hoort een pincode. Jac heeft pincode 0316.

- Denk je dat er veel mensen rondlopen met precies dezelfde pincode als Jac?
- Hoeveel verschillende pincodes van vier cijfers kunnen er maximaal gemaakt worden?
- Bereken hoeveel mensen er naar verwachting dezelfde pincode hebben als Jac.

- 37** a Hakan en Rosa besluiten te loten wie de afwas moet doen. Hakan pakt een dobbelsteen en zegt: 'Als ik 6 gooi, doe ik de afwas en als ik geen 6 gooi, doe jij de afwas.' Rosa vindt dit geen eerlijke manier van loten. Waarom vindt Rosa dit geen eerlijke manier van loten?
- b Geef een eerlijke manier om met een dobbelsteen te loten.

- 38** Bij een snoepkraam staan zuurstokken in de kleuren rood, geel, wit, bruin en zwart en lolly's in de kleuren rood en wit. Je koopt willekeurig een zuurstok en een lolly.
- a Teken het boomdiagram voor de verschillende aankopen.
- b Hoeveel verschillende aankopen zijn er mogelijk?
- c Hoeveel aankopen bevatten maar één kleur snoep?
- d Hoe groot is de kans dat je geen snoep in de kleur rood koopt? Schrijf de kans als breuk.
- e Er staan ook melk, puur en noten chocoladerepen. Hoeveel verschillende aankopen van een zuurstok, een lolly en een chocoladereep zijn er?
- f Henny houdt niet van zwart en houdt niet van noten. Ze wil een zuurstok, een lolly en een chocoladereep kopen. Hoeveel verschillende aankopen kan ze doen?

- 39** Erwin en Christiaan doen een spelletje halma. Om te beslissen wie er mag beginnen, gooien ze om de beurt met een dobbelsteen. Wie het hoogst aantal ogen gooit mag beginnen. Gooien ze allebei even hoog, dan gooien ze opnieuw.
- a Hoeveel procent kans is er dat Erwin en Christiaan een even hoog aantal ogen gooien? Rond af op één decimaal.
- b Christiaan wil graag als tweede gooien, omdat hij denkt dat hij dan een grotere kans heeft om het hoogst aantal ogen te gooien. Zoek uit of Christiaan gelijk heeft.



- 40** Een postcode bestaat in Nederland uit vier cijfers gevolgd door twee letters.
- a Hoeveel verschillende postcodes kunnen op deze manier gemaakt worden?
- b Max weet dat zijn postcode begint met 1329, maar de twee letters weet hij niet. Hij vult de letters op de gok in. Hoe groot is de kans dat hij de juiste postcode invult?

Vaardigheid

Je kunt een kans op verschillende manieren opschrijven.

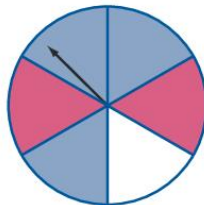
Bij het trekken van een kaart uit een volledig spel kaarten is de kans op iedere kaart even groot. Je kunt zeggen dat de kans op ruiten gelijk is aan 13 op 52, of $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, of 25%. Bij elke mogelijkheid kun je de kans in procenten berekenen. Tel je al die kansen bij elkaar op, dan komt er altijd 100% uit.

Voorbeeld

De kanstol is verdeeld in zes even grote sectoren.

De kans dat je blauw draait is 3 op 6, of 50%.

De kans dat je rood draait is 2 op 6, of $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.



- S1** In een bak zitten 20 kaartjes met daarop de getallen 1 tot en met 20. Je trekt één kaartje uit de bak.
- Vul in: De kans dat je een kaartje met een van de getallen 3, 4, 5 of 6 trekt, is ... op en dat is ... procent.
 - Schrijf de kans dat je niet het kaartje met het getal 17 trekt als breuk.
 - Hoeveel procent is de kans dat het getal kleiner dan 5 is?
 - En hoeveel procent is de kans dat het getal groter dan of gelijk aan 5 is?

Vaardigheid

Je kunt een kans berekenen.

- Tel eerst het totaal aantal mogelijkheden.
- Tel daarna hoeveel mogelijkheden voldoen aan de gestelde eis.
- Schrijf de gevraagde kans in de vorm ... op ..., of als breuk, of als percentage. Vereenvoudig de breuk als dat mogelijk is. Rond het percentage zo nodig verstandig af.

Voorbeeld

In een Scrabblespel zitten blokjes met letters en 2 blanco blokjes.
In de tabel zie je hoeveel er van elk soort blokje in het Scrabblespel zitten. De letters worden door elkaar omgedraaid op tafel gelegd. Je pakt een letter. Hoe groot is de kans dat je een E pakt?

Oplossing

1 In het Scrabblespel zitten $6 + 2 + \dots + 2 = 102$ letters.

2 Er zitten 18 letters E bij.

3 De kans dat je een E pakt is 18 op 102 of $\frac{18}{102} = \frac{9}{51}$.

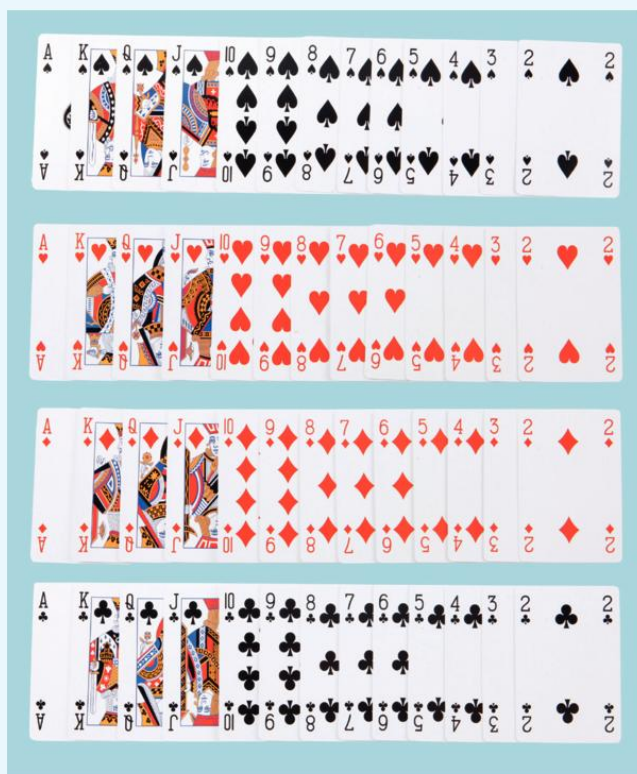
<i>aantal letters</i>	102	18
<i>percentage</i>	100	17,647...

Dat is ongeveer 17,65%.

<i>soort</i>	<i>aantal</i>	<i>soort</i>	<i>aantal</i>
A	6	N	8
B	2	O	6
C	2	P	3
D	5	Q	1
E	18	R	6
F	2	S	6
G	2	T	5
H	2	U	4
I	4	V	2
J	2	W	2
K	3	X	1
L	3	Y	2
M	3	Z	2
		blanco	2

S2 Charissa trekt een kaart uit een volledig kaartspel van 52 kaarten.

- Bereken hoeveel procent de kans is dat ze ruiten 6 trekt.
- Hoeveel procent is de kans dat Charissa een harten trekt?
- En hoe groot is de kans dat ze geen klaveren trekt?
- Waarom is de som van de kans dat ze een plaatje trekt en de kans dat ze geen plaatje trekt 100%?



Vaardigheid

Je kunt een boomdiagram gebruiken.

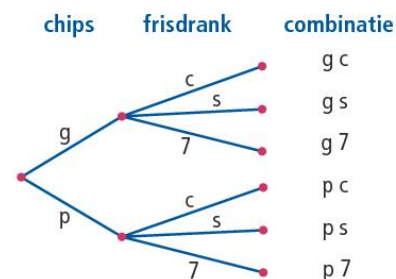
Om alle mogelijkheden bij een probleem te kunnen tellen, maak je vaak gebruik van een boomdiagram. Boven het boomdiagram komt te staan wat er te kiezen valt. Bij de takken komt te staan waaruit je daarbij kunt kiezen.

Voorbeeld

Op een feestje kun je kiezen tussen gewone chips en paprikachips. Verder kun je kiezen uit cola, sisi of 7-up. Hoeveel verschillende keuzes voor chips en een frisdrank kun je maken?

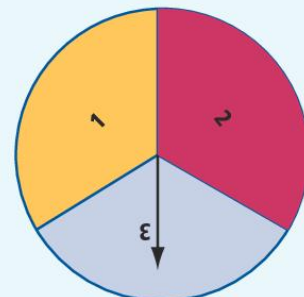
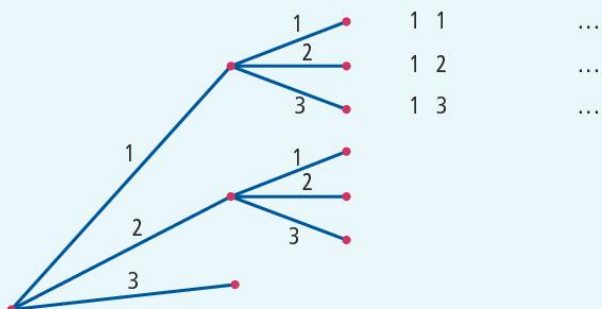
Oplossing

Je moet een keuze maken bij chips en bij frisdrank, dus die komen boven het boomdiagram. Gewone, paprika, cola, sisi en 7-up komen bij de takken. Je kunt $2 \times 3 = 6$ verschillende keuzes maken.



- S3** Bij een spelletje moet je met een dobbelsteen gooien en met een kanstol draaien.

dobbelsteen **kanstol** **combinatie** **punten**



- Maak het bijbehorende boomdiagram verder af.
- Het aantal punten dat je krijgt, is de som van het aantal ogen op de dobbelsteen en het getal op de kanstol. Vul het aantal punten bij het boomdiagram in.
- Hoeveel verschillende aantallen punten kun je krijgen?
- Bij hoeveel combinaties krijg je 7 punten?

- S4** In een restaurant kun je voor een vaste prijs zelf een menu van een voor-, een hoofd- en een nagerecht samenstellen.
- Hoeveel verschillende menu's kun je met de menukaart samenstellen?
 - Jan houdt niet van biefstuk en kaas.
Teken een boomdiagram dat bij hem hoort.
 - Uit hoeveel menu's kan Jan kiezen?
 - Hoeveel menu's kan iemand samenstellen die absoluut geen fruit wil eten?
 - De chef van het restaurant wil dat de gasten meer keuzes krijgen. Hij laat in het vervolg kiezen uit vier voorgerechten, drie hoofdgerechten en vier nagerechten. Uit hoeveel verschillende menu's kan een gast dan kiezen?

Voorgerecht	keuze uit - soep van de dag - kalfspasteitje - grapefruitcocktail
Hoofdgerecht	keuze uit - biefstuk - kipfilet
Nagerecht	keuze uit - ijs - fruitsalade - kaasplateau

Vaardigheid

Je kunt het aantal verschillende mogelijkheden met een macht berekenen.

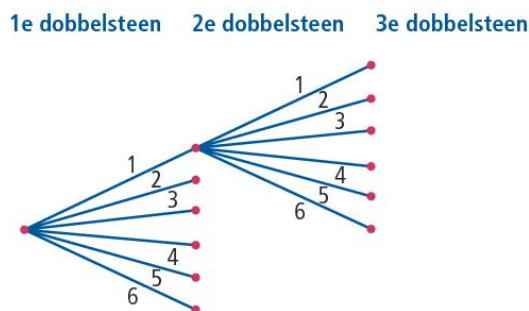
Bij veel problemen waarbij je het aantal mogelijkheden moet tellen, hoort een boomdiagram waarbij uit elk punt evenveel takken vertrekken. Bij elk punt wordt dan dezelfde keuze gemaakt. Het aantal verschillende mogelijkheden kun je dan met een macht berekenen. Soms is het niet nodig om daarbij het hele boomdiagram te tekenen.

Voorbeeld

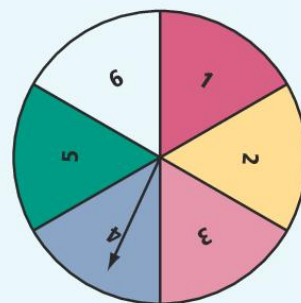
Bereken het aantal verschillende mogelijkheden bij het gooien met vijf dobbelstenen.

Oplossing

Hiernaast is een deel getekend van het bijhorende boomdiagram. Bij elke dobbelsteen zijn er zes keuzes. Er wordt met vijf dobbelstenen gegooid. Het aantal verschillende mogelijkheden is dan $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^5 = 7776$.



- S5** Met de kanstol kun je de cijfers 1, 2, 3, 4, 5 en 6 draaien. Je draait met de kanstol en noteert het cijfer. Dit doe je vijf keer achter elkaar. Je krijgt dan een rijtje van vijf cijfers.
- Hoeveel verschillende rijtjes van vijf cijfers zijn er?
 - Hoe groot is de kans dat je vijf keer achter elkaar het cijfer 4 draait?
 - En hoe groot is de kans dat je helemaal geen 4 draait?

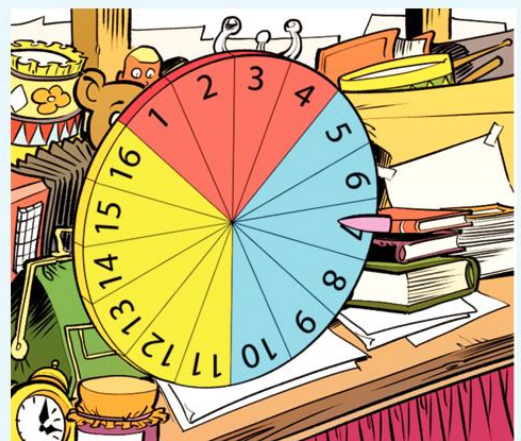


- T1** Micha gooit met een dobbelstenen met acht zijvlakken met daarop de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8.
- Hoe groot is de kans dat Micha 3 gooit? En de kans dat ze 3 of lager gooit? Schrijf beide kansen als breuk.
 - Is de som van de kans dat Micha 4 of hoger gooit en de kans dat ze 4 of lager gooit 100%? Waarom?
 - Vul in: De kans dat Micha 7 gooit is ... op ... en dat is ... procent.
 - Micha gooit 200 keer met zo'n dobbelsteen. Hoeveel keer zal ze naar verwachting 5 gooien?
 - Micha heeft acht van deze dobbelstenen. Met zes daarvan gooit ze zoals hiernaast 1, 2, 3, 5, 7 en 8. Met de laatste twee dobbelstenen gooi ik nu zeker 4 en 6 zegt ze.
Klopt dat? Licht je antwoord toe.



- T2** Een kanstol is verdeeld in drie even grote sectoren. Met de kanstol kun je de cijfers 1, 2 en 3 draaien. Je draait met de kanstol en noteert het cijfer. Dit doe je vijf keer achter elkaar. Je krijgt dan een rijtje van vijf cijfers.
- Hoeveel verschillende rijtjes van vijf cijfers zijn er mogelijk?
 - Hoe groot is de kans dat je vijf keer achter elkaar 3 draait? Schrijf je kans als breuk.
 - En hoe groot is de kans dat je helemaal geen 3 draait?
- T3** Er komt een nieuw meisje in de klas. Boris beweert dat de kans dat ze met links schrijft 50% is en de kans dat ze met rechts schrijft ook 50% is.
Waarom heeft Boris geen gelijk?

- T4** Een rad van avontuur op een rommelmarkt wordt gedraaid. Als het rad stilstaat, wijst de pijl een nummer aan.
- Hoeveel procent is de kans dat de pijl nummer 6 aanwijst?
 - En hoeveel procent is de kans dat de pijl een nummer dat hoger is dan 5 aanwijst?
 - Hoeveel procent is de kans dat de pijl een nummer lager dan 7 aanwijst?
 - Bereken hoeveel procent de kansen zijn dat de pijl het rode, het blauwe en het gele deel van het rad aanwijst.
 - Op een avond wordt het rad 155 keer gedraaid. Hoe vaak zal de pijl naar verwachting een nummer aanwijzen dat je kunt delen door het getal 5?



- T5**
- a** Een kluis is beveiligd met een cijfercode. Deze code bestaat uit zeven cijfers. Voor elk cijfer kun je kiezen uit de cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 of 9.
Hoeveel verschillende codes kun je op deze manier maken?
 - b** Hoeveel verschillende codes kun je maken als er alleen oneven cijfers in de code mogen voorkomen?
 - c** Een computer is beveiligd met een wachtwoord van zes letters. Voor elke letter kun je kiezen uit alle 26 letters van het alfabet. Voor het wachtwoord mag je alleen kleine letters kiezen.
Hoeveel verschillende wachtwoorden zijn er mogelijk?
 - d** Hoeveel verschillende wachtwoorden kun je maken als je behalve kleine letters ook hoofdletters mag kiezen?

- T6** Een zaak verkoopt een exclusief merk fietsen. Deze fietsen worden geleverd met of zonder versnelling. Je kunt kiezen uit fietsen met hand-, met trommel- of met terugtraprem. Er is keuze uit de kleuren rood, groen en blauw.
- a** Teken een boomdiagram waaruit blijkt welke combinaties allemaal mogelijk zijn.
 - b** De zaak heeft van elke combinatie één fiets op voorraad.
Hoeveel van deze fietsen heeft de zaak op voorraad?
 - c** Hoeveel procent van deze fietsen is blauw met een versnelling?
 - d** Welk deel van deze fietsen heeft géén versnelling en géén handrem? Schrijf je antwoord als breuk.
 - e** Neem aan dat iedere combinatie even vaak verkocht wordt. In 2011 zijn 40 rode fietsen met versnelling verkocht.
Hoeveel fietsen zijn in 2011 in totaal verkocht?

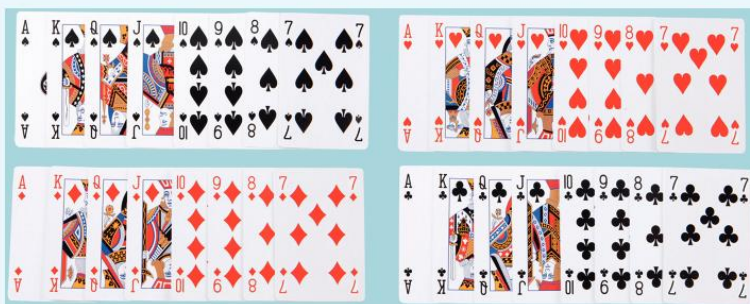


- T7**
- a** Een mogelijke samenstelling in een gezin met vier kinderen is *jongen jongen meisje jongen*.
Hoeveel verschillende samenstellingen zijn er in totaal in gezinnen met vier kinderen?
 - b** Hoeveel procent kans is er op een gezin met één meisje en drie jongens?
 - c** Bereken hoeveel procent de kans is dat een gezin met zes kinderen zes meisjes of zes jongens heeft.

Je kunt een kans op verschillende manieren opschrijven.

- E1** Je gooit met een dobbelsteen met acht zijvlakken met daarop de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8.
- Vul in:
De kans dat je 6 gooit, is ... op ... en als breuk geschreven is deze kans ...
 - Vul in.
De kans dat je hoger dan 2 gooit, is ... op ... en dat is ... procent.
 - Hoe groot is de kans dat je een oneven getal gooit?
 - Leg uit of de som van de kans dat je 3 of hoger gooit en de kans dat je lager dan 3 gooit 100% is.

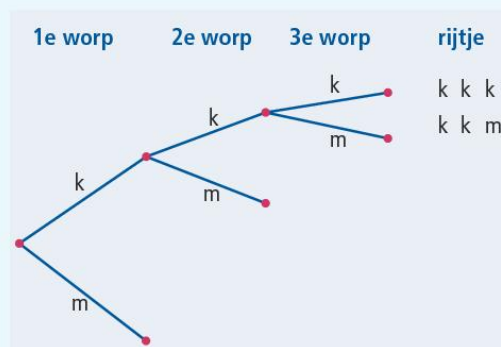
Je kunt een kans berekenen.



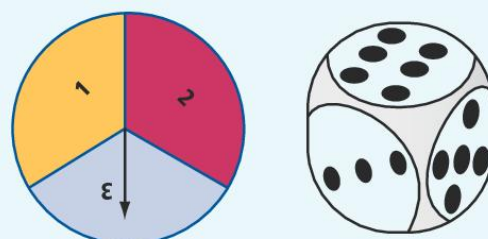
- E2** Je trekt één van de kaarten van het klaverjasspel.
- Hoeveel procent is de kans dat je een schoppen trekt?
 - En hoeveel procent is de kans dat je klaveren 8 trekt?
 - Hoe groot is de kans dat je geen aas trekt?
 - Bereken de kans dat je een kaart lager dan 10 trekt.
 - Hoeveel procent is de som van de kans dat je een plaatje trekt en de kans dat je een 7 trekt?
- E3** Fred doet mee aan een spelletje Mens-erger-je-niet. Daarbij mag je pas beginnen als je met een dobbelsteen 6 gooit.
- Hoe groot is de kans dat je met een dobbelsteen 6 gooit?
Schrijf je antwoord als breuk en als percentage.
 - Hoe groot is de kans dat je geen 6 gooit?
 - Waarom is de som van de kans dat Fred met een dobbelsteen meer dan 4 gooit en de kans dat hij minder dan 4 gooit niet 100%?
 - Hoeveel procent is de kans dat Fred lager dan 5 gooit?
 - Zevenhonderd mensen gooien met een dobbelsteen.
Hoeveel mensen gooien naar verwachting hoger dan 1?

Je kunt een boomdiagram gebruiken.

- E4** **W** Dorien gooit drie keer met een geldstuk en noteert of ze kop of munt gooit. Een mogelijk rijtje is kop kop munt.
- Alle mogelijke rijtjes kun je in een boomdiagram laten zien. Hiernaast staat een deel van dat boomdiagram. Maak het boomdiagram verder af.
 - Hoeveel verschillende rijtjes zijn er?
 - Hoeveel verschillende rijtjes zijn er waarbij Dorien één keer kop en twee keer munt gooit?
 - Hoeveel procent is de kans dat ze precies twee keer kop gooit?



- E5** Janek draait een keer met een kanstol, noteert het cijfer, en dan gooit hij met een dobbelsteen en noteert het aantal ogen.
- Teken hierbij een boomdiagram.
 - Hoeveel procent is de kans dat hij twee keer 3 noteert?
 - En hoe groot is de kans dat hij minstens één 2 noteert?
 - Hoeveel procent is de kans dat het product van het cijfer op de tol en het aantal ogen van de dobbelsteen gelijk is aan 12?

**Je kunt het aantal verschillende mogelijkheden met een macht berekenen.**

- E6** Lianne werpt vier keer achter elkaar met een dobbelsteen. Ze noteert bij elke worp het aantal ogen dat boven komt. Een mogelijk rijtje met aantallen ogen is 2 5 1 2.
- Hoeveel verschillende rijtjes zijn er in totaal mogelijk?
 - Hoe groot is de kans dat Lianne vier keer 6 gooit?
 - En hoe groot is de kans dat ze precies drie keer 6 gooit?
- E7** Via internet kun je Toto-13 spelen. Daarbij vul je van dertien voetbalwedstrijden in of de thuisclub wint, verliest of gelijk speelt.
- Op hoeveel verschillende manieren kun je Toto-13 invullen?
 - Hoe groot is de kans dat je alle dertien wedstrijden goed invult als je geen verstand van voetbal hebt?



Je leert

- hoe je een kans bij trekken zonder terugleggen berekent

Deze paragraaf bereidt voor op klas 3 vwo.

- In een vaas zitten drie rode en twee witte ballen. Anja pakt een bal uit de vaas, schrijft op welke kleur de bal heeft en doet hem daarna weer terug in de vaas. Dit doet ze 100 keer.
 - Hoeveel rode en hoeveel witte ballen zal ze naar verwachting opschrijven?
 - Nu haalt Anja één witte bal uit de vaas en legt hem apart. Hoeveel rode en hoeveel witte ballen zitten er daarna nog in de vaas?
 - Hoe groot is de kans dat Anja daarna bij de volgende trekking een rode bal pakt?
 - En hoe groot is de kans op een witte bal?

Theorie

Als je een bal uit een vaas met twee kleuren ballen pakt, de bal apart legt en weer een bal uit de vaas pakt, heet dat **trekken zonder terugleggen**. De kans op een bal van dezelfde kleur verandert dan.

Voorbeeld 1

In een vaas zitten 8 blauwe en 12 gele ballen. Job pakt willekeurig een bal uit de vaas. Hoe groot is de kans op een blauwe bal?

Oplossing

In totaal zitten er 20 ballen in de vaas. De kans op een blauwe bal is 8 op 20 of $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$, of 40%.

Voorbeeld 2

Job heeft 6 blauwe en 4 gele ballen uit de vaas met 8 blauwe en 12 gele ballen gepakt. Hoe groot is de kans dat Job daarna een blauwe bal pakt?

Oplossing

Er zitten nog 2 blauwe en 8 gele ballen in de vaas en dat zijn 10 ballen. De kans op een blauwe bal is dan 2 op 10, of $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ is 20%.

- In een bak zitten twaalf rode en acht gele ballen.
 - Hoeveel procent is de kans dat je een rode bal pakt?
 - Bert pakt zonder terugleggen drie rode en vijf gele ballen uit de bak. Hij pakt daarna nog één bal uit de bak. Hoeveel procent is de kans dat dit een rode bal is?
- Joachim trekt één kaart uit een volledig kaartspel.
 - Bereken hoeveel procent de kans is dat hij een ruiten pakt.
 - Hoe groot is de kans dat hij een plaatje pakt?
 - Hoeveel procent is de kans dat hij een boer pakt?
 - Hoe groot is de kans op een hartenaas? En op een klaverenaas? Schrijf de kansen als breuk.

- 4 Wilma trekt zonder terugleggen de kaarten hiernaast uit een volledig kaartspel. Ze trekt daarna nog één kaart uit het kaartspel.
- Maak de opdrachten 3a tot en met 3d ook voor haar.
 - Wat valt je op als je de antwoorden bij de opdrachten 3a tot en met 3d met die bij opdracht 4a vergelijkt?
- 5 In een bak zitten vijf balletjes met daarop de getallen 1, 3, 5, 7 en 9. Archie trekt zonder terugleggen drie balletjes uit de bak en legt ze naast elkaar.
- Op hoeveel verschillende manieren kan Archie dat doen?
 - Archie vermenigvuldigt de getallen die op de balletjes staan die nog in de bak zitten met elkaar. Welke uitkomsten kan hij allemaal krijgen?
 - Hoeveel procent is de kans op de uitkomst 27?
 - En hoeveel procent is de kans op een uitkomst van meer dan 10?
- 6 Scrabble is een spel waarbij je woorden moet maken met letterblokjes. De 100 letterblokjes zitten in een zak. De spelers pakken zonder te kijken letterblokjes uit die zak. In de tabel zie je hoe vaak elke letter in het spel voorkomt. In dit Scrabblespel zijn de twee blanco blokjes weggelaten.



letter	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
aantal	6	2	2	5	18	2	2	2	4	2	3	3	3

letter	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
aantal	8	6	3	1	5	5	5	4	2	2	1	2	2

- Waarom zit de E veel vaker in het spel dan de W?
- Je pakt zonder te kijken een letter. Hoe groot is de kans dat je een M pakt?
- Welke kans is groter: de kans dat je een klinker pakt of de kans dat je een medeklinker pakt?
- Bij het begin van het spel trekt Fedor de zeven letters die je hiernaast ziet. Daarna pakt Irene één letter. Hoeveel procent kans is er dat ze een R pakt? Rond je antwoord af op één decimaal.
- Op het einde van het spel moet Fedor één letterblokje uit de zak pakken. De kans dat hij een Q pakt is dan 20%. Hoeveel letterblokjes zitten er dan nog in de zak?



Tussendoortje | Dobbelstenen

W De beste keuze

Bij een spelletje voor twee personen zitten drie speciale dobbelstenen.

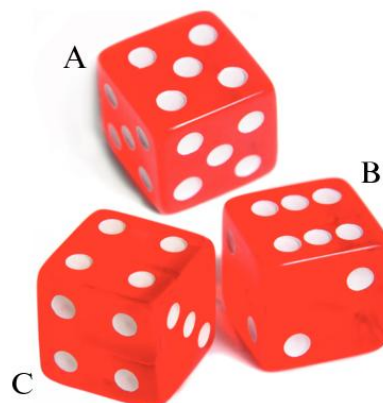
Op dobbelsteen A staat 1, 1, 5, 5, 5, 5,

op dobbelsteen B staat 2, 2, 2, 2, 6, 6 en

op dobbelsteen C staat 3, 3, 3, 4, 4, 4.

Iedere persoon kiest een dobbelsteen. De persoon die met zijn dobbelsteen het hoogst gooit wint.

- Welke dobbelsteen kun je volgens jou het beste kiezen? Of maakt het niet uit?



Kansen berekenen

Met het schema kun je dobbelsteen A en dobbelsteen B met elkaar vergelijken. De letters in het schema geven aan met welke dobbelsteen je wint.

- Vul het schema verder in.
- Hoe groot is de kans dat je met dobbelsteen A van dobbelsteen B wint?
- Maak een schema waarmee je dobbelsteen B en dobbelsteen C kunt vergelijken en ook een schema waarmee je dobbelsteen C en dobbelsteen A kunt vergelijken.

		dobbelsteen B					
		2	2	2	2	6	6
dobbelsteen A	1	...	B	...	...	...	...
	1	...	B	...	...	...	...
	5	A	A	A	A	B	B
	5	...	A	...	...	...	...
	5	...	A	...	...	...	...
	5	...	A	...	...	...	...

De beste strategie

- Zou je als eerste of als tweede een dobbelsteen willen kiezen? Of maakt dat niet uit?
- Welke strategie kun je het beste volgen als je het spel met drie personen speelt?

aantal kg	5	1	0,5	4,5
aantal centen	1800	...	...	...

Teken $\angle P = 45^\circ$

Vaardigheden

6

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rekenen met breuken
- Vergelijkingen en ongelijkheden
- Ontbinden in factoren
- Getallen
- Meetkunde



Reken met breuken

1 Vereenvoudig de breuken.

a $\frac{12}{26}$

d $\frac{16}{36}$

b $\frac{21}{49}$

e $\frac{16}{40}$

c $\frac{42}{66}$

f $\frac{39}{117}$

Theorie

De breuk $\frac{13}{4}$ is groter dan 1. Je kunt hier helen uit halen, bijvoorbeeld $\frac{13}{4} = \frac{12}{4} + \frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$.

Een breuk zoals $2\frac{5}{7}$ kun je als één breuk schrijven.

Je krijgt dan $2\frac{5}{7} = \frac{14}{7} + \frac{5}{7} = \frac{19}{7}$.

2 Haal de helen uit de breuk.

a $\frac{13}{9}$

c $\frac{44}{3}$

b $\frac{23}{4}$

d $\frac{63}{4}$

3 Schrijf als één breuk.

a $2\frac{3}{14}$

c $5\frac{7}{12}$

b $3\frac{4}{5}$

d $4\frac{3}{13}$

Theorie

Bij het vermenigvuldigen van breuken vermenigvuldig je de tellers met elkaar en vermenigvuldig je de noemers met elkaar.

Bij het vermenigvuldigen van breuken groter dan 1, moet je deze breuken eerst schrijven als één breuk.

Voorbeeld

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2 \times 1}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{5}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{8 \times 3} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$1\frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6 \times 3}{5 \times 4} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

$$4 \times \frac{2}{13} = \frac{8}{13}$$

4 Bereken, vereenvoudig indien mogelijk de breuk en haal de helen eruit.

a $\frac{5}{9} \times \frac{2}{3} =$

d $1\frac{4}{5} \times 3\frac{1}{2} =$

b $\frac{2}{11} \times \frac{3}{4} =$

e $2\frac{3}{4} \times 3 =$

c $2\frac{1}{9} \times \frac{2}{3} =$

f $7 \times \frac{2}{9} =$

Vergelijkingen en ongelijkheden**5** Los de vergelijkingen op.

a $3 + 2x = -4(x + 6)$

d $4a - (7a - 6) = -15$

b $2(x - 4) + 3x = 10 - x$

e $2(n + 2) = 3(2n + 5) - 13$

c $b - 8 + 7b = 2(b - 2)$

f $3p - 5(p + 6) = -(p - 5)$

6 Los de vergelijkingen op.

a $h^2 = 16$

e $7p(-3 - 8p) = 0$

b $-3x^2 = -75$

f $(5 - a)(a + 15) = 0$

c $2 - g^2 = -7$

g $w^2 - 6w - 16 = 0$

d $r^2 + 33 = 8$

h $y^2 - 9 = 8y$

Theorie

Een ongelijkheid los je op door eerst de bijbehorende vergelijking op te lossen. Schets daarna de bijbehorende grafieken en lees de oplossing van de ongelijkheid af.

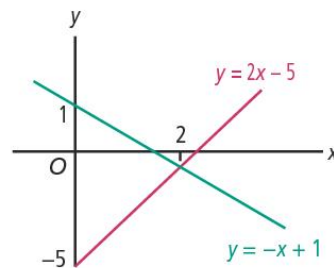
VoorbeeldLos op $2x - 5 > -x + 1$.**Oplossing**

$2x - 5 = -x + 1$

$3x - 5 = 1$

$3x = 6$

$x = 2$



Rechts van $x = 2$ ligt de grafiek van $y = 2x - 5$ hoger dan de grafiek van $y = -x + 1$.

De oplossing van de ongelijkheid is $x > 2$.

7 Los de ongelijkheden op.

a $5x - 6 < 3x + 8$

e $7x - 16 < 12$

b $4x - 7 > x + 5$

f $3x - 9 > 18$

c $9x - 6 < 10 + x$

g $-3x + 4 < 22$

d $-2x + 8 > 2x - 4$

h $-x - 9 > -3$

Ontbinden in factoren

8 Ontbind in factoren.

a $y = x^2 - 6x$

e $y = x^2 + 8x + 15$

b $y = 3x - 12$

f $y = x^2 + x - 42$

c $y = 16x^2 - 10x$

g $y = x^2 - 4x - 12$

d $y = 5x - 15x^2$

h $y = x^2 - 16$

Getallen

9 Schrijf de volgende getallen in cijfers.

a drie miljoen zesduizend en negenhonderddertig

b zes en kwart miljoen

c twee miljard

d vierduizend achthonderdenvijfentachtig

10 Schrijf de getallen in de standaardvorm.

a 325 000

d 0,008

b 6 000 000 000

e 0,000 040 8

c 30 700

f 0,000 000 902

11 Schrijf de getallen als gewoon getal.

a $2,67 \times 10^5$

d $4,09 \times 10^{-5}$

b $9,18 \times 10^8$

e 8×10^{-7}

c $1,2951 \times 10^3$

f $6,26 \times 10^{-3}$

12 a Schrijf alle priemgetallen onder de 20 op.

b Schrijf de delers van het getal 36 op.

c Om het getal 140 te schrijven als een vermenigvuldiging van priemgetallen kun je een schema gebruiken. Vul het schema verder in.

d Schrijf het getal 140 als een vermenigvuldiging van priemgetallen.

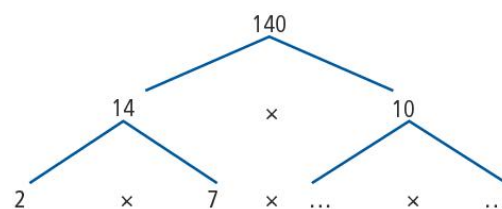
e Schrijf als een vermenigvuldiging van priemgetallen.

A 60

C 210

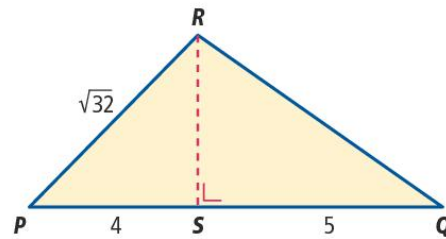
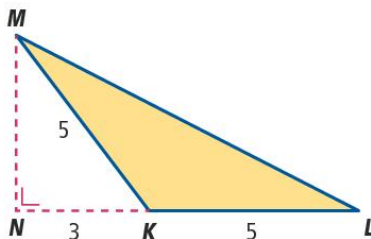
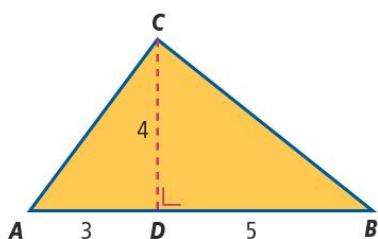
B 99

D 390



Meetkunde

- 13** Bereken de oppervlakte van de driehoeken.

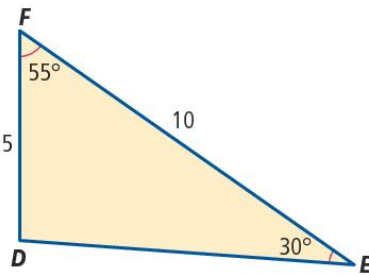
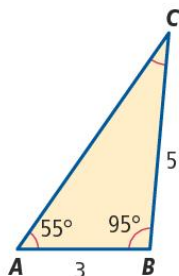


- 14**
- Teken in een assenstelsel de punten $A(0, 1)$, $B(4, 0)$ en $C(5, 3)$.
 - Bereken de lengte van de zijden van $\triangle ABC$.
 - Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.

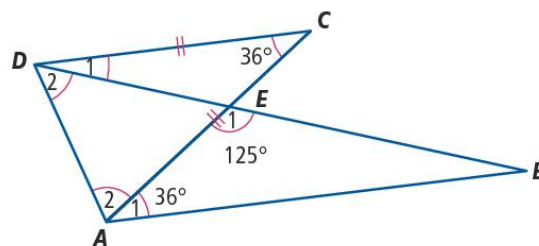
Theorie

Om een onbekende lengte te berekenen bij gelijkvormige figuren maak je een schets van de figuren in dezelfde stand. Vervolgens zet je de lengten van zijden in een verhoudingstabel en bereken je de vergrotingsfactor.

- 15** De driehoeken ABC en DEF zijn gelijkvormig.
- Bereken $\angle C$ en $\angle D$.
 - Bereken AC en DE .



- 16** In de figuur geldt $\angle A_1 = 36^\circ$, $\angle C = 36^\circ$, $\angle E_1 = 125^\circ$ en $AC = DC$.
- Bereken $\angle A_2$.
 - Bereken $\angle B$.
 - Bereken $\angle D_1$.
 - Bereken $\angle D_2$.



- B** balansmethode 85
basis 47
beginhoeveelheid 23
boomdiagram 206
breuk als percentage schrijven 197
breuken vereenvoudigen 197
- C** constant 24
- D** dalend 24
diameter 54
doorsnede 125
drieterm 170
dubbele haakjes 161
- E** exponentieel 18
exponentiële formule 23
exponentiële groei 18
- F** factor 15, 162
formule herleiden 114
- G** gemeenschappelijke factor 166
groefactor 18, 23
groefactor en tijdseenheid 40
groefactor per halve tijdseenheid 41
- H** handige percentages 197
hellingsgetal 82
hoogte 47
- I** inhoud balk 121
inhoud cilinder 121
inhoud kegel 129
inhoud piramide 129
inhoud prisma 126
inhoudsmaten 118, 122
- K** kans 199
kans berekenen 203
kwadratische vergelijking 179
- L** lineaire formule 82
- M** macht 211
middellijn 54
- N** negatieve factor 168
- O** omtrek cirkel 55, 119
ongelijkheid 100
ontbinden drieterm 171
ontbinden in factoren 163
ontbinden tweeterm 167
op nul herleiden 178
oppervlakte cirkel 59, 119
oppervlakte driehoek 47, 119
oppervlakte parallellogram 51
oppervlakte trapezium 73
oppervlaktematen 118
- P** pi (π) 55
priemfactor 162
prisma 125
- S** samengestelde ruimtefiguur 136
schets van een grafiek 96
snijpunt 92
standaardvorm 27, 28
startgetal 82
stelling van Pythagoras 45
stijgend 24
straal 54
substitueren 115
- T** takken 206
trapezium 72
trekken zonder terugleggen 224
tweeterm 166
- U** uitdrukken in 114
- V** vergelijkingen oplossen 83, 89
vergroten 133
verhoudingstabel 9, 11, 196
vermenigvuldigpunt 23
vermenigvuldigtabel 160
- W** wetenschappelijke notatie 27, 28

Ontwerp omslag G2K, Groningen/Amsterdam

Fotografie omslag Getty Fotosearch

Ontwerp binnenwerk Paul Kooi, G2K, Groningen/Amsterdam

Illustraties Peter Fitzverploegh, Utrecht

Technisch tekenwerk Integra Software Services, India

Beeldresearch Daliz, Den Haag

Fotoverantwoording

Istockphoto/ Getty Images, Londen: p. 6, 7, 14, 81, 82, 87, 132, 134o, 194, 195, 204, 215

Pim Rusch Fotografie, Delft: p. 8

Shutterstock, New York: p. 10, 13, 15, 16, 17, 31, 36, 37, 38, 39, 42, 43, 82, 85, 88, 96, 105, 111, 116, 117, 134b, 140b, 152, 159, 160, 221

Geertrui Schaberg, Mildam: p. 12, 182b

Corbis Documentary/ Getty Images, Londen: p. 22

ANP Photo, Rijswijk: p. 26

Dave de Bruin/ Daliz, Den Haag: p. 27, 28, 55, 57, 122, 140o, 145, 146, 203, 217, 222, 225

Frank Muller/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 41

Leentje Toering/ Daliz, Den Haag: p. 46

Visual Photo Design, Weurt: p. 54, 69

Rex Shutterstock/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 58

Linsie Spaans/ Shutterstock/ Daliz, Den Haag: p. 74, 75, 128, 152, 153, 220, 226, 227

Melbourne Shopping Center, Melbourne: p. 130

Rock and Roll, Hall of Fame, Cleveland: p. 136

Nationale Beeldbank, Amsterdam: p. 137, 182o

Dreamstime, San Francisco: p. 138

Hero Benelux, Breda: p. 148

Wikimedia/ Nasa: p. 151

M.Minderhoud: p. 213

Yale Babylonian Collection, New Haven: p. 192



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving
met interactieve opdrachten in diverse leerroutes,
overzichtelijke dashboards en een uitgebreide toetsmodule.
Dit maakt gepersonaliseerd leren mogelijk.



Noordhoff Uitgevers



www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-88272-3



9 789001 882723